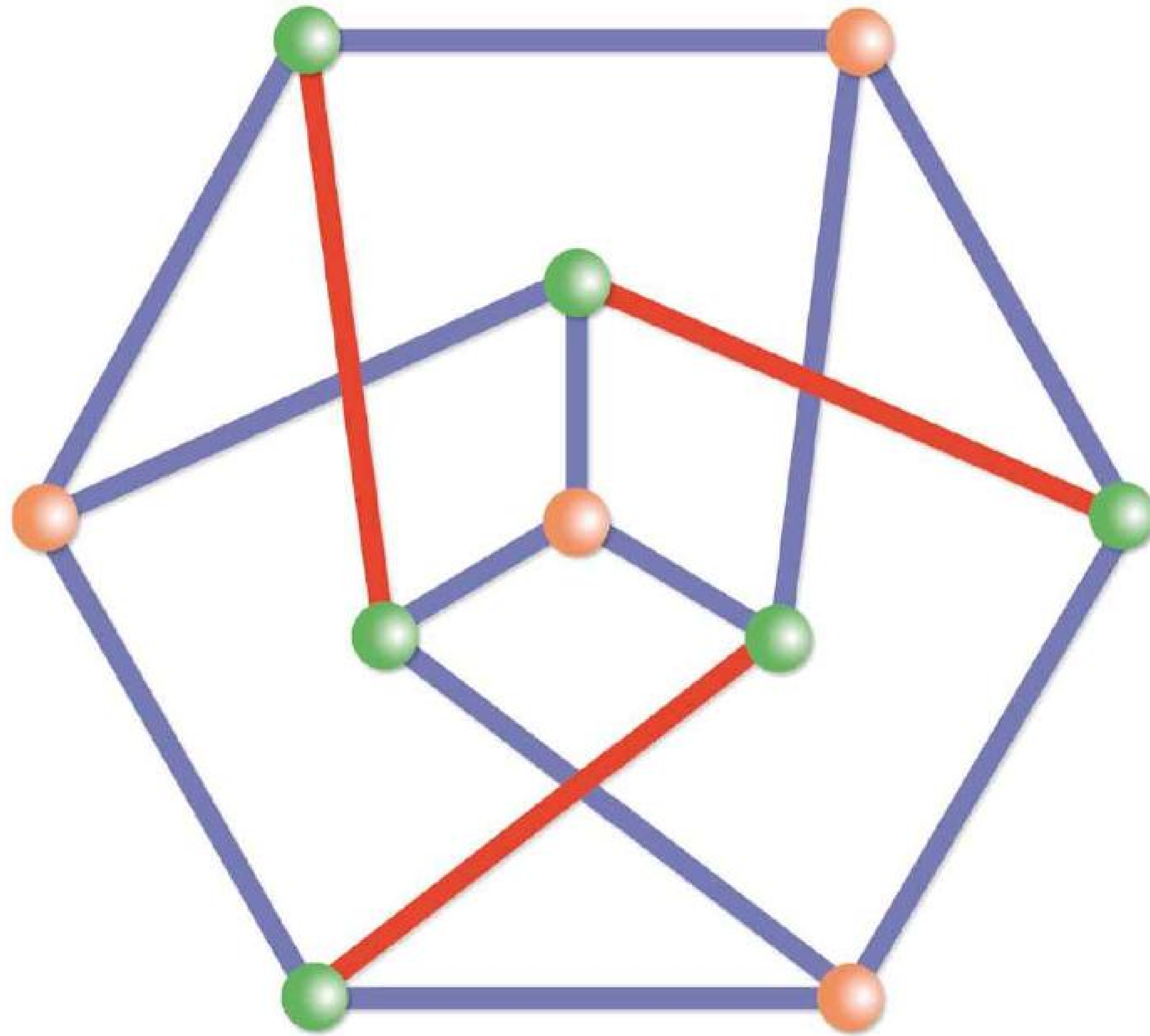
سلسلة الكتب الجامعية المترجمة - العلوم الأساسية

9

دوغلاس ب. ويست

مقدمة في نظرية
الرسم البياني



العبيكان
obekan

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

Glossary of Notation

Non-alphabetic notation

$\leftrightarrow$	adjacency relation
$\to$	successor relation (digraph)
$\cong$	isomorphism relation
$a \equiv b \bmod n$	congruence relation
$\Rightarrow$	implication
$\lfloor x \rfloor$	floor of number
$\lceil x \rceil$	ceiling of number
$[n]$	$\{1, \ldots, n\}$
$\lvert x \rvert$	absolute value of number
$\lvert S \rvert$	size of set
$\{x \colon P(x)\}$	set description
∞	infinity
$\varnothing$	empty set
$\cup$	union
$\cap$	intersection
$A \subseteq B$	subset
$G \subseteq H$	subgraph
$G[S]$	subgraph of G induced by S
$\overline{G}, \overline{X}$	complement of graph or set
G^*	(planar) dual
G^k	kth power of graph
S^k	set of k-tuples from S
$[S, \overline{S}]$	edge cut
$[S, T]$	source-sink cut
$G - v$	deletion of vertex
$G - e$	deletion of edge
$G \cdot e$	contraction of edge
$G + H$	disjoint union of graphs
$G \vee H$	join of graphs
$G \,\square\, H$	cartesian product of graphs
$G \triangle H$, $A \triangle B$	symmetric difference
$G \circ x$	vertex duplication
$G \circ h$	vertex multiplication
$A \times B$	cartesian product of sets
$A - B$	difference of sets
$\binom{n}{k}$	binomial coefficient
$\binom{n}{n_1 \cdots n_k}$	multinomial coefficient
$\mathbf{1}_n$	n-vector with all entries 1
$Y \mid X$	conditional variable or event

Roman alphabet

$A(G)$	adjacency matrix
$\mathrm{Adj}\, A$	adjugate matrix
$B(G)$	bandwidth
$\mathbf{B}_M$	bases of matroid
$\mathbf{C}_M$	circuits of matroid
C_n	cycle with n vertices
C_n^d	power of a cycle
$c(G)$	number of components
$c(G)$	circumference
$C(G)$	(Hamiltonian) closure
$c(e)$	cost or capacity
$\mathrm{cap}(S, T)$	capacity of a cut
$d_1, \ldots, d_n$	degree sequence
$d(v), d_G(v)$	degree of vertex
$d^+(v), d^-(v)$	out-degree, in-degree
D	digraph
$D(G)$	distance sum
$d(u, v)$	distance from u to v
$\mathrm{diam}\, G$	diameter
$\det A$	determinant
$E(G)$	edge set
$E(X)$	expected value
$e(G)$	size (number of edges)
$f^+(v), f^+(S)$	total exiting flow
$f^-(v), f^-(S)$	total entering flow
f	function, flow
f	number of faces
G	graph (or digraph)
G^p	random graph in Model A
$H_{k,n}$	Harary graph
$\mathbf{I}_M$	independent sets of matroid
I	identity matrix
J	matrix of all 1's
K_n	complete graph
$K_{r,s}$	complete bipartite graph
$L(G)$	line graph
$l(e)$	lower bound on flow

continued on inside back cover

مقدمة في
نظرية الرَّسم البياني

دوغلاس ب. ويست

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

العبيكان
Obeikan

Introduction to Graph Theory

2nd Edition

Douglas B. West

ISBN-13: 978-0130144003

ح **مكتبة العبيكان، 1433هـ**

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

ويست، دوغلاس

مقدمة في نظرية الرسم البياني./ دوغلاس ويست.- الرياض 1433هـ

600 ص؛ 20.5× 26 سم

ردمك: 3 - 222 - 503 - 603 - 978

1 - الرسوم البيانية   أ. العنوان

ديوي: 511,5   رقم الإيداع: 513 / 1433

الطبعة العربية الأولى 1435هـ - 2014م

تمت الترجمة والمراجعة بإشراف وزارة التعليم العالي

اللجنة الإشرافية

د. محمد بن عبدالعزيز العوهلي

د. عبدالله بن إبراهيم المهيدب

وبمشاركة منسقي التخصصات (د. محمود بن أحمد منشي، د. ناصر بن صالح المنصور، د. سعيد بن محمد العمودي، د. خالد بن منصور الشعيبي)

الترجمة

أ. د. أحمد عبدالله الرحيل   أ. د. عدنان أحمد البصول

المراجعة العلمية

د. ماهر حمدي الصاحب

التنسيق الإداري والمتابعة

معهد الأمير نايف للبحوث والخدمات الاستشارية، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية

المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية - طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول هاتف: 4808654 فاكس: 4808095 ص.ب: 67622 الرياض 11517

www.obeikanpublishing.com   http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

العبيكان Obeikan

المحتـويات

المقــدمة (Preface)

تعدّ نظريةُ البيان الأفضلَ في استكشاف طرق البرهان في الرّياضيّات المتقطّعة، فضلاً عن أنّ كثيرًا من التّطبيقات في العديد من النواحي الحسابية، والاجتماعية، والعلوم الطبيعية يستند إلى نتائجها. وهذا الكتاب يصلح مقدمّة لفصل واحد لطلبة البكالوريوس، أو في بداية مرحلة الدراسات العليا، أو بوصفه مقدمة في فصلين دراسيين، إضافة إلى أنّ هذا الكتاب لا يفترض معرفة معلومات مسبقة في نظريّة البيان، بالإضافة إلى اشتماله على العديد من الخوارزميّات والتّطبيقات، إلا أنّ التركيز سوف يكون على فهم بنية البيانات والأساليب التي استعملت لتحليل المسائل في نظرية البيان.

لقد أُلِّفَ العديد من الكتب الجامعيّة حول نظرية البيان، وبسبب التّأكيد على كلّ من البراهين والتّطبيقات معًا، فإنّ النّموذج الأوليّ لهذا الكتاب كان الكتاب الرّائع لـ J.A. Bondy و U.S.R.Murty، وهو نظريّة البيان وتطبيقاتها (Graph theory with applications) ([1976] Macmillan/ North Holland). ما زالت نظريّة البيان في بدايتها، ولا يوجد إجماع على كيفية تقديم المادة الاستهلالية. وتعدُّ كيفية اختيار الموضوعات وترتيبها، واختيار البراهين والأهداف والأفكار المتضمنة، موضعَ نقاش في هذا الكتاب، وقد تعلمت صعوبة اتخاذ القرار بعد العديد من مراجعاتي له.

الطّبعة الثّانية

لقد أسهمت مراجعة الطّبعة الثّانية من هذا الكتاب في تيسير تعلّمه وتعليمه بالنّسبة إلى الطّلبة والمحاضر على حدّ سواء، من خلال التّعديلات على تقديم المادة وعرضها، إضافة إلى عدم وجود تغييرات جذريّة في المحتوى، وخصوصًا في الأجزاء الأولى منه، وقد نُوقشت بعض التغييرات بتفصيل أكثر في نهاية هذه المقدمة. وفيما يأتي تلخيص مختصر لهذا.

- يشار إلى المادة الاختياريّة ضمن البنود غير الاختياريّة بـ(×)؛ حيث إنّ مثل هذه المواضيع لم تُناقش لاحقًا، ويمكن تجاوزها؛ ففي حال إعطاء المادة في فصل دراسيّ واحد، فمن المفترض تجاوز هذه المواضيع. ولكن عندما يُشار إلى البند الجزئيّ بـ"اختياري" فإنّ هذا البند برمّته اختياريٌّ، وعليه لم يُشر إليه بـ (×) على مفرداته.
- للطّلبة ذوي الخبرة المتواضعة؛ أُضيف الملحق A ليكون مرجعًا ملخصًا لمساعدتهم: المجموعات والعبارات المنطقيّة، والاستقراء، والعدّ، والمعاملات ذات الحدّين، والعلاقات، ومبدأ أعشاش (طِواقي) الحمام.
- إعادة صياغة العديد من البراهين بصورة أكثر سهولة مع إضافة بعض التفاصيل، وأُضيفت كذلك أمثلة أكثر.
- أضيف أكثر من 350 تمرينًا؛ حيث تضّمنت الفصول 1-7 التّمارين السهلة، ويوجد الآن أكثر من 1200 تمرين.
- أضيف أكثر من 400 توضيح، تُعرضُ فيها أنواع مختلفة من الأضلاع الغامقة وغير الغامقة، والمتصلة والمتقطّعة لعرض أكثر وضوحًا.
- وُضعتْ مجموعةُ المسائل الأسهل في بداية تمارين كلّ بند (درس)، لتكون استهلالًا للتمارين الأصعب، إضافة إلى توضيح عبارات بعض هذه التّمارين.
- هناك ملحق للمساعدات المكملة، بالإضافة إلى المساعدات المرافقة لعبارات التّمارين.

- لسهولة الدخول؛ عُرِّفتِ المصطلحات بخطٍّ غامق؛ حيث إنّ الغالبية العظمى منها وردت في تعريف المفردات.
- لسهولة الوصول؛ وُضِعَ معجمٌ بالرموز المستخدمة داخل غلاف الكتاب.
- اعادة المادة التي تتضّمن كلًّا من الحلقات الأويلريّة، والبيانات الموجّهة، ومبرهنة توران ليكون التّعليم أكثر فاعليّة.
- بُدِّل الفصلان 6 و7 لتقديم فكرة السّويّة مبكّرًا، وأصبح بند التّعقيد لاحقًا.
- صُوِّب معجم المصطلحات من خلال حذف الأخطاء الموجودة فيه، وتمّ التركيز على ارتباط المفردات بالنصّ مباشرة.

الملامح

تساعد الملامحُ المتنوّعة في هذا الكتاب الطّلبةَ على فهم المادة؛ حيث توجد مناقشة لأساليب البرهان، وأكثر من 1200 تمرين متباينة الصّعوبة، وأكثر من 400 توضيح، وكثير من الأمثلة، إضافة إلى أن البراهين عُرضت بصورة كاملة في النّصّ.

يبدأ كثير من طلبة البكالوريوس في دراسة مادة نظرية البيان قبل دراسة أساليب البرهان بصورة وافية. لذا، فإنّ ملحق A يزوّد الطّلبة بالخلفيّة الرياضيّة التي تساعدهم على البدء بالدراسة. أما الطّلبة الذين لديهم صعوبة في الفهم أو في كتابة البراهين في بداية المادة، فيجب تشجيعهم على قراءة هذا الملحق بالتّزامن مع الفصل الأوّل. إنّ بعض المناقشات لأساليب البرهان ما زالت تظهر في البنود الأولى من هذا الكتاب (وخصوصًا فيما يتعلّق بالاستقراء)، ولكنّ المعالجات الموسّعة للخلفيّة الأساسيّة (وخصوصًا فيما يتعلق بالمجموعات، والدّوالّ، والعلاقات، والعدّ الأوليّ) فتظهر في الملحق A.

تتطلّب معظم التّمارين براهين. فضلاً عن أنّ الكثير من طلبة البكالوريوس ذوو خبرة متواضعة في تقديم الشروح، وهذا يعيق تحسّنهم في نظريّة البيان والرّياضيّات الأخرى. ويعدّ النظام العقليّ المنطقي لتعليل الحجة ذا قيمة عالية دون اعتماده على الرّياضيّات؛ لذا، فعلى الطلبة مراعاة ذلك، وعند كتابة حلول التّمارين عليهم تعلّم كيفية استخدام اللغة (يقولون ما يعنون)، وأنّ يكونوا صريحين في تفكيرهم (يعنون ما يريدون قوله).

وعلى الرّغم من أنّ الكثير من المفردات في نظريّة البيان تقترح تعريفات خاصة، إلاّ أنّ عدد المصطلحات يبقى عائقًا. لذا، يرغب الرّياضيون في جمع تعريفاتهم في البداية، إلاّ أنّ نجاح معظم الطّلبة يعزى إلى استخدامهم المفهوم قبل الشّروع في الموضوع التالي. لهذا السبب، وإضافة إلى الخبرة، وبناءً على طلبات المحكّمين، فقد أخّرت كثيرًا من التعريفات حتى تستدعي الحاجة إليها. فعلى سبيل المثال، تناولت تعريف الضّرب (الجداء) الدّيكارتيّ في بند 1.5 مع مسائل التّلوين. أمّا البيانات الخطّيّة فمعرّفة في الدرس 2.4 مع مبرهنة منجر، وفي الدرس 1.7 مع تلوين الأضلاع. وتناولت أيضًا تعريفات البيان الجزئيّ المُحدّث (المستحدث) والرّبط في البندين 2.1 و 1.3 على التّرتيب. أمّا المعالجة الضّروريّة للبيانات الموجّهة فقد عُرِضَتْ في البند 4.1؛ لأنّ تقديم البيانات الموجّهة بالتزامن مع البيانات يؤدي إلى إرباك الطّلبة؛ لذا رأينا عرضها في نهاية الفصل 1 لكي نسمح للطلبة بأنّ يكونوا أكثر تناغمًا مع المفاهيم الأساسيّة في سياق النموذج نفسه، وخصوصًا أنّ مناقشة البيانات الموجّهة تعزّز بعض هذه المفاهيم من خلال وضوح الاختلافات بينها. وما زال النموذجان يُناقشان معاً في مادة التّرابط.

يحتوي هذا الكتاب على مادة أكثر مقارنة بمعظم الكتب التي أُلِّفَتْ حول التّقديم لنظريّة البيان؛ حيث يسمح جمعُ المادة المتقدمة بوصفه فصلًا اختياريًّا نهائيًّا "موضوعات إضافية" باستخدام الكتاب بمستويات متنوعة؛ فمادة البكالوريوس مثلًا تتكوّن من الفصول السّبعة الأولى (مع حذف معظم المادة الاختياريّة)، أمّا

الفصل 8 فهو مناسب للطّلبة المهتمين. في حين يستطيع طلبة الدراسات العليا قراءة الفصلين 1و2 ذاتيًّا، ومن ثَمّ الانتقال مباشرة إلى الفصل 3 في قاعة الدرس، والوصول إلى بعض المواضيع في الفصل 8 التي تعَدُّ أساسًا لفصلٍ ثانٍ في نظرية البيان، بالموازاة مع المادة التي كانت اختياريّة في الفصول السّابقة.

يوجد العديدُ من البراهين لكثير من النتائج في نظرية البيان، فهذا يجعل الطّلبة أكثر مرونة في الاقتراب من حلِّ المسألة باستخدام طرق عدة. وقد ضُمِّنت بعض البراهين البديلة بوصفها ملحوظات وبعضها الآخر بوصفها تمارين.

وهناك مساعدات لكثير من التّمارين؛ بعضها معطى في نصّ التّمرين، في حين ورد بعضها الآخر في الملحق C. إنّ التّمارين المعلّمة بـ "(-)" أو "(+)" هي الأسهل والأكثر صعوبة على الترتيب من التّمارين التي لم تُعَلّم، فالتّمارين التي عُلِّمت بـ "(+)"، يجب ألاّ تعطى واجبًا بيتيًّا في مادة البكالوريوس النموذجية. أمّا التّمارين التي عُلِمت بـ"(!)" فهي ذات قيمة خاصة، أو مثقفة، أو إنّها مسلّية. في حين أنّ التّمارين التي عُلِّمَتْ بـ"(×)" فتستخدم مادة معنونة بصورة اختيارية في النّصّ.

تبدأ تمارين كلّ بند بمجموعة من التّمارين المعلّمة بـ "(-)"، مرتّبة بحسب مادة البند، وتنتهي بخطٍّ من النّقاط الكثيفة. و تقوم هذه التّمارين بقياس مدى استيعاب فهم المفردات، أو أنّها تطبيقات مباشرة لنتائج هذا الدّرس. لذا، أنصح الطّلبة بحلّ بعض هذه التّمارين بوصفها محفّزًا لهم في فحص فهمهم قبل حلِّ الواجبات البيتيّة الرّئيسة التي عُلّمَ معظمها بـ"(!)". أمّا معظم التّمارين التي عُلِّمت بـ"(-)" فهي مناسبة جدًّا للاختبارات، ولكن يجدر تزويد الطّلبة بمساعدات من الملحق C عند استخدام تمارين أخرى في الاختبارات.

إنّ التّمارين التي تتعلّق بعدة مفاهيم تظهر بعد تقديم آخر مفهوم، إضافة إلى الكثير من مؤشّرات التّمارين تظهر في النّصّ عند مناقشة المفاهيم المناسبة لها، ويُقتبس تمرين في البند الحاليّ من خلال ذكر رقمه من بين التّمارين في هذا البند. أمّا الإسنادات الترافقية الأخرى، فتُعرف من خلال الترتيب: فصل، بند، مفردة.

التّنظيم والتّعديلات

في الطّبعة الأولى، بحثنا عن تطوير متماسك ذهنيًّا يراعي التّدرّج في صعوبة البراهين وتعقيد الخوارزميّات، ولتطبيق هذا النهج في الطّبعة الثّانية، فإنّ الدّوائر (الدّارات) الأويلريّة والحلقات الهاملتونية أصبحت متباعدة وغير متتابعة في الترتيب داخل الكتاب، وأصبح التّمييز البسيط للدّوائر الأويلرية في البند 2.1 مع مادة ذات علاقة وثيقة بها.

أما ما بقي من البند 4.2 فقد نُقِلَ ووُزِّعَ إلى مواقع مناسبة في بنود أخرى مع إسقاط خوارزميّة فليوري.

أُعـيـدت كـتـابـة الـفـصـل 1 بـصـورة أسـاسـيـة، وتجـنّـبـت اسـتـخـدام المـفـردة "بيان متعدد (multigraph)"؛ لأنّها تسبب مشكلات أكثر من إعادة حلّها؛ بسبب افتراض كثير من الطّلبة أنّ البيان المتعدد يجب أنّ يملك أضلاعًا مكرّرة. إنّ إلحاق كلمة "بسيط" حيث نحتاج، وإبقاء كلمة بيان بوصفها شيئًا عامًّا يكون أقل تضليلاً. وفي العبارات العرضيّة التي تكون في سياقات خاصّة، فمن المنطق أنْ نأخذ في الحسبان بيانات بسيطة فقط.

عولجت تعريفات الفصل 1 بصورة دقيقة، وخصوصًا تلك التي تتضمّن مسارات، ومسارب، وممرات. وقد حل كل التجمعات غير الرّسمية للتّعريفات الأساسيّة في البند 1.1 مفرداتُ تعريفات أخرى تساعد الطّلبة على إيجادها بسهولة أكثر.

وإضافة إلى موضوع التّشاكل، فإنّ البند 1.1 يعالج بصورة دقيقة بيان بيترسون، ويعرض مقدّمة واضحة لأفكار التّفكيك والخصر، وهذا يساعدنا على مناقشات لاحقة في أماكن عدّة، ويسمح بطرح أسئلة مهمة خارج موضوع التّشاكل.

أصبحت البنود 2.1–4.1 أكثر ترابطًا. فضلاً عن أنّ معالجة الحلقات الأويلرية تكمل البند 2.1. وقد حُذِفَ بعض المواضيع من البند 3.1 للتّركيز على موضوعي الدّرجات والعدّ، فقد ورد موضوع درجات الرّؤوس في البند 4.1 من

قبل، وقد زوّدنا الدّرس 4.1 بمقدّمة للبيانات الموجّهة التي يمكن معالجتها بسهولة.

أمّا موضوعا الأشجار والمسافات فقد وردا في الفصل 2؛ بسبب العلاقات العديدة بينهما والمتضمّنة في عدّة تمارين، بالإضافة إلى أنّ كثيرًا من الخوارزميّات التي تحسب المسافات تستخدم الأشجار.

يتّفق معظم المشتغلين في نظريّة البيان على أنّ مبرهنة كونق وايقرفاري تستحق برهانًا مستقلًّا دون استخدام تدفّق شبكيّ، ويجد الطلبة أيضًا صعوبة في التّمييز بين "مترابط من الدّرجة k" و"التّرابط k" الذي له العلاقة نفسها، مثل "قابل للتّلوين من الدّرجة k" و "العدد اللّونيّ k" . وبناءً على هذا عولجت أولاً المواءمة، ومن ثَمّ استخدامها لبرهان مبرهنة منجر. وقد وظّفت كلًّا من المواءمة والتّرابط في موضوع التّلوين.

وبناءً على طلب عدد من المستخدمين، فقد أضيف بند جزئيّ اختياريّ صغير يتناول المجموعات المسيطرة في نهاية البند 1.3. ووضّحت كذلك مادة مواءمة ثنائيّات الفرع الموزونة من خلال التّركيز على غطاء الرّؤوس بدلاً من المسارات الموسّعة، وباستخدام أفضل للأمثلة.

تستخدم مبرهنة توران أفكارًا أوليّة فقط حول درجات الرّؤوس والاستقراء. ونتيجة لهذا، تناولناها في الفصل 1 من الطّبعة الأولى. وقد كان هذا سببًا في بعض الصّعوبات التي واجهها الطّلبة، مسببة لهم بعض التّعثر؛ لأنّ مفرداتها مجرّدة. لذا، أبقيتُ على حالة البيانات البسيطة التي تخلو من المثلّثات (مبرهنة مانتل) في البند 3.1، ونقلت المبرهنة كاملة إلى البند 2.5 تحت وجهة النّظر لمسائل تطرفيّة لها علاقة بالتّلوين.

يأتي موضوع السّويّة قبل موضوع "الأضلاع والحلقات"، وعندما يكون الوقت ضيّقًا، فعلى المدّرس عرض موضوع السّويّة أولًا؛ لأنّه أكثر أهميّة من موضوعَي التّلوين الضّلعيّ والحلقات الهاملتونيّة، إضافة إلى أن الأسئلة المتضمّنة في السّويّة تجذب الطّلبة بصورة بديهية تبعًا لتصوّراتهم التّخيليّة. وهناك العديد من الطّلبة الذين واجهوا مثل هذه الأسئلة سابقًا. بالإضافة إلى أنّ الأفكار المتضمّنة في مناقشة البيانات السّويّة تبدو أكثر اتّساعًا ذهنيًّا مقارنة بأفكار المادة السّابقة للمقرّر التي استخدمت لإثبات النتائج الأساسيّة على التّلوين الضّلعيّ والحلقات الهاملتونيّة.

خلاصة القول، فإنّ مناقشة السّويّة أولاً يجعل المادة في الفصل 7 أكثر ترابطًا، فضلاً عن أنّ التّرتيب الجديد يسمح بمناقشة أكثر شمولاً للعلاقات بين السّويّة من جهة والتّلوين الضّلعيّ والحلقات الهاملتونيّة من جهة أخرى، وتقود بصورة طبيعية إلى ما هو أبعد من مبرهنة الألوان الأربعة، حيث توصّلنا إلى المادة الاختياريّة الجديدة في موضوع التّدفقات التي لا تساوي صفرًا في أيّ مكان بوصفها مفهومًا ثنويًّا للتلوين.

عندما يكتشف الطّلبة أنّ مسائل التّلوين والحلقات الهاملتونيّة تنقصها خوارزميّات جيّدة، فإنّ العديد منهم يصبح لديه فضول حول التتام -NP. (من نوع NP) حيث يلبّي الملحق B هذا الفضول والتقديم لتام -NP من خلال لغات رسمية من الممكن أن يكون مجردًا بصورة تقنية. لذا يرغب بعض الطّلبة في وجود مسائل البيان في السّياق، إضافة إلى أنّ براهين تام -NP توضّح التنوع والفائدة لمناقشات "تحويل البيان".

يستكشف الكتاب العلاقات بين النّتائج الأساسية؛ فمبرهنة بيترسون حول المعاملات من الدّرجة 2 (الفصل 3) تستخدم الحلقات الأويلريّة ومواءمة ثنائية الفرع، بالإضافة إلى أنّ التّكافؤ بين مبرهنة منجر ومبرهنة القطع لتكبير التّدفق الأصغر يستكشف بصورة أكثر شمولاً في الطّبعة الأولى، أمّا تطبيق "حذف كرة القاعدة" فيُعالج الآن بعمق أكبر. يضاف إلى ذلك أنّ خاصّيّة التّرابط من الدرجة $k-1$ لبيانات حرجة اللّون من الدّرجة k (الفصل 5) تستخدم مواءمة ثنائية الفرع، في حين يعرض البند 3.5 مقدمة مختصرة للبيانات الكاملة، ويدعم البيانات الوتريّة. ومن الميزات الإضافية لهذا النّصّ مقارنة ببعض النّصوص الأخرى، احتواؤه على برهان خوارزميّ لمبرهنة فايزنق، وبرهان مبرهنة كوراتووسكي بواسطة طرق ثوماسن.

توجد إضافات وتحسينات أخرى متنوّعة في الفصول السبعة الأولى؛ فهناك مناقشة وجيزة لصيغة هيوود، ومبرهنة روبرتسون وسيمور في نهاية الفصل 6.

وفي البند 1.7 أضيف برهان إلى حدّ شانون على عدد التّلوين الضّلعيّ، وفي البند 3.5، أصبح تمييز البيانات الوتريّة أبسط بصورة ما عمّا كان عليه سابقًا، وذلك ببرهان نتيجة أقوى حول رؤوس مبسطيّة. وفي البند 3.6، حُذِفَ برهان الاختزال لماسة بيركوف، وأضيفت مناقشة مختصرة غير موجودة سابقًا. تكون المادةُ التي تناقش قضايا في برهان النّظرية اختياريةً، والهدف إعطاء طعم للتقارب دون الخوض في مناقشات مفصلة. واستنادًا إلى وجهة النّظر هذه، فلن نركّز على برهان الاختزال.

يحتوي الفصل 8 على أهمّ المواضيع المتقدّمة. لذا فهي غير موجّهة إلى طلبة البكالوريس. إنّها تفترض دقّة أكثر ممّا هي عليه الفصول السابقة، بالإضافة إلى أنّها صيغت بصورة أكثر إحكامًا، وبنودها مستقلة؛ كلّ منها يختار نتائج شائقة من موضوع كبير يستحق وحده فصلًا كاملًا، فضلاً عن أنّ بعض هذه البنود تصبح أكثر صعوبة عند النهاية؛ وقد يفضّل المدرس إعطاء مقتضبات عن المادة من عدّة بنود أوّلاً بدلاً من تقديمها دفعة واحدة.

ومن حين إلى آخر، هناك علاقات بين مفردات الفصل 8. وهناك أيضًا مفردات عُلِّمَت بـ(اختياريّ) في الفصول السبعة الأولى. ولكن عمومًا، فإنّ المراجع المُعَلّمَة بالمصلّب، تشير إلى الرّوابط. أمّا محتوى المادة في الفصل 8 فلم يطرأ عليه أيّ تغيير جوهري منذ الطّبعة الأولى، على الرّغم من إدخال العديد من التّصحيحات وتوضيح التّقديم في أماكن عدّة.

سوف أعالج نظريّة البيان المتقدّمة بشموليّة أكثر في التّركيبات التّوافقيّة، وقد خُصِّصَ المجلّد I لنظريّة البيان التّطرّفيّة، أمّا المجلّد II فقد خُصِّصَ لتراكيب البيانات، في حين تضمّن المجلّد III فصول الماترويدات والبرمجة الصّحيحة (يشمل التّدفق الشّبكي كذلك)، ويركّز المجلّد IV على طرق الرّياضيّات التّركيبيّة (التّوافقيّة)، ويناقش أيضًا مظاهر متنوّعة للبيانات، خصوصًا العشوائيّة منها.

تصميم الفصول الدّراسية

لقد خُصِّصَتْ محاضرتان فقط لكلّ درس من 22 درسًا في الفصول 1–7؛ بسبب عدم عرض معظم المادة الاختياريّة (مفردات معلّمة بنجمة، أو بنود جزئيّة اختياريّة). لقد استغرق تدريسي للفصل 1 ثماني محاضرات، أمّا الفصلان 4 و5 فاستغرقا ستّ محاضرات، في حين استغرق تدريس الفصول 2، 3، 6، 7 خمس محاضرات لكل فصل. ويحتاج عرض المادة الأساسيّة إلى قرابة 40 محاضرة. وربما يقضي بعض المدرسين وقتًا أطول لتدريس الفصل 1. لذا فإنّهم يتجاوزون عن مواضيع معيّنة في الفصول اللاحقة.

وفي الفصول التي تلي الفصل الأول، نجد أنّ معظم المادة الأساسيّة تكون في الدّرس الأوّل، حيث إنّ توكيد هذه الدروس وتركيزها (عند تخطي المفردات الاختيارية) ما زال يوضح المدى لنظرية البيان في المقرر لفصل واحد بوتيرة أبطأ من الدرس الثاني لكل من الفصول 2، 4، 5، 6، 7، فإنّ تضمين كلّ من صيغة كيلي، ومبرهنة منجر، وتركيب مسيلسكي، ومبرهنة كوراتووسكي، ومبرهنة ديراك (حلقات مولّدة)، على الترتيب يُعدُّ مفيدًا.

يفضّل تقديم بعض المادة الاختياريّة في قاعة الدرس بسبب جاذبيّتها، فعلى سبيل المثال، أقدّم الدّروس الجزئيّة الاختياريّة على الأشجار المولّدة المنفصلة (في البند 1.2)، والمواءمات المستقرّة (في البند 2.3)، وأقدّم عادة الدّرس الجزئيّ الاختياريّ على المعاملات بدلالة f (في البند 3.3). وتُعلّم البنود الجزئيّة بـ(اختياريّ)، عندما لا تكون هناك مادة لاحقة في الفصول السبع الأولى تتطلّب هذه البنود، وعندما لا تكون جزءًا من التّطوير المركزيّ لنظريّة البيان الأساسيّة أيضًا. ولكنها تعدّ تطبيقات مناسبة تحفّز اهتمامات الطّلبة. وبدلالة غير مباشرة، فإنّ علامة "اختياري" تشير للطّلبة إلى أنّ الامتحان النهائي قد لا يحتوي على أسئلة من هذه المواضيع.

وأمّا بالنسبة إلى الدّراسات العليا، فمن الممكن تدريس الفصلين الأول والثاني بصورة سريعة، لأنهما تتضمنان مواضيع متشابهة، مثل: المتتاليات البيانيّة، والنّواة، والبيانات الموجّهة، وصيغة كيلي ومبرهنة مصفوفة الشّجرة،

وخوارزميّة كروسكال.

يجب أن تهدف الفصول الدّراسية التي تقدّم نظريّة البيان في فصل دراسي واحد تحت نظام الأرباع إلى المواضيع الرّئيسة. لذا، اقترح التّوزيع الآتي: 1.1: مصفوفة التّقارب، التّشاكل، بيان بيترسون. 2.1: الدّرس كلّه. 3.1: صيغة مجموع الدرجات، بيانات جزئيّة ثنائيّة الفرع كبيرة. 4.1: حتى المركّبات القويّة. إضافة إلى دوريّات الألعاب. 1.2: حتى مراكز الأشجار. 2.2: حتى نصّ مبرهنة مصفوفة الشجرة. 3.2: خوارزميّة كروسكال. 1.3: كلّه تقريبًا. 2.3: لا شيء. 3.3: نصّ مبرهنة توت، برهان نتائج بيترسون. 1.4: حتى تعريف القوالب، حذف بيانات هراري. 2.4: حتى تفكيك الأذن المفتوح، إضافة إلى نصّ مبرهنة منجر. 3.4: الثّنويّة بين التّدفّقات والقطع، نصّ لأكبر- التدفق = أصغر – القطع. 1.5: حتى مبرهنة سزكرز وويلف. 2.5: بناء ميسيلسكي، وربّما مبرهنة توران. 3.5: حتى التّكرار اللّونيّ، والكمال للبيانات الوتريّة. 1.6: اللاسويّة لـ K5 وK3،3 ، وأمثلة لبيانات ثنويّة، وصيغة أويلر مع تطبيقاتها. 2.6: نصّ مبرهنتي كواراتوسكي وتوت وأمثلة عليهما. 3.6: مبرهنة التّلوين من الدرجة 5، و فكرة عدد التقاطع. 1.7: حتى مبرهنة فايزنق. 2.7: حتى شرط أور، وكذلك شرط كفتال وإيروز. 3.7: مبرهنتا تايت وقرينبرغ.

مظاهر أكثر بعدًا لفنّ التّعلّم

ركّزت في المراجعة، على بعض المواضيع التي تظهر بصورة طبيعية في المادّة؛ لأنّ التّأكيد على هذه المواضيع في المحاضرة يساعد على استمراريّتها.

إنّ التّركيز الأكبر كان لموضوع – TONCAS "الشّرط الضّروريّ الواضح يكون كافيًا أيضًا". وأُضيف تنويهًا صريحًا إلى أنّ العديد من النّتائج الأساسيّة يمكن عرضها بهذه الطّريقة. وهذا يوفر موضوعًا للمادة، ويوضّح الاختلاف بين الاتجاهين السهل والصّعب في تكافؤ ما.

تشكّل مسائل التّصغير والتّكبير الثّنويّة موضوعًا أساسيًّا آخر للفصول 3 – 5 والدرس 1.7. وفي موضوع نظريّة البيان، لا نرغب في التّعمق في الطّبيعة الثّنويّة للأمثليّة الخطّيّة. لذا، يكفي القول بأنّ مسألتي أمثليّة تشكّلان زوجًا ثنويًّا عندما يملك كلُّ حلّ قابل للتحقيق لمسألة التكبير قيمةً على الأكثر مثل القيمة التي يملكها كلّ حلّ قابل للتحقيق لمسألة التصغير، وعند إعطاء حلول قابلة للتّحقيق مع قيم متساوية للمسألتين فإنّ هذه الثّنويّة تعطي أنّ كلا الحلّين أمثليّان ويظهر في الدرس 1.8 مناقشة لموضوع البرمجة الخطّيّة.

يمكن تحقيق مواضيع أخرى من خلال أساليب البرهان؛ مثل استخدام التّطرفية لإعطاء براهين قصيرة وتجنّب استخدام الاستقراء، وكذلك نمط لإثبات عبارات شرطيّة باستخدام الاستقراء، وقد وصفت بصورة صريحة في الملاحظة 25.3.1.

إنّ التّطويرَ الذي يقود إلى مبرهنة كواراتوسكي طويلٌ بعض الشّيء، وعلى الرّغم من ذلك، يُفضّلُ تقديم هذا البرهان في محاضرة واحدة، أمّا التمهيديّات الابتدائيّة التي تختزل المسألة إلى حالة مترابط من الدرجة 3، فمن الممكن معالجتها بسرعة لتوفير الوقت، لاحظ أنّ نمط الاستقراء يقود بصورة طبيعية إلى التمهيديّتين اللتين بُرهنتا لحالة مترابط من الدرجة 3، ولاحظ أيضًا أنّ البرهان يستخدم فكرة الفلقة -S المُعرّفة في البند 2.5.

يجب عدم التّعرّض إلى التّعريفات التّقنية للرّسوم والمناطق في المحاضرة الأولى من الفصل 6. ومن الأفضل تجاوزها، إلاّ إذا رغب الطّلبة في معرفة التّفاصيل، فضلًا عن أنّ العبارات الدقيقة موجودة في السياق.

عُلِّمت التّطبيقات المحفّزة للبيانات الموجّهة في البند 4.1 بـ(اختياري)؛ بسبب عدم حاجتنا إليها في بقية السّياق، ولكنّها تساعد على توضيح أنّ النموذج المناسب (بيان أو بيان موجّه) يعتمد على التّطبيق.

وبسبب عدم التّركيز على الحساب العدديّ، والاهتمام المتزايد بطرق البرهان وتوضيح التفسيرات، فإنّ نظريّة البيان موضوع مناسب جدًّا لتشجيع الطّلبة على تحسين أساليبهم البلاغية، الكتابية والشفوية. وبالإضافة إلى تعيين

واجبات بيتية مكتوبة تتطلب نقاشات مقدّمة بعناية، فقد وجدت من المناسب تنظيم جلسات تعلّم تعاونية اختيارية، يستطيع فيها الطّلبة العمل معًا على مسائل في حين أقوم بالتجوال بينهم، مستمعًا، ومجيبًا عن الأسئلة التي يطرحونها، ويجب ألاّ يُنسى أنّ أحد أفضل الطّرق لاكتشاف فهم فردٍ ما لبرهان محدّد، هو محاولة شرحهم من فرد آخر، ومن الملاحظ أنّ الطّلبة يجدون في هذه الجلسات فوائد جمّة.

شكر وتقدير

استفاد هذا الكتاب من الاختبارات الصّفيّة في نُسخ ما قبل النشر المحسنة تدريجيًّا في العديد من الجامعات، أما المدرّسون الذين استخدموا الكتاب على هذه القاعدة التّجريبيّة فهم:

Ed Scheinerman (Johns Hopkins)، Katyryn Fraughnaugh (Colorado- Denver)، Paul Weichsel/ Paul Schupp/ Xiaoyun Lu (Illinois)، Dean Hoffman/ Pete Johnson/ Chris Rodger (Auburn)، Dan UIlman (George Washington)، Zevi Miller/ Dan Pritikin (Misni- Ohio)، David Matula (Southern Methodist)، Pavol HeIl (Simon Fraser)، Grzegorz Kuvicki (Louisvlle)، Jeff Smith (Purdue)،Ann Trenk (Wellesley)، Ken Bogart (Dartmouth)، Kirk Tolman (Brigham Young)، Roger Eggleton (Illinios State)، Herb Kasube (Bradley)، and Jeff Dinitz (Vermont).

مع الأخذ في الحسبان عدم مراعاة التّرتيب الزّمنيّ.

وقد أبدى العديد من هؤلاء المدرسين أو طلبتهم مقترحاتٍ أو نقدٍ أسهم في إدخال تحسينات عدّة.

وأتقدم بالشّكر الجزيل إلى جورج لوبيل (George Lobell) من برنتس هول (Prentice Hall) لالتزامه المتواصل مع هذا المشروع، واستعانته بمراجعين أكفاء، مثل:

Paul Edelman، Renu Laskar، Gary Macgillilrry، Joseph Negger، Josehp Malkevitch، James Oxley، Sam Stueckle، and Barry Tesman.

حيث قدموا تعليقات مساعدة، أمّا المراجعون للطّبعات السابقة للدروس من الفصل 8 فهم:

Mike Albertson، Sanjoy Barvah، Dan Kleitman، James Oxley، Chris Rodger، and Alan Tucker.

في حين تضمّنت قائمة مراجعي الطّبعة الثّانية كلًّا من:

Nate Dean، Dalibor Froncek، Renu Laskar، Michael Molloy، David Sumner، and Daniel Ullman.

لقد حصلت على تعليقات وتصحيحات إضافية بين الطّبعتين الأولى والثّانية من قِبَلِ العديد من القرّاء، اشتملت على وجود أخطاء مطبعية، وتمارين إضافيّة، وتبسيطات في البراهين، ممّا يُعدُّ قيمة جوهرية للتّطوير والتّحسين. لذا فإنني أعبّر عن امتناني لجهودهم من خلال إبداء ملاحظاتهم وآرائهم وخبرتهم. وهؤلاء هم:

Troy Barcume، Stephan Brandt، Gerard Chang، Scott Clark، Gunderson، Dean Hoffman، John D'Angelo، Sharles Delzell، Thomas Emden- Weinert، Shimon Even، Fred Galvin، Alfio Giarlotta، Don Greenwell، Jeng Huang، Garth Isask، Steve KIilner، Alexandr Kostochka، Andre Kundgen، Peter Kwok، Jean Marc Lanlignel، Francois Margot، Alan Mehlenbacher، Joel Miller، Zevi Miller، Wendy Myrvold، Charles Parry، Rovert Oaratt، Dan Pritikin، Radhika Ramamurthi، Craig Rasmussen، Bruxe Reznick، Jian Shen، Tom Shermer، Warren Shreve، Alexander Strehl، Tibor Szabo، Vitaly Voloshin، and C.Q. Zhang.

وَ أقدّم أيضًا شكرًا خاصًّا إلى John Ganci لقراءته المتأنّية اللافتة للانتباه.

أما الطّلبة الذين وجدوا العديد من الأخطاء المطبعية في نسخة ما قبل الطّبع للطّبعة الثّانية فهم:

Jaspreet Bagga، Brandon Bowersox، Mark Chabura، Jhon Chuang، Greg Harfst، Shalene Melo، Charlie Pikscher، and Josh Reed.

لقد صمّم إد شينيرمان (Ed Scherinerman) رسم غلاف الطبعة الأولى باستخدام BRL– CAD، وهو أحد منتجات مختبر الأبحاث البالستي لجيش الولايات المتحدة، أمّا رسم غلاف الطّبعة الثانية فقد صممته ماريا ميوت (Maria Muyot) باستخدام Corel Draw. في حين أسهم كريس هارتمان بمساعدة قيّمة في تحضير قائمة مراجع الطّبعة الأولى؛ وقد أضيفت مراجع أخرى. أمّا تد هاردنج (Ted Harding) فقد حلّ صعوبات ضبط الطّباعة في أجزاء أخرى من الطّبعة الأولى.

أمّا الطّلبة الذين ساعدوا على تجميع معطيات الدليل في الطّبعة الأولى، فهم:

Maria Axenovich، Nicole Henley، Andre Kundgen، Peter Kwok، Kevin Leuthold، John Jozwiak، Radhika Ramamurthi، and Karl Schmidt.

جُمعت معطيات دليل الطّبعة الثّانية باستخدام نصوص بيرل (perl scripts)؛ حيث ساعد كلّ من ماريا ميوت ورضيكا رامامورثي (Radhika Ramamurthi) بالدليل وبقائمة المراجع أيضًا.

حُضّرت الطّبعة الثّانية في TEX، وهو نظام ضبط طباعة (Scientific world) لذا، فإنّ المجتمع العلمي مدين لدونالد كنوث بامتنان دائمًا. وقد أُنتجت الأشكال باستخدام gpic، أحد منتجات (free software Foundation).

التّغذية الراجعة

أرحب بالتصحيحات والمقترحات التي تتضّمن التعليق على المواضيع، وإسنادات النتائج والتحديثات، واقتراحات حول التّمارين، والأخطاء المطبعية، والحذف من قائمة المصطلحات أو الدليل.. إلخ. الرجاء إرسال ما ترونه مناسبًا إلى العنوان الإلكترونيّ:

west@math.uiuc.edu

وأعتذر مسبقًا عن المراجع المفقودة؛ فالرجاء تزويدي بالاقتباسات الفعلية! ولن تُضاف أيّ تغييرات في طبعات هذه النسخة ما عدا تصويب الأخطاء.

وسوف أحتفظ بموقع إلكترونيّ على شبكة الإنترنت يحتوي على وصفٍ، وأخطاء مطبعية، وتحديثات، ومادة أخرى. الرّجاء زيارة الموقع الإلكترونيّ:

http://www.math.uiuc,edu/~west/igt.

لقد صحّحت الأخطاء المطبعية، والأخطاء الرّياضيّة المعروفة لي قبل الطباعة جميعها. وعلى الرّغم من ذلك، فإنّ كثرة الأخطاء، وإعادة كتابة جوهر المحتوى، والإضافات المناسبة، تشير إلى أنّ بعض الأخطاء ما زالت موجودة. لذا أرجو منكم العثور عليها وتزويدي بها؛ لكي أقوم بتصويبها.

دوجلاس ب. ويست

Douglas B. West

إربانا إلينويز

Urbana, Illinois

الفصل الأوّل

مفاهيم أساسية (Fundamental Concepts)

1.1. ما البيان؟ (What is a Graph)

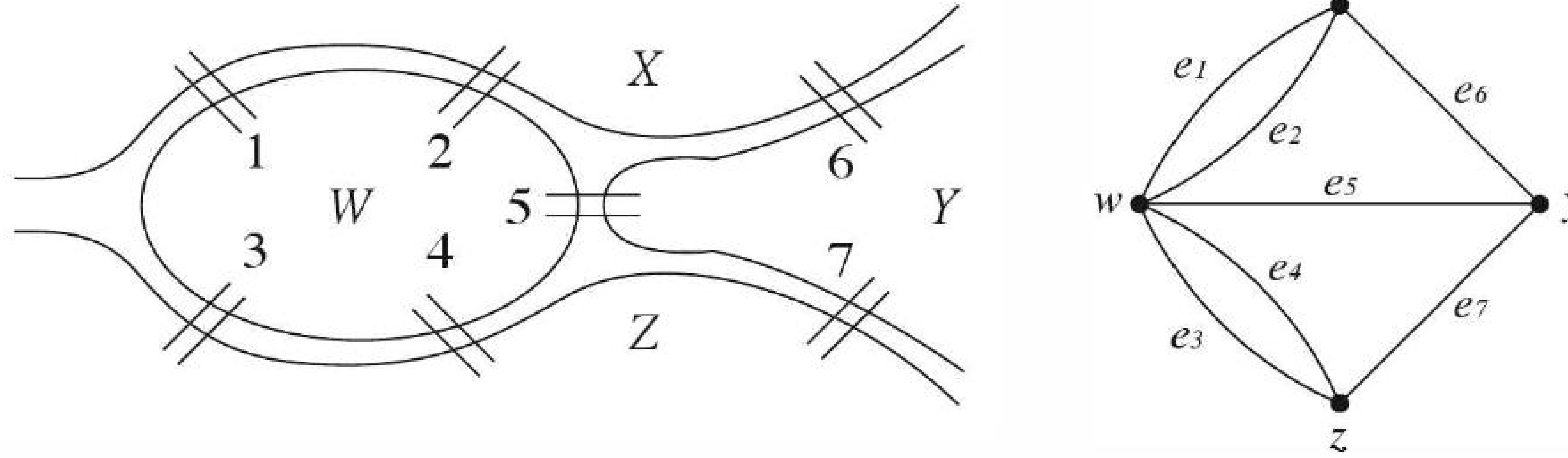
كيف نستطيع مدّ أسلاك لشبكة من الهواتف بأقلّ تكلفة ممكنة، بحيث يمكن الوصول لأيّ هاتف من أيّ هاتف آخر؟ ما أسرع مسلك يربط العاصمة الوطنية ببقية عواصم الولايات الأخرى؟ كيف نستطيع ملء n من شواغر الوظائف بـ n من الأشخاص المؤهلين؟ ما أكبر معدّل تدفّق من المصدر لغمر شبكة من الأنابيب؟ كم تحتاج شريحة الحاسوب من حزم الأسلاك؛ بحيث لا تتقاطع هذه الأسلاك معًا في الحزمة نفسها؟ كيف نستطيع أن نُجدْوَل الموسم الرياضي في أقلّ عدد ممكن من الأسابيع؟ ما الترتيب المناسب للمدن بحيث يستطيع مندوب المبيعات زيارتها في أقصر وقت ممكن؟ هل يمكن تلوين المناطق المختلفة في أيّ خريطة باستعمال أربعة ألوان، على أن تكون ألوان المناطق المتجاورة مختلفة؟

تتضمّن نظرية البيان هذه المسائل، وغيرها الكثير من المسائل العملية الأخرى، وفي هذا الكتاب، طوّرنا نظرية البيان وطبّقناها على مثل هذه المسائل، ومنذ البداية، فإننا نفترض الإلمام بالخلفية الرياضية الموجودة في الملحق A، حيث إنّ هذا الملحق يناقش المفاهيم الأساسية، ولغة الرياضيات المستخدمة.

التعريف (The Definition)

إنّ المسألة التي غالبًا ما يُقال إنها ولدّت نظرية البيان سوف تقترح تعريفنا الأساسي للبيان.

1.1.1. مثال. مسألة جسور كونجزبرج (*The Königsberg Bridge Problem*). تقع مدينة كونجزبرج على نهر بريجل (Pregel) في بروسيا، وتتكوّن هذه المدينة من جزيرة نيفوف (Kneiphopf)، ومساحات على ضفتي النهر. وقد وُصلت هذه المناطق بسبعة جسور، كما هو على اليسار أدناه، وتساءل مواطنو المدينة عما إذا كان يمكنهم مغادرة منازلهم، والسير على كل جسر من الجسور السبعة مرة واحدة فقط، ثمّ العودة إلى منازلهم، وقد اختزلت المسألة على تتبُّع الشكل الأيمن، حيث تمثّل النقاطُ الكثيفة الكتلَ اليابسةَ، أما المنحنيات، فتمثل الجسور.



النموذج الذي عن اليمين يُسهل تعليل عدم وجود مثل هذا الطريق، حيث نحتاج في كل مرة ندخل اليابسة ونخرج منها إلى استخدام جسرين ينتهيان بهذه اليابسة، وكذلك نستطيع أن نقرن الجسر الأول بالجسر الأخير، حيث بدأنا وانتهينا؛ لذلك، فإنّ وجود مثل هذا المسار المتعرّج، يتطلب أن يكون عدد زوجي من الجسور على كل كتلة يابسة، وهذا الشرط الضروري غير متحقّق في مدينة كونجزبرج. ■

إنّ مسألة جسور كونجزبرج تصبح أكثر متعة عندما نثبت في الدرس 2.1 أيًّا من الأشكال لها مسارات مستعرضة، وفي غضون ذلك، فإنّ هذه المسألة تقترح نموذجًا عامًّا لمناقشة مثل هذه القضايا.

2.1.1. تعريف. البيان (**G graph**): ثلاثية تتكوّن من مجموعة رؤوس $V(G)$ (**vertex set**)، ومجموعة أضلاع $E(G)$ (**edge set**)، وعلاقة تُرافِق كلّ ضلع مع رأسين (ليس بالضرورة أن يكونا مختلفين) يسمّيان نقاطًا طرفية (**endpoints**).

نرسم البيان على ورقة بوضع كل رأس على نقطة، ونمثّل كلَّ ضلع بمنحنى يربط بين نقاطه الطرفية.

3.1.1. مثال. في البيان في المثال 1.1.1، مجموعة الرؤوس هي: $\{x , y , z , w\}$ ، ومجموعة الأضلاع هي: $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$، ويمكن قراءة تعيين النقاط الطرفية للأضلاع من الصورة.

لاحظ أنّ الضلعين e_1، وe_2 لهما النقاط الطرفية نفسها وكذلك e_3، و e_4. وإذا كان هنالك جسر فوق مدخل، فإنّ نهايتيه سوف تكونان في الكتلة اليابسة نفسها، ونرسمه بوصفه منحنى يبدأ بالنقطة نفسها وينتهي بها، وتوجد لدينا مفردات ملائمة لمثل هذه الأنواع من الأضلاع في البيانات. ■

4.1.1. تعريف. نعرّف الأنشوطة (**loop**) على أنها ضلع، نقاطه الطرفية متساوية. ونعرّف الأضلاع المكررة (multiple edges) على أنها أضلاع لها الزوج نفسه من النقاط الطرفية.

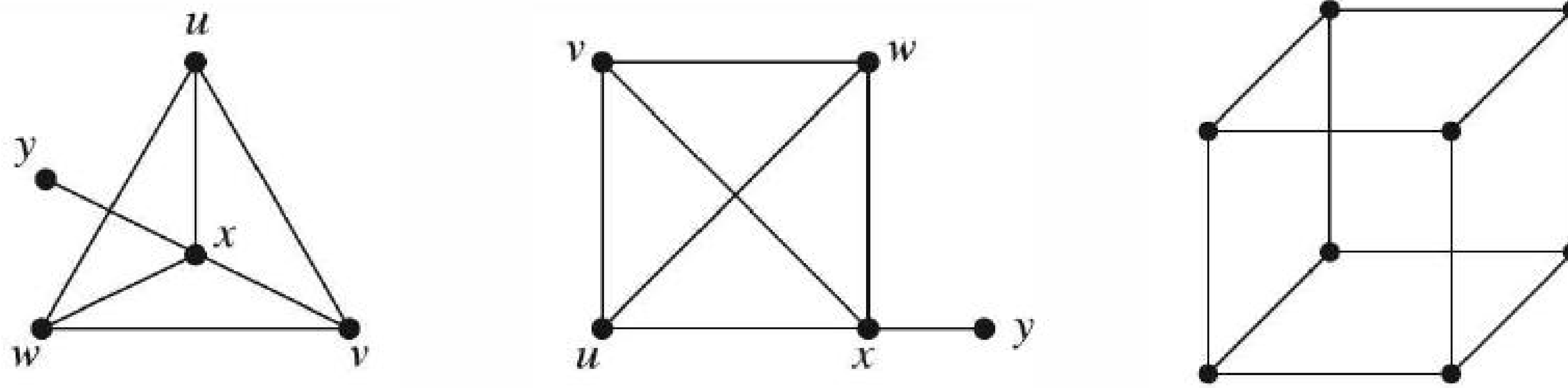
ونعرّف البيان البسيط (**Simple graph**) على أنه بيان لا عُرى ولا أضلاعًا مكررة، ونُحدد البيان البسيط بمجموعة رؤوسه ومجموعة أضلاعه، وذلك بافتراض مجموعة الأضلاع بوصفها مجموعة من الأزواج غير المرتبة من الرؤوس، وكتابة $e = uv$ (أو $e = vu$) للدلالة على الضلع e الذي تكون نقاطه الطرفية u، و v. وعندما تكون كل من u، و v نقاطًا طرفية لضلع ما، فإنها تدعى متجاورة (**adjacent**)، وتكونان جيرانًا (**neighbors**)، ونكتب $u \leftrightarrow v$ بدلاً من "u متجاور مع v".

لا تظهر العُرى ولا الأضلاع المتكررة في العديد من التطبيقات المهمة؛ لهذا نحصر اهتمامنا بالبيانات

البسيطة. في هذه الحالة، يحدّد الضلع بنقاطه الطرفية. لذا، نستطيع أن نسمي الضلع بنقاطه الطرفية، كما في التعريف 4.1.1. وهكذا، وفي البيان البسيط، فإننا ننظر إلى الضلع بوصفه زوج من الرؤوس غير المرتبة. نستطيع أن نهمل العلاقة التي تُرافق النقاط الطرفية مع الأضلاع صوريًّا. ويركز هذا الكتاب على البيانات البسيطة.

5.1.1. مثال. عن اليسار أدناه، تجد رسمين لبيان بسيط، حيث مجموعة الرؤوس هي $\{u, v, w, x, y\}$، ومجموعة الأضلاع هي: $\{uv, uw, vx, vw, xw, xy\}$.

ظهرت المفردتان ''رأس'' و ''ضلع'' من الهندسة الفراغية، أو هندسة المجسمات، حيث إنّ للمكعب رؤوسًا وأضلاعًا، وهي تشكل مجموعة كلّ من الرؤوس والأضلاع لبيان ما، وقد رُسم المكعب عن اليمين أدناه، وحُذفت أسماء الرؤوس والأضلاع. ■



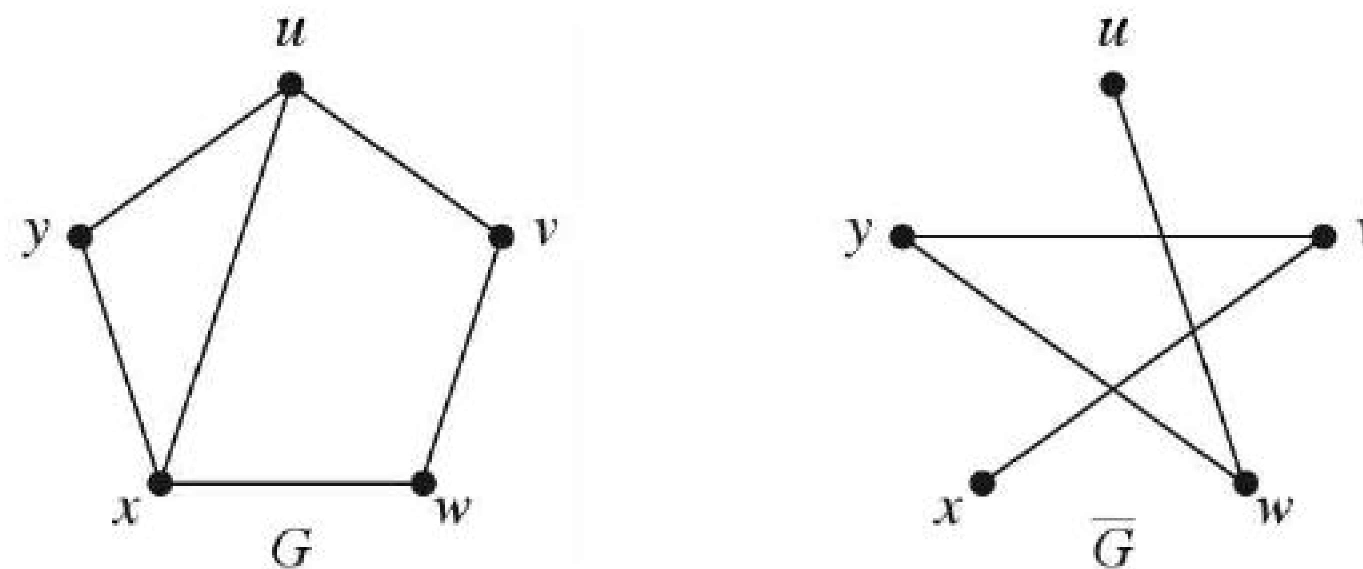
يكون البيان محددًا (**Finite**) إذا كانت مجموعة كلّ من رؤوسه وأضلاعه منتهيتين. وعليه سنتبنّى الاصطلاح الآتي: **كلّ بيان يُذكَرُ في هذا الكتاب هو بيان منتهٍ**، إلا إذا ذُكِرَ خلاف ذلك بصورة صريحة.

6.1.1. *ملاحظة. البيان الخالي (**null graph**) هو البيان الذي تكون مجموعة كلّ من الرؤوس والأضلاع فيه خاليتين، لاحظ أنّ تمديد المثبتات أو تعميمها لتنطبق على البيان الخالي، يقود إلى إرباك لا داعي له، لذلك ستهمله. وفي العبارات والتمارين كلّها سوف نأخذ في الحسبان البيانات التي لها مجموعة غير خالية من الرؤوس فقط. ■

البيانات بوصفها نماذج (Graphs as Models)

تظهر البيانات في أوضاع كثيرة، وتوحي التطبيقات لنا بأفكار ومصطلحات مفيدة حول بناء البيانات.

7.1.1. مثال. علاقات المعارف الشخصية والبيانات الجزئية. هل كلّ مجموعة مكونّة من ستة أشخاص تحوي ثلاثة أشخاص بعضهم على معرفة شخصية مسبقة ببعض، أو ثلاثة أشخاص غرباء غير متعارفين؟ بما أنّ علاقة المعرفة ''الشخصية'' متماثلة، فإننا ننمذجها باستعمال بيان بسيط، حيث يمثّل كلّ رأس شخصًا، وكلّ ضلع يمثّل شخصين يعرف أحدهما الآخر، بالإضافة إلى أنّ ''علاقة عدم المعرفة الشخصية'' على مجموعة الرؤوس نفسها تعطي بيانًا آخر، أضلاعه ''متممة'' مجموعة الأضلاع الأصلية. وسنعطي مصطلحات لهذه المفاهيم. ■



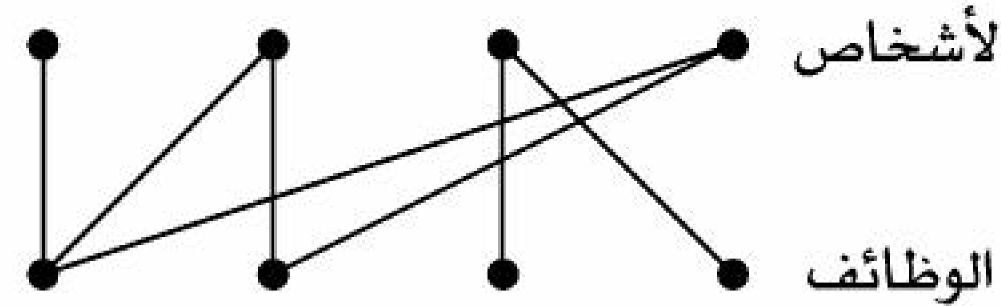
8.1.1. تعريف. المتّممة (**complement**) $\overline{G}$ للبيان البسيط G، هي البيان البسيط الذي مجموعة رؤوسه: $V(G)$، و $uv \in E(\overline{G})$ إذا وفقط إذا كان $uv \notin E(G)$. والعصبة (**clique**) في البيان هي مجموعة من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا، أما المجموعة المستقلة (**independent set**) أو المجموعة المستقرة (**stable set**) في البيان، فهي مجموعة رؤوس غير متجاورة زوجًا زوجًا.

نجد في البيان G الموجود في المثال 7.1.1 أن $\{u, x, y\}$ عصبة حجمها 3 و $\{u, w\}$، هي مجموعة مستقلة حجمها 2، وهما أكبر مجموعتين بهذه الصفات، لاحظ أنّ هذه القيم تنعكس في المتممة $\overline{G}$؛ لأنّ العصب تصبح مجموعات مستقلة (والعكس بالعكس) وذلك تحت تأثير التتام. يتضمن السؤال في المثال 7.1.1 ما إذا كان صحيحًا، إنّ كلّ بيان على 6 رؤوس يمتلك عصبة حجمها 3، أو مجموعة مستقلة حجمها 3 (التمرين 29). لاحظ إنّ حذف الضلع ux من G يعطي بيانًا بـ 5 رؤوس ليس له عصبة أو مجموعة مستقلة حجمها 3.

9.1.1. مثال. التعيين في الوظائف والبيانات ثنائية الفرع، يوجد لدينا m وظيفة و n شخصًا، ولكن الأشخاص ليسوا مؤهلين جميعهم للوظائف كلّها، فهل نستطيع ملء الوظائف الشاغرة بالأشخاص المؤهلين؟ ننمذج هذا باستخدام بيان بسيط مثل H، حيث تمثل رؤوسه الوظائف الشاغرة والأشخاص؛ تكون الوظيفة j مجاورة للشخص p إذا كان هذا الشخص يستطيع أن يؤدي هذه الوظيفة.

إنّ كلّ وظيفة يجب أن يشغلها شخص واحد فقط، وكلّ شخص يمكنه أن يعمل في وظيفة واحدة على الأكثر. لذلك، نبحث عن m من الأضلاع المنفصلة زوجًا زوجًا في H (ننظر إلى الأضلاع بوصفها أزواجًا من الرؤوس). وسنبين في الفصل 3 كيفية اختبار هذا الأمر؛ لاحظ أنه لا يمكن عمل هذا في البيان أدناه.

إن لاستخدام البيانات لنمذجة العلاقات بين مجموعتين منفصلتين الكثير من التطبيقات، وهذه هي البيانات التي تكون مجموعات رؤوسها قابلة للتجزئة إلى مجموعتين من المجموعات المستقلة؛ وحيث نحتاج إلى تسمية هذه البيانات. ■

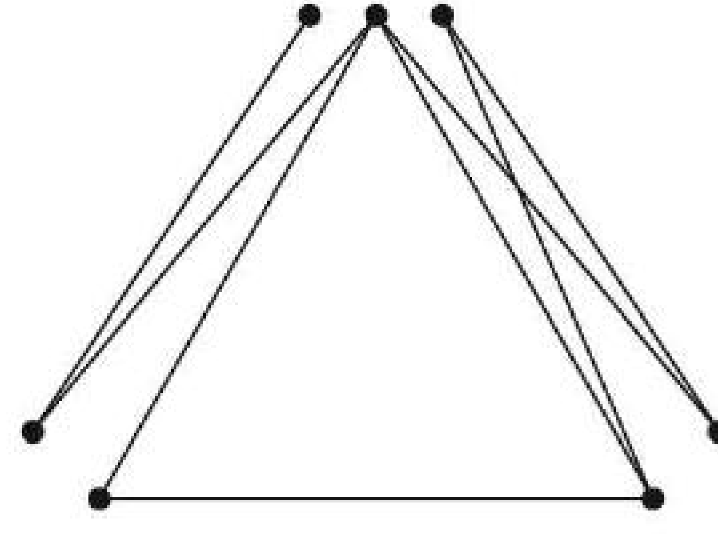


10.1.1. تعريف. نقول: إن البيان G ثنائي الفرع (**bipartite**) إذا كانت مجموعة رؤوسه $V(G)$ اتحادًا لمجموعتين منفصلتين (قد تكون إحداهما خالية) مستقلتين، تسمّيان مجموعات تجزئة للبيان G (أو مجموعات مجزأة للبيان G).

11.1.1. مثال. الجدولة وتلوين البيانات (*Scheduling and graph coloring*). افترض أننا نريد أن نجدول اجتماعات لجان مجلس الشيوخ بصورة دورية في كل أسبوع، حيث لا نستطيع أن نجدول لجنتين في الوقت نفسه إذا كان فيهما عضو مشترك. فكم دورة زمنية مختلفة نحتاج إليها؟

نضع رأسًا لكل لجنة، بحيث يكون الرأسان متجاورين عندما يكون هنالك عضو مشترك في اللجنتين المقابلتين لهذين الرأسين، ونضع عناوين (للفترات الزمنية) للرؤوس، بحيث يكون للنهايات الطرفية للأضلاع عناوين مختلفة. وفي البيان أدناه، نستطيع أن نستعمل عنوانًا واحدًا لكلّ مجموعة من المجموعات الثلاث المستقلة ذوات الرؤوس المجمّعة بعضها بالقرب من بعض، ويجب أن يعطى الأعضاء في العصبة عناوين مختلفة، لذلك وفي هذا المثال يكون أقلّ عدد ممكن من الفترات الزمنية هو ثلاث.

وبما أننا مهتمون بتجزئة الرؤوس فقط، وأنّ العناوين لا تحمل قيمًا عددية، فإنه من المناسب أن نسمّيها ألوانًا (**Colors**). ■



12.1.1. تعريف. نعرّف العدد اللوني (**Chromatic number**) للبيان G، يرمز إليه بالرمز $\chi(G)$ على أنه أقلّ عدد ممكن من الألوان نحتاج إليه لتلوين الرؤوس، بحيث تكون ألوان الرؤوس المتجاورة مختلفة. ويسمّى البيان G متعدد الفروع (مجزأ) من الدرجة (**k-partite**) إذا كان بالإمكان كتابة $V(G)$ على صورة اتحاد k من المجموعات المستقلة (ربما بعضها خال).

هذا يعمم فكرة البيانات الثنائية الفرع، وهي مجزأة من الدرجة 2 يجب أن تشكل. إن الرؤوس التي أعطيت اللون نفسه مجموعة مستقلة. لذلك، فإنّ $\chi(G)$ هو أقلّ عدد ممكن من المجموعات المستقلة نحتاج إليه لتجزئة $V(G)$، ويكون البيان متعدد الفروع (مجزأ) من الدرجة k إذا وفقط إذا كان عدده اللوني يساوي k على الأكثر، وقد استخدمنا المصطلح "مجموعة مجزأة" عندما نتحدث عن مجموعة في تجزئة لمجموعة معينة إلى مجموعات مستقلة.

سندرس العدد اللوني وتلوين البيانات في الفصل 5. لاحظ أنّ المسألة الأكثر شهرة في نظرية البيان هي تلوين "الخرائط".

13.1.1. مثال. الخرائط والتلوين (**Maps and coloring**). بكلام غير دقيق، **الخريطة** هي تجزئة للمستوى إلى مناطق مترابطة، فهل بالإمكان تلوين المناطق في أي خريطة باستخدام أربعة ألوان على الأكثر، بحيث يكون للمناطق المتجاورة ألوان مختلفة؟

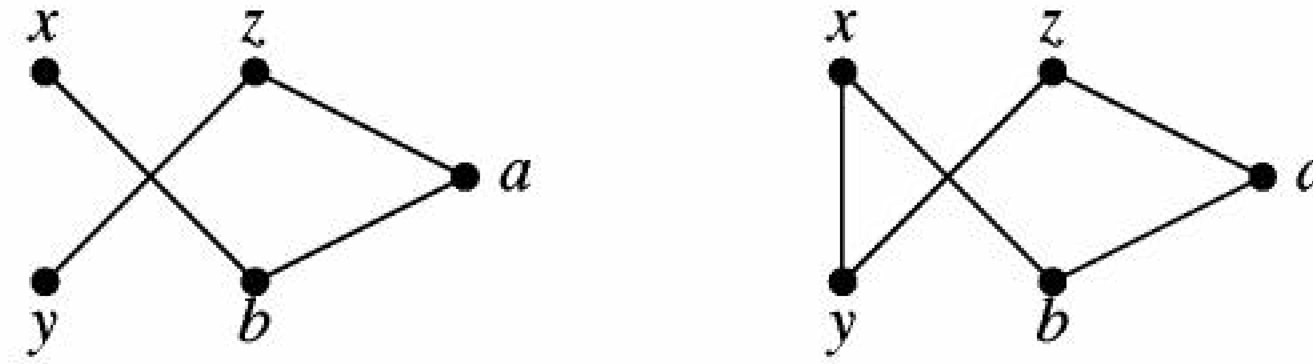
لربط تلوين الخرائط بتلوين البيانات، نضع رأسًا يمثّل كلّ منطقة، وضلعًا لتمثيل المناطق التي تتشارك بالحدود، ونتساءل في مسألة الخريطة عما إذا كان العدد اللوني للبيان الناتج يساوي 4 على الأكثر، لاحظ أنه يمكن رسم بعض البيانات في المستوى دون أن تتقاطع أضلاعها؛ مثل هذه البيانات تسمّى بيانات مستوية (**planar**) والبيان الذي يسبق التعريف 12.1.1 هو بيان سوي؛ لاحظ كذلك وجود تقاطعات في هذا الرسم، ولكن هنالك رسمًا آخر ليس فيه تقاطعات. سندرس البيانات المستوية في الفصل السادس. ■

14.1.1. مثال. المسالك في شبكات الطرق (*Routes in road networks*). نستطيع أن ننمذج شبكة الطرق باستخدام بيان أضلاعه التي تقابل قطع الطرق بين التقاطعات، ونستطيع أيضًا أن نعيّن أوزانًا للأضلاع لقياس المسافة أو زمن الرحلة، وفي هذا السياق، لاحظ أنّ الأضلاع تمثّل الروابط الفيزيائية (الطبيعية). فكيف نستطيع أن نجد أقصر مسلك من x إلى y؟ سنبين كيفية حساب هذا في الفصل الثاني.

إذا كانت الرؤوس في البيان تمثّل منزلنا والأماكن الأخرى المراد زيارتها، فلربما نريد أن نتبع مسلكًا نزور من خلاله الرؤوس جميعها مرة واحدة بالضبط ، كزيارة كل شخص دون المكوث عنده. وسنأخذ في الحسبان وجود مثل هذا المسلك في الفصل السابع.

لاحظ أننا نحتاج إلى مصطلحات لوصف هذين النوعين من المسالك في البيانات. ■

15.1.1. تعريف. المسار (**path**) هو بيان بسيط يمكن ترتيب رؤوسه، بحيث يكون الرأسان متجاورين إذا وفقط إذا كانا متتاليين في القائمة. أمّا الحلقة (**cycle**)، فهي بيان يتساوى فيه عدد كلّ من الرؤوس والأضلاع، ومن الممكن وضع رؤوسه حول دائرة بحيث يكون الرأسان متجاورين إذا وفقط إذا ظهرا متتالين على الدائرة.



لاحظ أن الشكل أعلاه يظهر مسارًا وحلقة، كما هو موضّح من جدولة الرؤوس بحسب الترتيب: x, b, a, z, y، فضلاً عن أنّ إهمال ضلع واحد من الحلقة ينتج مسارًا. وفي دراسة المسالك في شبكات الطرق، نفكر في المسارات والحلقات المحتواة في البيان. كذلك نأمل في الوصول إلى كلّ رأس في الشبكة من أيّ رأس آخر، والتعريف الآتي يجعل هذه المفاهيم دقيقة.

16.1.1. تعريف. نعرّف البيان الجزئي (**subgraph**) من البيان G على أنه البيان H، بحيث يكون $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، والنقاط الطرفية للأضلاع في H هي نفسها في G؛ لذلك، نكتب $H \subseteq G$، ونقول: إنّ "G **يحوي** H".

يكون البيان G مترابطًا (**connected**) إذا كان كلّ زوج من الرؤوس في G ينتمي إلى مسار؛ وبخلاف ذلك، يكون البيان G غير مترابط (**disconnected**).

يوجد للبيان الموجود قبل التعريف 12.1.1 ثلاثة بيانات جزئية تعدّ حلقات، وهو بيان مترابط، ولكن البيان في المثال 9.1.1 ليس كذلك.

المصفوفات والتشاكل (Matrices and Isomorphisms)

كيف نحدّد بيانًا ما؟ نستطيع وضع الرؤوس والأضلاع في قائمة (مع النقاط الطرفية)، ولكن هناك تمثيلات مفيدة أخرى. يضاف إلى ذلك أنّ قولنا إنّ البيان عديم أشواط أو خالٍ منها (**loopless**) يعني أن الأضلاع المكررة مسموحة، ولكن أشواطًا غير مسموحة.

17.1.1. تعريف. ليكن G بيانًا عديم أشواط، بحيث إنّ مجموعة رؤوسه هي: $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ومجموعة أضلاعه هي: $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. نعرّف مصفوفة التجاور (**adjacency matrix**) للبيان G، وتكتب $A(G)$ على أنها هي المصفوفة من الحجم $n \times n$، حيث تكون المدخلة $a_{i,j}$ هي عدد الأضلاع في G التي نقاطها الطرفية $\{v_i, v_j\}$. أمّا مصفوفة الوقوع (**incidence matrix**) $M(G)$ فنعرفها على أنها المصفوفة من الحجم $n \times m$ بحيث تكون المدخلة $m_{i,j}$ هي 1 إذا كانت v_i نقطة طرفية للضلع e_j وبخلاف ذلك تكون 0.

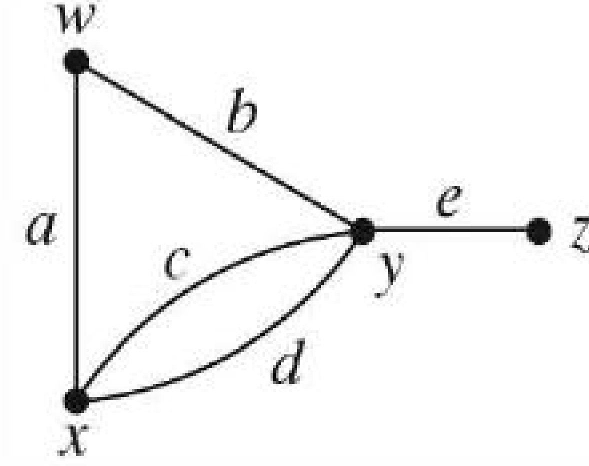
إذا كان الرأس v نقطة طرفية للضلع e، فإنّ v، و e تقع إحداهما على الأخرى (**incident**)، ونعرّف درجة (**degree**) الرأس v (في البيان عديم العرى) على أنها عدد الأضلاع الواقعة على هذا الرأس. تعتمد الطريقة المناسبة لتعريف مصفوفة كلّ من التجاور والوقوع، أو درجات الرؤوس للبيان الذي يحوي عرًى على التطبيق؛ لاحظ أنّ الدرسين 2.1 و 3.1 يناقشان ذلك.

18.1.1. ملاحظة. تحدّد مصفوفة التجاور بترتيب الرؤوس، وتجاور كلّ مصفوفة متماثلة (**symmetric**) $(a_{i,j} = a_{j,i})$ لكل (i, j)، لاحظ أنّ مدخلات مصفوفة التجاور للبيان البسيط G تكون 0 أو 1، مع أصفار على القطر، إن درجة الرأس v هي مجموع المدخلات في الصف لـ v إما في $A(G)$ أو $M(G)$. ■

19.1.1. مثال. للبيان G أدناه الخالي من العرى، نجد مصفوفة كلّ من التجاور والوقوع الناتجتين عن ترتيب

الرؤوس: w، وx، وy، وz وترتيب الأضلاع: a و b و c و d و e ، حيث إنّ درجة الرأس y هي 4، وذلك من النظر إلى البيان، أو من جمع الصف لـ y في أي من المصفوفتين. ■

$$A(G)=\begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z\\ \hline w & 0 & 1 & 1 & 0\\ x & 1 & 0 & 2 & 0\\ y & 1 & 2 & 0 & 1\\ z & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}$$



$$M(G)=\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e\\ \hline w & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ x & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ y & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

$A(G)$ G $M(G)$

إن إيجاد مصفوفة التجاور لبيان ما يعطي ضمنيًّا تسمية للرؤوس بحسب ترتيب الصفوف؛ فالرأس i يقابل الصف والعمود i؛ إذ تخزين بيان في الحاسوب يتطلب تسمية الرؤوس.

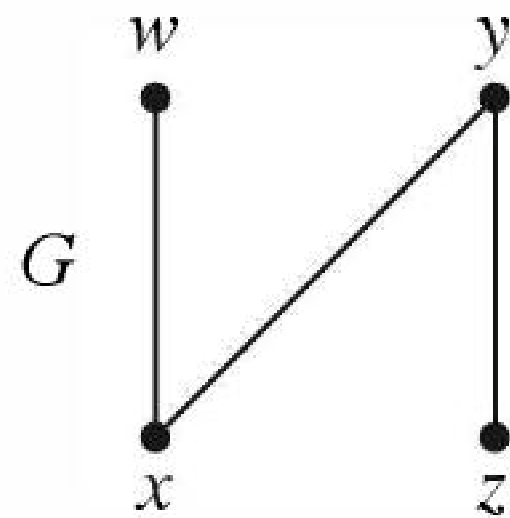
ومع ذلك، نريد أن ندرس الخصائص (مثل خاصية الترابط) التي لا تعتمد على هذه الأسماء. حدسيًّا، إن الخصائص البنيوية لـ G وH ستكون هي نفسها إذا استطعنا إعادة تسمية الرؤوس في G باستخدام الرؤوس في H. وهكذا، فإن G سوف يصبح H. ونجعل التعريف مضبوطًا للبيانات البسيطة، لاحظ أنّ إعادة التسمية هي دالة من $G(V)$ إلى $V(H)$، بحيث يحدّد كلّ عنصر في $V(H)$ لعنصر واحد في $V(G)$. لذلك نقرنهما في صورة أزواج، وتكون مثل هذه الدالة مقابلة واحدًا لواحد (*one-to-one correspondence*)، أو تناظرًا (**bijection**) (انظر الملحق A). وعندما نقول: نقلب إعادة التسمية G إلى H، فإنّ هذا يماثل قولنا إنّ تناظر الرؤوس يحافظ على علاقة التجاور.

20.1.1. تعريف. التشاكل (**isomorphism**) من البيان البسيط G إلى البيان البسيط H هو تناظر $f : V(G) \to V(H)$ بحيث $uv \in E(G)$ إذا وفقط إذا $f(u)\, f(v) \in E(H)$؛ ونقول إنّ " G يشاكل H **isomorphic to** " . ونكتب $G \cong H$، إذا وُجِدَ تشاكل من G إلى H.

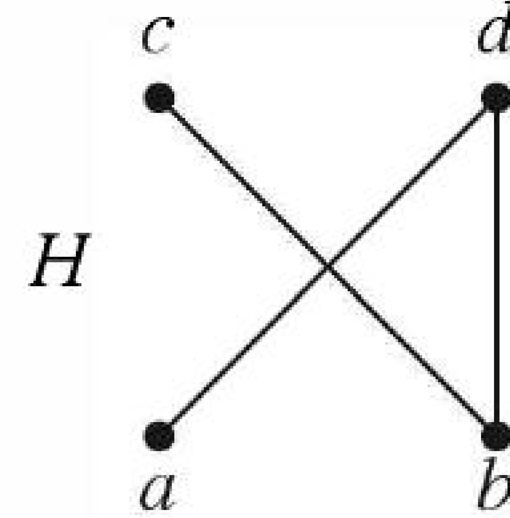
21.1.1. مثال. البيانان G و H المرسومان أدناه هما مساران على أربعة رؤوس، عرّف الدالّة $f : V(G) \to V(H)$ كما يأتي: $f(z)=c$ ،$f(y) = b$ ،$f(x) = d$ ،$f(w) = a$. لنبين أنّ f هو تشاكل، نفحص ما إذا كان f يحافظ على الأضلاع وغير الأضلاع. لاحظ أنّ إعادة كتابة $A(G)$ بوضع الصفوف في الترتيب w, y, z, x، وكذلك الأعمدة بهذا الترتيب، يعطي $A(H)$ كما هو موضّح أدناه، وهذا يؤكد أن f تشاكل.

تشاكل آخر يرسل w, x, y, z إلى c, b, d, a على الترتيب. ■

G



H



$$\begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z\\ \hline w & 0 & 1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0 & 1 & 0\\ y & 0 & 1 & 0 & 1\\ z & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\qquad \begin{array}{c|cccc} & w & y & z & x\\ \hline w & 0 & 0 & 0 & 1\\ x & 0 & 0 & 1 & 1\\ y & 0 & 1 & 0 & 0\\ z & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\qquad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d\\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 1\\ b & 0 & 0 & 1 & 1\\ c & 0 & 1 & 0 & 0\\ d & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}$$

22.1.1. ملاحظة : إيجاد التشاكلات. كما اقترح في المثال 21.1.1، فإن عرض مصفوفتي التجاور مع ترتيب الرؤوس بحيث تتطابق المصفوفتان، هي طريقة لاثبات أنّ البيانين متشاكلان، إضافة إلى أنّ تطبيق التبديلة σ على كل من صفوف المصفوفة $A(G)$ وأعمدتها له تأثير إعادة ترتيب رؤوس G. وإذا كانت المصفوفة الجديدة تساوي $A(H)$، فإن التبديلة تعطي تشاكلاً، ومن الممكن التحقق من المحافظة على علاقة التجاور دون كتابة المصفوفات.

لكي يكون تناظر الرؤوس تشاكلاً من G إلى H، فإن الصورة في H للرأس v من G يجب أن تمتلك خواص v نفسها في G. فعلى سبيل المثال، يجب أن تكون لهما الدرجة نفسها. ■

23.1.1. *ملاحظة : تشاكل للبيانات غير البسيطة، يمكن أن يعمم تعريف التشاكل إلى بيانات لها عرى وأضلاع متكررة، ولكن التعبير الدقيق يحتاج إلى لغة التعريف 2.1.1.

التشاكل (**isomorphism**) من G إلى H دالة تناظر f ترسل $V(G)$ إلى $V(H)$ و $E(G)$ إلى $E(H)$، بحيث يُرسل كل ضلع في G نقطتيه الطرفيتين u و v إلى ضلع في H نقطتاه الطرفيتان $f(u)$ و $f(v)$.

لاحظ أنّ هذه الصفة التقنية لا تهمنا؛ لأننا سندرس التشاكلات في سياق البيانات البسيطة فقط. ■

بما أنّ H متشاكل مع G عندما يكون G متشاكلاً مع H، فغالبًا ما نقول إن "G و H متشاكلان" (نعني أحدهما للآخر)؛ حيث إنّ الصفة "تشاكل" تطبق فقط على أزواج من البيانات؛ فقولنا "G متشاكل" لا معنى له؛ (لأننا سنسأل بعد ذلك: "متشاكل مع ماذا؟"). وبالمثل، فمن الممكن أن نقول إن مجموعة من البيانات تكون "متشاكلة زوجًا زوجًا "(مأخوذة اثنين اثنين في الوقت نفسه)، ولكنّ القول بأن "هذه المجموعة من البيانات متشاكلة" ليس له معنى.

تعرّف العلاقة (**relation**) على المجموعة S على أنّها جمع من الأزواج المرتبة من S، وعلاقة التكافؤ (**equivalence relation**) علاقة منعكسة، ومتماثلة، ومتعدية (انظر الملحق A)، فعلى سبيل المثال: علاقة التجاور على مجموعة الرؤوس لبيان ما متماثلة، ولكنها ليست منعكسة، ونادرًا ما تكون متعدية. من جانب آخر، فإن علاقة التشاكل (**isomorphism relation**)، من الأزواج المرتّبة (G, H)، بحيث يكون G متشاكلاً مع H، ويحقق الخواص الثلاث جميعها.

24.1.1. قضية : علاقة التشاكل على أيّ مجموعة من البيانات (البسيطة)، تكون علاقة تكافؤ.

الإثبات : خاصية الانعكاس. التبديل المحايد على $V(G)$ هو تشاكل من G إلى نفسها. وعليه فإنّ $G \cong G$.

خاصية التماثل إذا كان $f : V(G) \to V(H)$ تشاكلاً من G إلى H، فإنّ f^{-1} هو تشاكل من H إلى G، لأنّ العبارة "$uv \in E(G)$ إذا وفقط إذا $f(u)f(v) \in E(H)$" تؤدي إلى أنّ "$xy \in E(H)$ إذا وفقط إذا $f^{-1}(x)f^{-1}(y) \in E(H)$". وهكذا، $G \cong H$ يؤدي إلى $H \cong G$.

خاصية التعدي. افرض أنّ $g: V(G) \to V(H)$ و $f: V(F) \to V(G)$ تشاكلان، لاحظ أنّ "$uv \in E(F)$ إذا وفقط إذا $f(u)\ f(v) \in E(G)$"، وأيضًا "$xy \in E(G)$ إذا وفقط إذا $g(x)g(y) \in E(H)$"، بما أنّ f تشاكل، فلكلّ $xy \in E(G)$ نستطيع أن نجد $uv \in E(F)$، بحيث $f(u) = x$ و $f(v) = y$، وهذا يؤدي إلى أنّ "$uv \in E(F)$ إذا وفقط إذا $g(f(u))\ g(f(v)) \in E(H)$"؛ لذا، فإنّ التركيب $g \circ f$ هو تشاكل من F إلى H، وهكذا نكون أثبتنا أنّ $F \cong G$، و $G \cong H$ معًا يؤديان إلى $F \cong H$. ■

علاقة التكافؤ تجزئ المجموعة إلى صفوف تكافؤ؛ يحقق العنصران العلاقة إذا وفقط إذا كانا ينتميان إلى الصف نفسه.

25.1.1. تعريف. صف التشاكل (**Isomorphism class**) للبيان، هو صف تكافؤ للبيانات تحت علاقة التشاكل، وتتشاكل المسارات على n من الرؤوس زوجًا زوجًا؛ لذا فإن مجموعة المسارات على n من الرؤوس تشكل صف تشاكل.

26.1.1. ملاحظة: البيانات "*غير الموسومة*" وصفوف التشاكل. عند مناقشة البيان G، يكون لدينا مجموعة ثابتة من الرؤوس، لكن تعليقاتنا البنيوية تُطبّق أيضًا على كل بيان متشاكل مع G، وتكون استنتاجاتنا مستقلة عن أسماء (أوسمة) الرؤوس. وهكذا، نستخدم التعبير غير الرسمي "البيانات غير الموسومة" ليعني صف التشاكل للبيانات. عندما نرسم بيانًا، فإنّ رؤوسه تسمى بمواقعها الفيزيائية، حتى لو لم نعطها أسماء أخرى. لذا فإنّ رسم البيان يكون عضوًا في صفه التشاكلي، وندعوه بيانًا فقط، وعندما نعيد رسم بيان لإظهار بعض أوجهه البنيوية فإننا نختار أنسب عضو في صف التشاكل، ونبقى نناقش "البيان غير الموسوم" نفسه. ■

حينما نناقش بنية البيانات، فمن المناسب أن نستعمل أسماء ورموزًا لصفوف التشاكلات المهمّة، وحيث يجب أن تكون هنالك مرونة في الرجوع إلى صف التشاكل أو لأيّ عنصر يمثّله.

27.1.1. تعريف. يرمز إلى المسار (غير الموسوم) أو الحلقة على n من الرؤوس بالرمزين P_n و C_n، على الترتيب؛ والحلقة- n هي حلقة على n من الرؤوس. ونعرّف البيان التام (**complete graph**) على أنه بيان بسيط، رؤوسه متجاورة زوجًا زوجًا؛ ويرمز إلى البيان التام (غير الموسوم) على n من الرؤوس بالرمز K_n، أمّا البيان الثنائي الفرع التام (**complete bipartite graph**) أو الثنائي العصبة (**biclique**) فيعرّف على أنه بيان ثنائي الفرع بسيط، بحيث يكون أيّ رأسين فيه متجاورين إذا وفقط إذا كانا في مجموعات مجزأة (جزئية) مختلفة. وعندما يكون حجم المجموعتين r و s، فإننا نستخدم الرمز $K_{r,s}$ للعصبة الثنائية (غير الموسومة).



28.1.1. *ملاحظة: عّرفنا البيان التام بوصفه بيانًا رؤوسه متجاورة زوجًا زوجًا، أمّا العصبة فهي مجموعة الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا في البيان. حيث يستعمل الكثير من المؤلفين المصطلحين بصورة متبادلة، ولكن الاختلاف يسمح لنا بمناقشة العصب باستخدام لغة المجموعات المستقلة نفسها.

في إطار ثنائي الفرع، نستخدم ببساطة "عصبة" لنختصر "البيان الثنائي الفرع التام". إن الاسم البديل "ثنائي العصبة" هو تذكير بأن البيان الثنائي الفرع التام لا يكون بيانًا تامًّا بوجه عام (التمرين 1). ■

29.1.1. ملاحظة. بيان بأيّ اسم آخر ... عندما نسمي بيانًا دون تسمية رؤوسه فإننا نعني صفة التشاكل غالبًا. تقنيًّا، "H بيان جزئي من G" وهذا يعني أنّ بعض البيانات الجزئية من G متشاكلة مع H (ونقول "G يحوي نسخة من H"). وهكذا، فإنّ C_3 بيان جزئي من K_5 (كلّ بيان تام على 5 رؤوس له 10 بيانات جزئية متشاكلة مع C_3) لكن ليس مع $K_{2,3}$.

بصورة مشابهة، فإنّ السؤال فيما إذا كان G "هو" C_n، يعني السؤال فيما إذا كان G مشاكلاً لحلقة على n من الرؤوس. ■

إنّ الخصائص البنيوية لبيان ما تُحدد بعلاقة التجاور. وعليه، تحفظ بالتشاكل. لاحظ أننا نستطيع إثبات أن G و H غير متشاكلين بإيجاد خاصية بنيوية يختلفان فيها. فإذا اختلفا في عدد الأضلاع، أو البيانات الجزئية، أو المتممات، إلخ، فلا يمكن أن يكونا متشاكلين.

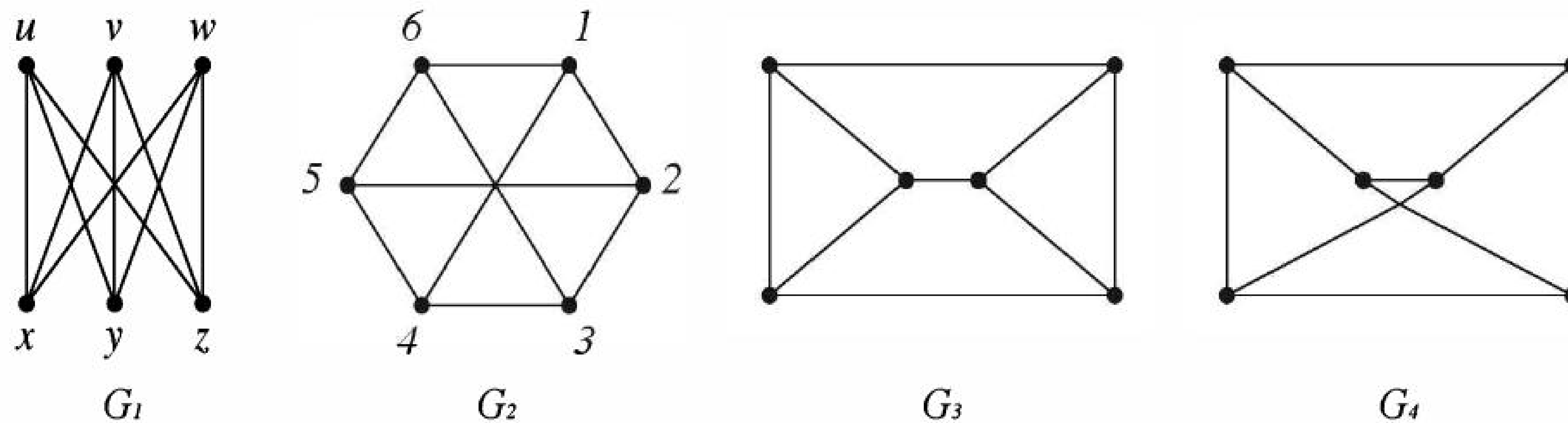
من جهة أخرى، فحص بعض الخصائص البنيوية وتشابهها لا يؤدي إلى أنّ G متشاكل مع H. لإثبات أن $G \cong H$، يجب أن نجد دالة تناظر $f: V(G) \to V(H)$ بحيث تحافظ على علاقة التجاور.

30.1.1. مثال. متشاكلة أم لا؟ لكل بيان أدناه ستة رؤوس، وتسعة أضلاع مترابطة، ولكن البيانات ليست متشاكلة زوجًا زوجًا.

لإثبات أنّ $G_1 \cong G_2$، نعطي أسماء للرؤوس، ونعيّن دالة تناظر، ونختبر محافظتها على علاقة التجاور. كما هو موسوم أدناه، فإنّ التناظر الذي يرسل u, v, w, x, y, z إلى 1،3،5،2،4،6 على الترتيب، هو تشاكل من G_1 إلى G_2. والدالة التي ترسل u, v, w, x, y, z إلى 6،4،2،1،3،5، على الترتيب، هي تشاكل آخر.

لاحظ أنّ كلًّا من G_1 و G_2 الثنائي الفرع هما رسمان لـ $K_{3,3}$ (كما في G_4)، البيان G_3 كذلك يحوي K_3، لذلك فإنّ رؤوسه لا تتجّزأ إلى مجموعتين مستقلتين. وعليه، فإنّ G_3 لا يكون متشاكلاً مع البقية.

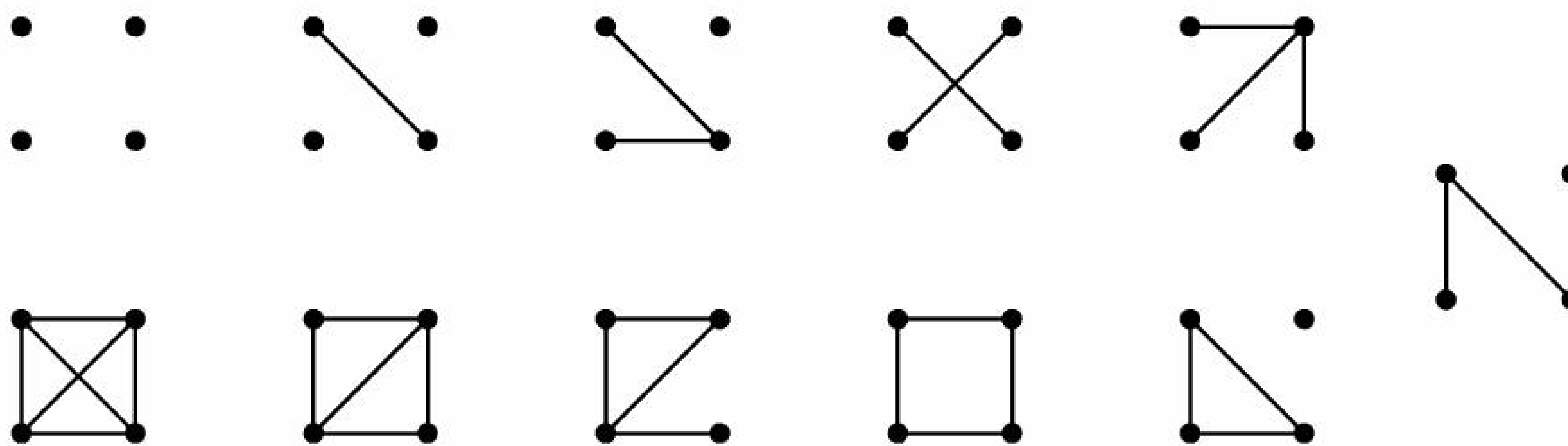
نستطيع في بعض الأحيان أن نفحص التشاكل سريعًا باستخدام المتممات، ويكون البيانان البسيطان G و H متشاكلين إذا وفقط إذا كانت متمّماتهما متشاكلة (التمرين 4). هنا $\overline{G}_1$، $\overline{G}_2$، $\overline{G}_4$، جميعها تتكوّن من حلقتين منفصلتين على 3 رؤوس، وهي غير مترابطة، أمّا $\overline{G}_3$ فهي حلقة على 6 رؤوس، وهي مترابطة.



31.1.1. مثال. عدد الأشكال ذوات n من الرؤوس، عندما نختار رأسين من مجموعة حجمها n من الرؤوس نستطيع أن نختار واحدًا ثم نختار الآخر ولكن لا تهتم بالترتيب، وهكذا يكون عدد طرق الاختيار هو $(n(n-1)/2)$ (الرمز لعدد طرق اختيار k من العناصر من n عنصر هو $\binom{n}{k}$، ويقرأ "n فوق k" (n choose k). وتسمى هذه الأعداد معاملات ذات الحدين (**binomial coefficients**)؛ وللمزيد من المعلومات؛ انظر الملحق A.

في البيان البسيط على مجموعة الرؤوس X ذات الحجم n، لاحظ أنّ كلّ زوج من الرؤوس يمكن أن يشكل أو لا يشكل ضلعًا، فضلًا عن أنّ اختيار كل زوج يعطي وصفًا للبيان. لذلك فإنّ عدد البيانات البسيطة مع مجموعة الرؤوس X هو $2^{\binom{n}{2}}$.

فعلى سبيل المثال، يوجد 64 بيانًا بسيطًا على مجموعة ثابتة تحوي أربعة رؤوس، وتشكل هذه البيانات 11 صف تشاكل فقط. وفي الرسم أدناه، تظهر الصفوف في صورة أزواج متتامة؛ لاحظ أن P_4 فقط يتشاكل مع متممته، وأنّ لصفوف التشاكلات أحجامًا مختلفة، لذلك لا نستطيع عدّ صفوف التشاكلات للبيانات البسيطة على n رأسًا بتقسيم على حجم الصف. ■



التفكيك والبيانات الخاصة (Decomposition and Special Graphs)

المثال $p_4 \cong \bar{p}_4$ يقترح عائلة من مسائل البيانات.

32.1.1. تعريف. يكون البيان ذاتي التتام (**self – complementary**) إذا كان متشاكلاً مع متممته. ويعرف تفكيك (**decomposition**) البيان على أنه قائمة من البيانات الجزئية، بحيث يظهر كل ضلع مرة واحدة بالضبط في إحدى البيانات الجزئية في القائمة.

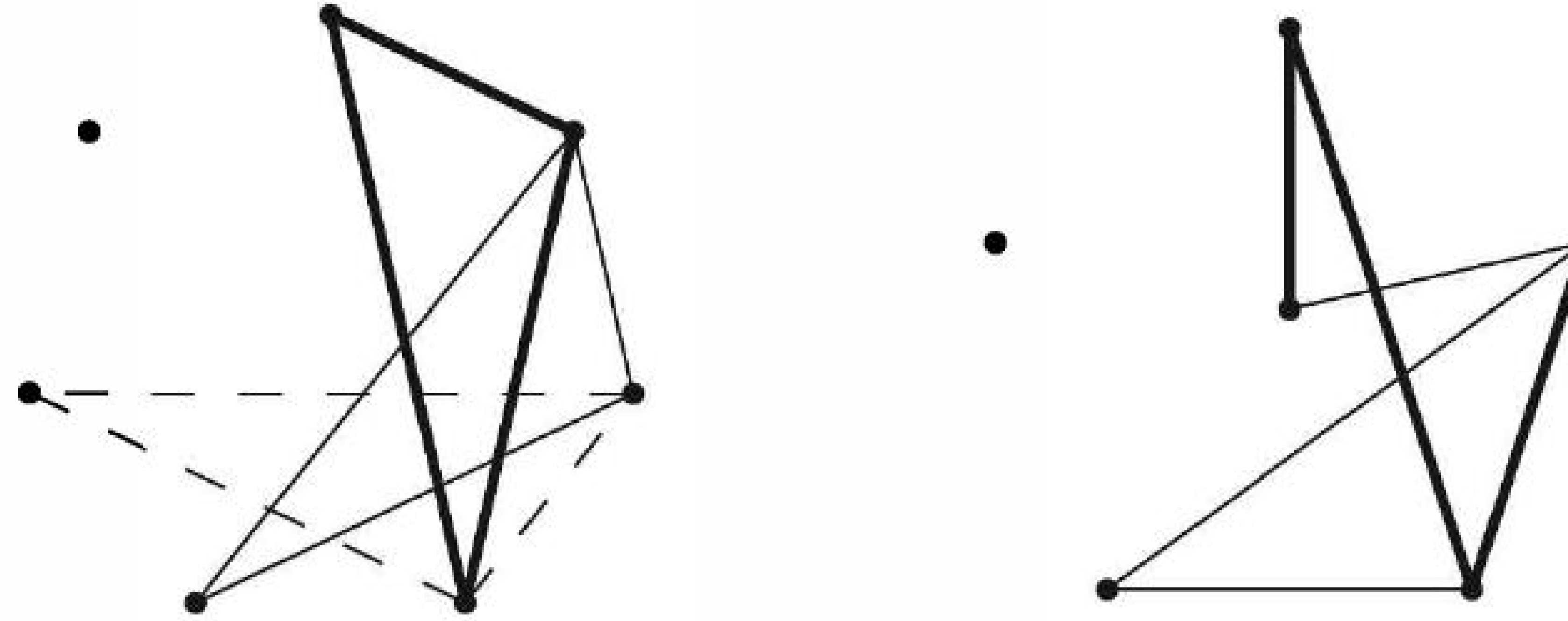
يكون البيان H على n رأسًا ذاتي التتام إذا وفقط إذا وُجد لـ K_n تفكيك يتكوّن من نسختين من H.

33.1.1. مثال. نستطيع أن نحلل K_5 إلى حلقتين من الدرجة 5. وعليه، تكون الحلقة من الدرجة 5 ذاتية التتام. وكل بيان له n رأسًا، ومتممته يفككان K_n. وكذلك فإنّ $K_{1,n-1}$ و K_{n-1} يفككان K_n، وذلك على الرغم من أنّ أحد البيانين الجزئيين يحذف رأسًا. ونعرض في اليمين في أدناه تفكيكًا لـ K_4 باستخدام ثلاث نسخ من P_3. وتأخذ التمارين 31 – 39 تفكيك البيانات في الحسبان. ■



34.1.1. *مثال. يعدّ السؤال حول أي البيانات التامة تتفكك إلى نسخ من K_3 سؤالاً أساسيًا في نظرية التصاميم التوافقية (theory of combinatorial designs). ونقترح على اليسار أدناه تفكيكًا لـ K_7، حيث إنّ تدوير المثلث على سبعة مواقع يستخدم كل ضلع مرة واحدة بالضبط.

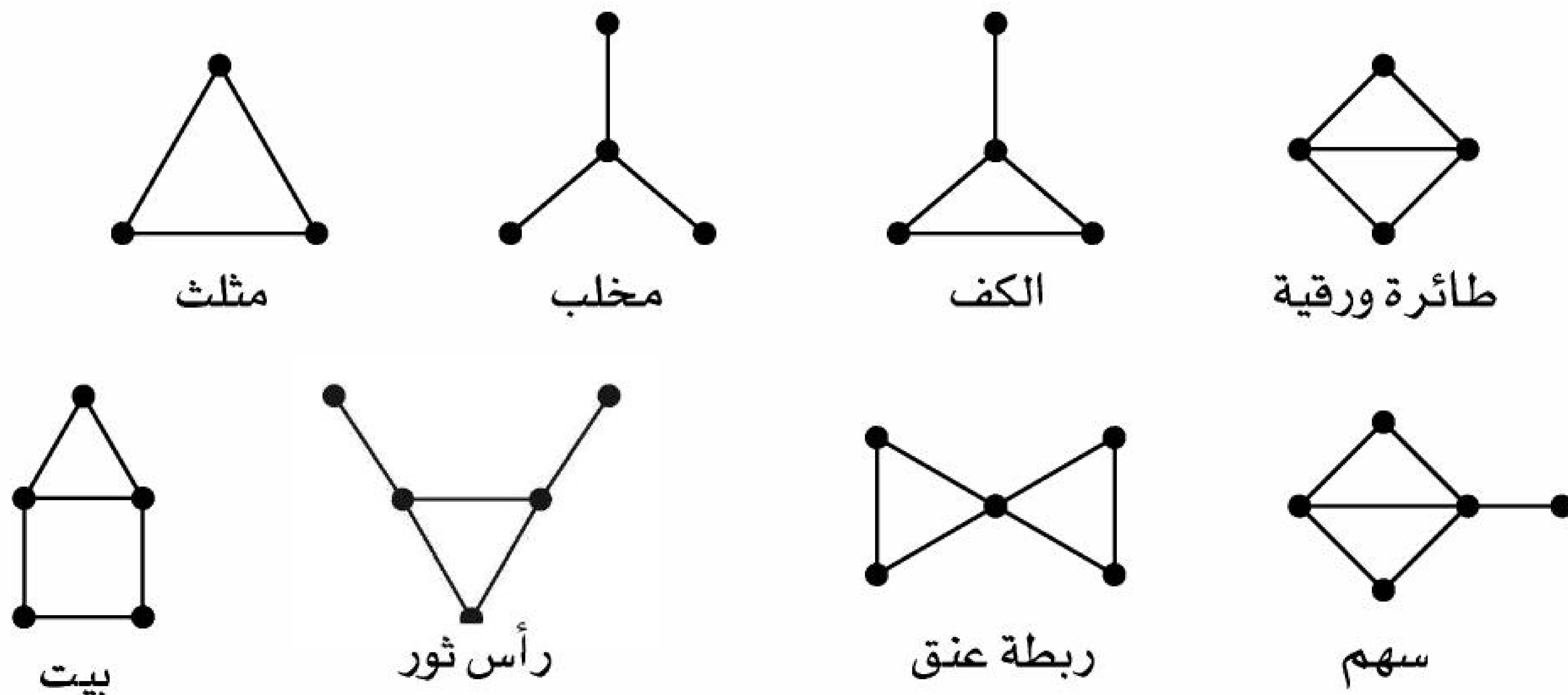
ونقترح على اليمين تفكيكًا لـ K_6 إلى نسخ من P_4. إنّ وضع رأس واحد في المركز يصنف الأضلاع إلى ثلاثة أنواع هي: الحلقة الخارجيةَ على 5 رؤوس، والحلقة الداخلية على 5 رؤوس من هذه الرؤوس، والأضلاع المرتبطة بالرأس المركزي. لاحظ أنّ كل مسار على 4 رؤوس في التفكيك يستخدم ضلعًا واحدًا من كل نوع؛ وندور الصورة لنحصل على المسار التالي. ■



ننظر إلى أيّ نسخة من K_3 بصفتها مثلثًا، ومن المناسب إعطاء أسماء مختصرة للبيانات التي تتكرر في مناقشاتنا كثيرًا.

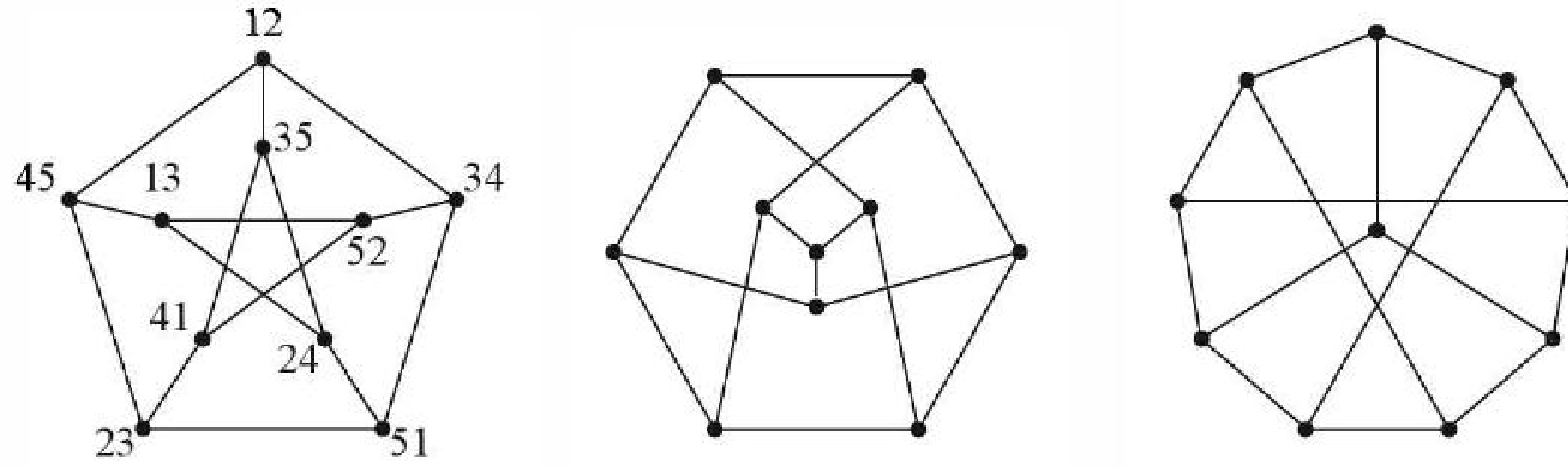
35.1.1. مثال. بيان معرض الوحوش (*The graph menagerie*). إن اسم (الاسم الجذاب) البيان عادة ما يأتي من رسم البيان؛ حيث نستخدم أيضًا مثل هذه الأسماء لأيّ رسوم أخرى للبيان، وعليه تكون أفضل رؤية كاسم لصف التشاكل. وقد أعطينا الشكل أدناه أسماءً لبعض البيانات التي لها على الأكثر خمسة رؤوس.

البيانات الأكثر أهمية من بين هذه البيانات هي المثلث (**triangle**) (K_3)، والمخلب (**claw**) ($K_{1,3}$)، وفي بعض الأحيان نناقش الكف (**paw**) ($K_{1,3}+e$) والطائرة الورقية (**kite**) ($K_4 - e$)؛ أما البيانات الأخرى فتظهر بتكرار أقل، لاحظ أنّ متممات البيانات الموجودة في الصف الأول غير مترابطة، فمُتمّمة المنزل هي P_5، ومتمّمة الثور (bull) هي نفسها، ويسأل التمرين 39: أيّ هذه البيانات يمكن استخدامه لتفكيك K_6؟ ■



لكي نفكّك H إلى نسخ من G، يجب أن يكون عدد الأضلاع في G يقسم عدد الأضلاع في H. وهذا غير كافٍ؛ لأنّ K_5 لا تتفكك إلى نسختين من الطائرة الورقية (K_4-e).

36.1.1. تعريف. بيان بيترسون (**Petersen graph**) هو البيان البسيط الذي تكون رؤوسه مجموعات جزئية ثنائية العناصر من مجموعة خماسية العناصر، في حين تكون أضلاعه أزواج المجموعات الجزئية الثنائية العناصر المنفصلة.



رسمنا في الأعلى بيان بيترسون بثلاث طرق، إذ إنّ هذا البيان مفيد جدًّا في كثير من الأحيان لدرجة أنه خُصّصَ كتابٌ بأكمله له ([Holton-Sheehan [1993])، وعلاوة على أنّ خصائصه تستنبط من علاقة التجاور التي استخدمت بوصفها تعريفًا له.

37.1.1. مثال. تركيب (بنية) بيان بيترسون. باستخدامنا $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ بصفتها مجموعة خماسية العناصر، نكتب الزوج $\{a, b\}$ في صورة ab، أو ba، وبما أنّ 12 و 34 منفصلان، لهذا تكون هذه الرؤوس متجاورة عند تشكيل البيان، أمّا 12 و23 فليسا كذلك. لاحظ أنه لكل مجموعة ثنائية ab، هنالك ثلاث طرق لاختيار مجموعة ثنائية العناصر من العناصر الثلاثة المتبقية في [5]. لذلك فإنّ درجة كل رأس 3.

يتكوّن بيان بيترسون من حلقتين منفصلتين على 5 رؤوس إضافة إلى أضلاع لربط الرؤوس في هاتين الحلقتين. ومن تعريف خاصية الانفصال، نجد أنّ 12، 34، 51، 23، 45 على الترتيب، هي رؤوس لحلقة على 5 رؤوس، وبطريقة مشابهة تضبط بقية الرؤوس 13، 52، 41، 35، 24. لاحظ أيضًا أن 13 يكون متجاورًا مع 45 في حين يكون 52 متجاورًا مع 34، وهكذا دواليك، كما هو مبيّن على اليسار في الأعلى.

نستخدم هذا الاسم حتى عندما لا نعيّن عناوين الرؤوس؛ وفي الأساس، نستخدم "بيان بيترسون" بوصفه اسمًا لصف تشاكل. ولنبينّ أنّ البيانات في الأعلى متشاكلة معًا زوجًا زوجًا، فيكفي أن نسمي الرؤوس في كل بيان باستخدام مجموعات فرعية ثنائية العناصر من [5]، وحيث تكون علاقة التجاور في كل حالة هي خاصية الانفصال (تمرين 24). ■

38.1.1. قضية. إذا كان هنالك رأسان غير متجاورين في بيان بيترسون فإنه يوجد لهما بالضبط جار مشترك واحد فقط.

الإثبات: الرؤوس غير المتجاورة مجموعات ثنائية تتشارك في عنصر واحد؛ وحجم اتحادهما S يساوي 3، إضافة إلى أنّ الرأس المجاور لهما هو مجموعة ثنائية منفصلة عن كليهما، وبما أننا نختار المجموعات الثنائية من $\{1, 2, 3, 4, 5\}$، فتوجد مجموعة ثنائية واحدة بالضبط منفصلة عن S. ■

39.1.1. تعريف. نُعرّف الخصر (**girth**) للبيان الذي يمتلك حلقة على أنه طول أقصر حلقة في هذا البيان، أما البيان الذي ليس فيه حلقات فيكون خصره لا نهائيًّا.

40.1.1. نتيجة. خصر بيان بيترسون يساوي 5.

الاثبات: هذا البيان بسيط. ولذلك، ليس له حلقة على رأس واحد ولا حلقة على رأسين، لاحظ أن

الحلقة على ثلاثة رؤوس تتطلب ثلاثة أزواج من المجموعات الثنائية المنفصلة زوجًا زوجًا، وهذا لا يمكن حدوثه بين 5 عناصر، لاحظ أنّ الحلقة على أربعة رؤوس في غياب حلقة على ثلاثة رؤوس تتطلب رؤوسًا غير متجاورة مع رأسين جارين مشتركين، وهذا ما تمنعه القضية 38.1.1. وفي النهاية، نجد أنّ الرؤوس: 12، 34، 51، 23، 45 تعطينا حلقة خماسية، وبذلك يكون الخصر 5. ■

إن بيان بيترسون متماثل بشدة؛ حيث إنّ كلّ تبديلة من {5، 4، 3، 2، 1} تولّد تبديلة على المجموعات الجزئية الثنائية، وتحافظ على علاقة خاصية الانفصال. وعليه، فيوجد على الأقل $5! = 120$ تشاكلاً من بيان بيترسون إلى نفسه، ويؤكد التمرين 43 أنه لا يوجد غيرها.

41.1.1.* تعريف. التشاكل الذاتي (**Automorphism**) للبيان G، هو تشاكل من G إلى G. يكون البيان G متعدّي الرؤوس (*Vertex–transitive*) إذا وُجد لكلّ زوج $u,v \in V(G)$ تشاكل ذاتي يرسل u إلى v.
لاحظ أنّ التشاكلات الذاتية لـ G هي التباديل لـ $V(G)$ التي يمكن تطبيقها على كلّ من صفوف $A(G)$ وأعمدتها دون أن تغيّر $A(G)$.

42.1.1.* مثال. التشاكلات الذاتية. ليكن G هو المسار على مجموعة الرؤوس {1،2،3،4} ومجموعة الأضلاع {12، 23، 34}. يوجد لهذا البيان تشاكلان ذاتيان، هما: التبديل المحايد والتبديل الذي يبدل 1 مع 4 ويبدل 2 مع 3، ولاحظ أنّ تبادل الرؤوس 1 و 2 لا يشكل تشاكلاً ذاتيًا لـ G، وذلك على الرغم من أنّ G يتشاكل مع البيان الذي تكون مجموعة رؤوسه {4، 3، 2، 1} ومجموعة أضلاعه {34، 13، 21}. ولاحظ في البيان $K_{r,s}$، أنّ تبديل الرؤوس في إحدى المجموعات المجزأة، لا يغيّر مصفوفة التجاور؛ وهذا يعطي $r!s!$ تشاكلاً، وعندما يكون $r = s$، فإننا نستطيع أن نُبادل المجموعات المجزأة؛ ولاحظ أنه يوجد $2(t!)^2$ تشاكلاً لـ $K_{t,t}$.

يكون البيان الثنائي العصبة $K_{r,s}$ متعدّي الرؤوس إذا وفقط إذا كان $r=s$. وإذا كان $n > 2$، فإن P_n لا يكون متعدي الرؤوس، ولكن كل حلقة تكون متعدية الرؤوس. لاحظ أيضًا أنّ بيان بيترسون متعدّي الرؤوس. ■

في البيان متعدّي الرؤوس، نستطيع أن نثبت عبارة ما حول كلّ رأس بإثبات تلك العبارة لرأس واحد؛ لأن هذه الخاصية تضمن أنّ البيان "يشبه بعضه بعضًا" عند كل رأسّ.

تمارين (Exercises)

عمومًا، لاحظ أنّ حلول المسائل يتطلب كتابة تعليل واضح في جمل مفيدة، ولاحظ كذلك أنّ العلامات على المسائل لها المعاني الآتية:

"(−)" = الأسهل أو الأقصر من المعظم.

"(+)" = الأصعب أو الأطول من المعظم.

"(!)" = لها فائدة خاصة أو تمرين تثقيفي وتعليمي.

"(*)" = يشمل مفاهيم معينة اختيارية في السياق.

تبدأ تمارين الدروس من المسائل الأبسط لفحص الفهم، وتنتهي مع خط من النقاط. أما المسائل المتبقية، فتتبع الترتيب الموجود في النص.

1.1.1. (−) حدّد أيّ البيانات الثنائية الفرع التامة هي بيانات تامة.

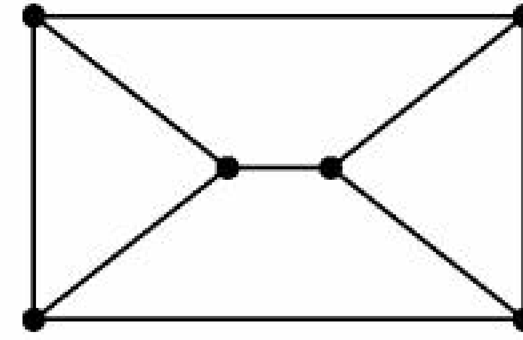
2.1.1. (-) اكتب الاحتمالات الممكنة جميعها لمصفوفات التجاور، ومصفوفات الوقوع للمسارات التي لها ثلاثة رؤوس. واكتب كذلك مصفوفة تجاور لمسار له ستة رؤوس، ولحلقة لها ستة رؤوس.

3.1.1. (-) باستخدام القوالب المستطيلة التي تكون مدخلاتها جميعها متساوية، اكتب مصفوفة التجاور لـ $K_{m,n}$.

4.1.1. (-) من تعريف التشاكل، أثبت أنّ $G \cong H$ إذا وفقط إذا كان $\overline{G} \cong \overline{H}$.

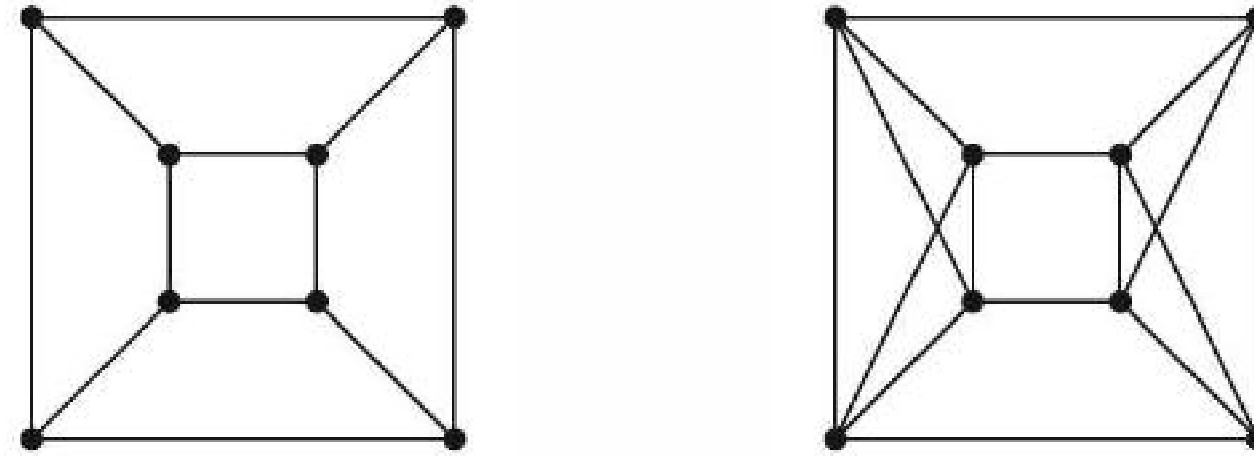
5.1.1. (-) أثبت أو انقض ما يأتي: إذا كانت درجة كلّ رأس في بيان بسيط G تساوي 2، فإنّ G يكون حلقة.

6.1.1. (-) بين ما إذا كان البيان المرسوم أدناه يتفكّك إلى نسخ من P_4.



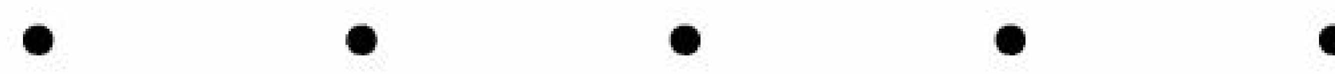
7.1.1. (-) أثبت أنّ البيان الذي له أكثر من ستة رؤوس ذات درجة فردية، لا يمكن أن يتفكك إلى ثلاثة مسارات.

8.1.1. (-) أثبت أنّ البيان على 8 من الرؤوس الموجود على اليسار أدناه، يتفكك إلى نسخ من $K_{1,3}$، وكذلك إلى نسخ من P_4.

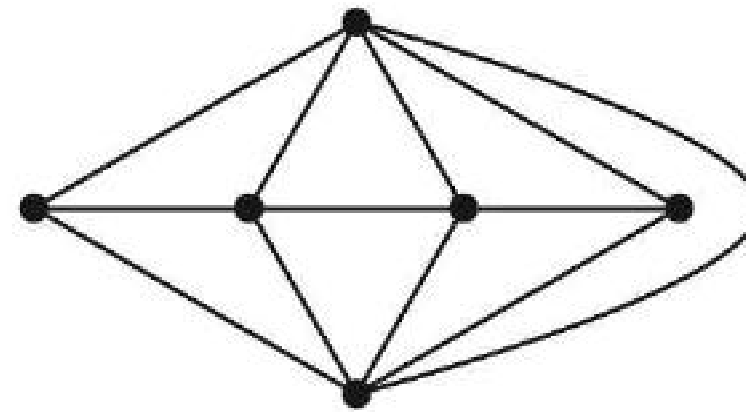


9.1.1. (-) أثبت أن البيان عن اليمين أعلاه متشاكل مع متمّمة البيان عن اليسار.

10.1.1. (-) أثبت أو انقض ما يأتي: يجب أن تكون متمّمة البيان البسيط غير المترابط بيانًا مترابطًا.



11.1.1. حدّد أكبر حجم لكلّ من عصبة وحجم لمجموعة مستقلة في البيان أدناه.



12.1.1. حدّد ما إذا كان بيان بيترسون ثنائي الفرع، وجد حجم أكبر مجموعة مستقلة لهذا البيان.

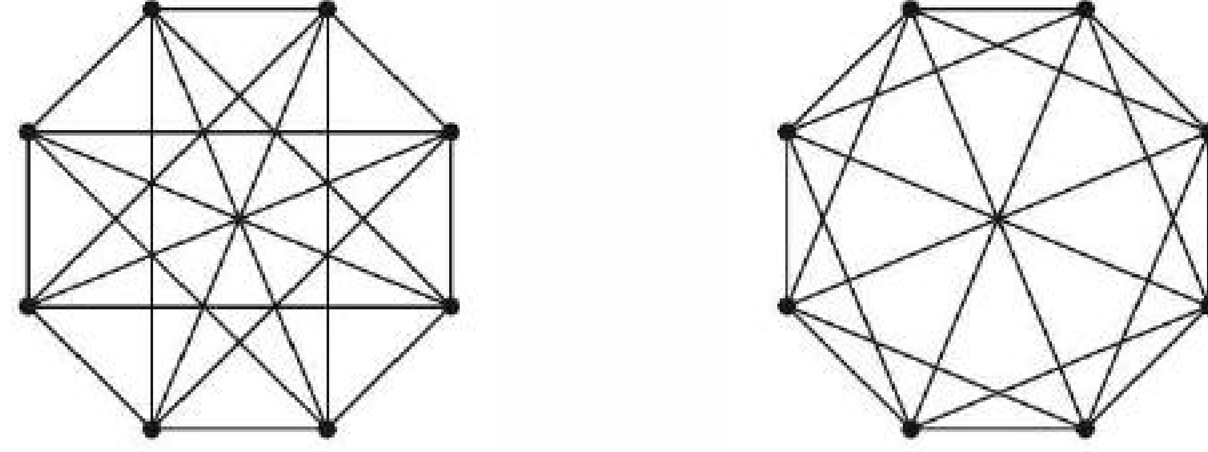
13.1.1. ليكن G البيان الذي تكون مجموعة رؤوسه هي المرتّبات من الدرجة k وإحداثياتها مأخوذة من المجموعة $\{0,1\}$، بحيث إنّ x يجاور y عندما يختلفان في موقع واحد بالضبط. حدّد ما إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع.

14.1.1. (!) أثبت أنّ إزالة الزوايا المربّعة المائلة من لوحة الفاحص التي حجمها 8 في 8 تترك لوحة جزئية، لا يمكن تجزئتها إلى مستطيلات من الحجم 1×2 و 2×1. وباستخدام التعليل نفسه، جد عبارة عامة حول البيانات الثنائية الفرع جميعها.

15.1.1. خذ العائلات الأربع للبيانات الآتية في الحسبان:

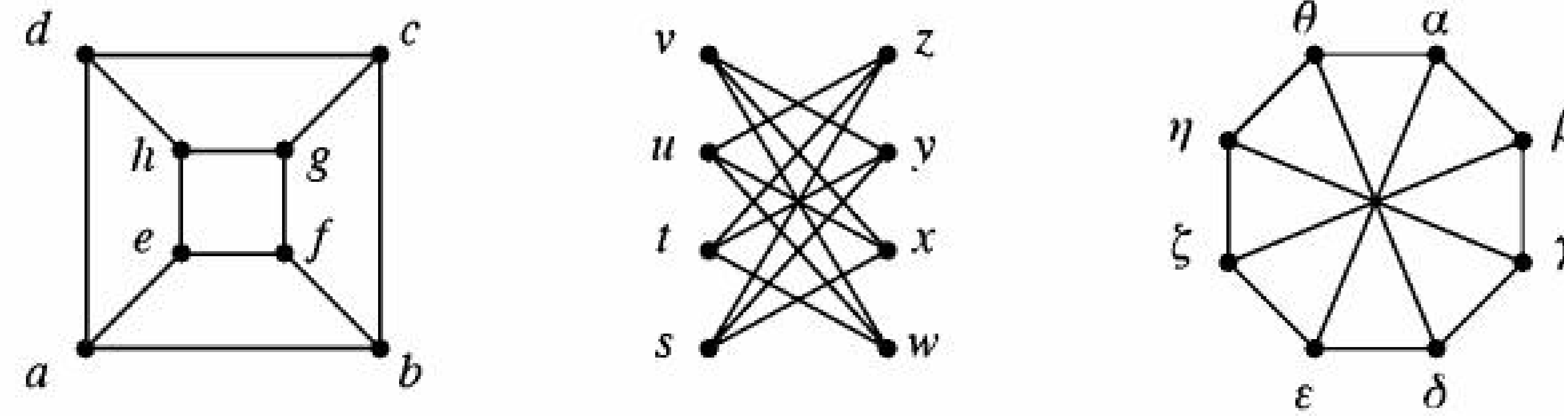
A = {مسارات}، B ={حلقات}، C = {بيانات تامة} D = {بيانات ثنائية الفرع}. لكلّ زوج من هذه العائلات، حدّد صفوف التشاكلات جميعها للبيانات التي تنتمي إلى عائلتين.

16.1.1. حدّد ما إذا كان البيانان أدناه متشاكلين.

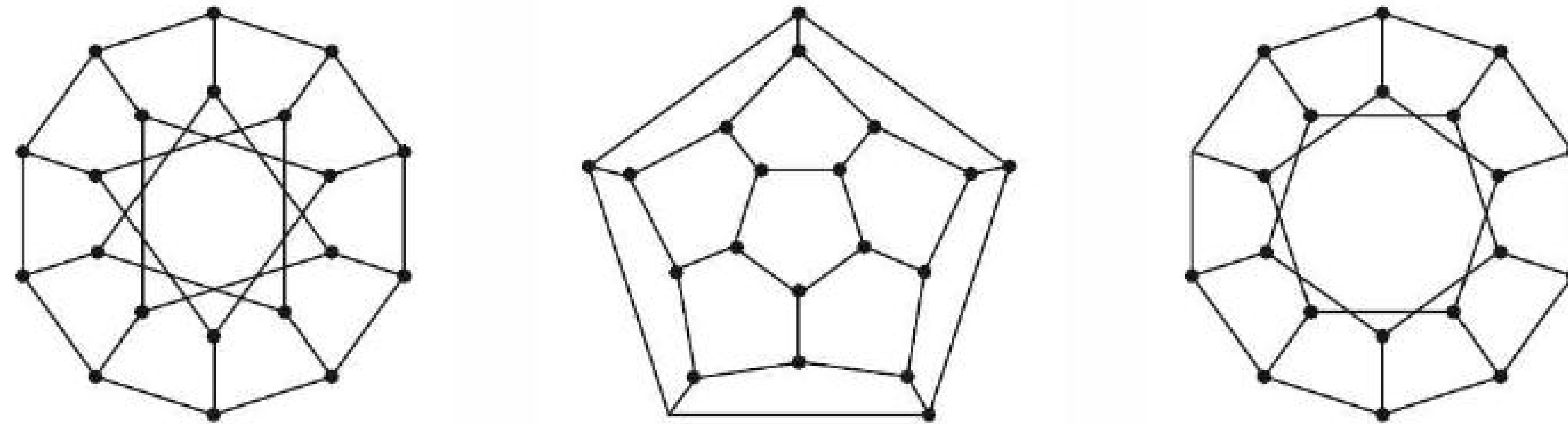


17.1.1. حدّد عدد صفوف التشاكل للبيانات البسيطة التي لها سبعة رؤوس، بحيث تكون درجة كل رأس 4.

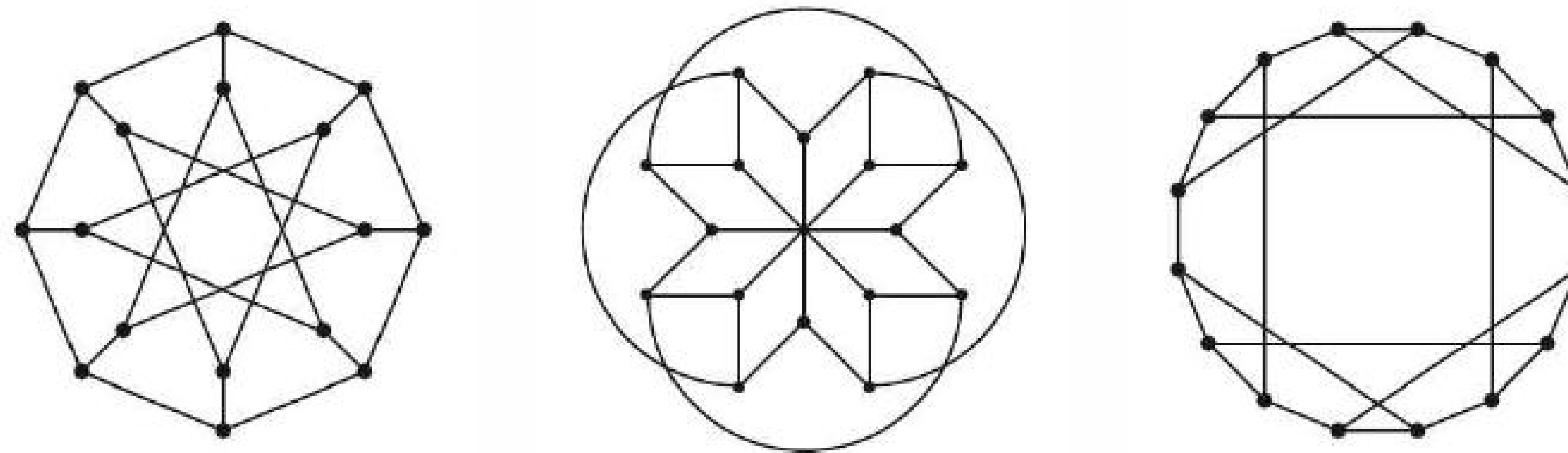
18.1.1. حدّد أيّ أزواج البيانات المرسومة أدناه متشاكلة؟



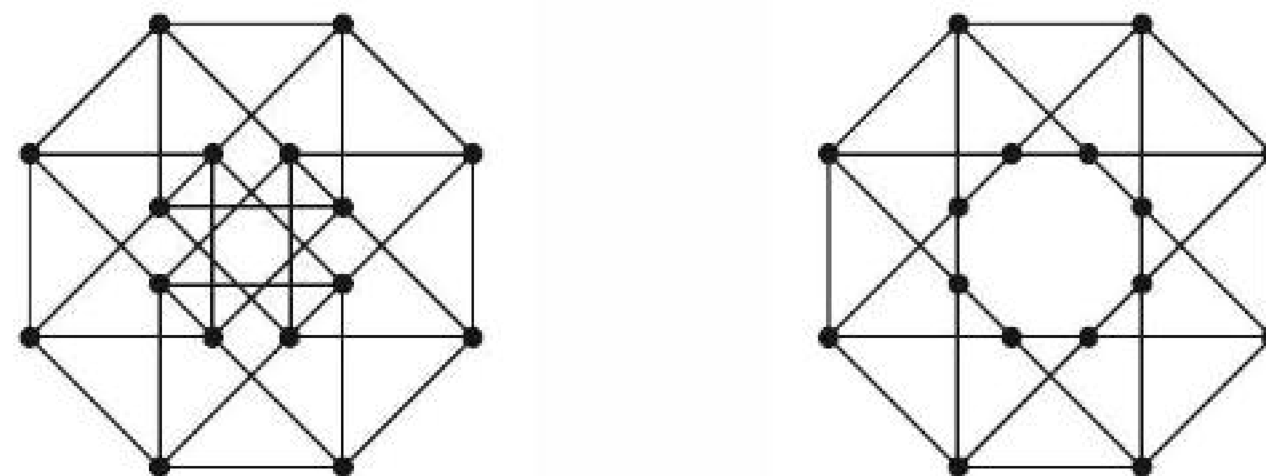
19.1.1. حدد أيّ أزواج البيانات أدناه متشاكلة؟



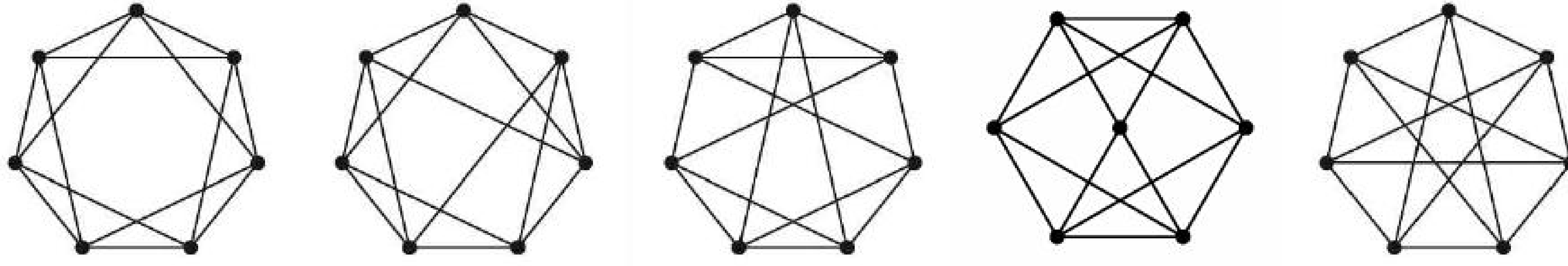
20.1.1. حدد أيّ أزواج البيانات المرسومة أدناه متشاكلة؟



21.1.1. حدّد ما إذا كان البيانان أدناه ثنائيي الفرع، وما إذا كانا متشاكلين. (البيان الموجود على اليسار يظهر على غلاف Watkins – Wilson [1990]).



22.1.1. (!) حدّد أيّ أزواج البيانات المرسومة أدناه تكون متشاكلة، واعرض الإثبات باختبار أقل عدد ممكن من الأزواج.

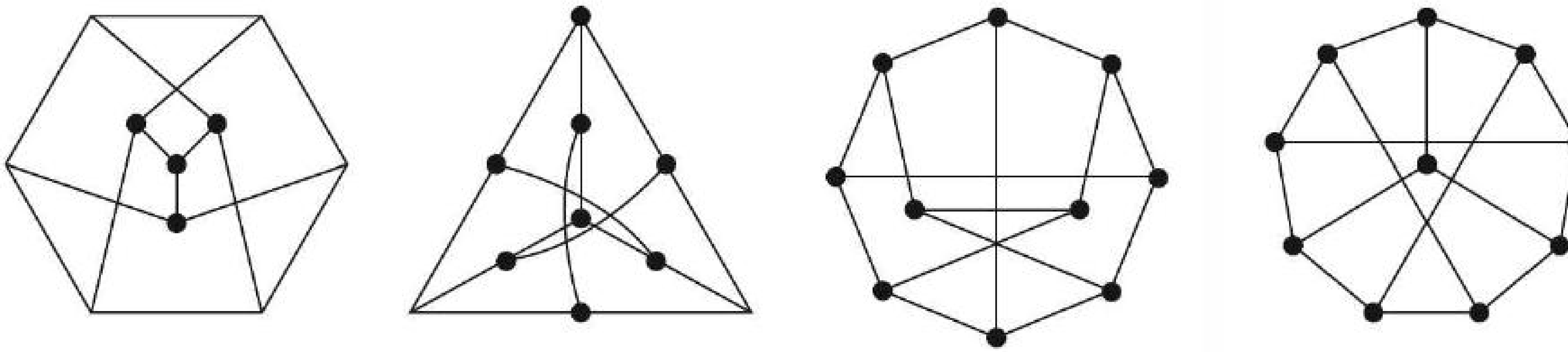


23.1.1. في كلّ صف أدناه، حدّد أقلّ عدد ممكن n بحيث توجد بيانات غير متشاكلة لها n من الرؤوس، ولها القائمة نفسها من درجات الرؤوس:

أ) البيانات جميعها. ب) البيانات التي لا تحوي عرًى. ج) البيانات البسيطة.

(مساعدة: بما أنّ كلّ صف يحوي الصف الذي يليه، فإنّ الإجابات تشكل ثلاثية غير متناقصة. للفرع (ج)، استخدم قائمة صفوف التشاكلات في المثال 31.1.1)

24.1.1. (!) أثبت أنّ البيانات المرسومة أدناه جميعها رسوم لبيان بيترسون (التعريف 36.1.1). (مساعدة: استخدم تعريف خاصية الانفصال للتجاور)



25.1.1. (!) أثبت أنه لا توجد لبيان بيترسون حلقة طولها 7.

26.1.1. (!) ليكن G بيانًا خصره 4، بحيث تكون درجة كلّ رأس من رؤوسه k. أثبت أنه يوجد لـِ G على الأقل $2k$ رأسًا، وحدّد مثل هذه البيانات جميعها التي لها $2k$ رأسًا بالضبط.

27.1.1. (!) ليكن G بيانًا خصره 5. أثبت أنه إذا كانت درجة كلّ رأس في G تساوي k على الأقل، فإن لـِ G على الأقلّ k^2+1 رأسًا. وعندما $k=2$ و $k=3$، جد بيانًا واحدًا له k^2+1 رأسًا بالضبط.

28.1.1. (+) البيان الفردي O_k. إنّ رؤوس البيان O_k، هي مجموعات جزئية من $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$ تحوي k عنصرًا، ويكون الرأسان متجاورين إذا وفقط إذا كانا مجموعتين منفصلتين. لذلك، فإنّ O_2 هو بيان بيترسون. أثبت أنّ خصر O_k هو 6 إذا كان $k \geq 3$.

29.1.1. أثبت أنّ كل مجموعة من ستة أشخاص تحوي (على الأقلّ) ثلاثة أشخاص متعارفين تمامًا أو ثلاثة أشخاص غرباء تمامًا.

30.1.1. ليكن G بيانًا بسيطًا له مصفوفة التجاور A، ومصفوفة الوقوع M. أثبت أنّ درجة V_i هي المدخلة i في قطر A^2 وفي MM^T. ماذا تقول المدخلات في الموقع (i, j) في A^2 و MM^T عن G؟

31.1.1. (!) أثبت أنه يوجد بيان ذاتي التتام على n من الرؤوس، إذا وفقط إذا كانت n أو $n-1$ تقبل القسمة على 4. (مساعدة: عندما تقبل n القسمة على 4، عمم بنية P_4 بتقسيم الرؤوس إلى أربع مجموعات، وإذا كانت $n \equiv 1 \bmod 4$، فأضف رأسًا للبيان المنشأ على $n-1$ من الرؤوس).

32.1.1. حدد أي ثنائي العصب يتفكك إلى بيانين جزئيين متشاكلين؟

33.1.1. لِـ $n = 7$ ، $n = 5$ ، و $n = 9$ ، فكّك K_n إلى نسخ من C_n.

34.1.1. (!) فكّك بيان بيترسون إلى ثلاثة بيانات جزئية مترابطة بحيث تكون متشاكلة زوجًا زوجًا، وكذلك فكّكه إلى نسخ من P_4.

35.1.1. (!) أثبت أنّ K_n يتفكّك إلى ثلاثة بيانات جزئية متشاكلة زوجًا زوجًا، إذا وفقط إذا كان $n+1$ لا يقبل القسمة على 3. (مساعدة: للحالة حيث n تقبل القسمة على 3، قسم الرؤوس إلى ثلاث مجموعات متساوية الحجم).

36.1.1. أثبت أنه إذا كان K_n يتفكك إلى مثلثات، فإنّ $n-1$ أو $n-3$ تقبل القسمة على 6.

37.1.1. ليكن G بيانًا بحيث تكون درجة كل رأس فيه 3. أثبت أنّ G لا يتفكك إلى مسارات لكل منها خمسة رؤوس على الأقل.

38.1.1. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا، بحيث تكون درجة كل رأس فيه تساوي 3. أثبت أن G يتفكك إلى مخالب إذا وفقط إذا كان G ثنائي الفرع.

39.1.1. (+) حدّد أيّ البيانات في المثال 35.1.1 يمكن أن يستخدم ليشكل تفكيكًا لـ K_6 إلى بيانات جزئية متشاكلة زوجًا زوجًا. (مساعدة: كلّ بيان غير مستثنًى بشرطٍ ما على قابلية القسمة يصلُح.)

40.1.1. (*) ما عدد التشاكلات الذاتية لِـ P_n، C_n، وK_n؟

41.1.1. (*) أنشئ بيانًا بسيطًا على ستة رؤوس له تشاكل ذاتي واحد فقط، وأنشئ بيانًا بسيطًا له ثلاثة تشاكلات ذاتية تمامًا. (مساعدة: أضف مسارات إلى حلقة لتحصل على دوران ثلاثي الطية دون تقلبات (شقلبات).

42.1.1. (*) تحقّق من أنّ مجموعات التشاكلات الذاتية للبيان G تملك الخصائص الآتية:

a) تركيب تشاكلين ذاتيين هو تشاكل ذاتي.

b) التبديل المحايد تشاكل ذاتي.

c) معكوس التشاكل الذاتي أيضًا تشاكل ذاتي.

d) تركيب التشاكلات الذاتية يحّقق الخاصية التجميعية.

(تعليق: لذلك فإنّ مجموعة التشاكلات الذاتية تحقق خصائص الزمرة).

43.1.1. (*) التشاكلات الذاتية لبيان بيترسون. لنأخذ بيان بيترسون كما عرّف بخاصية الانفصال للمجموعات الثنائية من {5، 4، 3، 2، 1}. أثبت أنّ كلّ تشاكل ذاتي يرسل الحلقة ذات الرؤوس 45، 23، 51، 34، 12 إلى الحلقة ذات الرؤوس ab, cd, ea, bc, de يُحددّ بتبديل للمجموعة {5، 4، 3، 2، 1} والذي يأخذ 5، 4، 3، 2، 1 إلى a, b, c, d, e على الترتيب. (تعليق: هذا يؤدي إلى أنه يوجد 120 تشاكلاً ذاتيًا).

44.1.1. (*) يوجد لبيان بيترسون تماثلات أكثر من مجرد تعدّي رؤوس، ليكن $P = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ و$Q = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ مسارين بثلاثة أضلاع في بيان بيترسون. أثبت أنه يوجد بالضبط تشاكل ذاتي واحد لبيان بيترسون، بحيث يرسل u_i إلى v_i لكل $i = 0، 1، 2، 3$. (مساعدة: استخدم وصف خاصية الانفصال.)

45.1.1. (*) أنشئ بيانًا على 12 رأسًا، بحيث تكون درجة كل رأس 3، والتشاكل الذاتي الفريد عليه هو التشاكل المحايد.

46.1.1. (*) تعدّي الأضلاع. يكون البيان G متعدّي الأضلاع إذا وُجد لكل $e, f \in E(G)$ تشاكل ذاتي على G يرسل النقاط الطرفية للضلع e إلى النقاط الطرفية للضلع f (في أي ترتيب). أثبت أنّ البيانات في التمرين 21.1.1 متعدية الرؤوس ومتعدّية الأضلاع كذلك. (تعليق: البيانات التامة، وثنائية العصبة، وبيان بيترسون متعدية الأضلاع.)

47.1.1. (*) متعدّي الأضلاع مقابل متعدّي الرؤوس:

a) افترض أنه يمكن الحصول على البيان G من K_n $(n \geq 4)$ بأن يحل محل كلّ ضلع في K_n مسار يتكون من ضلعين؛ وذلك بإضافة رأس جديد درجته 2. أثبت أنّ G متعدّي الأضلاع ولكنه غير متعدّي الرؤوس.

b) افترض أنّ G متعدي الأضلاع، ولكنه غير متعدّي الرؤوس، وليس له رؤوس درجتها 0، أثبت أنّ G ثنائي الفرع.

c) أثبت أنّ البيان في التمرين 6.1.1 هو متعّدي الرؤوس، ولكنه ليس متعدي الأضلاع.

2.1 المسارات، والحلقات، والمسارب (Paths,Cycles, and Trails)

في هذا الدرس، نعود إلى مسألة جسور كونجزبرج، لتحديد إمكانية السير على أضلاع البيان جميعها. وسوف نطوّر أيضًا بعض الخصائص المفيدة للربط والمسارات والحلقات.

قبل أن نبدأ بهذا، دعنا نستذكر إحدى طرائق الإثبات المهمة، حيث يمكن أن نثبت العديد من العبارات في نظرية البيان باستخدام مبدأ الاستقراء. وبالنسبة إلى القراء الذين ليس لديهم إلمام بالاستقراء، فعليهم قراءة المادة حول هذا الأسلوب من الإثبات في ملحق A، وسوف نصف هنا صورة الاستقراء الذي سنستخدمه كثيرًا، وذلك لكي يألف القارئ الإثبات.

1.2.1. نظرية. (مبدأ الاستقراء القوي) (Strong Principle of Induction). لتكن $P(n)$ عبارة حول العدد الصحيح n. إذا تحقق الشرطان التاليان، فإنّ العبارة $P(n)$ تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب:

1) $P(1)$ صحيحة.

2) لكل $n > 1$، "$P(k)$ صحيحة لكل $1 \leq k < n$" تؤدي إلى أن "$P(n)$ صحيحة".

الإثبات. لنفترض خاصية حُسن الترتيب (**Well Ordering Property**) للأعداد الصحيحة الموجبة (كل مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة تحوي عنصرًا أدنى). الآن، افترض أن $P(n)$ غير صحيحة لبعض قيم n. من خاصية حُسن الترتيب، يوجد عنصر أدنى n بحيث تكون $P(n)$ غير صحيحة. العبارة (1) تضمن أنّ هذه القيمة لا يمكن أن تكون 1. أمّا العبارة (2)، فتضمن أنّ هذه القيمة لا يمكن أن تكون أكبر من 1، وهذا التناقض يؤدي إلى أنّ العبارة $P(n)$ متحققة للأعداد الصحيحة الموجبة n. ■

ولكي نطبق الاستقراء، يتعين علينا التحقّق من العبارتين (1) و(2) لمتتالية العبارات خاصتنا؛ حيث إنّ تحقيق العبارة (1) هو الخطوة الأساس (**basis Step**) في الإثبات؛ أما تحقيق العبارة (2) فهو خطوة الاستقراء (**induction step**). في حين أنّ العبارة "$P(k)$ صحيحة لكل $k < n$"، فهي فرضية الاستقراء (**induction hypothesis**)؛ وذلك لأنها فرضية الاقتضاء، والتي تثبت في خطوة الاستقراء، ويسمى المتغيّر الذي يشير إلى متتالية العبارات بوسيط الاستقراء (**induction parameter**).

لاحظ أنّ وسيط الاستقراء يمكن أن يكون دالة صحيحة، مثل عدد الرؤوس أو عدد الأضلاع في بيان ما وذلك بحسب مسألتنا، ونقول إننا نستخدم "استقراءً على n" عندما يكون وسيط الاستقراء هو n.

هناك عدة طرق للتعبير عن براهين الاستقراء، فنستطيع أن نبدأ عند الصفر لإثبات عبارة حول الأعداد الصحيحة غير السالبة. وعندما يكون إثبات $P(n)$ في خطوة الاستقراء باستعمال $P(n-1)$ من فرضية الاستقراء، فإنّ هذا الأسلوب يدعى بالاستقراء "العادي"؛ أما استعمال العبارات السابقة جميعها فيدعى الاستقراء "القوي"، لاحظ أنه من النادر أن نميّز بين الاستقراءين القوي والعادي؛ وهذان النوعان متكافئان (انظر الملحق A).

يتعلم معظم الطلبة الاستقراء العادي أولاً بالأسلوب الآتي: 1) تحقق أنّ $P(n)$ صحيحة عندما ، $n = 1$ و 2)، أثبت أنه إذا كانت $P(n)$ صحيحة عندما n تساوي k، فإنّ $P(n)$ هي أيضًا صحيحة عندما n تساوي $k+1$. إثبات $P(k+1)$ من $P(k)$ لكل $k \geq 1$ يكافئ إثبات $P(n)$ من $P(n-1)$ لكل $n > 1$.

عندما نركّز على إثبات العبارة لقيمة الوسيط n في خطوة الاستقراء، فإننا لا نحتاج أن نقرر في البداية ما إذا كنا سنستخدم الاستقراء القوي أو الاستقراء العادي، فضلًا عن أن اللغة أبسط أيضًا؛ لأننا نتجنّب استحداث اسم جديد للوسيط. وسوف نشرح لماذا يكون هذا الأسلوب أقل عُرضةً للخطأ في الجزء 3.1.

الربط في البيانات (Connection in Graphs)

كما عرفنا في التعريف 1.1. 15، فإن المسار والحلقة هما بيانان؛ فضلًا عن أنّ المسار في البيان G هو بيان جزئي من G، بحيث يكون مسارًا (مشابهًا لذلك الحلقات)، وسوف نقدم تعريفات إضافية لنمذجة بقية الخصائص في البيانات. فمثلاً، ربما يريد سائح يتجّول في مدينة (أو راجل في مدينة كونجزبرج) أن تتكرر الرؤوس، ولكنه يتجنب تكرار الأضلاع. وكذلك فإنّ ساعي البريد يريد أن ينقل البريد إلى المنازل على جانبي الطريق، وعليه يتعيّن أن يقطع كلّ ضلع مرتين.

2.2.1. تعريف. الممر (**walk**) قائمة من الرؤوس والأضلاع $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$، بحيث إنّ v_i و v_{i-1} النقاط الطرفية للضلع e_i ، لكل $1 \leq i \leq k$، ونعرّف المسرب (**trail**) على أنه ممرّ دون تكرار أضلاع. إن الممر من u إلى v (**u,v-walk**) أو المسرب من u إلى v (**u,v-trail**) يبدأ بالرأس u وينتهي بالرأس v؛ وهذه هي نقاطه الطرفية (**endpoints**). لاحظ أن المسار من u إلى v هو مسار درجة رؤوسه (نقاطه الطرفية) u, v تساوي 1؛ أمّا باقي الرؤوس، فهي رؤوس داخلية (**internal vertices**).

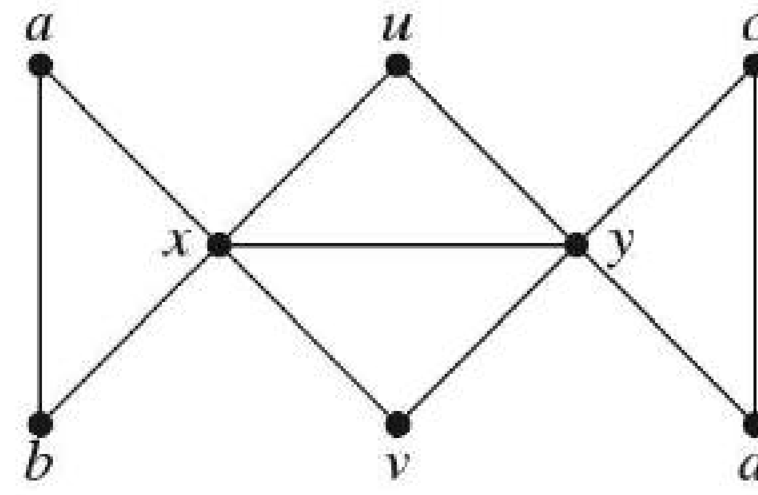
أما طول (**length**) الممر والمسرب والمسار أو الحلقة فهو عدد أضلاعه (أضلاعها)، ويكون الممر أو المسرب مغلقًا (**closed**) إذا كانت نقاطه الطرفية هي الرأس نفسه.

3.2.1. مثال. في بيان كونجزبرج (المثال 1.1.1)، القائمة $x, e_2, w, e_5, y, e_6, x, e_1, w, e_2, x$ هي ممر مغلق طوله 5؛ وبما أنه يكرر الضلع e_2، فإنه ليس مسربًا، لاحظ أنّ حذف آخر ضلع وآخر رأس يعطي مسربًا بطول 4؛ وهذا المسرب يكرر الرؤوس، ولكنه لا يكرر الأضلاع، أمّا البيان الجزئي الذي يتكوّن من الأضلاع e_1, e_5, e_6، والرؤوس x, w, y فهو حلقة طولها 3، وحذف أحد أضلاعها يعطي مسارًا، لاحظ أنّ ضلعين لهما النقاط الطرفية نفسها (مثل e_1 و e_2) يشكلان حلقة طولها 2. والأنشوطة هي حلقة طولها 1. ■

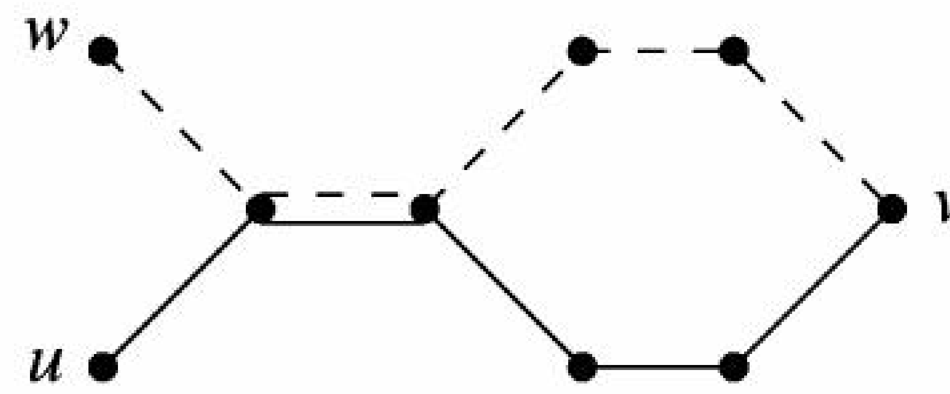
السبب في إدراج قائمة الأضلاع في ممرّ هو للتمييز بين الأضلاع المتكررة، ويحدث هذا عندما لا يكون البيان بسيطًا. أمّا في البيان البسيط، فإنّ الممرّ (المسرب) يتحدد تمامًا بترتيب قائمة رؤوسه. عادة ما نسمي المسار والدورة والمسرب أو الممرّ في البيان البسيط فقط بإدراج رؤوسه مرتبة، على الرغم من أنه يتألف من رؤوس وأضلاع. وعند النقاش حول الحلقة، نستطيع أن نبدأ بأيّ رأس ولا نكرره في النهاية، فضلاً عن أننا نستطيع استخدام الأقواس لتوضيح أنها حلقة وليس مسارًا.

4.2.1. مثال. سنوضّح الرموز المُبسطة في بيان بسيط. في البيان المرسوم أدناه، نجد أنّ $a, x, a, x, u, y, c, d, y, v, x, b, a$ تعين ممرًّا مغلقًا بطول 12، وأنّ حذف أول خطوتين يعطي مسربًا مغلقًا.

لاحظ أنّ لهذا البيان خمس حلقات، هي: (a,b,x)، (c,y,d)، (u,x,y)، (x,y,v)، (u,x,v,y)، وأنّ المسرب من u إلى v: u, y, c, d, y, x, v يحوي أضلاع المسار u, y, x, v من u إلى v ، ولا يحوي المسار u, y, v من u إلى v. ■



افترض أننا تتبّعنا مسارًا من u إلى v في بيان ما، ثّم تتبّعنا مسارًا من v إلى w، فليس شرطًا هنا أن يكون الناتج مسارًا من u إلى w؛ لأن المسار من u إلى v، والمسار من v إلى w ربما يكون لهما رأس داخلي مشترك. وعلى الرغم من ذلك، فإنّ قائمة الرؤوس والأضلاع التي نمر بها تشكل ممرًّا من u إلى w. وفي البيان الموضّح أدناه، نجد أنّ الممرّ من u إلى w يحوي مسارًا من u إلى w. لاحظ أنّ القول بأن الممر W يحوي **(contains)** المسار P يعني أنّ الرؤوس والأضلاع في P تظهر بوصفها قائمة جزئية من رؤوس وأضلاع W، مع الترتيب نفسه في P، ولكن ليس بالضرورة أن تكون متتالية في W.



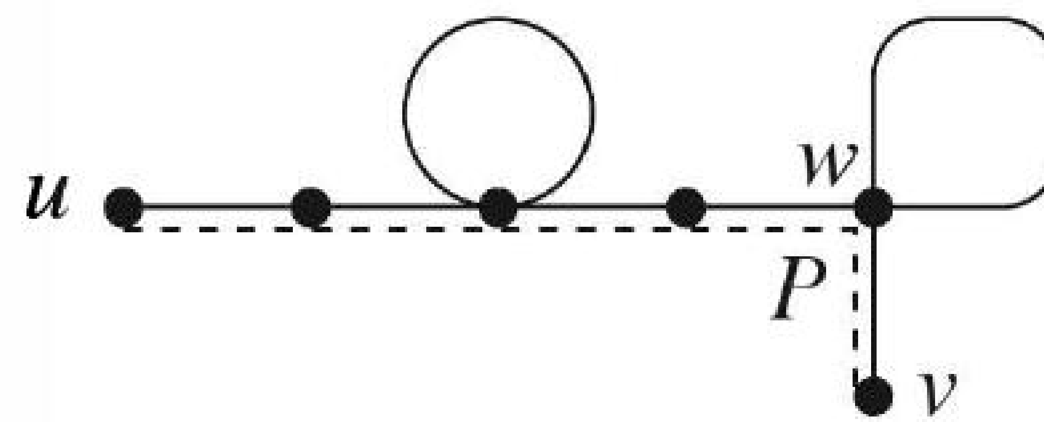
5.2.1. تمهيدية. كلّ ممرّ من u إلى v يحوي مسارًا من u إلى v.

الإثبات: نثبت العبارة بالاستقراء على الطول l للممر W من u إلى v.

خطوة الأساس: $l = 0$. يتكونّ W من رأس واحد $(u = v)$ فقط دون أضلاع. وهذا الرأس هو مسار من u إلى v بطول 0.

خطوة الاستقراء: $l \geq 1$. لنفترض أنّ الادعاء متحقق لكلّ ممر طوله أقلّ من l، فإذا كان W لا يحوي رأسًا متكررًا، فإن رؤوسه وأضلاعه تشكل مسارًا من u إلى v، وإذا كان w رأسًا متكررًا لـ W، فإن حذف الرؤوس والأضلاع بين أماكن ظهور الرأس w المتكرر (تاركين نسخة واحدة من w) يعطينا ممرًّا أقصر W' من u إلى v محتوى في W. ومن فرضية الاستقراء، نعلم أنّ W' يحوي مسارًا P من u إلى v، وهذا المسار P محتوًى في W. ■

التمرين 13b يطور إثباتًا أقصر، وسنطبق البديهية على خصائص الربط.



6.2.1. تعريف. يكون البيان G مترابطًا **(connected)** إذا احتوى على مسار من u إلى v لكل $u,v \in V(G)$(غير ذلك، فإنّ G غير مترابط **(disconnected)**). إذا كان G مسارًا من u إلى v، فإن u مترابط مع **(connected to)** v في G، فضلاً عن أنّ علاقة الربط **(connection relation)** على $V(G)$ تتكونّ من الأزواج المرتبة (u,v)، بحيث u مترابط مع v.

لاحظ أنّ ''مترابط'' صفة نطبقها على البيانات وعلى الأزواج من الرؤوس فقط (قطعًا لا نقول ''يكون v

مترابطًا" عندما يكون v رأسًا). إن العبارة u "مترابط مع v " ملائمة لكتابة البراهين، ولكن يجب أن نفرق بين الربط والتجاور:

يوجد لـ G مسار من u إلى v	$u\,v \in E(G)$
u و v مترابطان	u و v متجاوران
u مرتبطة بـ v	u متجاور مع v

7.2.1. ملاحظة. من البديهية 5.2.1، نستطيع أن نثبت أن بيانًا ما يكون مترابطًا بإثبات أنه يوجد من كل رأس ممر إلى أي رأس محدد آخر.

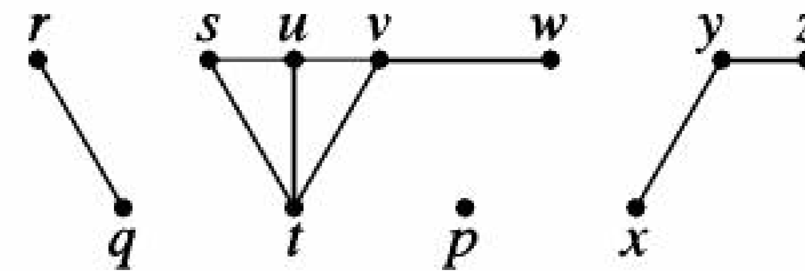
من البديهية 5.2.1، تكون علاقة الترابط متعدية: حيث إنه إذا كان لـ G مسار من u إلى v ومسار من v إلى w، فإن لـ G مسارًا من u إلى w. وكذلك تكون منعكسة (مسارات بطول 0) ومتماثلة (المسارات قابلة للعكس)، لذلك فهي علاقة تكافؤ. ■

يقودنا تعريفنا الآتي إلى صفوف التكافؤ لعلاقة الربط، ونعرف أكبر أو أعظم بيان جزئي مترابط من G على أنه بيان جزئي مترابط وغير محتوى في أي بيان جزئي آخر مترابط آخر في G.

8.2.1. تعريف. مركبات (**components**) البيان G هي أعظم بياناته الجزئية المترابطة، وتكون المركبة (أو البيان) تافهة (**trivial**) إذا كانت لا تحوي أضلاعًا؛ غير ذلك تكون غير تافهة (**nontrivial**). والرأس المعزول (**isolated vertex**) هو رأس درجته 0.

صفوف التكافؤ لعلاقة الربط على $V(G)$، هي مجموعات الرؤوس لمركبات G. والرأس المعزول يشكل مركبة تافهة، تتكوّن من رأس واحد دون أضلاع.

9.2.1. مثال. البيان أدناه له أربع مركبات، إحداها رأس معزول، ومجموعات الرؤوس للمركبات، هي: $\{p\}$ $\{q, r\}$ $\{s, t, u, v, w\}$ $\{x, y, z\}$ وهذه هي صفوف تكافؤ علاقة الربط. ■



10.2.1. ملاحظة. تكون المركبات منفصلة زوجًا زوجًا بعضها عن بعض؛ حيث إنه لا تتشارك مركبتان في رأس، وإضافة ضلع نقاطه الطرفية في مركبتين مختلفتين يجمعهما يجعلهما مركبة واحدة. لذلك فإنّ إضافة ضلع تنقص عدد المركبات بـ 0 أو 1، في حين يزيد حذف ضلع عدد المركبات بِ 0 أو 1. ■

11.2.1. قضية: يوجد لكل بيان على n من الرؤوس و k من الأضلاع $n-k$ مركبة على الأقل.

الإثبات: لاحظ أنه يوجد n مركبة للبيان الذي له n من الرؤوس وليس له أيّ أضلاع، ومن الملاحظة 10.2.1، فإنّ كلّ ضلع يُضاف، ينقص هذا العدد على الأكثر بـ 1، لذلك عندما يضاف k ضلعًا، فإنّ عدد المركبات يبقى على الأقل $n-k$. ■

إن حذف رأس أو ضلع يمكن أن يزيد عدد المركبات، وعلى الرغم من أنّ حذف ضلع من الممكن أن يزيد عدد المركبات فقط بـ 1، إلا أنّ حذف رأس يمكن أن يزيد عدد المركبات بأكثر من 1 (خذ ثنائي العصبة $K_{1,m}$ في الحسبان). وعندما نحصل على بيان جزئي ناتج عن حذف رأس، يجب أن يكون بيانًا. لذلك، فإن حذف الرأس يتبعه حذف الأضلاع الواقعة عليه جميعها.

12.2.1. تعريف. نعرّف ضلع القطع (**cut − edge**) أو رأس القطع (**cut − vertex**) لبيانٍ ما على أنه ضلع أو رأس بحذفه يزيد عدد المركبات، ونكتب $G-e$ أو $G-M$ للبيان الجزئي من G، والذي نحصل عليه بحذف الضلع e أو مجموعة الأضلاع M. نكتب $G-v$ أو $G-S$ للبيان الجزئي الناتج عن حذف

الرأس v أو مجموعة الرؤوس S. ونعرّف البيان الجزئي المُحدث (**induced subgraph**) على أنه بيان جزئي ناتج عن حذف مجموعة من الرؤوس، ونكتب $G[T]$ للدلالة على $G - \overline{T}$، حيث $\overline{T} = V(G) - T$؛ وهذا هو البيان الجزئي لـ G والمُحدث من T.

عندما يكون، $T \subseteq V(G)$ فإن البيان الجزئي المُحدّث $G[T]$ يتكوّن من T والأضلاع التي نقاطها الطرفية محتواة في T جميعها. أمّا البيان الكلي فإنه يكون بيانًا جزئيًّا مُحدّثًا لنفسه، كما هي الحال في حالة الرؤوس المنفردة، وتكون مجموعة من الرؤوس S مجموعة مستقلة إذا وفقط إذا كان البيان الجزئي المُحدث منها لا يمتلك أضلاعًا.

13.2.1. مثال. البيان في المثال 9.2.1 له رأسَا قطع v و y. وله أضلاع قطع، هي qr, vw, xy و yz. (عندما نحذف ضلعًا فإن نقاطه الطرفية تبقى).

لاحظ أنّ C_4 و P_5 هما بيانان جزئيان لهذا البيان، ولكنهما ليسا كبيانات جزئية مُحدّثة، وأنّ البيان الجزئي المُحدث من قبل $\{s, t, u, v\}$ هو طائرة ورقية (kite) والمسارات على هذه الرؤوس الأربعة ليست بيانات جزئية مُحدّثة، أما البيان P_4 فيظهر بوصفه بيانًا جزئيًّا مُحدثًا؛ وهو البيان الجزئي المُحدّث من قبل $\{s, t, v, w\}$ (وكذلك من قبل $\{s, u, v, w\}$). ■

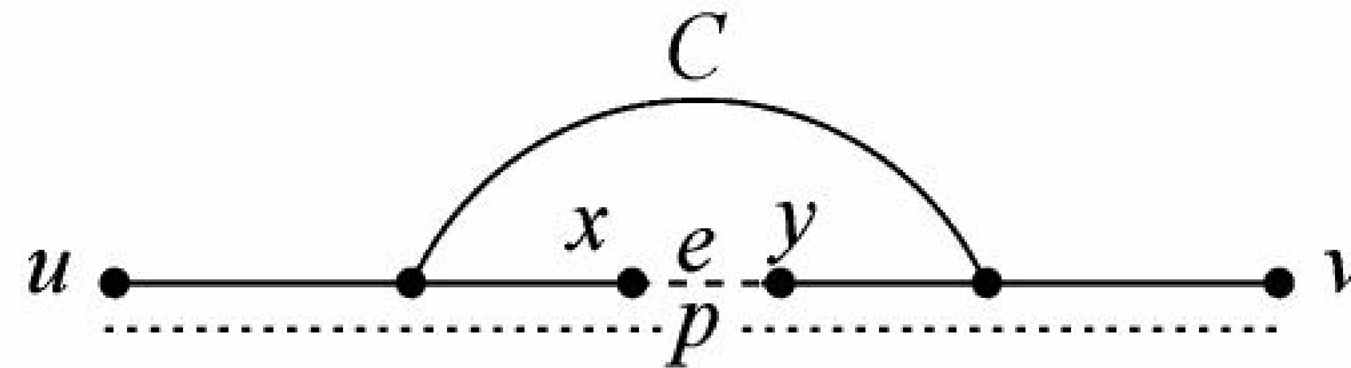
سنميّز لاحقًا أضلاع القطع بلغة الحلقات.

14.2.1. نظرية. يكون ضلع ما ضلع قطع إذا وفقط إذا كان لا ينتمي إلى أيّ حلقة.

الإثبات: ليكن e ضلعًا في البيان G (مع نقاط طرفية x، y)، ولتكن H هي المركبة التي تحوي e. بما أنّ حذف e لا يؤثر في بقية المركبات، فيكفي أن نثبت أنّ $H - e$ تكون مترابطة إذا وفقط إذا كان e ينتمي إلى حلقة.

أولاً، افترض أنّ $H - e$ مترابطة، هذا يؤدي إلى أنّ $H - e$ تحوي مسارًا من x إلى y، وهذا المسار مع e يكمل حلقة.

الآن، افترض أنّ e يقع في الحلقة C. اختر $u, v \in V(H)$، وبما أنّ H مترابطة، فإنّ لـ H مسارًا من u إلى v مثل P، وإذا كانّ P لا يحوي e، فإنّ P موجود في $H - e$، وإذا كان P يحوي e، فافترض من التماثل أنّ x بين u و y في P. وبما أنّ $H-e$ يحوي مسارًا من x إلى u على طول P، ومسارًا من x إلى y على طول C، ومسارًا من y إلى v على طول P، فإنّ خاصية التعدّي لعلاقة الترابط تؤدي إلى أنه يوجد لـ $H-e$ مسار من u إلى v، وبما أننا عملنا هذا لكلّ $u,v \in V(H)$، فإنّ $H-e$ يكون مترابطًا. ■



البيانات الثنائية الفرع (Bipartite Graphs)

هدفنا التالي إعطاء توصيفات مميّزة للبيانات الثنائية الفرع باستخدام الحلقات، وهذه التوصيفات عبارات متكافئة، مثل النظرية 14.2.1. وعندما يكون هنالك شرطان متكافئان، فإن اختبار أحدهما يغني عن اختبار الآخر، إنّ تمييز الصف **G** بواسطة الشرط **P** يعني إثبات التكافؤ "$G \in \mathbf{G}$ إذا وفقط إذا كان G يحقق P"، وبكلمات أخرى، فإنّ الشرط P ضروري وكافٍ للعضوية في G.

الضرورة	الكفاية
$G \in \mathbf{G}$ فقط إذا كان G يحقق P	$G \in \mathbf{G}$ إذا كان G يحقق P
$G \in \mathbf{G} \Rightarrow G$ يحقق P	G يحقق $P \Rightarrow G \in \mathbf{G}$

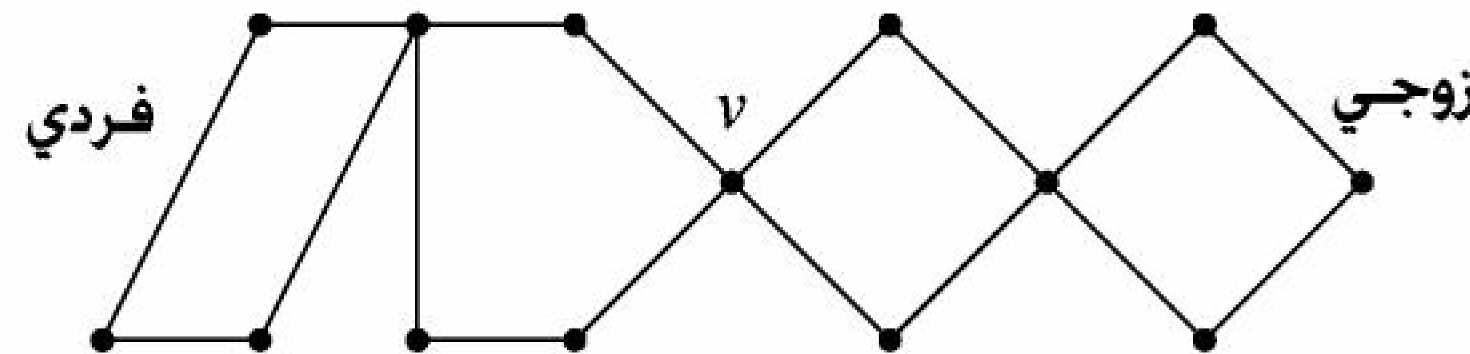
نذكّر أنّ الأنشوطة هي حلقة طولها 1، وكذلك فإنّ أيّ ضلعين مختلفين لهما النقاط الطرفية نفسها يشكلان حلقة بطول 2، ويكون الممرّ فرديًّا أو زوجيًّا بحسب طوله إذا كان فرديًّا أو زوجيًّا. كما في البديهية 5.2.1، فإنّ الممرّ المغلق يحوي حلقة ما مثل C إذا كانت رؤوس C وأضلاعه تظهر بوصفها قائمة جزئية من W، بترتيب دائري، ولكن ليس ضروريًّا أن تكون بترتيب متعاقب. ونستطيع أن نعدَّ كلًّا من الممرّ المغلق أو الحلقة يبدأ أو تبدأ بأيّ رأس من رؤوسه والبديهية التالية تتطلب وجهة النظر هذه.

15.2.1 تمهيدية. كلّ ممرّ فردي مغلق يحوي حلقة فردية.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على الطول l لممر فردي مغلق W.

خطوة الأساس: $l = 1$. ممرّ مغلق طوله 1 يعبر حلقة طولها 1.

خطوة الاستقراء: $l > 1$. افترض أنّ الادعاء متحقّق لكلّ ممرّ فردي مغلق أقصر من W. إذا كان W لا يحوي رؤوسًا متكررة (غير الأول = الأخير)، فإنّ W نفسه شكل حلقة بطول فردي، ولكن إذا كان v رأسًا متكررًا في W، فإننا نعدّ أنّ W يبدأ عند v، ويقسم W إلى ممرّين من u إلى v، وبما أنّ طول W فردي، إذن، فإنّ أحد الممرين فردي والآخر زوجي، بالإضافى إلى أنّ طول الممرّ الفردي أقصر من W. ونجد من فرضية الاستقراء، أنه يحوي حلقة فردية تظهر بالترتيب الذي في W. ■



16.2.1. ملاحظة. ليس من الضروري أن يحوي الممر الزوجي المغلق حلقة؛ ببساطة ربّما تتكرّر. وعلى الرغم من ذلك، إذا ظهر ضلع ما مثل e بالضبط مرة واحدة في ممرّ مغلق مثل W، فإنّ W يحوي حلقة من خلال e. لتكن x, y النقطتين الطرفيتين لـ e، لاحظ أنّ حذف e من W يترك ممرًّا من x إلى y متفاديًا e. ومن البديهية 5.2.1، نجد أنّ هذا الممرّ يحوي مسارًا من x إلى y، وهذا المسار يكمل حلقة مع e. (انظر التمرينين $15 - 16$). ■

البديهية 15.2.1 سوف تساعدنا على تمييز البيانات الثنائية الفرع.

17.2.1. تعريف. التجزئة الثنائية (**bipartition**) للبيان G هي تحديد مجموعتين مستقلتين منفصلتين من رؤوس G، ويكون اتحادهما $V(G)$. إنّ العبارة "ليكن G بيانًا ثنائي الفرع مع التجزئة الثنائية X, Y" تحدد مثل هذه التجزئة، ونعني ببيان ثنائي بالتجزئة الثنائية (X, Y – **bigraph**) X, Y بيانًا ثنائي الفرع وله التجزئة الثنائية X, Y لمجموعة رؤوسه.

لاحظ أنّ مجموعات التجزئة الثنائية هي مجموعات مجزأة (التعريف 10.1.1)، وأنّ للبيان الثنائي الفرع غير المترابط أكثر من تجزئة ثنائية واحدة، في حين أنّ البيان الثنائي الفرع المترابط له تجزئة ثنائية واحدة فقط ما عدا تبادل مجموعتي التجزئة (التمرين 7).

18.2.1. نظرية. (كونج [1936] (König)) يكون البيان ثنائي الفرع إذا وفقط إذا خلا من الحلقات الفردية.

الإثبات: الضرورة. ليكن G بيانًا ثنائي الفرع، وحيث إنّ كل ممر في G يتناوب بين مجموعتي التجزئة؛ لذلك فإنّ كل عودة إلى مجموعة التجزئة الأصلية تحدث بعد عدد زوجي من الخطوات، ومن هنا، لا توجد في G حلقات فردية.

الكفاية. ليكن G بيانًا خاليًا من الحلقات الفردية. سنثبت أنّ G ثنائي الفرع بإنشاء تجزئة ثنائية لكلّ

مركبة تافهة من مركبات G. ليكن u رأسًا في مركبة غير تافهة مثل H. لكلّ $v \in V(H)$، اجعل $f(v)$ تمثّل أقلّ طول لمسار من u إلى v، وبما أنّ H مترابط، فإنّ $f(v)$ معرفة لكل $v \in V(H)$.

ليكن $X = \{v \in V(H)$: $f(v)$ زوجيًّا$\}$ و $Y = \{v \in V(H)$: $f(v)$ فرديًّا$\}$. فإذا كان $v\,v'$ ضلعًا في البيان G بحيث يكون v ، v' رأسين في المجموعة X أو في المجموعة Y، فإنه يوجدُ ممرّ فردي مغلق باستخدام أقصر مسار من u إلى v ، وهذا الممرّ هو الضلع $v\,v'$ ، ومعكوس أقصر مسار من u إلى v'. ولكن باستخدام البديهية 15.2.1 ، فإنّ مثل هذا الممرّ سوف يحتوي على حلقة فردية، وهذا يناقض افتراضنا. لذلك، فإنّ X و Y مجموعتان مستقلتان. كذلك $X \cup Y = V(H)$، وعليه، فإنّ H بيان ثنائي بالتجزئة الثنائية Y ، X. ■

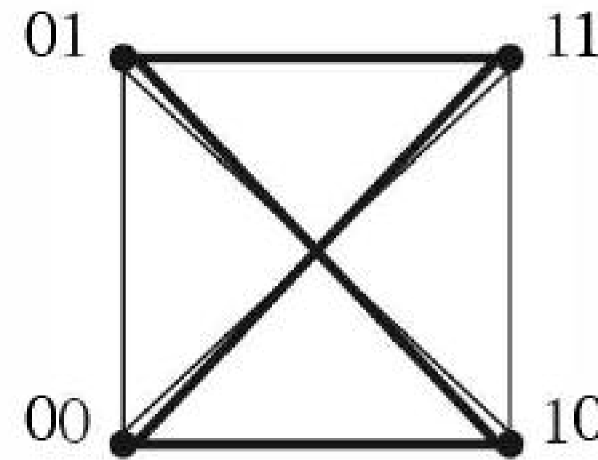


19.2.1. ملاحظة. اختبار البيان ما إذا كان ثنائي الفرع. لاحظ أنّ النظرية 18.2.1 تعطينا الحالة التي يكون فيها البيان ليس ثنائي الفرع؛ حيث نستطيع أن نثبت أنّ البيان ليس ثنائي الفرع عن طريق إيجاد حلقة فردية في G، وهذا أسهل كثيرًا من اختبار الاحتمالات جميعها للتجزئات الثنائية، والتأكد من أنّ البيان ليس ثنائي الفرع. عندما نريد أن نثبت أنّ البيان G ثنائي الفرع، فسوف نعرّف تجزئة ثنائية، ثمّ نثبت أنّ هاتين المجموعتين مستقلتان، وهذا أسهل كثيرًا من اختبار الحلقات في البيان G جميعها. ■

سنأخذ في الحسبان تطبيقًا واحدًا، وقبل ذلك لنأخذ التعريف الآتي:

20.2.1. تعريف. اتحاد (**union**) البيانات G_1، ... ، G_k يكتب على الصورة $G_1 \cup \ldots \cup G_k$، ويعرف على أنّه البيان الذي تكون مجموعة رؤوسه $\bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$ ، ومجموعة أضلاعه $\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$.

21.2.1. مثال. في الشكل أدناه، نبيّن كيف أنّ K_4 اتحاد حلقتين لكلّ منهما أربعة رؤوس، لاحظ أنه عندما نعبّر عن البيان G بوصفه اتحادًا لبيانين جزئيين أو أكثر، فإنّ أي ضلعٍ في G يمكن أن ينتمي إلى أكثر من بيان جزئي، وهذا يميز الاتحاد عن التفكيك؛ حيث إنّ الضلع في حال التفكيك ينتمي إلى بيان جزئي واحد فقط في القائمة. ■



22.2.1. مثال. لنأخذ في الحسبان نظام حركة مرور الطائرات لـ k من الخطوط الجوية، وافترض أنّ:

1) خدمة مباشرة بين مدينتين تعني رحلة مباشرة ذهابًا وإيابًا (round trip).

2) لكل زوج من المدن توجد خدمة مباشرة على الأقل من خط جوي واحد.

وافترض أيضًا عدم وجود أيّ خط طيران يستطيع أن يضع في جدوله حلقة فردية من المدن. أوجد أكبر عدد ممكن من المدن في هذا النظام بدلالة k.

لاحظ من النظرية 18.2.1، أننا نبحث عن أكبر عدد n، بحيث يمكن كتابة K_n في صورة اتحاد k من البيانات الثنائية الفرع، بيان ثنائي الفرع لكلّ خط جوي، والجواب هو 2^k. ■

23.2.1. نظرية. يمكن التعبير عن البيان التام K_n كاتحاد k من البيانات الثنائية الفرع إذا وفقط إذا كان $n \leq 2^k$.

الإثبات. سوف نستخدم الاستقراء على k. خطوة الأساس: $k = 1$. بما أنّ K_3 يحوي حلقة فردية، و K_2 لا يحوي حلقة فردية، فإنّ K_n نفسه بيان ثنائي الفرع إذا وفقط إذا كان $n \leq 2$.

خطوة الاستقراء: $k > 1$. سوف نثبت كلّ اتجاه باستخدام فرضية الاستقراء.

أولاً: افترض أنّ $K_n = G_1 \cup \ldots \cup G_k$ ، حيث G_i ثنائي الفرع لكل i. نقوم بتجزئة مجموعة الرؤوس إلى المجموعتين X و Y، بحيث لا يكون لـ G_k ضلعًا داخل X أو داخل Y، لاحظ أنّ اتحاد البيانات الجزئية الثنائية الفرع المتبقية وعددها $k-1$ يجب أن يَغطي البيان الجزئي التام المُحدث من كلّ من X وY، وبتطبيق فرضية الاستقراء على كل مجموعة، نستنتج أنّ $|X| \leq 2^{k-1}$ و $|Y| \leq 2^{k-1}$ ، لذا فإنّ $n \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$.

وبالعكس، افترض أنّ $n \leq 2^k$. جزّئ مجموعة الرؤوس إلى المجموعتين Y، X، بحيث يساوي حجم كلّ مجموعة منهما 2^{k-1} على الأكثر. ونستطيع الآن، من فرضية الاستقراء، أن نغطي البيان الجزئي التام الناتج عن أيّ من المجموعتين X و Y بـ $k-1$ من البيانات الجزئية الثنائية الفرع، لاحظ أنّ اتحاد البيان الجزئي رقم i على X مع البيان الجزئي رقم i على Y يشكل بيانًا ثنائي الفرع. لذلك، نحصل على $k-1$ من البيانات الثنائية الفرع التي يتكوّن اتحادها من البيانات الجزئية التامة المحدّثة من X و Y. أمّا الأضلاع المتبقية، فهي أضلاع ثنائية العصبة وتجزئتها الثنائية X, Y. وبجعل هذا البيان هو البيان الجزئي الثنائي الفرع، يكتمل البناء. ■

لاحظ أنه من الممكن أن نثبت هذه النظرية دون استخدام الاستقراء، وذلك بتشفير الرؤوس بوصفها مرتبات ثنائية من الدرجة k (التمرين 31).

حلقات أويلر (Eulerian Circuits)

نعود إلى تحليلنا السابق لمسألة جسور كونجزبرج، حيث إنّ الناس في هذه المدينة يريدون مسربًا مغلقًا يحوي الأضلاع جميعها في البيان. وكما لاحظنا، فإنّ الشرط الضروري لوجود مثل هذا المسرب، هو أن تكون درجة كل رأس زوجية، وأن تنتمي الأضلاع جميعها إلى المركبة نفسها في البيان.

في عام [1736م] بينّ العالم الرياضي السويسري ليونارد أويلر (Leanhard Euler) (تلفظ "أويلر") أنّ هذه الشروط كافية أيضًا، وتكريمًا لإسهاماته، فإننا نضع اسمه على مثل هذه البيانات، إلا أنّ بحث أويلر الذي ظهر في العام 1741م لم يقدم إثباتا واضحًا أن الشروط الضرورية هي كافية لهذه المسألة. وفي العام 1873م قدّم هيرهولز (Hierholzer) أول إثبات كامل ومنشور لهذه المسألة. ومن الجدير بالذكر أنّ البيان الذي رُسم في المثال 1.1.1 لنمذجة المدينة لم يظهر بصورة مطبوعة إلا في العام 1894م (انظر ويلسون Wilson) [1986] (لمناقشة السجل التاريخي لهذه المسالة).

24.2.1. تعريف. يكون البيان أويلريًّا (**Eulerian**) إذا وُجد فيه مسرب مغلق يحوي الأضلاع جميعها. والحلقة (**circuit**) مسرب مغلق لا يُحدّد فيه الرأس الأول في قائمة الرؤوس والأضلاع، ولكن يحافظ فيه على ترتيب القائمة بصورة دائرية. أمّا الحلقة الأويلرية (**Eulerian circuit**) أو المسرب الأويلري (**Eulerian trail**) في البيان فهي حلقة أو مسرب تحوي أو يحوي الأضلاع جميعها. يعرّف البيان الزوجي (**even graph**) على أنه البيان الذي تكون درجة كل رأس من رؤوسه زوجية، ويكون الرأس فرديًّا (**odd**) أو زوجيًّا [even] إذا كانت درجته فردية أو زوجية.

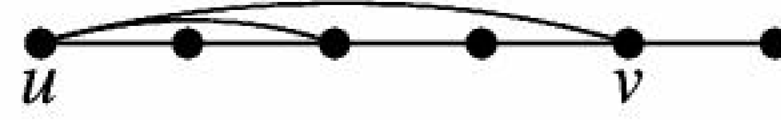
ينطبق نقاشنا حول الحلقات الأويلرية أيضًا على البيانات التي تملك عرًى؛ ويمكن تعميم فكرة درجة الرأس إلى البيانات التي فيها عرًى بإضافة 2 إلى درجة كلّ رأس يملك أنشوطة، وهذا لا يغيرّ النوعية (**parity**) للدرجة.

ووجود الأنشوطة لا يؤثر في البيانات فيما إذا كان البيان يملك حلقة أم لا، إلا إذا كانت أنشوطة في مركبة لها رأس واحد.

إن إثباتنا لتمييز البيانات الأويلرية يحتاج إلى بديهية، ونعرّف المسار الأعظم (**maximal path**) في البيان G على أنه المسار الذي لا يمكن احتواؤه في مسار أطول، ولاحظ أنهَ عندما يكون البيان محددًا، فإنه لا يوجد فيه مسار يمكن أن يستمر إلى ما لا نهاية، وعليه، فإن المسارات العظمى (غير القابلة للتوسيع) موجودة.

25.2.1. تمهيدية. إذا كانت درجة كلّ رأس في البيان G تساوي 2 على الأقل، فإنّ G يحوي حلقة.

الإثبات: ليكن P مسارًا أعظم في G، ولتكن u نقطة طرفية للمسار P، بما أنّ P غير قابل للتوسيع، فإنّ كل جار لـ u يجب أن يكون في P، وبما أنّ درجة u هي 2 على الأقل، فإنه يملك جارًا v في $V(P)$ من خلال ضلع ليس في P، ولاحظ أنّ الجزء من v إلى u والمحتوى في P يكمل مع الضلع uv حلقة. ■



وللملاحظة أهمّية أن يكون البيان محددًا، نأخذ المثال الآتي: إذا كانت $V(G) = \mathbb{Z}$ و $E(G) = \{ij: |i-j| = 1\}$، فإنّ درجة كلّ رأس في G تساوي 2، إلا أنّ G لا يحوي أيّ حلقة (وعليه لا يوجد مسار غير قابل للتمدد)، ويمكننا أن نتجنّب مثل هذه الأمثلة بافتراض أنّ البيانات جميعها في هذا الكتاب هي بيانات منتهية، مع استثناءات نادرة جدًّا.

26.2.1. نظرية. يكون البيان أويلريًّا إذا وفقط إذا كان يملك مركبة واحدة غير تافهة على الأقل ودرجة رؤوسه جميعها زوجية.

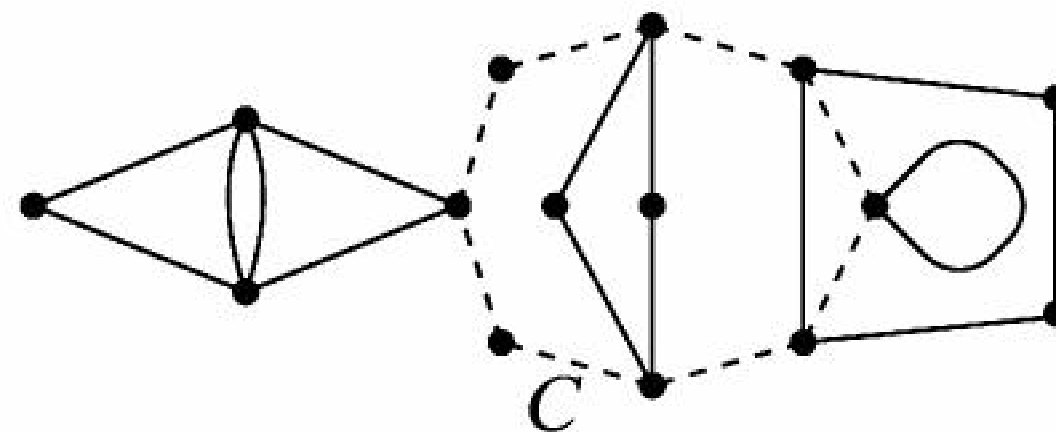
الإثبات: الضرورة. افترض أنّ G يملك حلقة أويلرية C، لاحظ أنّ كلّ مرور للحلقة C على رأس سوف يستخدم ضلعين متقاطعين في هذا الرأس، والضلع الأول يقرن مع الضلع الأخير عند الرأس الأول. وعليه، فإنّ درجة الرؤوس جميعها زوجية. ويكون الضلعان أيضًا في المسرب نفسه إذا وقعا في المركبة نفسها، لذلك يوجد على الأكثر مركبة واحدة غير تافهة.

الكفاية. إذا افترضنا أنّ الشروط متحققة، فسنحصل على حلقة أويلرية باستخدام الاستقراء على عدد الأضلاع m.

خطوة الأساس: $m = 0$. يكفي أن نأخذ رأسًا واحدًا ليمثّل مسربًا مغلقًا.

خطوة الاستقراء: $m > 0$. درجة كل رأس في المركبة غير التافهة تساوي 2 على الأقل، ونجد من البديهية 25.2.1 أنّ للمركبة غير التافهة حلقة C. ليكن G' هو البيان الذي نحصل عليه من G بحذف $E(C)$.

بما أنه يوجد لـ C ضلعان، أو ليس لها أضلاع عند كلّ رأس، فإنّ كلّ مركبة في G' هي أيضًا بيان زوجي، ولأنّ كلّ مركبة هي مركبة مترابطة وعدد أضلاعها أقلّ من m، فإنا نستطيع أن نطبق فرضية الاستقراء لاستنتاج أنّ لكلّ مركبة للبيان G' حلقة أويلرية، وللحصول على حلقة أويلرية في البيان G، فإننا نمشي على الحلقة C، وعندما ندخل مركبة من G' للمرة الأولى، فإننا نعمل تحويلة عبر حلقة أويلرية للمركبة نفسها، ومثل هذه الحلقة تنتهي عند الرأس حيث بدأنا التحويلة. وعندما ننهي مسيرنا على C، نكون قد حصلنا على حلقة أويلرية للبيان G. ■



ربما يكون ما تقوله طريقة الإثبات عن البيانات الزوجية مهمًّا كأهمّية خاصية توصيف البيانات الأويلرية.

27.2.1. قضية. كلّ بيان زوجي يتفكك إلى حلقات.

الإثبات: في إثبات النظرية 26.2.1، لاحظنا أنّ لكلّ بيان زوجي غير تافه حلقة، وأنّ حذف هذه الحلقة يبقيه بيانًا زوجيًّا، وعليه، فإنّ هذه القضية تُبَرْهَنُ بالاستقراء على عدد الأضلاع. ■

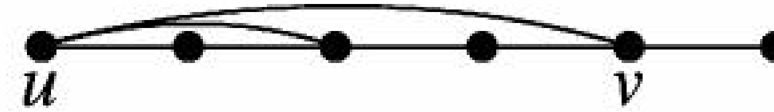
من السهل أن نرى تحقق شرط الضرورة في توصيف الحلقات الأويلرية، وهذا متحقّق أيضًا لتوصيف البيانات الثنائية الفرع في غياب الحلقات الفردية، ومتحقق للكثير من التمييزات الأخرى كذلك، ولسهولة تَذكّر مثل هذه المثبتات؛ استعمل ناش وليامز (Nash − Williams) وآخرون: "**TONCAS**" لتعني "الشروط الضرورية الواضحة هي أيضًا كافية".

إثبات البديهية 25.2.1 مثال على أسلوب إثبات مهم في نظرية البيان يدعى مبدأ القيم القصوى أو مبدأ التطرفية (**extremality**). لاحظ أنّه عند الحديث عن البنى من نوع معيّن معطى، فإنّ اختيار مثال ذي قيمة تطرّفية من جانب معيّن، يمكن أن يؤدي إلى معلومات إضافية مفيدة. فعلى سبيل المثال، بما أنه لا يمكن توسيع أيّ مسار أعظمي P، فإننا نحصل على المعلومات الإضافية، وهي أنّ كل جار للنقطة الطرفية للمسار P تنتمي إلى مجموعة الرؤوس $V(P)$.

لاحظ أنه من جانب معين، نجد أنّ عمل اختيار متطرّف يذهب بنا مباشرة إلى الحالة المهمة في البديهية 25.2.1، حيث يمكننا البدء بأيّ مسار، فإذا كان هذا المسار قابلاً للتوسع، فإننا نوسعه، وإذا لم نستطع توسيعه، فإن شيئًا مهمًّا يكون قد حدث، ونوضح هذا الأسلوب بعدّة أمثلة. والتمارين 42 − 37 تستخدم أيضًا مبدأ القيم القصوى. وسنبدأ بتقوية البديهية 25.2.1 للبيانات البسيطة.

28.2.1. قضية. إذا كان G بيانًا بسيطًا درجة كل رأس فيه k على الأقل، فإنّ G يحوي مسارًا طوله k على الأقل. وإذا كان $k \geq 2$، فإنّ G أيضًا يحوي حلقة طولها $k+1$ على الأقل.

الإثبات: لتكن u نقطة طرفية لمسار أعظم مثل P في البيان G، بما أنه لا يمكن توسيع P، فإنّ كلّ رأس مجاور لـ u ينتمي إلى $V(P)$، وبما أنّ عدد الرؤوس المجاورة لـ u يساوي k على الأقل، وبما أن G بيان بسيط، فإن المسار P يمتلك على الأقل k رأسًا غير u، وطوله يساوي k على الأقل، وإذا كان $k \geq 2$، فإنّ الضلع من u إلى أبعد جيرانه v الموجود على P بالإضافة إلى الجزء من الممر P الممتد من الرأس v إلى الرأس u يكمل حلقة بطول كافٍ. ■



29.2.1. قضية. كلّ بيان خالٍ من العرى يمتلك على الأقل رأسين ليسا رأسي قطع.

الإثبات: إذا كانت u نقطة طرفية لمسار أعظمي P في البيان G، فإنّ الرؤوس المجاورة للرأس u تقع في P. وبما أنّ $P-u$ مترابط في G-u، فإنّ الرؤوس المجاورة لـ u تنتمي إلى مركبة واحدة في $G-u$ ، وعليه، فإنّ u ليس رأس − قطع. ■

30.2.1. ملاحظة. لاحظ الفرق بين "أعظمي" (**maximal**) و "الأكبر" (**maximum**). بوصفها صفات، الأكبر تعني "الحجم − الأكبر" (maximum −sized)، وأعظمي تعني "لا يوجد أكبر منه يحويه". يكون المسار الأكبر مسارًا أعظميًّا دائمًا، ولكن المسارات الأعظمية ليست بالضرورة ذات طول أكبر. وبالمثل، فإن لثنائي العصبة $K_{r,s}$ مجموعتين مستقلتين أعظميين، ولكن عندما يكون $r \neq s$، فإنّ له مجموعة مستقلة كبرى واحدة فقط. وعندما توصف الأعداد بدلاً من الاحتواء، فإن المعنى يكون هو نفسه، وهو: درجة الرأس القصوى = درجة الرأس العظمى.

بجانب المسارات العظمى، أو القصوى، أو المجموعات المستقلة، توجد وجوه تطرّفية أخرى تشتمل على رؤوس ذات درجات صغرى أو كبرى، وعلى أول رأس يتباعد عنده مساران وبيانات جزئية مترابطة أعظمية إلخ. لاحظ أنه في البيان المترابط G حيث $S, T \subset V(G)$ مجموعتان منفصلتان، نستطيع أن نحصل على مسار من S إلى T نقاطه الطرفية فقط في $S \cup T$، وذلك باختيار أقصر مسار من S إلى T؛ والتمرين (40) يطبق هذا، ويستخدم التمرين (37) مبدأ القيم القصوى للحصول على إثبات قصير لخاصية التعدي لعلاقة الربط. ■

لاحظ أنّ العديد من البراهين باستخدام الاستقراء يمكن أن يُستخدم فيها مبدأ القيم القصوى، ويمكن أن تثبت العديد من البراهين بمبدأ القيم القصوى بالاستقراء، ولنؤكدّ هذا التفاعل؛ سنعيد إثبات تصنيف البيانات الأويلرية باستخدام مبدأ القيم القصوى.

31.2.1. تمهيدية. في البيان الزوجي؛ كلّ مسار غير قابل للتوسيع يكون مغلقًا.

الإثبات. ليكن T مسارًا غير قابل للتوسيع، يبدأ عند الرأس u في بيان زوجي. في كل مرة يمرّ T خلال الرأس v المختلف عن الرأس u، يَسْتَخْدِمُ ضلعين إضافيين عند v، لذلك، فان كلّ وصول عند رأس ما مثل v،يبين لنا أنّ T يكون قد استخدم عددًا فرديًا من الأضلاع التي تقع على v، وبما أنّ درجة v زوجية، فإن هناك ضلعًا واحدًا يستطيع T أن يستمر خلاله.

وعليه، يتوقف T فقط عند u. وفي البيان المنتهي، يجب أن يتوقف T. لذا، نستنتج أنّ T مغلق. ■

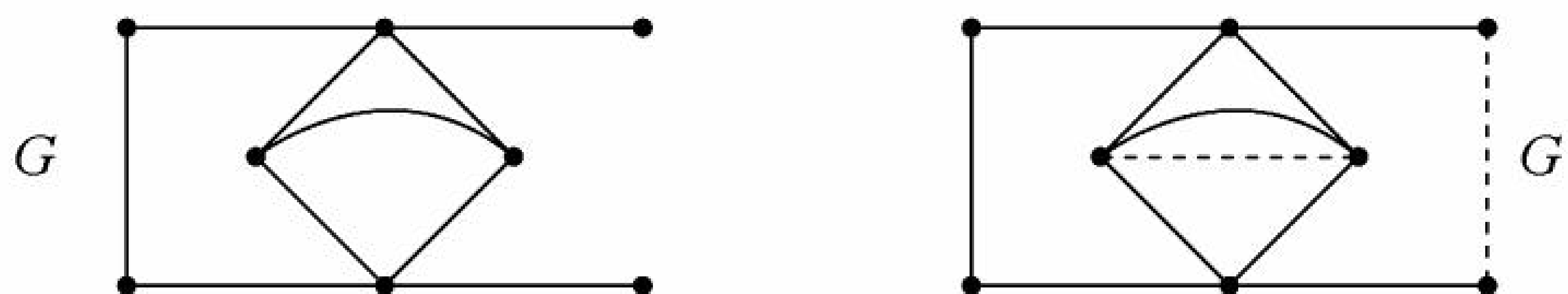
32.2.1. النظرية 26.2.1 — الإثبات الثاني. نثبت TONCAS. في البيان G الذي يحقق شروط النظرية، ليكن T مسربًا بأكبر طول؛ لذلك فإن T غير قابل للتوسع. ومن البديهية 31.2.1، يكون T مغلقًا.

افترض أنّ T يهمل الضلع e في G. بما أنّ البيان G له مركبة واحدة غير تافهة، فيوجد في G أقصر مسار من e إلى مجموعة الرؤوس في T. ولذلك يوجد ضلع مثل e' ليس في T يقع على رأس مثل v للمسرب T.

وبما أنّ T مغلق، فيوجد مسرب T' يبدأ عند الرأس v وينتهي به، ويستخدم الأضلاع مثل T نفسه. الآن، نوسع T'باستخدام e' لنحصل على مسرب أطول من T، وهذا يناقض اختيار T، وعليه فإنّ T يسير على أضلاع G جميعها. ■

هذا الإثبات وطريقة البناء الناتجة (تمرين 12) مشابهان لما هو موجود عند هيرهولزر [1873] (Hierholzer). والتمرين (35) يطورّ إثباتًا آخر.

الفصول القادمة تحوي العديد من التطبيقات حول العبارة بأنّ كلّ بيان زوجي مترابط له حلقة أويلرية. وهنا نعطي تطبيقًا بسيطًا: حينما نرسم شكلاً على ورقة، كم مرة يجب أن نتوقف ونحرك القلم؟ غير مسموح لنا أن نعيد مقاطع الرسم، لذلك كلّ عودة إلى الورقة تسهم في مسرب. وهكذا نبحث عن تفكيك لـ G بأقل عدد من المسارب. لاحظ أننا نستطيع أن نختزل المسألة إلى البيانات المترابطة؛ لأن عدد المسارب الذي نحتاج إليه لرسم G هو مجموع العدد الذي نحتاج إليه لرسم كل مركبة. فعلى سبيل المثال، للبيان G أدناه أربعة رؤوس فردية، وهو يتفكك إلى مسربين، وأنّ إضافة الأضلاع المنقطة في الرسم الأيمن يجعله أويلريًا.



33.2.1. نظرية. إذا كان G بيانًا مترابطًا غير تافه له 2k رأسًا فرديًّا، فإنّ أصغر عدد من المسارب لتفكيك البيان هو: $\max\{k،1\}$.

الإثبات: يسهم المسرب بدرجة زوجية لكلّ رأس ما عدا المسرب غير المغلق الذي يسهم بدرجات فردية لنقاطه الطرفية. لذا فإنّ تجزئة الأضلاع لمسارب يجب أن تحوي مسارب غير مغلقة تنتهي عند كل رأس فردي، وبما أنّ كلّ مسرب له نقطتان طرفيّتان فقط، لذلك يجب أن نستخدم k مسربًا على الأقل لتحقق $2k$ رأسًا فرديًّا. ونحتاج أيضًا إلى مسرب واحد على الأقل لأن لـِ G ضلعًا. والنظرية 26.2.1 تعطينا أنّ مسربًا واحدًا كافيًا عندما تكون $k = 0$.

بقي أن نثبت أنّ k مسربًا تكون كافية عندما $k > 0$. لنأخذ البيان G، نضع الرؤوس الفردية في G في صورة أزواج (بأيّ طريقة)، ثمّ نشكل البيان G' بإضافة ضلع إلى كل زوج من الرؤوس يربط رأسي الزوج كما هو موضّح في الأعلى. وبذلك، يصبح البيان الناتج G' بيانًا مترابطًا وزوجيًّا، وهكذا يملك حلقة أويلرية C. وبناءً على النظرية 26.2.1، فإنه عند عبور C في G'، فإننا نبدأ بمسرب جديد في G في كلّ مرة نعبر من خلال ضلع في $G' - E(G)$ وهذا يؤدي إلى أنّ k مسربًا تفكك G. ■

عادة ما نثبت المثبتات في السياق العام لنتجنب الجهد، إنّ إثبات النظرية 33.2.1 يوضّح ذلك؛ وذلك بتحويل البيان G إلى بيان يمكننا من تطبيق النظرية 26.2.1 عليه، وبذلك نتجنّب تكرار التعليل الأساسي للنظرية 26.2.1. ويطلب التمرين (33) إثبات النظرية 33.2.1 مباشرة باستخدام الاستقراء.

لاحظ أنّ النظرية 33.2.1 تأخذ في الحسبان البيانات التي لها عدد زوجي من الرؤوس التي درجتها فردية فقط، وأول نتيجة لنا في الدرس التالي توضّح لماذا يكون ذلك.

تمارين (Exercises)

معظم الأسئلة في هذا الكتاب تتطلب براهين، فالكلمات مثل ''أنشئ''، ''اعرض''، ''احصل''، ''حدّد''، إلخ، تنصّ صراحة على أنّ الإثبات مطلوب، علاوة على أنّ إثبات بطلان العبارة يتطلّب إعطاء مثال معاكس لها، والتأكيد على أنّ هذا المثال هو المثال المعاكس.

1.2.1. (-) اكتب ''صواب'' أو ''خطأ'' بجانب كل عبارة من العبارات الآتية:

a) يوجد لكل بيان غير مترابط رأس معزول. b) يكون البيان مترابطًا إذا وفقط إذا وُجدَ رأسٌ مربوطٌ مع الرؤوس الأخرى جميعها. c) يمكن تجزئة أضلاع كل مسرب مغلق إلى مجموعات أضلاع لحلقات.

d) إذا كان هنالك مسرب أعظمي غير مغلق في بيان ما، فإن درجة نقاطه الطرفية تكون فردية.

2.2.1. (-) حدّد ما إذا كان K_4 يحوي التالي (أعطِ مثالاً أو أثبت عدم الوجود):

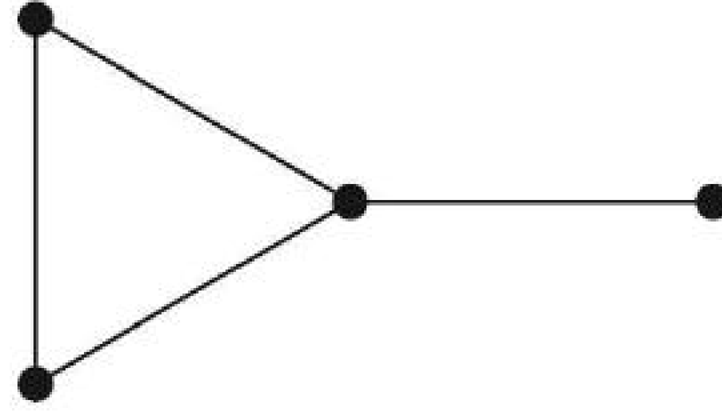
a) ممرًّا ليس مسربًا. b) مسربًا غير مغلق وليس مسارًا. c) مسربًا مغلقًا ولكنه ليس حلقة.

3.2.1. (-) ليكن G البيان الذي مجموعة رؤوسه $\{1,\ldots,15\}$، بحيث يكون i و j متجاورين إذا وفقط إذا كان أكبر عامل مشترك لهما يتجاوز العدد 1. احسب عدد مركبات G، وحدّد أكبر طول لمسار في G.

4.2.1. (-) ليكن G بيانًا لا يحوي عرىً. لكل $v \in V(G)$ و $e \in E(G)$، مجموعة مصفوفتي التجاور والوقوع لـِ $G - v$ و $G - e$ بدلالة المصفوفات المقابلة لـِ G.

5.2.1. (-) ليكن v رأسًا في البيان البسيط المترابط G. أثبت أنه يوجد لـِ v جارٌ في كل مركبة لـِ $G - v$، واستنتج أنه لا يوجد بيان له رأس قطع من الدرجة 1.

6.2.1. (-) في البيان أدناه (الكف)، جد المسارات الأعظمية والعصب الأعظمية والمجموعات المستقلة الأعظمية جميعها، وجد كذلك المسارات القصوى والعصب القصوى والمجموعات المستقلة القصوى جميعها.



7.2.1. (-) أثبت أنه يوجد للبيان الثنائي الفرع تجزئة ثنائية فريدة (ما عدا تبديل مجموعتي التجزئة) إذا وفقط إذا كان مترابطا.

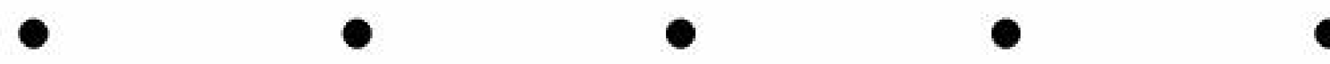
8.2.1. (-) حدّد قيم m و n بحيث يكون $K_{m,n}$ أويلريًّا.

9.2.1. (-) ما أقلّ عدد ممكن من المسارب نحتاج إليه لتفكيك بيان بيترسون؟ هل يوجد تفكيك لهذه المسارب باستخدام مسارات فقط؟

10.2.1. (-) أثبت أو انقض: a) يمتلك كلّ بيان أويلري ثنائي الفرع عددًا زوجيًا من الأضلاع.
b) يمتلك كلّ بيان أويلري بسيط عدد رؤوسه زوجي عددًا زوجيًا من الأضلاع.

11.2.1. (-) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا أويلريًّا يشترك فيه الضلعان f، e برأس، فتوجد في G حلقة أويلرية يظهر فيها الضلعان f، e بصورة متتابعة.

12.2.1. (-) حوّل الإثبات المعطى في المفردة 1.2.32 إلى طريقة لإيجاد حلقة أويلرية في البيان الزوجي المترابط.



13.2.1. براهين بديلة لإثبات أنّ كلّ ممر من u إلى v يحوي مسارًا من u إلى v (البديهية 5.2.1):

a) (استقراء عادي) إذا أعطيت أنّ كلّ ممرّ طوله $l - 1$ يحوي مسارًا من رأسه الأول إلى رأسه الأخير، فأثبت أنّ كلّ ممر طوله l يحقق هذا أيضًا.

b) (مبدأ القيم القصوى) إذا أعطيت الممر W من u إلى v، فخذ أصغر ممر من u إلى v محتوى في W.

14.2.1. أثبت أو انقض العبارات الآتية حول البيانات البسيطة: (تعليق: ”مختلفة“ لا تعني ”منفصلة“).

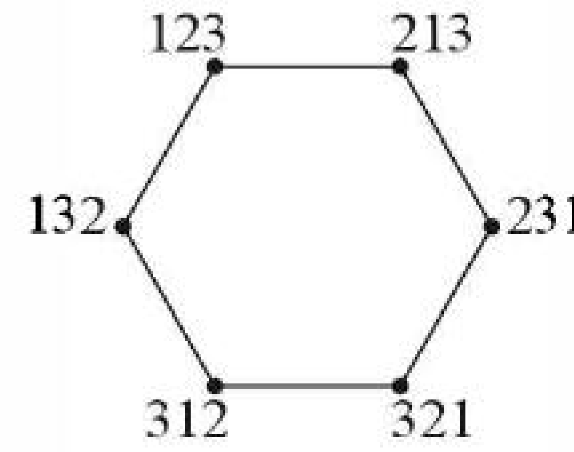
a) اتحاد مجموعات الأضلاع لممرات مختلفة من u إلى v يجب أن يحوي حلقة.

b) اتحاد مجموعات الأضلاع لمسارات مختلفة من u إلى v يجب أن يحوي حلقة.

15.2.1. (!) ليكن W ممرًّا مغلقًا طوله 1 على الأقل ولا يحوي حلقة. أثبت أنّ بعض أضلاع W تتكرر مباشرة (مرة واحدة في كل اتجاه).

16.2.1. ليكن e ضلعًا يُظْهِرُ عددًا فرديًّا من المرات في الممر المغلق W. أثبت أنّ W يحتوي على أضلاع لحلقة ما خلال e.

17.2.1. (!) ليكن G_n هو البيان الذي تتكونّ رؤوسه من تباديل $\{1,\ldots,n\}$، بحيث يكون التبديلان $a_1, \ldots, a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ متجاورين إذا اختلفا بتبديل زوج متجاور من المدخلات (انظر G_3 أدناه). أثبت أن G_n مترابط.



18.2.1. (!) ليكن G هو البيان الذي تتكوّن فيه مجموعة الرؤوس من المرتّبات من الدرجة k التي مدخلاتها من المجموعة $\{0،1\}$، بحيث يكون x مجاورًا لـ y إذا كان كلّ من x و y يختلفان بالضبط في موقعين فقط. حدّد عدد المركبات لـِ G.

19.2.1. ليكن s و r عددين طبيعيين. وليكن G هو البيان البسيط الذي تتكونّ رؤوسه من صفوف التطابق، $v_0, \ldots, v_{n-1}$ حيث يكون v_i و v_j متجاورين إذا وفقط إذا كان. أثبت أنّ S له k مركبة تمامًا، حيث k هو القاسم المشترك الأكبر للأعداد $\{n، r، s\}$.

20.2.1. (!) ليكن v رأس قطع للبيان البسيط G. أثبت أنّ $\overline{G}-v$ يكون مترابطًا.

21.2.1. ليكن G بيانًا ذاتيّ التتام. أثبت أنّ لـِ G رأس قطع إذا وفقط إذا كان لـِ G رأس درجته 1.(Akiyama – Harary [1981])

22.2.1. أثبت أنّ البيان يكون مترابطًا إذا وفقط إذا وُجد لكلّ تجزئة لرؤوسه إلى مجموعتين غير خاليتين ضلع نقاطه الطرفية في كلتا المجموعتين.

23.2.1. لكل عبارة أدناه، حدّد ما إذا كانت العبارة صحيحة لكل بيان بسيط مترابط غير تام G.

a) كلّ رأس في G ينتمي إلى بيان جزئي مُحدّث متشاكل مع P_3.

b) كلّ ضلع في G ينتمي إلى بيان جزئي مُحدّث متشاكل مع P_3.

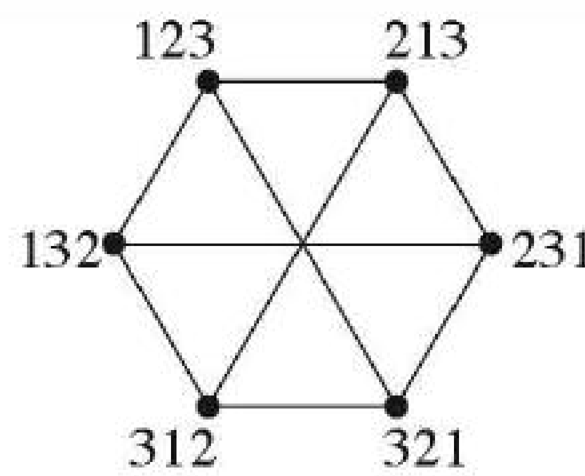
24.2.1. ليكن G بيانًا بسيطًا ليس فيه رأس معزول، وليس فيه بيان جزئي محدّث بضلعين فقط. أثبت أنّ G بيان تام.

25.2.1. (!) استخدام الاستقراء العادي على عدد الأضلاع أو الرؤوس لإثبات أنّ غياب الحلقات الفردية يكون شرطًا كافيًا ليكون البيان ثنائي الفرع.

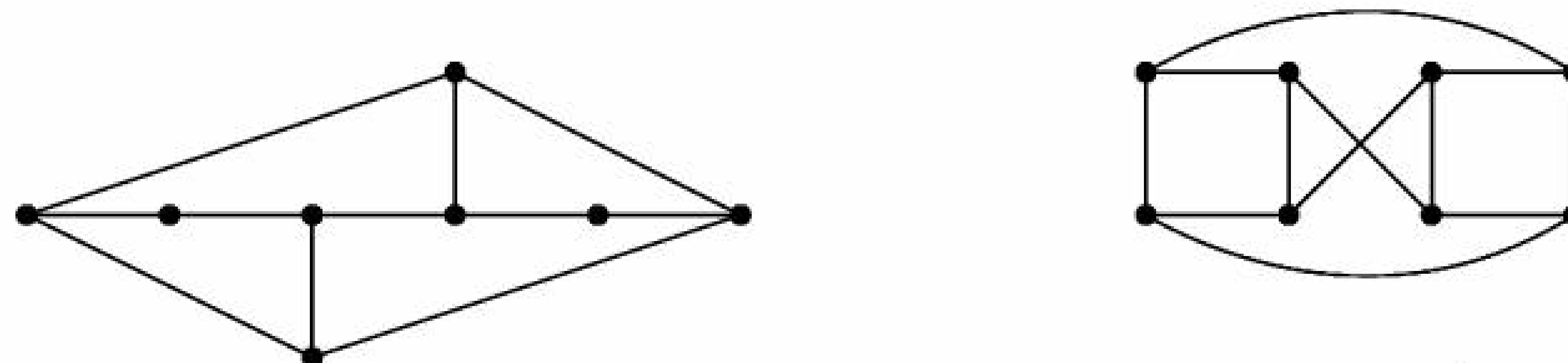
26.2.1. (!) أثبت أنّ البيان G يكون ثنائي الفرع إذا وفقط إذا وُجد لكلّ بيان جزئي H من G مجموعة مستقلة تتكوّن على الأقلّ من نصف $V(H)$.

27.2.1. ليكن G_n هو البيان الذي تتكوّن رؤوسه من تباديل $\{1,\ldots,n\}$، بحيث يكون التبديلان

$a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ متجاورين إذا اختلفا بتبديل مدخلتين. أثبت أنّ G_n ثنائي الفرع (G_3 معروض أدناه).
(مساعدة: لكلّ تبديل a، احسب عدد الأزواج j ، i، بحيث $i < j$، و $a_i > a_j$ هذه تدعى انعكاسات (**inversions**).



28.2.1. (!) في كلّ بيان أدناه، جد بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع له أكبر عدد من الأضلاع، وأثبت أنّ هذا هو الأكبر، وحدّد ما إذا كان هذا هو البيان الجزئي الثنائي الفرع الفريد الذي له هذا العدد الكبير من الأضلاع.



29.2.1. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا لا يحوي P_4 أو C_3 كبيان جزئي مُحدث. أثبت أنّ G هو عصبة ثنائية (بيان ثنائي الفرع تام).

30.2.1. ليكن G بيانًا بسيطًا رؤوسه $v_1,\ldots,v_n$، ولتكن A^k ترمز إلى القوّة k لمصفوفة التجاور لـ G تحت عملية ضرب المصفوفات. أثبت أنّ المدخلة i, j في A^k هي عدد الممرات من vi إلى vj التي طولها k في $\acute{G}$. وأثبت أنّ G ثنائي الفرع إذا وفقط إذا تحقق أنه لكلّ عدد صحيح فردي r قريب جدًّا من n، فإنّ مدخلات القطر جميعها تكون أصفارًا في A^r. (تذكير: الممر هو قائمة مرتبة من الرؤوس والأضلاع).

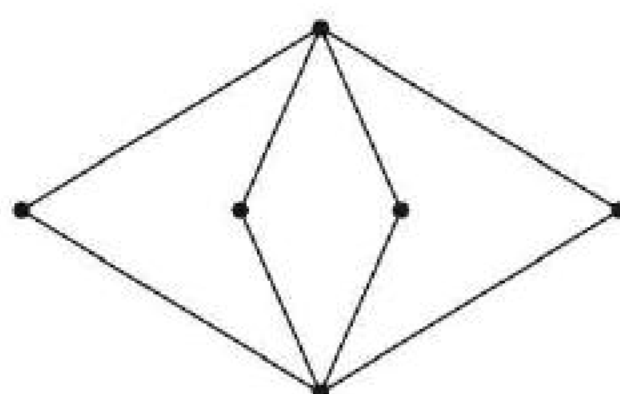
31.2.1. (!) اثبات النظرية 23.2.1 دون استخدام الاستقراء: (انظر المثال 21.2.1).
a) ليكن $n \leq 2^k$ ، شَفّرْ رؤوس K_n بوصفها مرتبات ثنائية مختلفة من الدرجة k. استخدم هذه لبناء k من البيانات الثنائية الفرع التي اتحادها يساوي K_n.
b) إذا أعطيت K_n بصفتها اتحاد بيانات ثنائية الفرع $G_1,\ldots,G_k$، شَفّرِ الرؤوس في K_n بوصفها مرتبات ثنائية مختلفة من الدرجة k. استخدم هذا لإثبات أن $n \leq 2^k$.

32.2.1. العبارة الآتية غير صحيحة. أضف فرضية لتصحيحها، وأثبت العبارة المصحّحة.

”كلّ مسرب أعظمي في بيان زوجي هو حلقة أويلرية“.

33.2.1. استخدم الاستقراء العادي على k أو على عدد الأضلاع (واحدًا بعد الآخر)؛ لإثبات أنّ البيان المترابط على 2k من الرؤوس الفردية يتفكك إلى k مسربًا إذا كان $k > 0$. هل هذه النتيجة تبقى صحيحة دون فرضية خاصية الترابط؟

34.2.1. تكون الحلقتان الأويلريتان متكافئتين إذا كان لهما الأزواج غير المرتبة نفسها من الأضلاع المتتالية، بنظرة حلقية أو دائرية (نقطتا البداية والاتجاه غير مهمتين). فإنّ الحلقة، على سبيل المثال، لها صف تكافؤ واحد فقط من الحلقات الأويلرية. ما عدد صفوف التكافؤ من الحلقات الأويلرية الموجودة للبيان المرسوم أدناه؟



35.2.1. خوارزمية توكر .(*Tucker's algorithm*) افترض أن G بيان زوجي مترابط. عند كل رأس، اعمل تجزئة للأضلاع المرتبطة بهذا الرأس إلى أزواج (كلّ ضلع يظهر في زوج لكلّ نقطة طرفية فيه)، ابدأ مع ضلع e لتشكل مسربًا (Trail) بمغادرة كلّ رأس على الضلع الذي يشكل زوجًا مع الضلع المستخدم لدخول هذا الضلع، منتهيًا بالضلع الذي يشكل زوجًا مع e، وهذا يحلل G إلى مسارب مغلقة، ما دام يوجد أكثر من مسرب في هذا التحليل، جد مسربين لهما رأس مشترك، ثمّ ضمّهما أحدهما إلى الآخر لتحصل على مسرب واحد أطول بتغيير المزاوجة (Pairing) عند رأس مشترك. وأثبت أنّ هذه الخطوات تعمل وتعطي حلقة أويلرية كمسربها النهائي (Tucker [1976]).

36.2.1. (+) توصيف بديل لبيانات أويلر:

a) أثبت أنه إذا كان G بيانًا أويلريًّا، وكانت $G' = G-uv$، فإنّ G' يحوي عددًا فرديًّا من المسارب من u إلى v. وأثبت كذلك أنّ عدد المسارب في هذه القائمة التي لا تشكل مسارات هو عدد زوجي.

b) إذا كان v رأسًا درجته فردية في بيان معين، فلكلّ ضلع e يرتبط بـ v، افترض أنّ $c(e)$ تمثّل عدد الحلقات التي تحوي e. استخدم $\sum_e c(e)$ لإثبات أنّ $c(e)$ يكون زوجيًّا لبعض e المرتبط بـ v.[Mckee [1984]).

c) استخدم الفرعين (a) و (b) لتستنتج أنّ البيان غير التافة (nontrivial) المترابط يكون أويلريًّا إذا وفقط إذا كان كل ضلع ينتمي إلى عدد فردي من الحلقات.

37.2.1. (!) استخدم مفهوم الدرجة القصوى (extremality) لإثبات أن علاقة الربط هي علاقة تعدّ (مساعدة: إذا أعطيت ممرين p من u إلى v، و Q من v إلى w، فخذ في الحسبان أول رأس من P في Q).

38.2.1. (!) أثبت أن كلّ بيان على n من الرؤوس، وعدد أضلاعه يساوي n على الأقل يجب أن يحوي حلقة.

39.2.1. افترض أن G بيان خالٍ من العرى، درجة كلّ رأس من رؤوسه على الأقل 3. أثبت أنه يوجد في G حلقة طولها زوجي. (مساعدة: خذ في الحسبان أكبر مسار) (P.Kwok).

40.2.1. (!) افترض أن p و Q مساران في بيان مترابط G، بحيث إنّ طوليهما أكبر ما يمكن، أثبت أنه يوجد رأس مشترك بينهما.

41.2.1. افترض أنّ G بيان مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل، أثبت أنّه يوجد لـ G رأسان x و y بحيث إنّ: 1) $G- \{x,y\}$ مترابط. (2) x و y متجاوران أو يوجد لهما جار مشترك. (مساعدة: افترض أطول مسار) (chung [1978a]).

42.2.1. افترض أنّ G بيان بسيط مترابط لا نستطيع أن نستحدث منه p_4 ولا C_4. أثبت أنه يوجد لـ G رأس يجاور باقي رؤوس G (مساعدة: افترض رأسًا له أكبر درجة). ([wolk [1965]).

43.2.1.(+) استخدم الاستقراء على k لتثبت أن كلّ بيان بسيط مترابط له عدد زوجي من الأضلاع يتفكك إلى مسارات طول كلّ منها 2. هل تبقى النتيجة صحيحة إذا حُذِفَ شرط الترابط؟

3.1. درجات الرؤوس والعدّ (Vertes Degress and Counting)

تتمتع درجات الرؤوس بأهمّية خاصة بوصفها وسائط للبيانات. لذا سنعيد التعريف من أجل تعريف بعض الرموز المهمة.

1.3.1. تعريف. تعرّف درجة الرأس v في بيان G على أنّها عدد الأضلاع التي يكون v رأسًا لها، ويرمز إلى ذلك بالرمز $d(v)$ أو $d_G(v)$، وإذا وجد عند الرأس v أنشوطة، فتحسب عروتين عند احتساب $d(v)$.

ونستخدم الرمز $\Delta(G)$ للتدليل على أكبر درجة من بين درجات رؤوس G، و $\delta(G)$ للتدليل على أصغر درجة من بين هذه الدرجات، ونقول: إن G منتظم في حال كانت $\delta(G) = \Delta(G)$، ونقول: إن G منتظم من الدرجة K (**K-regular**). إذا كانت $\Delta(G) = \delta(G) = K$، ثمّ نعرف جوار الرأس v على أنه مجموعة الرؤوس التي تجاور v، ونرمز إلى ذلك بالرمز $N(v)$.

2.3.1. تعريف. نعرف رتبة البيان G على أنها عدد رؤوس G، ونرمز إلى ذلك بالرمز $n(G)$ ونعرف حجم G على أنه عدد أضلاع G، ونرمز إلى ذلك بالرمز $e(G)$. في حين نستخدم الرمز $n \in \mathbb{N}$ للتدليل على المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$.

وبما أنّ البيانات التي نتعامل معها منتهية (finite)، فإنّ $n(G)$ و $e(G)$ عددان صحيحان غير سالبين لا لبس فيهما (well defined)، وكذلك نستخدم الرمز e للتدليل على ضلع معين، وسوف يتّضح من السياق ما المقصود عند استخدام الحرف e. ونستخدم الرمز حلقة من الرتبة n (n- cycle) للتدليل على حلقة لها n من الرؤوس، وهذا ينسجم مع تعريف البيان على n من الرؤوس (n- vertex graph) أو الذي له n من الرؤوس.

العدّ والتناظر (Counting and Bijections)

سنبدأ بالحديث عن مسائل العدّ المتعلقة ببيانات جزئية لبيان معين، وأول هذه المسائل هي عملية حساب عدد الأضلاع أو عدّها؛ حيث نقوم بذلك من خلال استخدام درجات الرؤوس، والصيغة التي نحصل عليها هي من الأدوات المهمة في نظرية البيانات، وفي بعض الأحيان يطلق عليها اسم أول نظرية في نظرية الرسوم، فضلاً عن أنّها تسمى بديهية التصافح بالأيدي (Hand Shaking Lemma)

3.3.1. قضية. (Proposition) صيغة مجموعة الدرجات (Degree Sum Formula) إذا كان G بيانًا فإن:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2e(G)$$

الإثبات: بما أنه لكلّ ضلع طرفان، فإنّ كلّ ضلع يسهم باثنين في المجموع. لذا نحصل على الصيغة أعلاه. ■

لاحظ أنّ الإثبات يبقى صحيحًا عندما تحتوي G على عرى؛ وذلك لأنّ كلّ أنشوطة تسهم باثنين في هذا المجموع، وإذا خلا البيان من العرى، فإنّ الصيغة أعلاه تحسب عدد الأزواج (v,e) (حيث v هي طرف من أطراف e)، مجمعة بحسب الرؤوس، أو بحسب الأضلاع، ومن الجدير بالذكر أن مبدأ العدّ في اتجاهين (لمتغيرين) يعطي طريقة رائعة (أنيقة) لإثبات المتطابقات المتعلقة بالأعداد الصحيحة. (انظر التمرين 31 في الملحق A).

وهنا، لا بدّ من الإشارة إلى أنّ لصيغة مجموع الدرجات تطبيقات متعددة تأتي فيما بعد، ويمكن استنباط عدّة نتائج منها مباشرة (انظر النتيجة 5.3.1، والتمارين من 9 إلى 13).

4.3.1. نتيجة. (Corollary) إذا كان G بيانًا، فإنّ معدّل درجة رؤوسه هو: $\frac{2e(G)}{n(G)}$ وبناءً عليه، فإنّ

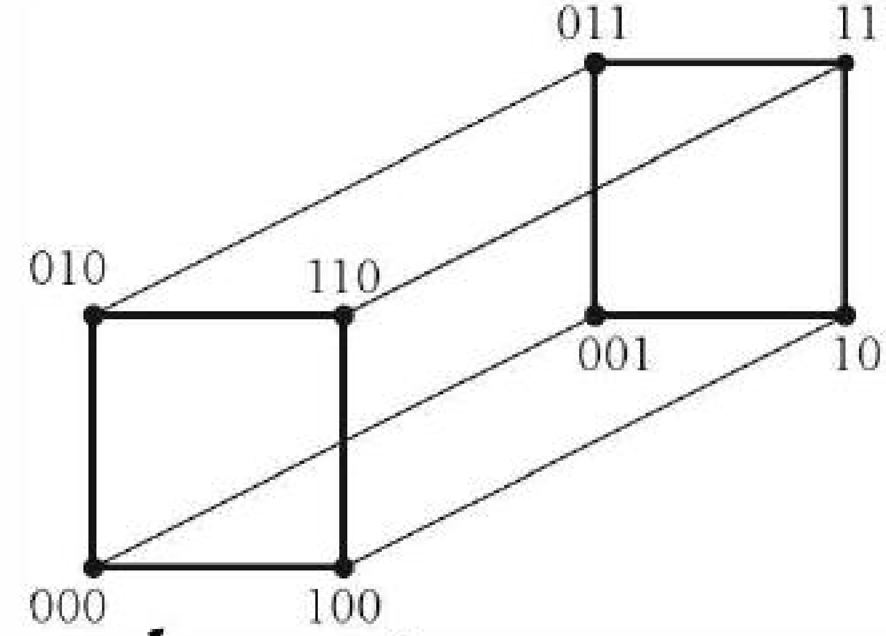
$$\delta(G) \le \frac{2e(G)}{n(G)} \le \Delta(G)$$ ■

5.3.1. نتيجة. إذا كان G بيانًا، فإنّ عدد رؤوسه ذوات الدرجة الفردية يكون زوجيًا. لاحظ أنه لا يوجد بيان منتظم فردي الدرجة ذو رتبة فردية. ■

6.3.1. نتيجة. إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة K له n من الرؤوس، فإنّ عدد أضلاعه يساوي $nk/2$. ■

وفيما يلي نعرف عائلة مهمة من البيانات.

7.3.1. تعريف. نعرف المكعب الزائدي Q_k (**hypercube**)، أو المكعب ذا البعد K على أنه بيان بسيط، بحيث إن كلّ رأس من رؤوسه هو ترتيبة (عديد) تحوي K من الإحداثيات (K- tuple)، وأنّ كلّ إحداثي إما أن يكون 1 أو 0، وكلّ ضلع من أضلاعه هو زوج من هذه الترتيبات تختلف في إحداثي واحد فقط. ويعرف المكعّب الجزئي من Q_k ذو البعد j على أنه رسم جزئي من Q_k يشاكل Q_j.



يظهر الشكل أعلاه Q_3، يُعَدُّ المكعب الزائدي مهندسًا معماريًّا طبيعيًّا للحاسوب، حيث يمكن للمعالجات التواصل مباشرة إذا ارتبطت برؤوس متجاورة في Q_k، علمًا بأنّ الترتيبات التي لها K من الإحداثيات والتي تمثل الرؤوس التي تعمل بوصفها عناوين للمعالجات.

8.3.1. مثال: بنْية (تركيب) المكعبات الزائدية. (*Structure of hypercubes*) تُعرف (*Parity*) نوعية أيّ رأس في Q_k على أنها نوعية عدد الوحدات نفسها في تمثيل هذا الرأس، سواء أكان العدد زوجيًّا أم فرديًّا، لاحظ أنّ لكلّ ضلع في Q_k رأسين؛ الأول زوجي والآخر فردي. لذا، فإنّ الرؤوس الزوجية تمثل مجموعة مستقلة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى مجموعة الرؤوس الفردية. لذا، فإنّ Q_k يكون بيانًا ثنائي الفرع (bipartite).

وبما أنه يمكن تحديد كل موقع في الترتيبة التي عدد إحداثياتها K بطريقتين، فإن $n(Q_k)=2^k$ ، ويمكن الحصول على جوار لأيّ رأس بتغيير قيمة أحد المواقع في ترتيبة هذا الرأس، إما من 1 إلى صفر، أو من صفر إلى 1، وهذا يعني أن Q_k منتظم من الدرجة K، وباستخدام النتيجة (6.3.1) نجد أنّ $e(Q_k)=K2^{k-1}$.

تُظهر الأضلاع المضللة في بيان Q_3 أعلاه بيانين جزئيين من Q_3، كل منهما يشاكل Q_2. وقد تمّ الحصول عليهما بتثبيت الإحداثي الأخير عند القيمة 0 أو 1. وعمومًا، يمكن الحصول على مكعب جزئي ذي بعد j وذلك بتثبيت $k-j$ من الإحداثيات، وترك قيم ما تبقى من إحداثيات تتغير على الـ $2j$ من الترتيبات الممكنة التي عدد إحداثياتها j. إن البيان الذي نحصل عليه بهذه الطريقة يشاكل Q_j، وبما أنه توجد طريقة لاختيار j من الإحداثيات المتغيّرة و 2^{k-j} طريقة لتحديد قيم الإحداثيات المثبتة، فإن هذا يحدد $\binom{k}{j}2^{k-j}$ من هذه المكعبات. ويظهر التمرين (29) أنّ هذا هو كلّ ما نحصل عليه من هذه المكعبات.

إن نسخ Q_1 هي ببساطة أضلاع Q_k، والصيغة التي حصلنا عليها تصبح $K2^{k-1}$ عندما $j=1$، لذا نحصل على طريقة أخرى لإيجاد $e(Q_k)$. عندما $j=k-1$، فإن نقاشنا أعلاه يقترح وصف Q_k بطريقة متكررة أو دورية (recursive). (ألحق 0 باسم كل رأس في نسخة من Q_{k-1}، وألحق 1 باسم كل رأس في نسخة أُخرى من Q_{k-1}. أضف أضلاعًا تربط بين رؤوس النسختين التي تكون أول K_{-1} من إحداثياتها متساوية، تحصل على Q_k. إن الخطوة الأساسية في هذا البناء هي Q_o التي تمثل بيانًا له رأس واحد فقط. لذا فإن هذا الوصف يقود إلى إثبات استقرائي للعديد من خصائص المكعبات الزائدية بما في ذلك عدد الأضلاع (التمرين 23) $e(Qk) = k2^{k-1}$. ■

المكعب الزائدي بيان منتظم ثنائي الفرع (bipartite). وباستخدام تعليل (argument) حسابي بسيط، نستطيع إثبات ملاحظة أساسية ومهمة عن هذه البيانات.

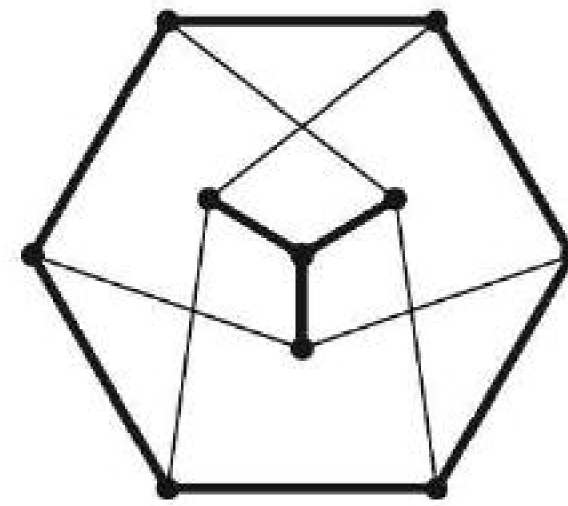
9.3.1. قضية. إذا كانت $k > 0$، فإنّ كلّ بيان ثنائي الفرع منتظمًا من الدرجة k يحوي عدد الرؤوس نفسه في كل من مجموعتي رؤوسه.

الإثبات: افترض أنّ G بيان منتظم من الدرجة k ثنائي الفرع، ومجموعتا رؤوسه هما X و Y. وبحساب عدد الأضلاع بحسب نقاطها الطرفية الموجودة في x، نجد أنّ عدد الأضلاع $e(G) = k\,|X|$ وبحساب $e(G)$ بحسب النقاط الطرفية الموجودة في y، نجد أنّ $e(G) = k|Y|$ وهذا يعطي أنّ: $k|Y| = |x|$ ومنها $|X| = |Y|$ عندما $k > o$. ■

لاحظ أنه يمكن احتساب عدد عناصر مجموعة معينة عن طريق إيجاد دالة تناظر (bijection) من المجموعة إلى مجموعة حجمها معروف. ومثالنا الآتي يستخدم هذه الطريقة إضافة إلى أنّ هناك أمثلة أخرى على تعليلات تركيبية لبعض مسائل العد الحسابية تظهر في الملحق A، وكذلك تتضمّن التمارين 18-35 مسائل تتعلق بالعدّ والحساب.

10.3.1. مثال يوجد 6 حلقات لبيان بيترسون. افترض أن G هو بيان بيترسون الثلاثي المنتظم الذي له عشرة مخالب ($claws$)، حيث نقصد بالمخلب نسخةً من $k_{1,3}$، وسنجد ارتباط واحد لواحد بين الحلقات الست وهذه المخالب.

بما أن طول أصغر حلقة في G هو 5، فإنّ كلّ حلقة سداسية F تمثل بيانًا جزئيًّا، وكلّ رأس في F له جار واحد خارج F. وبما أنه يوجد جار مشترك واحد فقط للرؤوس غير المتجاورة (الفرضية 38.1.1)، فإنّ هناك جارًا مشتركًا خارج F للرؤوس المتضادة الموجودة في F، وبما أنّ G بيان منتظم ثلاثي، فإنّ الرؤوس الثلاثة الناتجة خارج F تكون مختلفة. لذا فإنّ حذف $V(F)$ ينتج بيانًا جزئيًّا له ثلاثة رؤوس درجة كل منها واحد، ورأس رابع درجته ثلاث، لذا فهو مخلب.



سنرى فيما يأتي أنّ كل مخلب H في G يظهر مرة واحدة فقط بهذه الطريقة. افترض أنّ S تمثّل مجموعة الرؤوس في H التي درجة كل منها واحد، لاحظ أنّ S مجموعة مستقلة، الرأس المركزي في H يمثل جارًا مشتركًا. لذا فإن الأضلاع الستة الأخرى من S تصل إلى رؤوس مختلفة، وبناءً على ذلك، فإنّ $G- V(H)$ بيان منتظم ثلاثي. وبما أن طول أقصر حلقة في G يساوي 5، فإنّ $G-V(H)$ يجب أن يكون حلقة سداسية (طولها 6)، وهذه الحلقة السداسية تعطي H عندما نحذف رؤوسها. ■

سنعطي طريقة أخرى للعدد تتصل بمخمّنة طويلة الأمد، ونسمي البيان الجزئي الذي نحصل عليه من بيان معيّن بحذف رأس واحد فقط من رؤوسه بيانًا جزئيًّا محذوف الرأس (**vertex deleted subgraph**)، وهذه البيانات الجزئية التي نحصل عليها بهذه الطريقة يمكن ألا تكون مختلفة جميعها، فمثلاً، عند حذف أيّ رأس من رؤوس الحلقة C_n، فإننا نحصل على بيانات جزئية كل منها يشاكل المسار Pn-1.

11.3.1. *قضية. إذا كان G بيانًا بسيطًا رؤوسه $V_1,\dots V_n$ حيث $n \geq 3$، فإنّ.

$$e(G)\frac{\Sigma e(G-v_i)}{n-2} \quad \text{و} \quad d_G(v_i) = \frac{\Sigma e(G-vi)}{n-2} - e(G - v_i)$$

الإثبات: لاحظ أنه إذا كان e ضلعًا في G، فإنّ e يظهر في $G-vi$ إذا وفقط إذا لم تكن vi نقطة طرفية لهذا الضلع. لذا، فإنّ $\sum(G\text{-}vi)$ تحسب كلّ ضلع n-2 مرة.

إذن، عندما تُعرف $e(G)$، فإنّ درجة v_j تحسب بعدد الأضلاع المفقودة عند حذف v_j من $G- v_j$. ■

نموذجيًّا، نُعطى البيانات الجزئية المحذوفة الرأس بوصفها بيانات دون تسمية (وضع علامات أو رسم على الأضلاع أو الرؤوس)، إذا إننا نعرف فقط ما يُسمى صفوفَ التشاكل (isomorphism classes) لهذه البيانات، ولا نعلم أيّ رأس في $G- v_i$ يرتبط بأيّ رأس في G، وهذا يجعل من الصعب معرفة ماهية البيان G، وعلى سبيل المثال: فإن K_2 ومتممة K_2 لهما القائمة نفسها من البيانات الجزئية محذوفة الرأس، وللبيانات ذات الحجم الأكبر، يوجد لدينا مخمنة إعادة البناء (**Reconstruction Conjecture**) التي صيغت من قبل كيلي وأولام (Kelly and Ulam) في العام 1942م.

12.3.1. *مخمّنة. مخمنة إعادة البناء (Reconstruction Conjecture) إذا كان G بيانًا بسيطًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، فإنه يُحدّدُ تمامًا وبصورة فريدة بواسطة قائمة من بياناته (صفوف التشاكل) الجزئية المحذوفة الرأس. ■

قائمة البيانات الجزئية المحذوفة الرأس لبيان G تحوي $n(G)$ من المفردات، وتبيّن القضية 11.3.1 أنه يمكن إعادة بناء $e(G)$ ومجموعة درجات الرؤوس، وتبيّن قائمة درجات الرؤوس أنه يمكن إعادة بناء البيانات المنتظمة (التمرين 37)، وكذلك نستطيع أن نحدّد ما إذا كان G مترابطًا (التمرين 38)، وباستخدام هذا، فإنه يمكن إعادة بناء البيانات غير المترابطة (التمرين 39)، وهناك أيضًا بعض الشروط الكافية المعروفة التي تضمن إعادة البناء، لكن المخمّنة العامة تبقى مسألة دون حلّ.

مسائل القيم القصوى (أو القيم التطرّفية) (Extermal Problems)

تتعلق هذه المسائل بإيجاد القيم العظمى والصغرى لدالّة معروفة على مجموعة من الأشياء، فمثلاً، إن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط له n من الرؤوس هو $\binom{n}{2}$.

13.3.1. قضية. أصغر عدد من الأضلاع لبيان مترابط على n من الرؤوس هو n-1.

الإثبات: باستخدام القضية (11.2.1) نجد أنّ البيان الذي له n من الرؤوس، و K من الأضلاع له n-k مُركبة على الأقل، لذا فإنّ كلّ بيان له n من الرؤوس، وعدد أضلاعه أقلّ من n-1 يمتلك مركبتين. وعليه، فهو غير مترابط. ونقيض هذا هو أنّ لكلّ بيان مترابط على n من الرؤوس n-1 ضلعًا على الأقل، وهذا الحدّ الأدنى متحقق في المسار P_n. ■

14.3.1. ملاحظة. لإثبات أنّ B أصغر قيمة في $f(G)$ لبيانات في صف $\mathbf{G}$؛ يتطلب إثبات أن:

1) $f(G) \geq \beta$ لكل $G \in \mathbf{G}$.

2) $f(G) = \beta$ لبعض $G \in \mathbf{G}$.

يجب أن يكون إثبات الحدّ صالحًا لكلّ $G \in \mathbf{G}$، وللمساواة؛ يكفي أن نجد مثالاً واحدًا في $\mathbf{G}$ يحقق القيمة المطلوبة للدالة f، وبتغيير $\leq$ بـ $\geq$، نحصل على طريقة لإثبات أنّ B أكبر قيمة في $f(G)$. ■

سنحل فيما يأتي مسألة قيم قصوى لم تكن معطاة أصلاً كذلك.

15.3.1. قضية. إذا كان G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس، بحيث إن $\delta(G) \geq (n-1)/2$ ، فإن G يكون بيانًا مترابطًا.

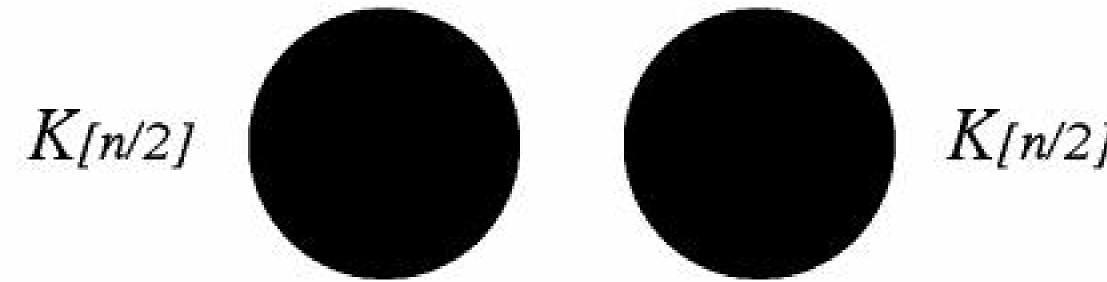
الإثبات: نختار u و v في $V(G)$. لذا، يكفي أن نثبت أنه يوجد جار مشترك لكليهما عندما يكونان غير متجاورين، وبما أنّ G بيان بسيط، إذن: وكذلك الأمر بالنسبة إلى الرأس v. وعندما $u \not\leftrightarrow v$، فإنّ $|N(u) \cup N(v)| \leq n-2$ وبما أنّ u,v ليسا في الاتحاد، وباستخدام الملاحظة $A.13$ في الملحق A، فإننا نحسب: ■

$$|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} - (n-2) = 1.$$

ونقول: إنّ النتيجة التي تمّ الحصول عليها هي أفضل ما يمكن، أو أنها حادة (**Sharp**) عندما لا يمكن تقوية أحد أجزائها أو مضامينها دون أن تصبح عبارة غير صحيحة، وتوضح القضية 15.3.1 ذلك بجلاء؛ فعندما تكون $\delta(G)$ أصغر من $n(G)-1)/2$)، لا يمكننا الاستنتاج أن البيان δ مترابط.

16.3.1. مثال. افترض أنّ G بيان على n من الرؤوس، بحيث إنّ مركباته تشاكل $k_{\lceil n/2 \rceil}$ و $k_{\lceil n/2 \rceil}$ حيث $\lfloor x \rfloor$ هي دالةّ أكبر عدد صحيح أقلّ من x أو تساويها، وأنّ $\lceil x \rceil$ هي دالة أكبر عدد صحيح أكبر من x أو تساويها، وبما أنّ $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor -1$ و G غير مترابط، فإن المتباينة الموجودة في 15.3.1 حادة (*Sharp*).

تسمّى الدالة $\lfloor x \rfloor$ دالة أرضية x، أمّا الدالة $\lceil x \rceil$ فتسمّى دالة سقف x، ونستخدم هاتين الدالتين هنا من أجل إعطاء وصف لعائلة واحدة من البيانات، وذلك بإعطاء مثال لكل n. ■



بإعطاء مجموعة من الأمثلة التي تمثل أنّ الحدّ الذي حصلنا عليه هو أفضل ما يمكن، نكون قد حللنا مسألة قيم قصوى. لاحظ أنّ القضية 15.3.1، والمثال 16.3.1 يثبتان أنّ "أقل قيمة لـ $\delta(G)$ التي تضمن ترابط البيان البسيط G هي $\lfloor n/2 \rfloor$"، أو أنّ "أكبر قيمة لـ $\delta(G)$ تجعل البيان غير مترابط هي $\lfloor n/2 \rfloor -1$"، وذلك على افتراض أنّ n من الرؤوس للبيان G.

17.3.1. تعريف: البيان الذي تمّ الحصول عليه من اتحاد بيانين G و H منفصلي الرؤوس يسمى الاتحاد المنفصل، أو المجموع للبيانين، ويرمز إليه بالرمز $G + H$. وبوجه عام، نستخدم الرمز mG للتدليل على البيان المؤلف من m نسخة من بيان G، حيث إنّ أضلاع أيّ نسختين من هذه النسخ تكون منفصلة (Pairwise disjoint edges) زوجًا زوجًا.

18.3.1. مثال: إذا كان كلّ من G و H مترابطًا، فإنّ للبيان $G+H$ مركبتين هما: G و H، لذا، فإنّ البيان الموجود في المثال (16.3.1) هو $K_{\lfloor n/2 \rfloor} + K_{\lfloor n/2 \rfloor}$، ويذكر أن هذه الرموز مناسبة عندما لا نعطي أسماء للرؤوس. لاحظ أن $K_m + K_n = \overline{K}_{m,n}$، ولاحظ كذلك أنّ البيان mK_2 يتألف من m من الأضلاع المنفصلة زوجًا زوجًا. ■

نستخدم مسائل القيم القصوى في نظرية البيانات لإيجاد البيان الأمثل الذي يحقق خاصية معينة ضمن مجموعة (class) أو مجموعة من البيانات، وعندما نبحث عن القيم القصوى لبيان واحد، فالمسألة مختلفة من بيان إلى آخر. فمثلاً، يمكن أن نسأل عن حجم أكبر مجموعة مستقلة، أو حجم أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع، تتميز هذه المسائل من المسائل التي ناقشناها سابقًا، فإننا نسميها مسائل الأمثلية (**optimization problems**). بما أنه يوجد مثل أو شاهد لمسائل الأمثلية في كلّ بيان، فلا نستطيع وضع قائمة لحلول المسألة جميعها. لذا نلجأ إلى إيجاد طريقة حلّ، أو لوضع حدود على الإجابة بدلالة سمات أخرى للبيان. وفي ضوء ذلك، نأخذ في الحسبان مسألة إيجاد أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع لبيان معين، وهذا يسمح لنا باستخدام أسلوب البناء، أو إيجاد خوارزمية تعطي الحلّ أو الإثبات (الخوارزمية: طريقة منظمة تتضمن عددًا من الخطوات لتحقيق هدف معين).

إن إحدى طرق إثبات وجود شيء هو القيام ببناء هذا الشيء، ويمكن افتراض هذا النوع من الإثبات

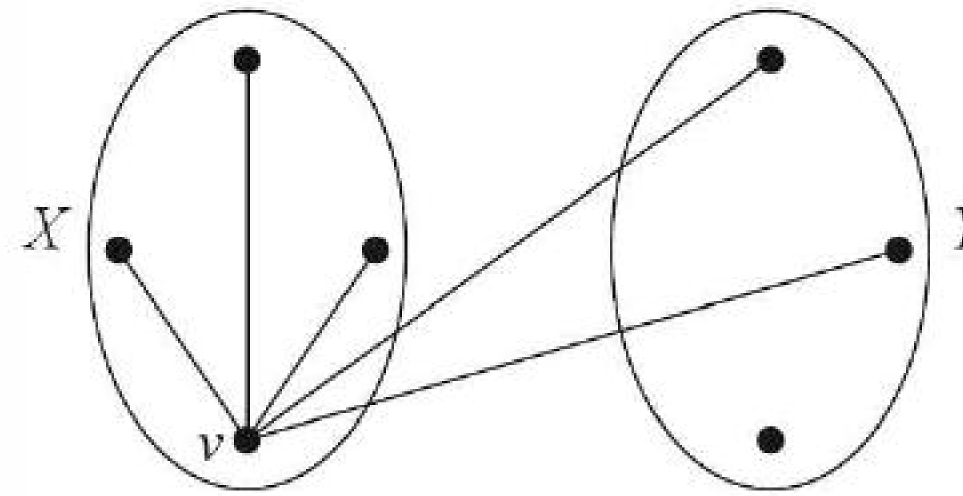
خوارزمية. ولإكمال الإثبات؛ لابدّ من إثبات أنّ الخوارزمية تنتهي بعد إجراء عدد من العمليات لإعطاء النتيجة المطلوبة. وربّما يتضمّن هذا النوع من البراهين استخدام الاستقراء الرياضي، والتناقض، والمحدودية أو الانتهائية (finiteness) ..... إلخ.

سنثبت أنه يوجد لكلّ بيان أكبرُ بيان جزئي ثنائي الفرع من خلال إعطاء خوارزمية تضمن وجود مثل هذا البيان الجزئي. التمارين (45 - 49) تتعلق بإيجاد أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع لبعض البيانات.

19.3.1. نظرية. يوجد لكل بيان G خالٍ من العرى بيانٌ جزئي ثنائي الفرع عدد أضلاعه $e(G)/2$ على الأقل.

الإثبات: ابدأ بأي تجزئة للمجموعة $V(G)$ إلى مجموعتين X و Y، فالأضلاع التي أحد طرفيها في X، والطرف الآخر في Y تشكل بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع H، وتمثل كلّ من X و Y تجزئة ثنائية لرؤوسه، وإذا كان عدد أضلاع H أقلّ من نصف عدد أضلاع G الذي يكون الرأس v طرفًا له، فإنّ عدد الرؤوس التي ترتبط بـ v بأضلاع، والخاصة بالمجموعة التي تنتمي إليها v، يكون أكثر من عدد رؤوس المجموعة الثانية التي ترتبط بـ v بأضلاع، كما هو موضح في الشكل أدناه. وبتحويل v من مجموعتها إلى المجموعة الأخرى، فإنها تكسب عددًا من الأضلاع أكثر من العدد الذي تخسره.

وبتكرار عملية تحريك الرؤوس هذه، مع ملاحظة أنّ هذه العملية تزيد حجم البيان الجزئي الثنائي الفرع الذي تحصل عليه، فلا بد لهذه العملية من الانتهاء عند حدّ معين. وعندئذ نحصل على $d_H(v) \geq d_G(v)/2$ لكل $v \in V(G)$. وبأخذ مجموع الطرفين، وباستخدام صيغة جمع الدرجات نجد أن $e(H) \geq e(G)/2$. ■

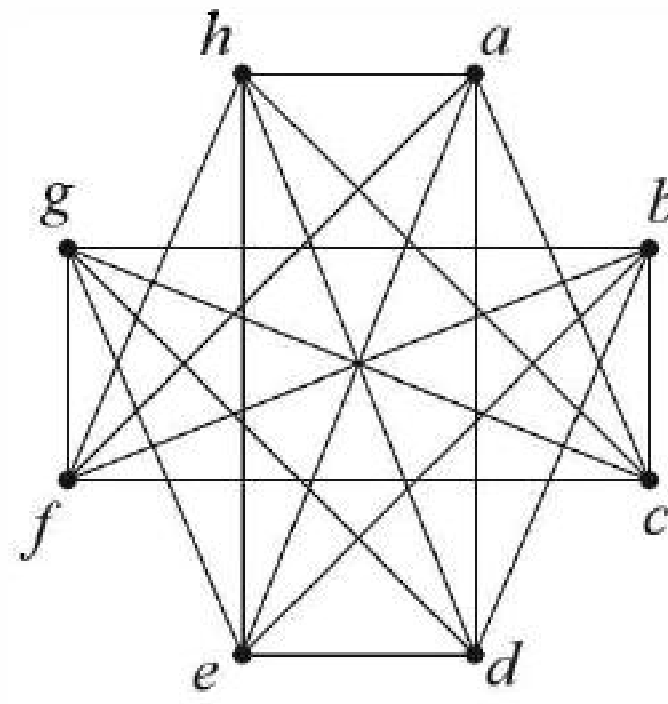


لاحظ أنّ البراهين باستخدام الخوارزميات ترتبط بالإثبات الاستقرائي غالبًا ، أو بإثبات يتعلق بالدرجات أو القيم القصوى. إنّ هذه البراهين تكون قصيرة وسهلة الإيجاد. لذا فغالبًا ما نبحث عن مثل هذا الإثبات، ثم نحوّله إلى خوارزمية، فعلى سبيل المثال: نعطي إثباتًا للنظرية (19.3.1) بلغة القيم القصوى والتناقض. وبالمحصّلة، فإنّ اختيار قيمة قصوى لـ H يتجه مباشرة إلى نهاية الخوارزمية.

> افترض أنّ H بيان جزئي ثنائي الفرع للبيان G، بحيث إنّ عدد أضلاع H هو أكبر ما يمكن، إذا كانت لبعض $v \in V(G)$، وبتحريك v في التجزئة الثنائية من مجموعتها إلى المجموعة الأخرى، نحصل على تناقض لاختيار H.

20.3.1. مثال: قيمة عظمى محلية. لا تضمن الخوارزمية في النظرية (19.3.1) إنتاج بيان جزئي ثنائي الفرع له أكبر عدد من الأضلاع، لكن ما تعطيه هو بيان جزئي ثنائي الفرع عدد أضلاعه أكبر من نصف عدد أضلاع البيان الكلي أو يساويه. إن البيان أدناه منتظم من الدرجة 5، له 8 رؤوس و 20 ضلعًا، والتجزئة الثنائية $X = \{a,b,c,d\}$ و $Y = \{e,f,g,h\}$ تعطي بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع، وهذا البيان الجزئي منتظم من الدرجة 3 له 12 ضلعًا، حيث تنتهي الخوارزمية هنا، علمًا بأن تغيير (قلب) موقع أحد الرؤوس يكسبنا ضلعين، إلا أننا نخسر ثلاثة أضلاع.

وعلى الرغم من ذلك، فإن التجزئة الثنائية $X = \{a,b,g,h\}$ و $Y = \{c,d,e,f\}$ تعطينا بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع منتظمًا من الدرجة 4 وله 16 ضلعًا، وهنا لا بدّ من الإشارة إلى أنّ الخوارزمية التي تبحث عن قيمة عظمى بإجراء تغييرات موضعية (محلية) ربّما تحصل على قيمة عظمى محلية فقط، وليست قيمة عظمى كلية أو مطلقة. ■



21.3.1. ملاحظة : في البيان G، أكبر عدد كلي للأضلاع في بيان جزئي ثنائي الفرع هو $e(G)$ ناقصًا أقل عدد ممكن من الأضلاع التي تلزم للحصول على ضلع واحد على الأقل من كل حلقة فردية. ■

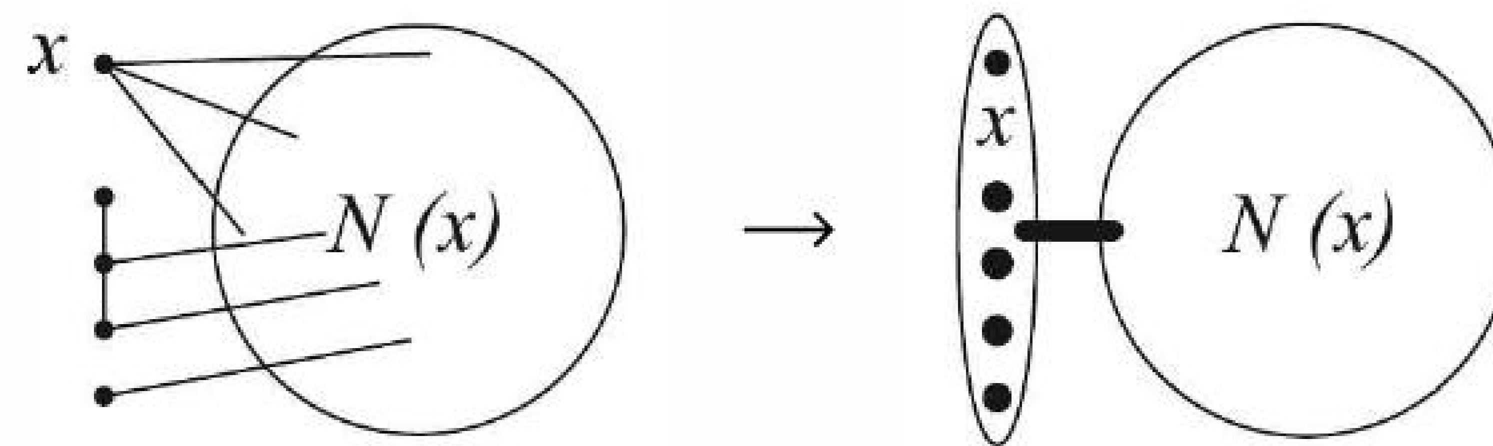
مسألتنا التالية المتعلقة بالقيم القصوى لا تبدأ بالبيانات الثنائية الفرع، ولكنها تنتهي هناك؛ إذ يندر أنْ تجد في السياسة والحروب عدوين لهما عدو مشترك، وعادة ما يتعاون اثنان ضد الثالث، والمسألة الآن إذا أعطينا n من الجماعات، فكم زوجًا من الأعداء يمكن أن يكون هناك، علمًا بأنه لا يوجد عدو مشترك لأي عدوين؟

بلغة البيانات نسأل عن أكبر عدد ممكن من الأضلاع يمكن أن يكون لبيان بسيط على n من الرؤوس إذا علم عدم وجود مثلثات (حلقات ثلاثية) لهذا البيان. لاحظ أنه لا توجد مثلثات في البيانات الثنائية الفرع. ولكن كثير من الرسوم غير ثنائي الفرع (مثل بيان بيترسون) لا يوجد فيها مثلثات أيضًا، وباستخدام القيم القصوى (باختيار رأس له أكبر درجة) سنثبت وجود رسوم تحقق هذه القيم، ومثال ذلك البيانات الثنائية الفرع التامة (Complete bipartite graphs).

22.3.1. تعريف. نقول: إنّ البيان G متحرر من H (أو خالٍ من **H-free**) (H) إذا كان يخلو من أي بيان جزئي يشاكل H.

23.3.1. نظرية : (Mantel [1907]) أكبر عدد ممكن من الأضلاع لبيان بسيط يخلو من المثلثات على n من الرؤوس هو $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

الإثبات: افترض أنّ G بيان بسيط خالٍ من المثلثات له n من الرؤوس، وافترض أن x رأس له أكبر درجة، ضع $k = d(x)$، بما أنّ G تخلو من المثلثات، فلا توجد أضلاع تربط بين الرؤوس الموجودة في جوار x. لذا، فإنّ جمع درجة x، ودرجة كل عنصر غير مجاور لها يسهم باحتساب نقطة طرفية واحدة على الأقل لكلّ ضلع، لذا، نجد أنّ: $\sum_{v \notin N(x)} d(v) \geq e(G)$ ، وبإيجاد المجموع على $n-k$ من الرؤوس درجة كل منها أقل من k أو يساويها ، نجد أن $e(G) \leq (n-k)k$.



بما أنّ $(n-k)k$ تُعدّ عدد الأضلاع في $K_{n-k,k}$، فنكون قد أثبتنا أنّ $e(G)$ محصورة (محدودة) بحجم عصبة ثنائية (biclique) لها n من الرؤوس. وبتحريك رأس من رؤوس k_{n-k},k من المجموعة التي حجمها k إلى المجموعة التي حجمها $n-k$، نربح $k-1$ ضلعًا، ونخسر $n-k$ ضلعًا. لذا فإن محصلة ما نربح هو $2k-1-n$ ضلعًا. وهذا يكون موجبًا عندما $2k > n+1$، وسالبًا عندما $2k < n+1$. وبناءً عليه، فإن $e(K_{n-k,k})$ تكون أكبر ما يمكن عندما $K = \lceil n/2 \rceil$ ، أو $\lfloor n/2 \rfloor$. لذا فإنّ حاصل الضرب يساوي عندما تكون n زوجية، ويساوي عندما تكون n فردية، إذن، $e(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

لإثبات أنّ هذا الحدّ هو أفضل ما يمكن؛ نأخذ في الحسبان البيان $K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$ الذي يخلو من المثلثات وعدد أضلاعه $\lfloor n^2/4\rfloor$ $K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$. ■

وعلى الرغم من أنه يمكن تكبير (تعظيم) $(n-k)k$ باستخدام التفاضل، إلا أن استخدام طريق متقطع (غير متصل) أفضل أحيانًا؛ لأن ذلك يضمن أن تكون K عددًا صحيحًا مباشرة، ويمكن تعميمها بسهولة لعدد أكبر من المتغيرات. إنّ فكرة نقل الرؤوس من مجموعة إلى المجموعة التي وردت في النظرية (19.3.1) قد استخدمت لإيجاد أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع للبيان kn في النظرية .(9.2.5) سنعمّم النظرية (23.3.1) لتشمل البيانات التي تخلو من $kr+1$. تقودنا نتيجة مانتيل (Mantel's) إلى سبب آخر لصياغة براهين الاستقراء بالطريقة التي أوردناها، والسبب هو الأمان.

24.3.1. مثال. (إثبات غير صحيح). لنحاول إثبات النظرية (23.3.1) باستخدام الاستقراء الرياضي على n. الخطوة الأساسية: $n \leq 2$، لاحظ أن البيان التام kn له أكبر عدد من الأضلاع، ويخلو من المثلثات.

خطوة الاستقراء: $n > 2$. افترض أن ادعاءنا صحيح عندما $n = k$. إذن، فإنّ $K_{\lfloor k/2\rfloor\lceil k/2\rceil}$، هو أكبر بيان على k من الرؤوس يخلو من المثلثات، أضف رأسًا x للحصول على بيان خالٍ من المثلثات على $k+1$ من الرؤوس، لاحظ أنه إذا كانت x تجاور رؤوسًا من مجموعتي الرؤوس المنفصلتين، فإن ذلك ينتج مثلثًا. لذا، ومن أجل الحصول على أكبر عدد ممكن من الأضلاع الإضافية، اجعل x تجاور كل رأس في المجموعة التي عدد رؤوسها أكثر من مجموعتي رؤوس، $K_{\lfloor k/2\rfloor\lceil k/2\rceil}$. وبذلك، نحصل على $K_{\lfloor (k+1)/2\rfloor\lceil (k+1)/2\rceil}$ وهذا ينهي الإثبات.

إن هذا الإثبات غير صحيح؛ لأننا لم نأخذ في الحسبان البيانات جميعها التي تخلو من المثلثات التي لها $k+1$ من الرؤوس؛ لأننا عالجنا حالة البيانات التي لها أكبر بيان جزئي (من حيث عدد الأضلاع) على k من الرؤوس فقط، وهذا البيان يظهر في أكبر بيان له $k+1$ من الرؤوس، ولكن لا يمكن استخدام هذه الحقيقة قبل إثباتها، لاحظ أنه من الممكن الحصول على مثال ذي قيمة عظمى على $k+1$ من الرؤوس بإضافة رأس له أكبر درجة لبيان ليس له قيمة عظمى على k من الرؤوس. يطور التمرين (51) إثباتًا صحيحًا باستخدام الاستقراء على n. ■

إن الخطأ في المثال (24.3.1) هو أن خطوة الاستقراء لم تأخذ في الحسبان الشواهد الممكنة جميعها للعبارة المتعلقة بالقيمة الكبرى والجديدة للوسيط، ونسمي هذا الخطأ مصيدةَ الاستقراء. إذا كانت خطوة الاستقراء تنمي شاهدًا للقيمة الجديدة للوسيط من شاهد أصغر، فيجب علينا أن نثبت أن الشواهد والأمثلة للقيمة الجديدة جميعها قد أُخذت في الحسبان.

عندما يكون هناك مثل واحد لكل قيمة من قيم وسيط الاستقراء (كما في حالة صيغ الجمع) عند ذلك لا توجد مشكلة. وعندما يكون هناك أكثر من شاهد، فمن الأسهل أن نبدأ بشاهد اختياري لقيمة الوسيط الأكبر؛ لأن هذا – وبوضوح- يأخذ في الحسبان شواهد G جميعها للقيمة القصوى. لذا، فمن غير الضروري أن نثبت أننا قد قمنا بتوليدها جميعًا.

على أي حال، عندما نحصل من G على شاهد أصغر، فعلينا أن نؤكد على أن فرضيات الاستقراء تنطبق عليها. فعلى سبيل المثال، في إثبات الاستقراء الخاص بحلقات أويلر (النظرية 62.2.1)، يجب علينا تطبيق فرضيات الاستقراء على كل مركبة من مركبات البيان نحصل عليها بحذف أضلاع حلقة معينة، وليس على البيان كله دفعة واحدة.

25.3.1. ملاحظة: في هذه الملاحظة، نعطي هيكلاً للاستقراء (A template for induction) غالبًا ما تكون العبارة التي نرغب في إثباتها بالاستقراء على n تضمينًا مثل $A(n) \Rightarrow B(n)$، حيث يجب أنّ نثبت أنّ كلّ شاهد G يحقق $A(n)$، ويحقق $B(n)$ أيضًا. إن خطوتنا الاستقرائية تتبع شكلاً نمطيًا معينًا، حيث نحصل من G على شيء

أصغر G'، إذا أثبتنا أن G' تحقق $A(n-1)$ (للاستقراء العادي). وإذا أدت خطوات (فرضيات) الاستقراء إلى أن G' تحقق $B(n-1)$، فإننا نستخدم حينها حقيقة أنّ G' تحقق $B(n-1)$ لإثبات أن G تحقق $B(n)$.

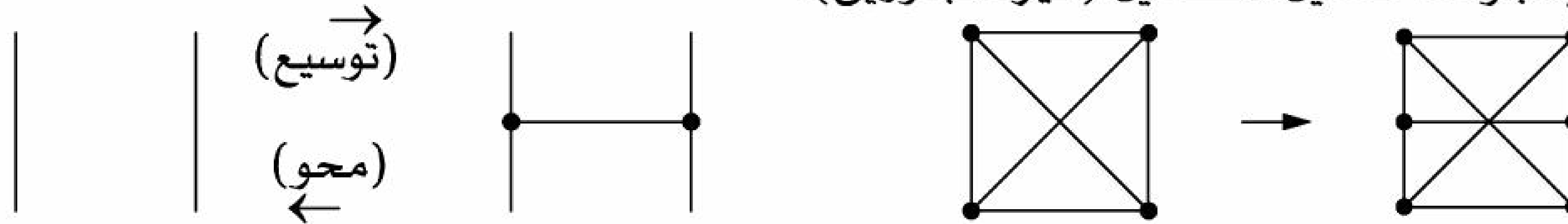
$$\begin{array}{ccc} G \text{ satisfies } A(n) & & G \text{ satisfies } B(n) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ G' \text{ satisfies } A(n-1) & & G' \text{ satisfies } B(n-1) \end{array}$$

الخطوة الأساسية هنا خطوة الاستقراء، وأما باقي إجراء الخطوات، فعلينا نحن القيام بها، لاحظ أن براهين الاستقراء تتبع هذا الصورة أو النمط. ■

26.3.1. *مثال: مصيدة الاستقراء قد تؤدي مصيدة الاستقراء إلى استنتاج غير صحيح، لنحاول استخدام الاستقراء على عدد الرؤوس لإثبات أن كل بيان مترابط منتظم ثلاثي يخلو من ضلع قطع (cut – edge).

وباستخدام صيغة جمع الدرجات، نعلم أن كل بيان منتظم درجة رؤوسه فردية يجب أن يكون زوجي الرتبة. لذا نفترض أن لدينا بيانًا له $2m$ من الرؤوس، إن أصغر بيان منتظم ثلاثي هو k_4، وهو مترابط، وليس له ضلع قطع. وهذا يثبت خطوة الاستقراء الأساسية، حيث $m=2$.

خطوة الاستقراء: افترض أن النتيجة صحيحة لكل بيان G منتظم ثلاثي له $2k$ من الرؤوس. الآن يمكننا الحصول على بيان G' منتظم ثلاثي له $2(k+1)$ من الرؤوس (هذا يمثل أول بيان له رتبة أكبر) وذلك باستخدام عملية "توسعة للبيان G" على الصورة التالية: خذ ضلعين من G، واستبدلهما بمسارين طول كل منهما 2 من خلال إضافة رأسين جديدين على هذين الضلعين وربطهما بضلع جديد. يوضح الشكل أدناه كيفية الحصول على $k_{3.3}$ من k_4 بتوسعة ضلعين منفصلين (غير متجاورين).

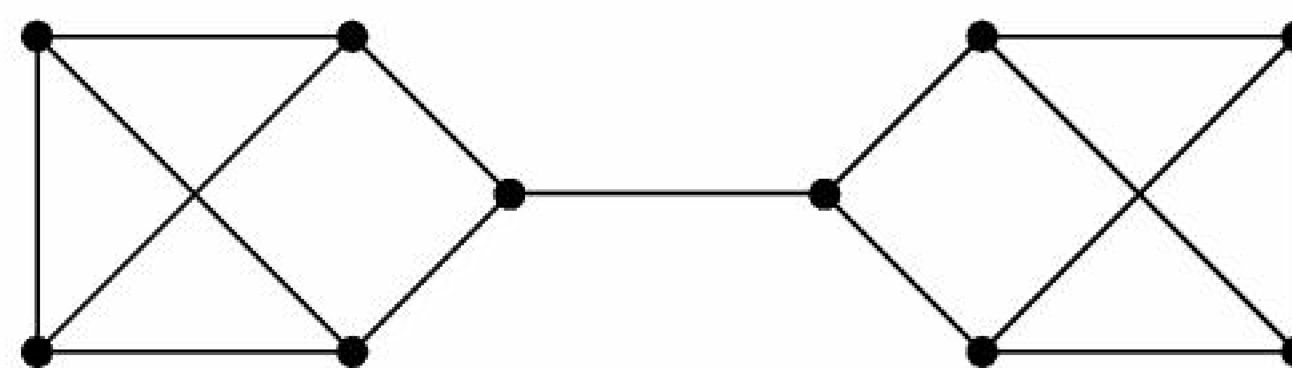


لاحظ أنه إذا كان البيان G مترابطًا فإن البيان الموسع G' يكون مترابطًا أيضًا. ولاحظ أنه بإضافة رأسين جديدين لضلعين غير متجاورين، فإننا نكون قد زدنا طول المسارات بين الرؤوس القديمة، وأنه يمكن الحصول على مسار إلى أحد الرؤوس الجديدة في G' من مسار في G إلى أحد جيران هذا الرأس.

إذا خلت G من ضلع قطع، فإن كل ضلع يقع في حلقة (النظرية 14.2.1)، وتبقى هذه الحلقات موجودة في G' (الحلقات التي تحوي الأضلاع المستبدلة تصبح أطول).

لاحظ أنّ الضلع الذي يربط بين الرؤوس الجديدة في G' يقع كذلك في حلقة تستخدم مسارًا في G بين الأضلاع المستبدلة، وباستخدام النظرية 14.2.1 نجد أنه لا يوجد لـ G' ضلع قطع (أو فصل).

لقد أثبتنا أنه إذا كان البيان G مترابطًا ويخلو من ضلع قطع، فإنّ G' أيضًا يكون مترابطًا وخاليًا من ضلع قطع. لاحظ أنه ربما يُعتقد أننا وباستخدام الاستقراء على m قد أثبتنا أن كلّ بيان بسيط مترابط منتظم ثلاثي له $2m$ من الأضلاع يخلو من ضلع قطع، لكن البيان الموضح في الشكل أدناه يعطينا مثالاً يناقض هذا. ويعدّ هذا الإثبات غير صحيح لأنه لا يمكن بناء كل بيان بسيط مترابط منتظم ثلاثي بعمل توسعة للبيان k_4، علمًا بأنه لا يمكننا الحصول على البيانات التي تخلو من ضلع قطع جميعها كما يُظهر تمرين 66. ■



تنويه: يوجد في الملحق A مثال آخر على مصيدة الاستقراء كذلك.

المتتاليات البيانية (Graphic Sequences)

سنتحدث عن درجات الرؤوس في ما يأتي:

27.3.1. تعريف: نعرف متتالية الدرجات لبيان على أنها قائمة بدرجات الرؤوس مرتبة تنازليًا على الشكل $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$، حيث d_i تمثل درجة الرأس Vi.

يوجد لكل بيان متتالية درجات، والسؤال هو ما إذا كان لدينا مجموعة من الأعداد الصحيحة غير السالبة $d_1, \ldots d_n$، فهل يوجد بيان تكون هذه الأعداد هي درجات رؤوسه.

إن صيغة جمع الدرجات تعطي أن $\sum d_i$ يجب أن يكون زوجيًا، وعندما نسمح بوجود العرى والأضلاع المكررة، فإن الشروط الضرورية تكون كافية (TONCAS).

28.3.1. قضية: إذا كانت $d_1, \ldots, d_n$ أعدادًا صحيحةً غير سالبةٍ، فإن هذه الأعداد تصلح أن تكون رؤوسًا لبيان إذا وفقط إذا كان $\sum d_i$ زوجيًا.

الإثبات: الضرورة: إذا وجد بيان G بحيث إن $d_1, \ldots, d_n$ هي رؤوسه، فإن صيغة جمع الدرجات تضمن أن $\sum d_i = 2e(G)$ وهذا عدد زوجي.

الكفاية: افترض أن $\sum d_i$ زوجي، وبما أنه كذلك، فإنّ عدد القيم الفردية عدد زوجي أيضًا. لذا سنجد بيانًا رؤوسه $v_1, \ldots, vn$، بحيث إن $d(v_i) = d_i$. في البداية، اختر أزواجًا من الرؤوس v_i التي درجاتها فردية، ثم اربط كل زوج من هذه الرؤوس بضلع، إن ما تبقى من درجة كل رأس هو عدد زوجي غير سالب. لذا ولكل i يمكن إضافة $\lfloor d_i/2 \rfloor$ أنشوطة على كل رأس v_i، وهذا يعطينا البيان المطلوب. ■

يعتمد الإثبات السابق على بناء البيان؛ لذا فإنه يسمى إثباتًا بنائيًا. وقد كان بإمكاننا استخدام الاستقراء (تمرين 56). إن عملية البناء السابقة سهلة بوجود العرى، وغير سهلة فيما عدا ذلك؛ فمثلاً لا يوجد بيان درجات رؤوسه (2،0،0)، وعليه فإنّ شرط المجموع الزوجي غير كاف. إن التمرين 63 يعطي وصفًا لمتتاليات درجات البيانات الخالية من العرى. وفيما يأتي، سنعطي وصفًا لمتتاليات الدرجات لبيانات بسيطة باستخدام شرط مكرر يقودنا إلى خوارزمية، ولا بد من الإشارة إلى وجود توصيفات أخرى معروفة؛ حيث أعطى العالمان سيركسما وهوجيفين (Sierksma – Hoogeveen) في العام 1991 قائمة مؤلفة من سبعة توصيفات لمتتالية الدرجات.

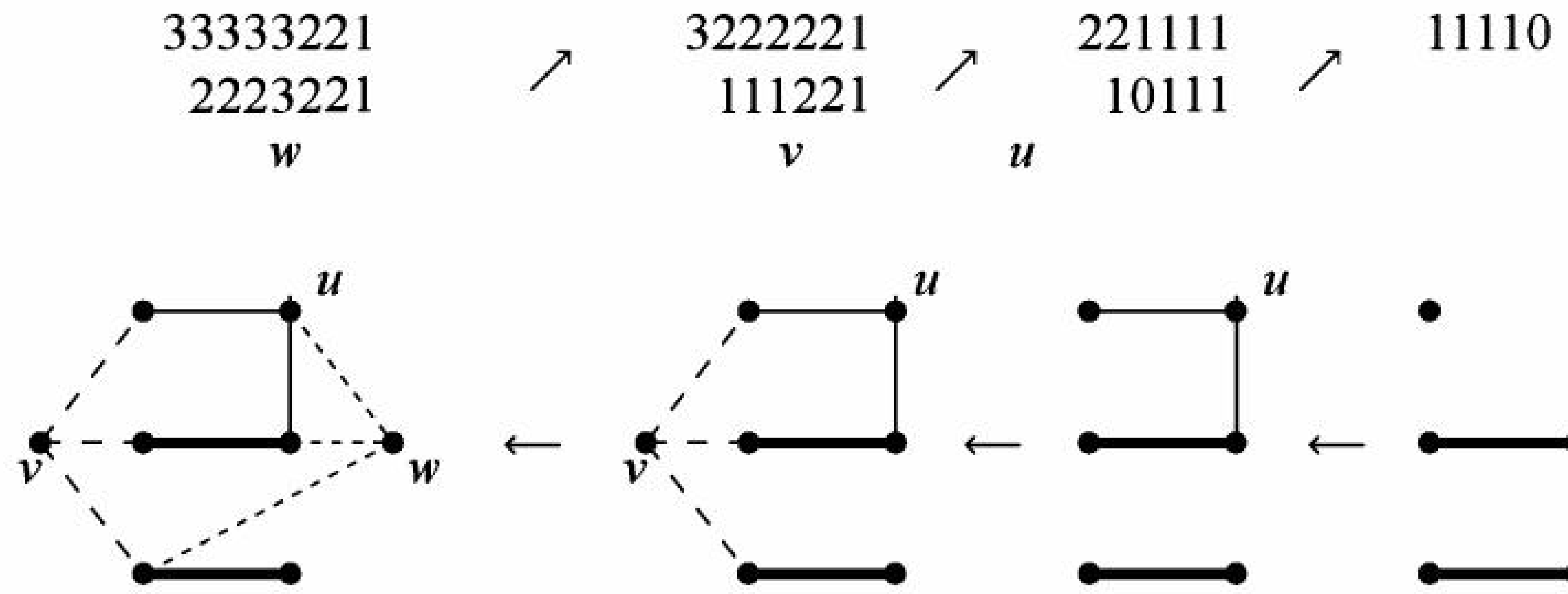
29.3.1. تعريف: نعرّف المتتالية البيانية على أنها قائمة من الأعداد الصحيحة غير السالبة التي تمثل متتالية درجات لبيان بسيط. ونقول: إن البيان البسيط يحقق d إذا كانت المتتالية d هي متتالية درجات هذا البيان.

30.3.1. مثال: شرط دوري (مكرر). (A recursive condition) لاحظ أن كلًّا من 2،2،1،1 و 1،0،1 متتاليتا بيان، حيث يحقق البيان $k_2 + k_1$ المتتالية 1،0،1، وبإضافة رأس جديد يجاور رأسًا درجته 1، ورأس آخر درجته 0 نحصل على بيان متتالية درجاته هي: 2،2،1،1 كما في الشكل أدناه. وبالعكس، إذا حقق بيان المتتالية 2،2،1،1، فإن له رأسا w، وله جاران أحدهما درجته 1، والآخر درجته 2، وبحذف w، نحصل على بيان درجاته: 1،0،1.



وبالمثل، إذا أردنا اختبار ما إذا كانت المتتالية 33333221 تحقق بيانًا أم لا، فإننا نبحث عن بيان له رأس w درجته 3، وله ثلاثة جيران درجة كل منها 3، وهذا يكون موجودًا إذا وفقط إذا كانت المتتالية 2223221 بيانية

(يحققها بيان معين)، نعيد ترتيب هذه ونختبر 3222221، ثمّ نستمر بالحذف وإعادة الترتيب حتى نستطيع أن نتبين ما إذا كانت المتتالية الباقية قابلة للتحقيق أم لا، وإذا كانت قابلة للتحقيق، فنعمل رجوعًا على إضافة رؤوس لها الجيران المطلوبة حتى نصل إلى بيان يحقق قائمة الدرجات الأصلية. لاحظ أن هذا التحقيق غير فريد، والنظرية التالية تبين عمل هذا الاختبار المكرر.

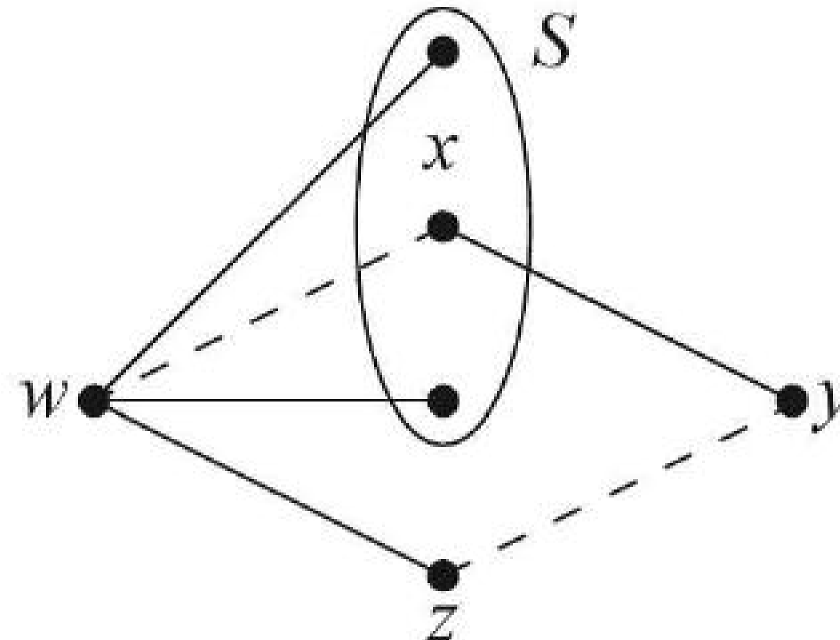


31.3.1. نظرية (Havel [1955] Hakimi [1962]) بكل $n > 1$، إذا كانت d مجموعة (قائمة) مؤلفة من n من الأعداد الصحيحة، فإن d تكون بيانية (تحقق بيانًا معينًا) إذا وفقط إذا كانت d' بيانية، حيث نحصل على d' من d بحذف عنصرها الأكبر Δ، وطرح 1 من العنصر الذي يسبق Δ (العنصر الذي هو أقل من Δ مباشرة)، لاحظ أن المتتالية الفريدة التي تتألف من عنصر واحد وتكون بيانية في الوقت نفسه هي: $d_1 = 0$.

الإثبات: إذا كانت $n = 1$، فإن العبارة متحققة تلقائيًّا. لذا افترض أن $n > 1$. سنثبت أولاً أن الشرط الموجود في النظرية كاف. إذا كانت القائمة d معطاة بحيث إن $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ ، وأن G' بيان له متتالية درجات d'، فأضف رأسًا جديدًا للبيان G' يجاور رؤوس G' التي درجاتها $d_2 - 1,\ldots,d_{\Delta+1} - 1$. تمثل هذه القيم لـ d_i أكبر العناصر Δ لعناصر d بعد (نسخة من) Δ نفسها، لكن $d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1}-1$ ليست بالضرورة مساوية لأكبر العناصر م في d'

لإثبات أن الشروط ضرورية، نبدأ ببيان بسيط G يحقق d، ونحصل منه على بيان G' يحقق d'. افترض أن w رأس في G درجته Δ. وافترض كذلك أن S تمثل مجموعة مؤلفة من Δ من الرؤوس في G لها الدرجات المنشودة $d_2,\ldots,d_{\Delta+1}$. إذا كان $N(w) = S$، فإننا نحذف w لنحصل على G'.

وعلى النقيض من ذلك، بعض الرؤوس الموجودة في S غير موجودة في $N(w)$. وفي هذه الحالة، نعدّل G(modify) لزيادة $|N(w) \cap S|$ دون تغيير درجة أي رأس. بما أنه يمكن زيادة $|N(w) \cap S|$ بـ Δ مرة على الأكثر، وبإعادة هذه العملية، يتحول G إلى بيان آخر G^* يحقق d، وتمثل فيه S جوارًا للرأس w. وبحذف w من G^* نحصل على البيان المطلوب G' الذي يحقق d'. ولإيجاد هذا التعديل عندما $N(w) \neq S$؛ نختار $x \in S$ و$z \notin S$، بحيث إن $w \leftrightarrow z$ و $w \nleftrightarrow x$ ونرغب بإضافة wx وحذف wz، مع المحافظة على درجات الرؤوس. بما أنّ $d(x) \geq d(z)$، و w تجاور z ولا تجاور x، فيوجد رأس y يجاور x ولا يجاور z، الآن احذف $\{wz، xy\}$، وأضف $\{wx، yz\}$ لزيادة $|N(w) \cap S|$ (انظر الشكل أدناه). ■



النظرية (31.3.1) تعطي اختبارًا لقائمة من n من الأعداد باختبار قائمة مؤلفة من n-1 من الأعداد،

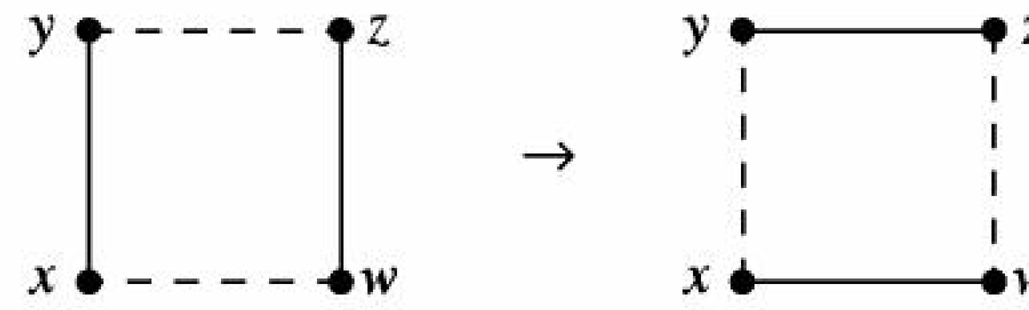
في الحقيقة تعطينا خوارزمية مكررة الخطوات (recursive algorithm) لاختبار ما إذا كانت d مُحققة بيانيًّا (بيانية). إن الشرط الضروري بأن يكون Σd_i زوجيًّا متحقق ضمنيًّا لأنّ:

$$\Sigma d'_i = (\Sigma d_i) - 2\Delta$$

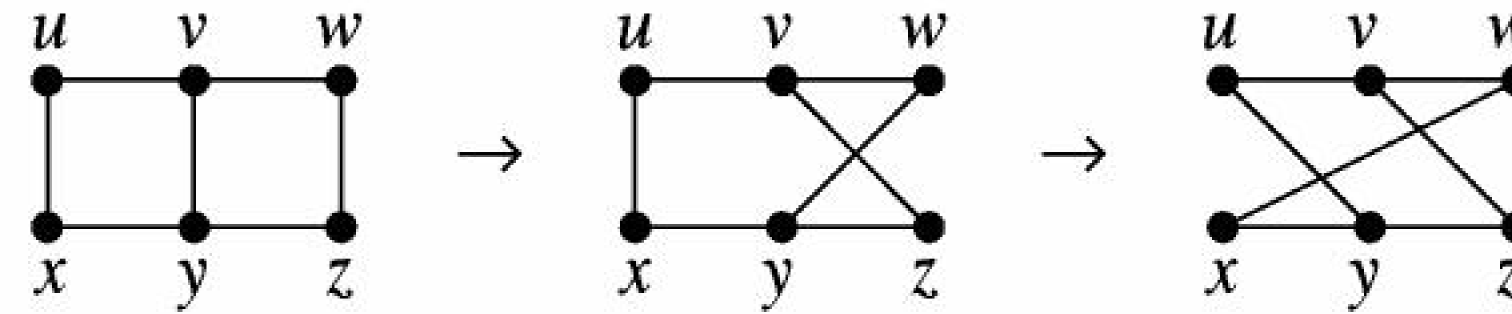
وهذا يعطي أنّ $\Sigma d'_i$ و Σd_i لهما النوعية نفسها، يؤدي الإثبات الخوارزمي (باستخدام خوارزمية) الذي يستخدم تغييرًا محليًّا (موضعيًّا) (Local change) إلى الشرط المطلوب، ويمكن صياغة ذلك بوصفه إثباتًا استقرائيًّا (الإثبات باستخدام الاستقراء) حيث إنّ متغيرّ (وسيط) الاستقراء هو البعد عن الشرط المطلوب، وفي الإثبات (31.3.1) كان البعد هو عدد رؤوس S غير الموجودة في $N(w)$.

لقد استخدمنا تبديل الأضلاع (edge Switches) لتحويل بيان له متتالية درجات d إلى بيان يحقق الشرط المطلوب. وسنرى فيما يأتي، سنرى أنّ كل بيان بسيط له متتالية درجات d يمكن تحويله بمثل هذا التبديل (التغيير) إلى أي بيان آخر.

32.3.1. تعريف: التبديل الثنائي (**2-switch**). نُعرّف التبديل الثنائي على أنه تبديل الضلعين xy و zw في بيان بسيط بالضلعين yz و wx بشرط عدم ظهور yz و wx بوصفهما ضلعين في البيان الأصلي.

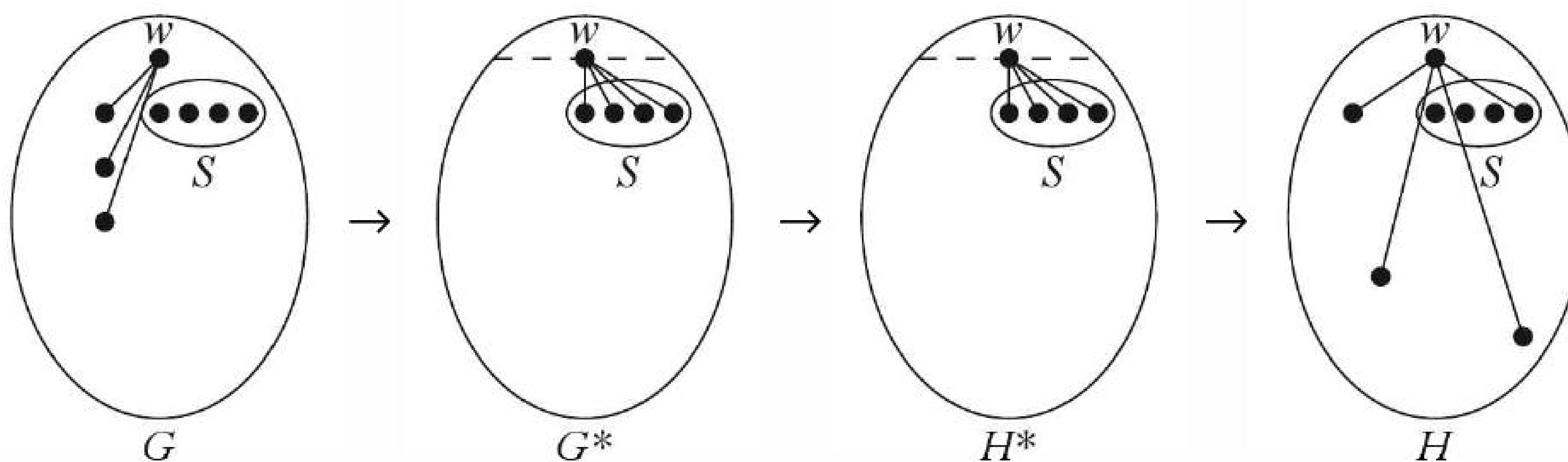


تشير الخطوط المنقطة أعلاه إلى أن الرأسين غير متجاورين. إذا كان $y \leftrightarrow z$ أو $x \leftrightarrow w$، فإنه لا يمكن عمل تبديل ثنائي؛ لأن البيان الناتج لا يكون بسيطًا. لاحظ أن التبديل الثنائي يحافظ على درجات الرؤوس، وإذا كان التبديل الثنائي يحول H إلى H^*، فإن عمل تبديل ثنائي آخر على الرؤوس الأربعة نفسها يحول H^* إلى H، والرسم أدناه يوضح تبديلين ثنائيين متتابعين.



33.3.1.* نظرية. ($Berge$ [1973، p 153 – 154]) إذا كان G و H بيانين بسيطين لهما مجموعة الرؤوس V نفسها، فإن $d_G(v) = d_H(V)$ لكل $v \in V$ إذا وفقط إذا وُجِدَت متتالية تبديلات (تغييرات) ثنائية تنقل G إلى H.

الإثبات: بما أنّ كل تبديل ثنائي يحافظ على درجة الرؤوس، فإنّ هذا الشرط كافٍ. وبالعكس عندما $d_G(v) = d_H(v)$ لكل $v \in V$، فإننا نحصل على متتالية تغييرات (تبديلاتٍ) ثنائية مناسبة بالاستقراء على n التي تمثل عدد الرؤوس، إذا كانت $n \leq 3$ فلكل $d_1,\ldots,d_n$ يوجد على الأكثر بيان بسيط واحد يحقق أن $d_{(vi)} = d_i$. لذا، نستخدم $n = 3$ بوصفها خطوة الأساس في الاستقراء (الخطوة الأولى). خذ $n \geq 4$، واجعل w رأسًا درجته Δ أكبر ما يمكن، افترض أن $S = \{V_1,\ldots,V\Delta\}$ هي مجموعة الرؤوس المختلفة عن w والتي درجة كل منها Δ، كما في الإثبات (31.3.1) فإن هناك متتالية تغييرات (تبديلات) ثنائية تنقل G إلى بيان G^*، بحيث إن $N_{G_*}(w) = S$. ولذلك، توجد متتالية تغييرات ثنائية تنقل H إلى بيان H^* بحيث إن $N_{H^*}(w) = S$.



بما أن $N_{G^*}(w) = N_{H^*}(w)$، فإن حذف w يعطينا بيانين بسيطين $G' = G^* - w$ و $H' = H^* - w$ حيث $d_{G'}(v) = d_{H'}(v)$ لكل رأس v. وباستخدام فرضيات الاستقراء، توجد متتالية تغييرات ثنائية تنقل G' إلى H'، لاحظ أن هذه التغييرات لا تشمل w. وبما أنّ جيران w في G^* هي نفسها في H^*، فإنّ تطبيق متتالية التغييرات نفسها تنقل G^* إلى H^*. لذا، فإننا نستطيع تحويل G إلى H بتحويل G إلى G^*، ثم إلى H^*، وعليه (بعكس الترتيب) نحوّل H إلى H^*. ■

لاحظ أنه كان بإمكاننا استخدام الاستقراء على عدد الأضلاع التي تظهر في بيان واحد فقط من البيانين G و H، ولاحظ أيضًا أن هذا العدد يساوي صفرًا إذا وفقط إذا كان $G = H$، وإذا اتبعنا هذا الطريق لحل المسألة، فيكفي أن نجد متتالية تغييرات ثنائية تجعل G قريبة من H، أو متتالية تغييرات ثنائية تجعل H قريبة من G.

تمارين (Exercises)

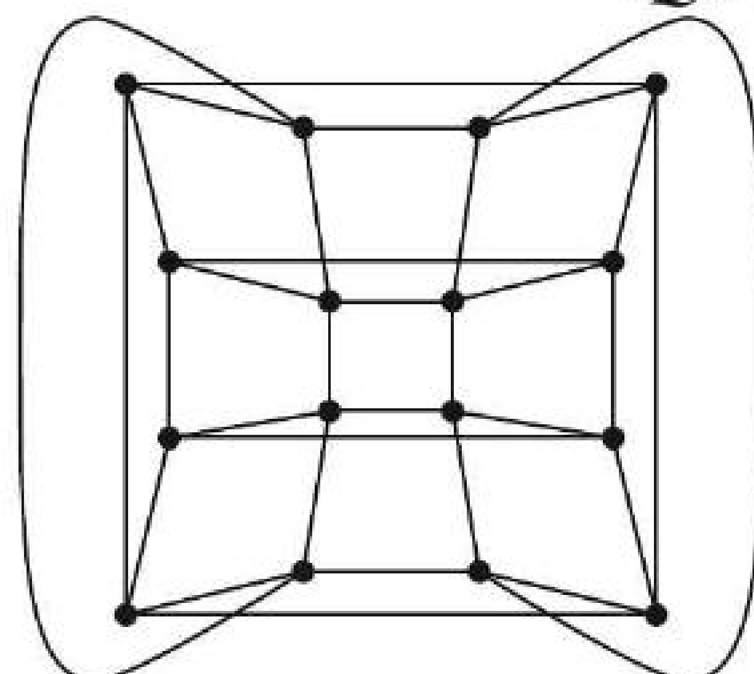
إذا وُجدت عبارة فيها متغير (وسيط) (parameter)، فيجب إثباتها لقيم هذا الوسيط جميعها، ولا يمكن الإثبات بإعطاء أمثلة. وأن عملية عدّ مجموعة تشمل إعطاء إثبات لذلك.

1.3.1. (-) أثبت أو انقض العبارة الآتية: في البيان G، إذا كان كل من u و v هما الرأسين الفريدين اللذين درجتهما فردية، فإنّ G يحوي مسارًا من u إلى v.

2.3.1. (-) تشمل مجموعة تسعة طلاب، إذا أرسل كلّ طالب ثلاث بطاقات معايدة لثلاثة من زملائه في الصف، بيِّن إمكانية حصول كل منهم على بطاقات من الأشخاص أنفسهم الذين أرسل لهم بطاقاته.

3.3.1. (-) افترض أنّ u و v رأسان متجاوران في بيان بسيط G، وأثبت أنّ الضلع uv ينتمي إلى $d(u) + d(v) - n(G)$ من المثلثات على الأقل.

4.3.1. (-) أثبت أن البيان أدناه يشاكل Q_4.



5.3.1. (-) احسب عدد النسخ من P_3 و C_4 في Q_k.

6.3.1. (-) إذا كان لديك البيانان G و H، فحدّد عدد مركبات البيان $G + H$ وأكبر درجاته بدلالة الأعداد الخاصة لكل من G و H.

7.3.1. (-) حدّد أكبر عدد ممكن من الأضلاع لبيان جزئي ثنائي الفرع لكل من P_n ، و C_n، و K_n.

8.3.1. (-) أيّ المتتاليات الآتية تحقّق بيانًا؟ أعطِ بيانًا يحقق ذلك، أو أثبت عدم إمكانية وجود مثل هذا البيان:

a) (5,5,4,3,2,2,2,1), c) (5,5,5,3,2,2,1,1),
b) (5,5,4,4,2,2,1,1), d) (5,5,5,4,2,1,1,1).

• • • • •

9.3.1. في اتحاد للعبة معينة، قُسّمَت الفرق إلى مجموعتين تضّم كل منهما 13 فريقًا. بيّن إمكانية ترتيب مباريات لهذه الفرق بحيث يلعب كل فريق تسع مباريات ضمن مجموعته، وأربع مباريات ضمن المجموعة الثانية.

10.3.1. افترض أن l،m،n ثلاثة أعداد صحيحة غير سالبة، بحيث إن $l + m = n$، جد الشروط الضرورية واللازمة التي تحققها l،m،n ،بحيث يوجد بيان بسيط مترابط له n من الرؤوس، وبحيث يكون l منها رؤوسًا زوجية و m رؤوسًا فردية.

11.3.1. افترض أن W ممر مغلق في بيان G، وافترض أيضًا أن H هو البيان الجزئي من G الذي يتكوّن من الأضلاع التي ظهرت في W عددًا فرديًّا من المرات. أثبت أن $d_H(v)$ زوجية لكل $v \in V(G)$.

12.3.1. (!) أثبت أنه لا يوجد ضلع قطع للبيان الزوجي. وابنِ بيانًا بسيطًا منتظمًا بيان بسيط منتظم من الدرجة $2k+1$ له ضلع قطع لكل $k \geq 1$.

13.3.1. (+) نعرف سلسلة الجبال على أنها منحنى مضلع (متعدد الأضلاع) من $(0 ، a)$ إلى $(0 ، b)$ في النصف العلوي من المستوى. يبدأ المتنزهان A و B مسيرهما عند $(0 ، a)$ و $(0 ، b)$ على الترتيب، أثبت أن A و B سيلتقيان إذا سارا بطريقة معينة بحيث يبقيان طوال الوقت على الارتفاع نفسه فوق المحور الأفقي. (مساعدة: عرِّف بيانًا بوصفه نموذجًا للحركة، واستخدم النتيجة 5.3.1) (تم وضع السؤال بالتواصل مع D.G. Hoffman).

14.3.1. أثبت أن كلّ بيان بسيط له رأسان على الأقل يمتلك رأسين لهما الدرجة نفسها. هل النتيجة صحيحة للبيانات الخالية من العرى؟

15.3.1. لكل $k \geq 3$، حدّد أصغر عدد n بحيث:

a) يوجد بيان بسيط منتظم من الدرجة k على n من الرؤوس.

b) توجد بيانات بسيطة منتظمة من الدرجة k غير متشاكلة على n من الرؤوس.

16.3.1. (+) برهن أنه يوجد لكل $k \geq 2$ و $g \geq 2$ بيان منتظم من الدرجة k وخصره يساوي g. (مساعدة: لبناء هذا البيان استقرائيًّا؛ استخدم H بصفته بيانًا منتظمًا من الدرجة $k-1$ له خصر g $(girth)$، وبيانًا له خصر $\lceil g/2 \rceil$ ومنتظمة من الدرجة $n(H)$. يسمّى مثل هذا البيان قفصًا من نوع (k,g) (Erdös – sachs [1963]).

17.3.1. (!) افترض أن G بيان له رأسان على الأقل، أثبت أو انقض كلًّا ممّا يأتي:
a) حذف رأس درجته $\Delta(G)$ لا يمكن أن يزيد معدل (متوسط) الدرجة.
b) حذف رأس درجته $\delta(G)$ لا يمكن أن ينقص معدل (متوسط) الدرجة.

18.3.1. (!) أثبت أنه لا يوجد ضلع قاطع (فاصل) لكلّ بيان ثنائي الفرع منتظم من الدرجة k لكل $k \geq 2$.

19.3.1. افترض أنّ G بيان بسيط يخلو من المخالب ($claw-free$)، أثبت أنه إذا كانت $\Delta(G) \geq 5$، فإن G تحوي حلقة رباعية لكل $n \in N$، ثم جد بيانًا منتظمًا من الدرجة 4 يخلو من المخالب، بحيث يكون عدد رؤوسه n على الأقل، ويخلو من الحلقات الرباعية.

20.3.1. (!) احسب عدد الحلقات التي طولها n في K_n، وعدد الحلقات التي طولها $2n$ في $K_{n,n}$

21.3.1. احسب عدد الحلقات السداسية $K_{m,n}$.

22.3.1. (!) افترض أن G بيان بسيط ليس ثنائي الفرع، يخلو من المثلثات، له n من الرؤوس ودرجته الصغرى k، وافترض أيضًا أن L تمثل أصغر طول لحلقة فردية في G:
a) افترض أن C حلقة في G طولها l، أثبت أنه إذا كان u رأسًا لا ينتمي إلى $V(G)$ فله على الأكثر جواران في $V(C)$.
b) بحساب عدد الأضلاع التي تربط $V(C)$ مع $V(G) - V(C)$ بطريقتين، أثبت أن $n \geq kL/2$. وبناء عليه، فإن (Campbell − Staton [1991])
c) إذا كان K عددًا زوجيًّا، فأثبت أنّ المتباينة في فرع b هي أفضل ما يمكن (مساعدة: جد بيانًا له $k/2$ حلقة طول كل منها L بحيث تكون منفصلة زوجًا زوجًا).

23.3.1. استخدم الوصف التكراري للبيان Q_k (مثال) 8.3.1 لإثبات أن $e(Q_k) = k2^{k-1}$

24.3.1. أثبت أن $K_{2,3}$ غير محتوًى في أيّ مكعّب زائدي Q_k.

25.3.1. (!) أثبت أن كل حلقة طولها $2r$ في مكعب زائدي تكون محتواة في مكعب جزئي بُعْدُه على الأكثر r. هل يمكن لحلقة طولها $2r$ أن تكون محتواة في مكعب جزئي بُعده أقل من r؟

26.3.1. (!) احسب عدد الحلقات السداسية في Q_3. أثبت أنّ كل حلقة سداسية في Q_k تقع في مكعب جزئي واحد فقط ثلاثي البُعْد، استخدم هذا لحساب عدد الحلقات السداسية في Q_k لكل $k \geq 3$.

27.3.1. لتكن $k \in \mathbb{N}$، افترض أن G هو البيان الجزئي من Q_{2k+1} الذي تولده الرؤوس التي يختلف فيها عدد الواحدات عن عدد الأصفار بواحد، أثبت أن G منتظم، واحسب $e(G)$ ، $n(G)$ وخصر G.

28.3.1. افترض أن V مجموعة ثنائية للترتيبات التي عدد عناصرها ($binary\ k-tuples$) k، عرف بيانًا بسيطًا Qk رؤوسه المجموعة V، بحيث إن $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا اتفق كل من u و v في إحداثي واحد فقط. أثبت أن Qk يشاكل المكعب الزائدي Qk إذا وفقط إذا كان k زوجيًّا (D.G.Hoffman).

29.3.1. (+*) في التشاكلات الذاتية للمكعب الزائدي Q_k:
a) أثبت أن كل نسخة من Q_j في Q_k هي بيان جزئي توليده مجموعة بها $2j$ من الرؤوس حُددت قيمها على مجموعة بها $k-j$ من الإحداثيات. (مساعدة: أثبت أن كل نسخة من Q_j يجب أن تحوي رأسين يختلفان في j من الإحداثيات).
b) استخدم فرع a لحساب عدد التشاكلات الذاتية للبيان Q_k.

30.3.1. أثبت أن كل ضلع في بيان بيترسون ينتمي إلى أربع حلقات خماسية فقط، واستخدم ذلك لإثبات أن بيان بيترسون يحوي 12 حلقة خماسية بالضبط. (مُساعدة: لإثبات الجزء الأول وسّع كل ضلع للحصول على نسخة من P_4، واستخدم القضية 38.1.1).

31.3.1. (!) استخدم البيانات التامة، وأسلوب عدّ معينًا (طريقة غير جبرية) لإثبات أن:
a) $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$ لكل $0 \leq k \leq n$.

b) إذا كان $\sum ni = n,$ فإن $\sum\binom{n_i}{2} \le \binom{n}{2}$.

32.3.1.(!) أثبت أن عدد البيانات الزوجية البسيطة التي رؤوسها المجموعة $[n]$ هو $2^{\binom{n-1}{2}}$. (مساعدة: جد دالة تناظر مع مجموعة البيانات البسيطة التي رؤوسها $[n-1]$).

33.3.1. (+) افترض أن G بيان بسيط يخلو من المثلثات على n من الرؤوس، بحيث يوجد لكلّ زوج من الرؤوس غير المتجاورة جاران مشتركان فقط:

a) أثبت أن $n(G) = 1 + \binom{d(x)+1}{2}$ حيث $x \in V(G)$، استنتج أن G منتظم.

b) أثبت أنه إذا كانت $k = 5$، فإن حذف x وجوارها من G يُبقي بيان بيترسون (تعليق: في هذه الحالة، نجد أنّ البيان G هو البيان الذي نحصل عليه من $Q4$ بإضافة أضلاع تربط بين الرؤوس المتتامة (complementary vertices)

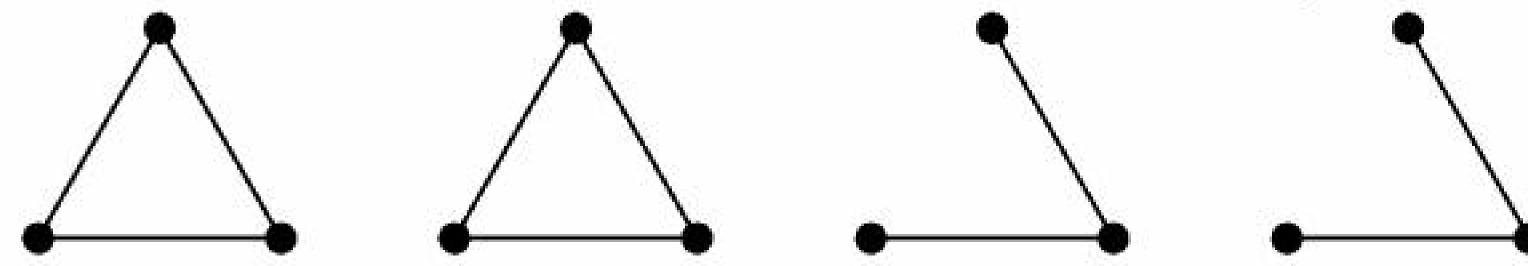
34.3.1. (+) افترض أن G بيان بسيط على n من الرؤوس يخلو من طائرة ورقية (k_4-e)، بحيث يوجد لكلّ زوج من الرؤوس غير المتجاورة جاران مشتركان فقط، أثبت أن G يكون منتظمًا (Calvin).

35.3.1. (+) افترض أن n و k عدادن صحيحان، بحيث إنّ $1 < k < n-1$، وافترض أيضًا أن G بيان بسيط على n من الرؤوس بحيث يمكن تكوين كلّ بيان جزئي على k من الرؤوس يحوي m من الأضلاع:

a) افترض أن G' بيان جزئي من G له L من الرؤوس حيث $L > k$، أثبت أن $e(G') = m\ \binom{l}{k}/\binom{1-2}{k-2}$.

b) استخدم الفرع a لإثبات أن $G \in (K_n, \overline{K}_n)$. (مساعدة: استخدم فرع a لإثبات أنّ عدد الأضلاع التي تربط بين u و v لا يُعْتَمَدُ عليه).

36.3.1. افترض أن G بيان على أربعة رؤوس، وأن البيانات الجزئية التي يمكن تحصيلها من G بحذف أحد الرؤوس هي كما في الشكل أدناه، حَدِّدْ (جد) G.



37.3.1. افترض أنه تمّ تشكيل البيان H من البيان المنتظم خالي العرى G بحذف أحد رؤوس G، حيث $n(G) \ge 3$، صفْ (علّل) كيفية الحصول على G من H.

38.3.1. افترضَ أن G بيان له ثلاثة رؤوس على الأقل، أثبت أن G مترابط إذا وفقط إذا وُجِدَ بيانان جزئيان مترابطان على الأقل من البيانات المُحصلّة من G بحذف أحد رؤوسها (مساعدة: استخدم القَضية 29.2.1).

39.3.1. (+*) أثبت أنه يمكن إعادة بناء كل بيان غير مترابط G إذا كان لهذا البيان ثلاثة رؤوس على الأقل. (مساعدة: باستخدامك لتمرين 38.3.1، تكون قد حدّدت أن G غير مترابط. استخدم $G_1,\dots G_n$ لإيجاد مركبة M من مركبات G التي تتكرر أكثر عدد من المرات من بين المركبات التي عدد رؤوسها أكبر ما يمكن، ثمّ استخدم القضية 29.2.1 لاختيار v بحيث إن $L = M - v$ يكون مترابطا، ثمّ أعد بناء G؛ بإيجاد $G - v_i$ التي تصبح فيها النسخة من M نسخة من L).

40.3.1. (!) افترض أن G بيان بسيط على n من الرؤوس، حيث $n \ge 2$، وحدّد أكبر عدد ممكن من الأضلاع في G تحت كل شرط من الشروط الآتية:

a) يوجد لـ G مجموعة مستقلة من الحجم a.

b) يوجد لـ G بالضبط K مركبة.

c) G غير مترابط.

41.3.1. (!) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس، بحيث إن أكبر درجة فيه $\lceil n/2 \rceil$، وأقل درجة $\lfloor n/2 \rfloor - 1$، فإنه يكون مترابطًا.

42.3.1. افترض أن S مجموعة رؤوس في بيان منتظم G من الدرجة k، بحيث يكون أيّ رأسين في S غير متجاورين، وليس لهما جار مشترك. استخدم مبدأ صناديق الحمام (eigeonhole pricipte). لإثبات أن

$\lfloor n(G)/(K+1) \rfloor \geq |S|$. أثبت أن هذا الحدّ هو أفضل ما يمكن للمكعب Q_3 (تعليق: هذا الحدّ ليس أفضل ما يمكن للمكعب Q_4).

43.3.1. (+) افترض أن G بيان بسيط ليس له رؤوس معزولة، وافترض أيضًا أن $a = 2e(G) / n(G)$ هي معدل درجة رؤوس G. لتكن $t(v)$ تمثل معدل الدرجة لرؤوس جيران v. أثبت أن $t(v) \geq a$ لبعض $v \in V(G)$. ثم ابنِ عائلة غير منتهية من البيانات المترابطة التي تحقق أن $t(v) > a$ لكل رأس v. (مساعدة للجزء الأول؛ احسب معدّل $t(v)$ باستخدام المتباينة $x/y + y/x \geq 2$ عندها $0 < x,y$. (Ajtai – komlo's – Szemer'di [1980]).

44.3.1. (+) افترض أن G بيان خالٍ من العرى، ومعدل درجة رؤوسه $a = 2e(G) / n(G)$:

a) أثبت أن معدّل درجة $G - x$ هو على الأقل a إذا وفقط إذا كان $d(x) \leq a/2$.

b) استخدم فرع a لإعطاء إثبات خوارزمي للعبارة: إذا كانت $a > 0$ ، فيوجد بيان جزئي لـ G حيث أقل درجة لرؤوسه أكبر من $a/2$.

c) أثبت أنه لا يوجد ثابت c أكبر من $1/2$ ، بحيث يجب وجود بيان جزئي من G تكون أقل درجة لرؤوسه أكبر من ca. إن هذا يثبت أنّ الحدّ الموجود في الفرع (b) هو أفضل ما يمكن. (مساعدة: استخدم $k_{1,n-1}$).

45.3.1. جد أكبر عدد من الأضلاع لبيان جزئي ثنائي الفرع من بيان بيترسون.

46.3.1. أثبت أو انقض: عندما نطبق الخوارزمية الموجودة في النظرية 19.3.1. على بيان ثنائي الفرع، فإننا نحصل على بيان جزئي ثنائي الفرع له أكبر عدد من الأضلاع (البيان كلّه).

47.3.1. استخدم الاستقراء على $n(G)$ لإثبات أنه يوجد لكل بيان غير تافه (nontrivial) خالٍ من العرى بيانٌ جزئيٌّ ثنائي الفرع H عدد أضلاعه يزيد على $e(G)/2$.

48.3.1. ابنِ بيانات $G_1, G_2, \ldots$ ، بحيث إن عدد رؤوس G_n يساوي $2n$، وبحيث إن $\lim_{n\to\infty} f_n = 1/2$ حيث fn تمثل الجزء من $E(Gn)$ الذي ينتمي إلى أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع من Gn.

49.3.1. لكل $k \in \mathbb{N}$ ، ولكل بيان G خالٍ من العرى، أثبت أنه يوجد للبيان G بيانٌ جزئيٌّ H له k من الفروع (التعريف 12.1.1، بحيث إنّ $e(H) \geq (1-1/k)e(G)$)

50.3.1. (+) لكل $n \geq 3$، حدّد أقل عدد ممكن من الأضلاع لبيان مترابط على n من الرؤوس، بحيث ينتمي كل ضلع منها إلى مثلث ([Erdös [1988).

51.3.1. (+) افترض أنّ G بيان بسيط على n من الرؤوس، حيث $n > 3$:

a) استخدم 11.3.1 لإثبات أنه إذا كان G يحوي أكثر من $n^2/4$ ضلعًا، فإنه يحوي رأسًا نحصل بحذفه على بيان له أكثر من $(n-1)^2/4$ ضلعًا. (مساعدة: عدد الأضلاع في كل بيان هو عدد صحيح).

b) استخدم فرع a والاستقراء الرياضي لإثبات أن G يحوي مثلثًا إذا كانت $e(G) > n^2/4$.

52.3.1. أثبت أنّ كلّ بيان بسيط لمثلث له n من الرؤوس، وعدد أضلاعه أكبر ما يمكن، يشاكل $k_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$. (مساعدة: قم بتقوية الإثبات 23.3.1).

53.3.1. (!) يشارك فريقان في لعبة البريدج (نوع من لعب الورق). كل فريق مؤلف من لاعبَيْن. افترض أن لدينا ناديًا يمنع اللاعبين الأربعة من اللعب إذا صدف أن تشارك أيّ اثنين منهما في لعبة سابقة تلك الليلة، افترض وصول خمسة عشر لاعبًا إلى النادي في تلك الليلة، إلا أن أحدهم قرر أن يدرس نظرية البيانات، أما الأربعة عشر شخصًا الباقون ، فلعبوا بحيث لعب كل منهم أربع مرات. بعد ذلك، تسمح لهم قواعد اللعبة بلعب ستة أدوار إضافية (12 مشاركة). أثبت أنه إذا وافق الآن دارسُ نظرية البيانات على اللعب، فإنه يمكن لعب لعبة أخرى على الأقل. (أخذ بتصرف من كتاب (Bondy – murty [1976] p111

54.3.1. (+) افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، وافترض أيضًا أن $t(G)$ ترمز إلى عدد المثلثات الكلي في G و $\overline{G}$:

a) أثبت أن $t(G) = \binom{n}{3} - (n-2)e(G) + \sum_{v\in V(G)}\binom{d(v)}{2}$ مساعدة (خذ مساهمة كل ثلاثة رؤوس في كل من طرفي المساواة).

b) أثبت أن $t(G) \geq n(n-1)(n-5) / 24$. مساعدة (استخدم حدًّا أدنى على $\sum_{v\in V(G)}\binom{d(v)}{2}$ بدلالة معدل الدرجة).

c) إذا كانت $n-1$ تقبل القسمة على 4، فجد بيانًا يحقق المساواة في فرع b أعلاه ([1959] Goodman).

55.3.1. (+) لأكبر حجم دون إحداث P_4:

a) افترض أن G متممة بيان بسيط غير مترابط. أثبت أن: $eG \leq \Delta(G)^2$، وأن المساواة تتحقق عندما $k_{\Delta(G), \Delta(G)}$.

b) افترض أن G بيان بسيط مترابط يخلو من P_4 ، بحيث إن أكبر درجة للرؤوس هي k، أثبت أن $e(G) \leq k^2$ (*Seinsohe* [1974]، *chung – west* [1993]).

56.3.1. استخدم الاستقراء الرياضي (على n أو على $\sum d_i$) لإثبات أنه إذا كانت $d_1, \ldots, d_n$ أعدادًا صحيحة غير سالبة ، بحيث إن $\sum d_i$ عدد زوجي، فإنّ هناك بيانًا له n من الرؤوس، ودرجات هذه الرؤوس هي: $d_1,\ldots,d_n$.
(تعليق: هذا يتطلب إعطاء إثبات بديل للقضية 28.3.1).

57.3.1. (!) افترض أن n عدد صحيح، وأن d تتكوّن من قائمة من الأعداد الصحيحة غير السالبة ذات مجموع زوجي، بحيث إن أكبر عدد منها أقل من n، ويختلف عن أصغر عدد بمقدار واحد على الأكثر. أثبت أن d قابلة للرسمً (geraphic)؛ أي أنها متحققة بيانيًّا (بيانية) (مساعدة: استخدم نظرية هافل وحكيمي).

58.3.1. تعميم نظرية هافل وحكيمي.

افترض أن لديك قائمة (مجموعة) غير متزايدة من الأعداد الصحيحة غير السالبة. وافترض أيضًا أنه يمكن تحصيل d' بحذف d_k، وبطرح 1 من الـ k عنصرًا القصوى المتبقية في القائمة (المجموعة). أثبت أن d تكون بيانية إذا وفقط إذا كانت d' بيانية. (مساعدة: تتبع خطوات إثبات نظرية 31.3.1 ([1973] wang – kleitman).

59.3.1. عرّف $d = (d_1, \ldots, d_{2k})$ على الشكل $d_{2i} = d_{2i-1} = i$ لكل $1 \leq i \leq k$، أثبت أن d بيانية.
(مساعدة: لا تستخدم نظرية هافل وحكيمي).

60.3.1. (+) افترض أن d قائمة (مجموعة) من الأعداد الصحيحة تتألف من k نسخة من a و $n-k$ نسخة من b، حيث $a \geq b \geq 0$ ، جد الشروط اللازمة حتى تكون d بيانية.

61.3.1. (!) افترض أن $G \cong \overline{G}$، وأن $n(G) \equiv 1 \bmod 4$. اثبت أن G يمتلك رأسًا واحدًا من الدرجة $(n(G)-1) / 2$ على الأقل.

62.3.1. افترض أن $n \equiv 0 \bmod 4$، أو $n \equiv 1 \bmod 4$، جد بيانًا بسيطًا له n من الرؤوس و $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ من الأضلاع بحيث إن $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$.

63.3.1. (!) افترض أن $d_1, \ldots, d_n$ أعداد صحيحة تحقق أن $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$، أثبت أنه يوجد بيان دون عرى ، بحيث تكون متتالية درجات رؤوس هذا البيان $d_1,\ldots,d_n$ إذا وفقط إذا كان $\sum d_i$ عددًا زوجيًا، و $d_1 \leq d_2 + \ldots + d_n$ ([1962] Hakimi).

64.3.1. (!) افترض أن $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ هي درجات رؤوس بيان بسيط G، أثبت أن G مترابط إذا كانت $dj \geq j$ عندما $j \leq n-1-d_n$. (مساعدة: خذ في الحسبان أحد مركبات G التي تحذف رأسًا ذا درجة كبرى).

65.3.1. (+) افترض أن $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ أعداد صحيحة مختلفة، أثبت أنه يوجد بيان بسيط له $a_k + 1$ من الرؤوس بحيث إن درجات هذا الرؤوس هي $a_1, \ldots, a_k$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على k لبناء مثل هذا البيان)، ([1977] Kapoor – polimeni – wall).

.66.3.1 (*) توسيع (تمديد) بيانات منتظمة ثلاثية. (انظر المثال 26.3.1) افترض أن $n = 4k$ حيث $k \geq 2$، جد بيانًا بسيطًا مترابطًا ثلاثيًّا له n من الرؤوس لا يحوي ضلع فصل (قطع) ولكن لا يمكن تحصيله من بيان ثلاثي بسيط عن طريق التمديد لهذا البيان. (مساعدة: لا يوجد في هذا البيان أي ضلع يمكن أن نطبق عليه العملية العكسية للحصول على بيان بسيط أصغر).

.67.3.1 (*) بناء بيانات بسيطة منتظمة ثلاثية:

a) أثبت أنه يمكن عمل مفتاح ثنائي من خلال مجموعة من عمليات التوسعة والمحو (العملية العكسية للتوسعة). هذه العمليات معرفة في المثال 26.3.1. (تنويه: عملية المحو التي تولد ضلعًا مكررًا غير مسموحة).

b) استخدم فرع a أعلاه لإثبات أن كلّ بيان بسيط منتظم ثلاثي يمكن الحصول عليه من k_4 بمجموعة من عمليات التمديد (التوسعة) والمحو. (Batageli [1984]).

.68.3.1 (*) افترض أنّ G و H بيانان بسيطان ثنائيان، لكل منهما تجزئتان Y ، X. أثبت أن $d_G(v) = d_H(v)$ لكل $v \in X \cup Y$ إذا وفقط إذا وُجدَت متتاليةٌ من المفاتيح الثنائية التي تنقل G إلى H دون تغيير على التجزئتين (كلّ مفتاح ثنائي يستبدل ضلعين يربطان X و Y بضلعين آخرين يربطان بينهما).

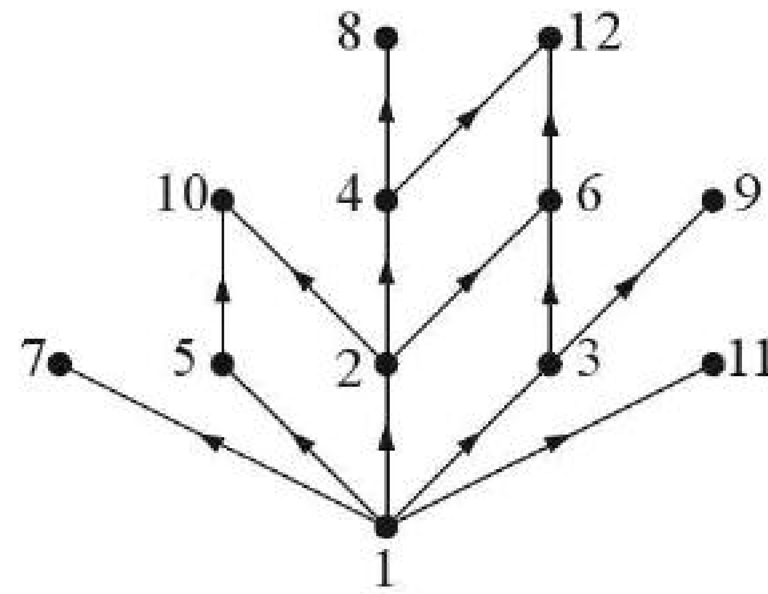
4.1 البيانات الموجّهة (Directed Graphs)

لقد استخدمنا البيانات بوصفها نماذج لعلاقات التماثل، ومن المعلوم أن العلاقات عمومًا لا تكون متماثلة؛ لأن العلاقة على مجموعة S هي مجموعة جزئية من $S \times S$ (انظر ملحق A). لذا فإننا بحاجة إلى نموذج أكثر عمومًا لمثل هذه العلاقات.

تعريفات وأمثلة (Definitions and Examples)

إن البحث عن تمثيل بياني للمعلومات المتعلقة بعلاقة عامة على مجموعة S يقود إلى نموذج البيانات الموجهة.

1.4.1. مثال: إذا كان كل من x و y عددين طبيعيين، فإننا نقول إن x هي أكبر قاسم لـ y إذا كان y/x عددًا أوليًّا. وإذا كانت $S \subseteq \mathbb{N}$، فإن المجموعة $\{x$ أكبر قاسم لـ $Y: R\{(x,y) \in S^2 = S \times S$ تمثل علاقة على S. ولتمثيل هذه العلاقة بيانيًّا؛ فإننا نحدد نقطة في المستوى لكل عنصر من عناصر S، ثم نرسم سهمًا من x إلى y لكل $(x,y) \in R$. لاحظ أن البيان أدناه يمثل النتيجة عندما $S = [12]$. ■



2.4.1. تعريف: يعرف **البيان الموجه** G على أنه ثلاثية تتألف من: $V(G)$= مجموعة الرؤوس و $E(G)$= مجموعة الأضلاع، ودالة تحدد لكل ضلع زوجًا مرتبًا من الرؤوس، يُسَمّى الإحداثيّ الأول ذيلَ الضلع، والإحداثيّ الثاني رأسَ الضلع، ويطلق عليهما معًا طرفا الضلع أو رأسا الضلع. ونقول إن الضلع هو ضلع من الذيل إلى الرأس، لاحظ أن كلمتي رأس وذيل تأتيان من الأسهم المستخدمة للتدليل على البيان الموجه. وكما في حال البيانات، فإننا نحدّد لكل رأس نقطة في المستوى، ولكل ضلع منحنى يربط بين طرفيه. وعند رسم بيان موجه، فإننا نعطي اتجاهًا للمنحنى من الذيل إلى الرأس.

عندما يُستَخدمُ البيان الموجه نموذجًا لتمثيل علاقة، فإنّ كل زوج مرتب يمثل (ذيلاً/ رأسًا) لضلع واحد على الأكثر. في مثل هذه الحالة، وكما في حال البيانات البسيطة، فإننا نهمل حرفية وجود دالة تحدد طرفين لكل

ضلع. وببساطة، فإننا نتعامل مع الضلع بوصفه زوجًا مرتبًا من الرؤوس.

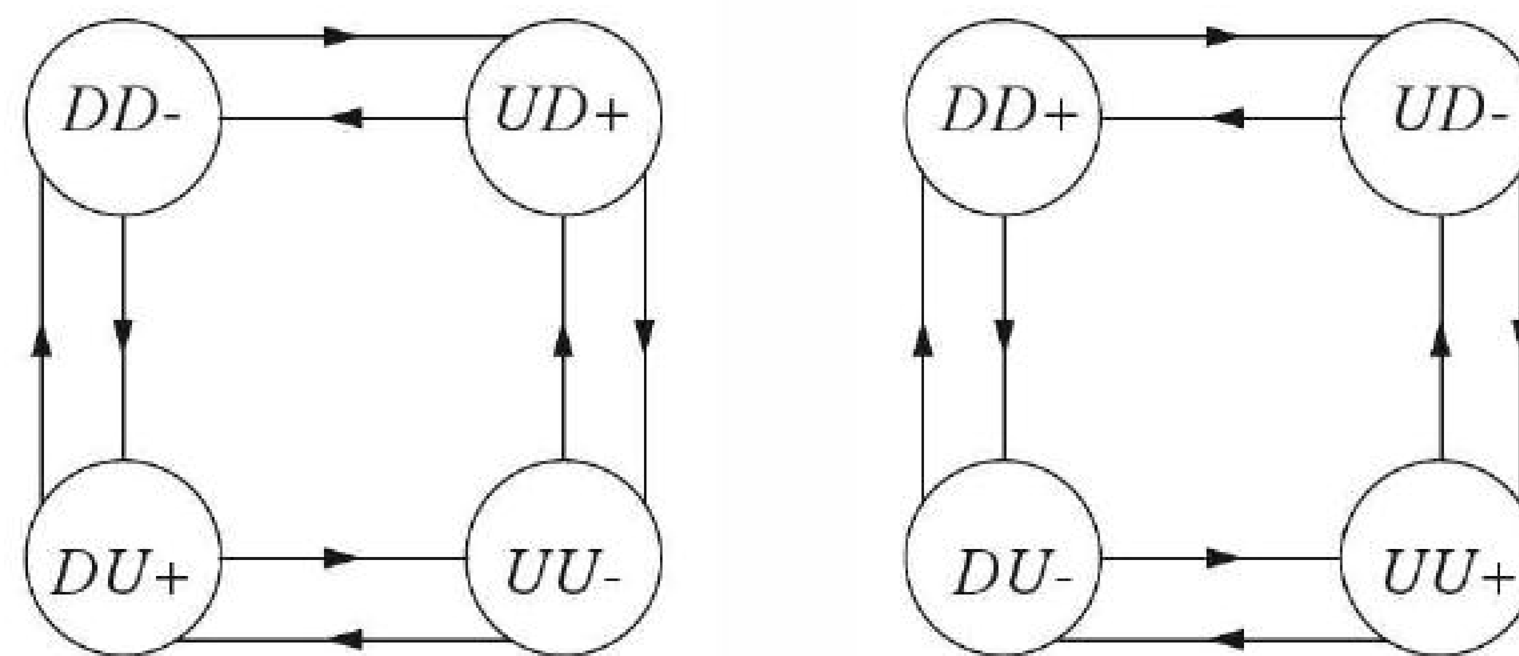
3.4.1. تعريف : في البيان الموجه، نعرّف الأنشوطة على أنها ضلع يبدأ بالرأس نفسه ،وينتهي به، وتعرّف الأضلاع المكررة على أنها الأضلاع التي يمثل طرفاها الزوج المرتّب نفسه، أي أنها الأضلاع جميعها التي تبدأ كلها برأس معين، وتنتهي كذلك برأس معين آخر، ونقول إنّ البيان الموجّه بسيط إذا خلا من العرى والأضلاع المكررة، وهذا يعني أنّ كلّ زوج مرتب يمثل رأسًا وذيلاً لضلع واحدٍ على الأكثر، ولاحظ أنه يمكن رسم أنشوطة عند كل رأس من رؤوس البيان الموجود لدينا.

في البيان الموجّه البسيط، نستخدم الرمز uv للتدليل على الضلع الذي ذيله u ورأسه v، وفي حال وجود ضلع uv، فنسمّي v بخلف u ، ونسمي v بسابق (سلف) u ونرمز إلى ذلك برسم سهم من u إلى v على الشكل $u \rightarrow v$.

4.4.1. تطبيق: الآلة ذات العدد المحدود أو المنتهي من الحالات. (نظام متقطع، أو نظام آلي ذو عدد محدود من الحالات الممكنة). يمكن استخدام البيانات الموجهة لوضع نماذج لمثل هذا النظام، حيث تُمَثِّلُ الرؤوسُ الحالات، في حين تمثل الأضلاعُ الانتقالَ من حالة إلى أخرى.

يكون الانتقال من حالة إلى أخرى عادة في اتجاه واحد. لذا فإن البيان الموجّه يعطي النموذج المناسب. ويمكن وضع علامات على الأضلاع لرصد الأحداث التي تسبب عملية الانتقال. فيمكن تمثيل الحدث الذي يمثل الحالة نفسها بأنشوطة. أما إذا وُجد حدثان يمثلان الانتقال نفسه من حالة إلى أخرى فإننا نمثل ذلك بضلع مكرّر.

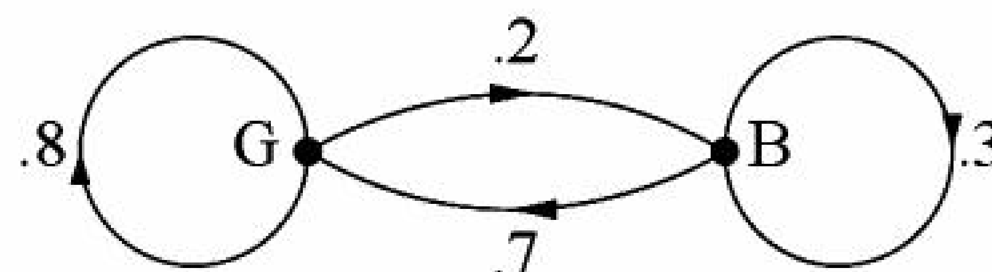
الآن، تأمل ضوءًا يُدار بمفتاحين (غالبًا، يسمى مفتاح التحويل بثلاثة طرق)، يكونان إلى الأعلى أو إلى الأسفل، وبناءً على ذلك يمكن إضاءة الضوء (+) أو إطفائه (−). لذا، هناك حالات ثمانية، لاحظ أن الانتقال من حالة إلى أخرى يمثل إنتقالًا بين هذه المفاتيح. وفي الرسم أدناه، يمثل الضلع الأفقي انتقالاً ناتجًا عن قلب المفتاح الأول، في حين يمثل الضلع العمودي انتقالًا ناتجًا عن قلب المفتاح الثاني، أما الدائرة الكبيرة، فتمثل رأسًا، في حين يمثل حرف U حالة المفتاح إلى أعلى، أما الحرف D فيمثل حالة المفتاح إلى الأسفل. ■



5.4.1. تطبيق: عندما يعمل نظام معين بصورة عشوائية، فيمكن عندئذ استخدام العلامات الموجودة على الأضلاع لتسجيل التغير في الاحتمال. إن مجموع الاحتمالات المسجلة على الأضلاع الخارجة أو المغادرة لرأس معين يساوي واحدًا صحيحًا.

ويُسَمّى مثل هذا النظام سلسلة أو **سلاسل ماركوف**، لاحظ أنه يمكن استخدام طرق الجبر الخطي لحساب الزمن اللازم للانتقال من حالة إلى أخرى، فعلى سبيل المثال، افترض أنّ هناك حالتين لحالة الطقس هما: جيد ورديء، وافترض أنّ الكتل (الجبهات) الهوائية تتحرك ببطء لدرجة أنّ الحالة الجوية ليوم غد هي كالحالة الجوية لهذا اليوم، وافترض أن العواصف لا تلبث طويلاً في معظم المناطق. لذا، وفي مثل هذه الظروف، فإنه يمكننا الحصول على تغيّر (انتقال) أو تبديل في الاحتمالين، كما هو موضّح في الشكل أدناه. ■

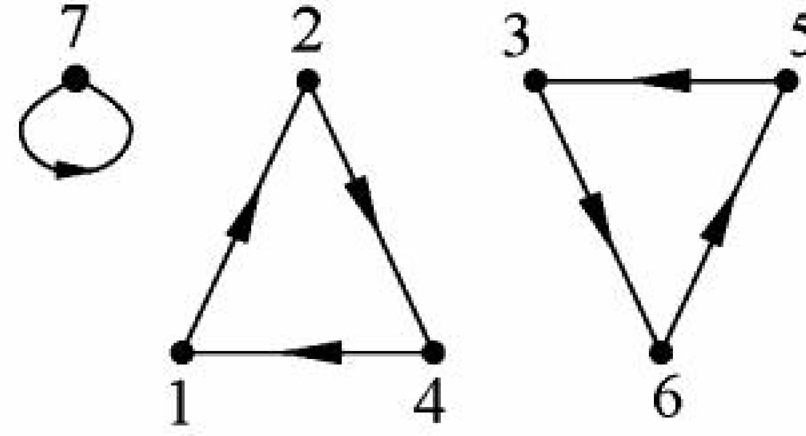
لاحظ أنه إذا سجّلنا الحالة كل ساعة بدلاً من تسجيلها بصورة يومية، فإن احتمالية البقاء في الحالة نفسها تكون أكبر كثيرًا.



6.4.1. تعريف: يعرف المسار على أنه بيان موجه بسيط يمكن ترتيب رؤوسه (على خط مستقيم) خطيًّا، بحيث يكون uv ضلعًا في هذا البيان إذا وفقط إذا كان ترتيب الرأس v يأتي مباشرة بعد ترتيب الرأس u. وتعرف الحلقة بالأسلوب نفسه، ولكن ترتيب الرؤوس يكون في صورة دائرة بدلاً من خط مستقيم.

7.4.1. مثال: البيانات الموجهة الدالية (الاقترانية). يمكن دراسة الدالة $f: A \to A$ باستخدام البيانات الموجهة. ويعرف البيان الموجه للدالة f على أنه بيان موجه بسيط؛ حيث تمثّل المجموعة A مجموعة الرؤوس، في حين تمثّل المجموعة $\{(x,f(x)): x \in A\}$ مجموعة الأضلاع. لاحظ أنه لكل رأس x نحصل على الضلع الذي يبدأ بـ x، وينطلق كسهم في اتجاه $f(x)$ ($f(x)$ هي صورة x تحت f).

إن تتبع مسار في بيان موجّه لدالة يمثل عملية تكرار (إعادة) لهذه الدالة. فمثلاً، إذا كانت الدالة تمثل تبديلة، فإن كل عنصر يمثل صورة لعنصر واحد فقط. لذا فإن للبيان الموجه لهذه الدالة ذيلاً واحدًا ورأسًا واحدًا عند كل رأس. لذلك؛ فإن البيان الموجه لدالة التبديلة يتألف من مجموعة من الحلقات غير المترابطة (المنفصلة). ويمثّل الشكل أدناه البيان الموجه لدالة التبديلة $(7)\ (365)\ (124)$ الموجودة في $S7=[7]$. ■

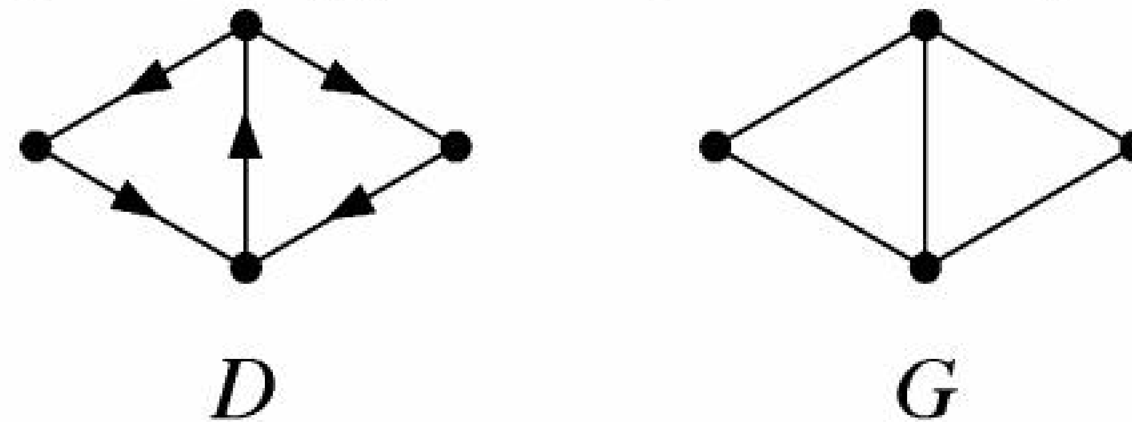


8.4.1. *ملاحظة: نستخدم في كثير من الأحيان الأسماء نفسها للمفاهيم المتناظرة عند الحديث عن نماذج البيانات، أو البيانات الموجّهة، علمًا بأن كثيرًا من المؤلفين يستخدمون كلمتي (عقدة وقوس) بدلاً من رأس وضلع عند الحديث عن البيانات الموجهة، ولكن هذا - من وجهة نظرنا - يجعل بعض المفاهيم مبهمة. وحيث إن بعض المفاهيم والمثبتات لها النص والإثبات نفساهما، فإننا نرى أنّ إعادة هذه المفاهيم من أجل استخدام مصطلحات جديدة فقط تعدُّ مضيعة للوقت والجهد (وخصوصًا في الفصل الرابع).

بالإضافة إلى ذلك، لاحظ أنه يمكن استخدام البيان الموجه D لعمل نموذج للبيان G حيث نستبدل uv الموجودة في $E(G)$ بـ vu أو uv الموجودة في $E(D)$، وبهذه الطريقة يمكن استخدام النتائج الخاصة بالبيانات الموجّهة لتكون نتائج خاصة بالبيانات، وبما أن كلمة ضلع في البيان الموجه تبقى ضلعًا في البيان، فإن استخدام الاسم نفسه له معنى.

يستخدم بعض المؤلفين كلمة (مسار موجه أو حلقة موجهة) للتعبير عن مفاهيمنا الخاصة بالمسار والحلقة في البيان الموجّه التي عرفناها سابقًا، ولكن من وجهة نظرنا فإنّ هذا غير ضروري. وللنسخة الضعيفة من تعريف البيان التي لا تتبع الأسهم، فإننا نستخدم مسارًا وحلقة في البيان مع إهمال الاتجاه. وهذا ما سنعرفه فيما يأتي. ■

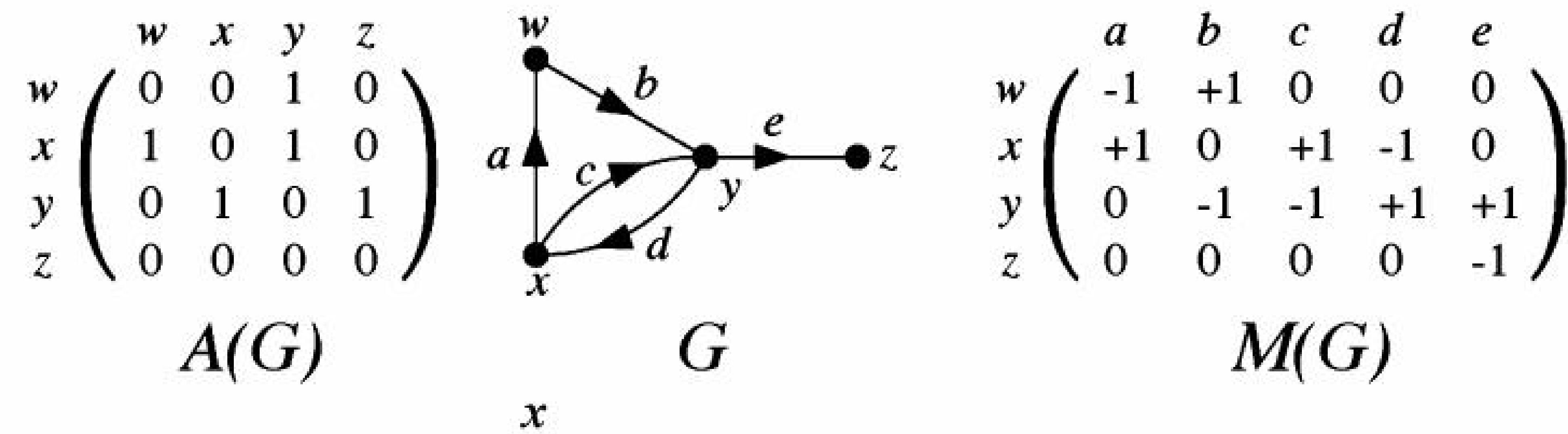
9.4.1. تعريف: يعرف **(البيان) المُتَضمن** في بيان موجه D على أنه بيان يمكن الحصول عليه من D بمعاملة أضلاع D على أنها أضلاع غير مرتبة. لذا، فإنّ مجموعة كلّ من الرؤوس والأضلاع تبقى كما هي، وأطراف أي ضلع في G هي أطراف هذا الضلع نفسها في D، ولكنها تصبح أزواجًا غير مرتبة في G. (انظر الشكل أدناه).



إن معظم الأفكار والطرق والمفاهيم المستخدمة في نظرية البيانات تظهر من خلال دراسة البيانات. لذا وكما حاولنا أن نبين، فإن البيانات الموجهة تستخدم بوصفها أداة مساعدة للفهم، وخصوصًا في التطبيقات. ونأمل أن تساعد دراسة أوجه التشابه والاختلاف بين البيانات والبيانات الموجهة على توضيح هذه المفاهيم. عندما نقارن بيانًا موجهًا ببيان، فإننا نستخدم الرمز G للبيان، والرمز D للبيان الموجه، وعندما نتكلم عن بيان موجه واحد فإننا نستخدم الرمز G غالبًا للتدليل على ذلك.

10.4.1. تعريف: إن تعريفات **البيان الجزئي، والتشاكل، والتفكيك**، والاتحاد للبيانات، لا تختلف عنها للبيانات الموجهة، ونعرف مصفوفة التجاور $A(G)$ للبيان الموجّه G على أنها المصفوفة التي تمثل مدخلتها في الموقع i,j عدد الأضلاع التي تصل v_i و v_j، وكذلك نعرّف مصفوفة التقاطع (الوقوع) $M(G)$ للبيان الموجه G الخالي من العرى على أنها المصفوفة التي تكون مدخلتها m_{ij} تساوي 1 ، إذا كانت v_i هي ذيل الضلع ej و -1 ، وإذا كانت v_i تمثل رأس الضلع e_j.

11.4.1. مثال: يمثّلُ (البيانُ) المتضمّن في البيان الموجّه المرسوم أدناه البيانَ الموجودَ في مثال 19.1.1، لاحظ أوجه التشابه والاختلاف في المصفوفات. ■

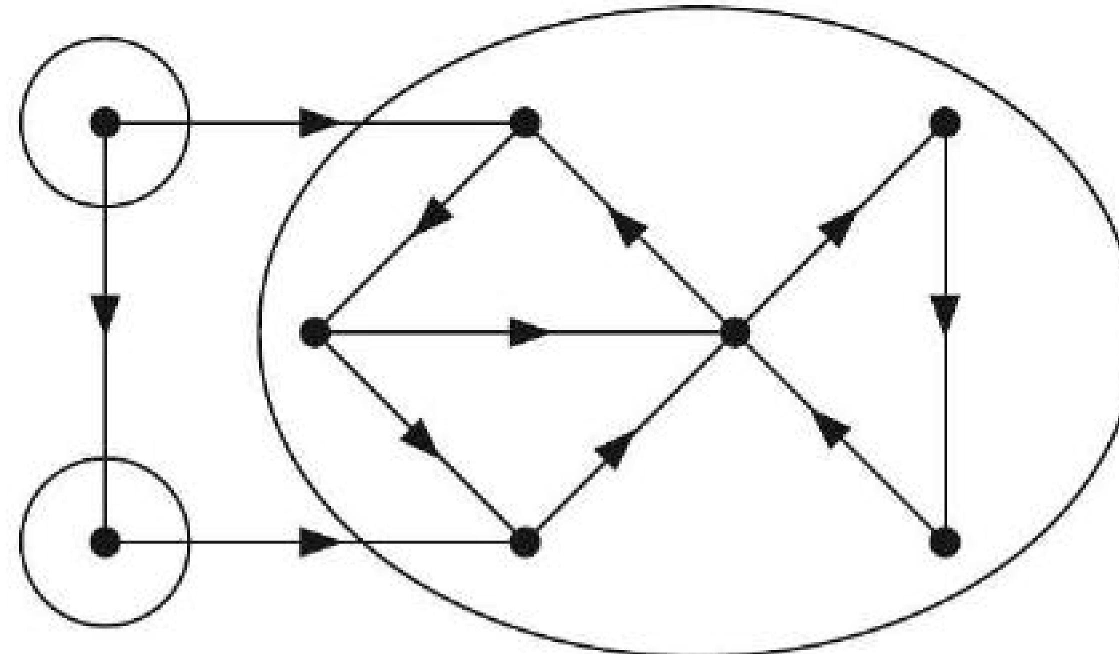


x

فيما يأتي نعرف البيان الموجّه المترابط. وإحدى الطرق للتعريف أن يكون البيان المتضمن في هذا البيان الموجه مترابطًا، إلا أنّ ذلك لا يكفي لأخذ الفائدة الكامنة في تعريف الترابط للبيانات الموجهة.

12.4.1. تعريف: البيان الموجّه مترابط ترابطًا ضعيفًا إذا كان البيان المتضمن فيه مترابطًا. ونقول إنه مترابط ترابطًا قويًّا، أو أنه مترابط قوي إذا وُجدَ فيه مسار يربط بين أيّ رأسين من رؤوسه أو يصل بينهما. وتعرف المركبة القوية للبيان الموجه على أنها أكبر (أضخم) بيان جزئي مترابط ترابطًا قويًّا. أو أننا نقول: مترابط بقوة بدلاً من مترابط ترابطًا قويًّا).

13.4.1. مثال: يمتلك البيان الموجه ذو الرأسين والمؤلف من الضلع xy مسارًا من x إلى y، ولكنه لا يمتلك مسارًا من y إلى x. لذا، فهو غير مترابط ترابطًا قويًّا. أما إذا أخذنا بيانًا موجهًا له n من الرؤوس فإنه يمتلك n مركبة قوية. وإذا أخذنا حلقة، فلها مركبة قوية واحدة. انظر البيان الموجّه أدناه، ولاحظ أنّ البيانات الجزئية المحاطة بالدوائر ا لثلاثة تمثل مركبات قوية. **تنويه:** سندرس خصائص المركبات القوية في التمارين من 10 إلى 13. ■



14.4.1.* تطبيق: الألعاب. يمكن وصف الكثير من الألعاب التي يلعب بها لاعبان على أنها (finite state ma-

(chines آلات ذات عدد منتهٍ من الحالات (المراحل). حيث تُمثل مجموعةُ الرؤوس مجموعةَ مراحل (حالات) اللعبة، وعليه يكون هناك ضلع من الحالة x إلى الحالة y إذا قام اللاعب (صاحب دور اللعب) بحركة تنقله من الحالة x إلى الحالة y.

لتكن W تمثل مجموعة الرؤوس التي يكون فيها اللاعب رابحًا عند الوصول إليها. وعليه، لا يوجد ضلع يخرج من W. لاحظ أن اللاعب الذي يُوصل اللعبة إلى المرحلة التي يفصله فيها ضلع واحد فقط عن W يخسر؛ ولأن اللاعب الآخر يصل W. إن إحدى الطرق لتحليل هذه اللعبة إيجاد مجموعة S من الرؤوس تحوي W بحيث إنه إذا أخذنا أي رأسين في S فإنهما يكونان غير متجاورين (لا يوجد ضلع يصل بينهما)، وبحيث إنّ كل رأس لا ينتمي إلى المجموعة S يرتبط بضلع مع أحد الرؤوس الموجودة في S. لاحظ أن اللاعب الذي يصل بلعبة إلى موقع في S يربح، أما اللاعب الذي عليه الابتعاد عن موقع في S فإنه يخسر.

على سبيل المثال، افترض أن لديك كومتين من القطع النقدية، وأن اللاعب الذي له دور اللعب يستطيع أن يُزيح أي جزء من القطع النقدية من إحدى الكومتين، ويعدُّ اللاعب رابحًا إذا أزاح آخر قطعة من القطع النقدية الموجودة. لاحظ أن المواقع المختلفة لهذه اللعبة هي مجموعة الأزواج المرتبة (r,s) من الأعداد الصحيحة حيث $r, s \geq o$. لذا فإن الموقع الرابح الفريد في هذه اللعبة هو $(0,0)$، واستنادًا إلى ذلك، فإن المجموعة S التي تمثل مجموعة المواقع التي يرغب اللاعبون في الحصول عليها هي: $\{(r,r): r \geq 0\}$ وبما أنه يمكن إنقاص أحد الإحداثيين خلال الحركة الواحدة، فإنه لا يوجد أضلاع داخل S. ولكل رأس (r , s) لا ينتمي إلى المجموعة S يمكن للاعب صاحب الدور في اللعب إزاحة $|r - s|$ من الكومة القصوى للوصول إلى S.

عمومًا، تبدأ هذه الألعاب (ألعاب نم Nim) بعدد اختياري من الأكوام ذات الأحجام الاختيارية، وتبقى قواعد اللعب الأخرى كما في السابق دون تغيير. وسنرى في التمرين (18) أن لدى (Nim) دائمًا مجموعة ربح استراتيجية S، وبما أن البيان الموجه لهذه اللعبة لا يحوي حلقات، لذا فإن اللاعب الثاني يربح عندما يكون موقع البداية لهذه اللعبة في S (على افتراض لعب مثالي) وبعكس ذلك، فإن اللاعب الأول هو الرابح. ■

15.4.1. * تعريف. تعرف النواة في البيان الموجه D على أنها مجموعة جزئية S من $V(D)$ بحيث إن كل رأس خارج S له رأس تابع في S، وكل رأس في S ليس له تابع خارج S، وهذا يعني أنه إذا كان v رأسًا خارج S، فإنه يوجد رأس u في S، بحيث إن $v \rightarrow u$ ضلع في هذا البيان، وكذلك لا يوجد أي ضلع ينطلق من u وينتهي برأس خارج S.

عدم وجود نواة للحلقة الفردية الموجهة (التمرين 17) وعليه، تكون للبيان الموجه نواة إذا لم تكن له حلقة جزئية فردية، ولإثبات هذا؛ فإن المسارات، والحلقات، والممرات المستخدمة جميعها تكون موجهة. وعند الحديث عن البيانات الموجهة، فإننا بحاجة إلى استخدام بعض العبارات الخاصة بالبيانات التي تبقى صحيحة (بالإثبات نفسه) عند الحديث عن البيانات الموجهة. مثال: كل ممر من u إلى v في بيان موجه يحوي مسارًا من u إلى v (تمرين 3)، وكل ممر فردي مغلق في بيان موجه يحوي حلقة فردية (التمرين 4).

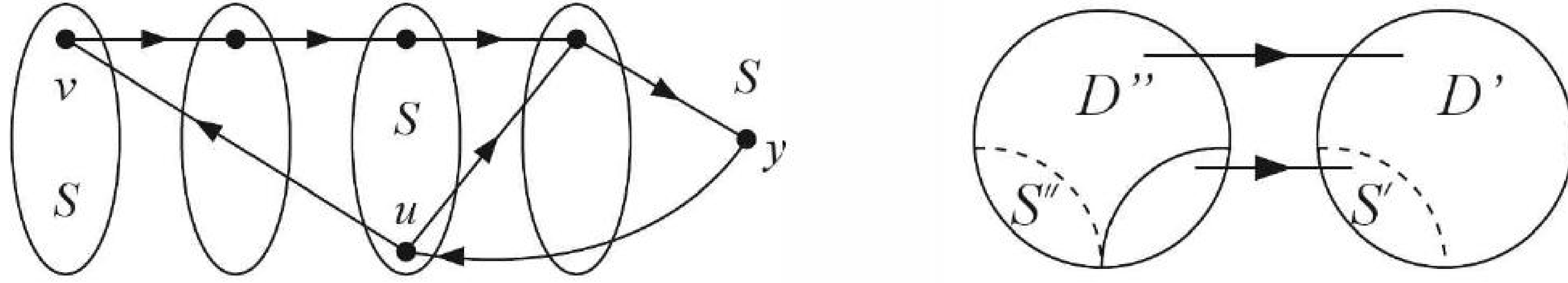
سنشرح مفهوم المسافة (distance) من x إلى y بتفصيل أكثر في الجزء 2.1. وهي تعرّف على أنها أقل طول ممكن لمسار من x إلى y.

16.4.1. نظرية : ([1953] Richardson)). توجد نواة لكل بيان موجه خالٍ من الحلقات الفردية.

الإثبات: افترض أن D بيان موجه. في هذا الإثبات نعالج حالتين: الأولى، نفرض أن D مترابط بقوة (Strongly Connected) انظر الشكل (على الجانب) الأيسر أدناه. افترض أن $y \in V(D)$ واجعل S تمثل الرؤوس التي بُعْدُها عن y زوجي. لاحظ أن كل رأس ذي بُعْد فردي عن y له تابع (Successor) في S كما هو مطلوب.

لاحظ أنه إذا لم تكن الرؤوس الموجودة في S غير متجاورة زوجًا زوجًا، فإن هناك ضلعًا uv حيث

$u, v \in S$. ومن تعريف S يوجد مسار P طوله زوجي من u إلى y، ويوجد مسار زوجي P' من v إلى y. وبإضافة الضلع uv إلى بداية المسار P'، فإنه يعطينا ممرًّا فرديًّا (طوله فردي) W من u إلى y، وبما أن D مترابط بقوة، فإنه يوجد في D مسار Q من y إلى u، وبضم Q مع P أو مع W نُحصِّل ممرًّا فرديًّا مغلقًا في D. وهذا مستحيل؛ لأن الممر الفردي المغلق يحوي حلقة فردية (ذات طول فردي)، لذا فإن S نواة في D.



أما الثانية فهي للحالة العامة؛ حيث نستخدم الاستقراء على $n(D)$ التي تمثل عدد رؤوس D.

إذا كانت $n(D) = 1$، فإن المثال الفريد على ذلك هو بيان برأس واحد دون عرى. وهذا الرأس يمثل نواة.

خطوة الاستقراء: افترض أن $n(D) > 1$، وافترض أن D غير مترابط بقوة (الحالة الأولى تعالج حالة الترابط بقوة). افترض أن D' هي إحدى مركبات D المترابطة بقوة؛ حيث لا يوجد ضلع يربط رأسًا من D' مع رأس خارج D' (التمرين 11)، لذا وكما بيّنّا سابقًا، فإنه توجد نواة S' للمركبة D'.

افترض أن D'' هي البيان الموجه الجزئي الذي يمكن الحصول عليه من البيان الموجه D، وذلك بحذف D' أسلاف (S') *predecessors* جميعها، إذن، وباستخدام خطوة الاستقراء، فإن هناك نواة S'' لـ D''. والآن ندعي أن $S' \cup S''$ هي نواة للبيان الموجه D. وبما أن D'' لا تحوي أيًّا من أسلاف S' فإنه لا يوجد ضلع في S'' و S'. ولكل رأس في $D'' - S''$ تابع في S'' ويوجد تابع في S' للرؤوس جميعها غير الموجودة في $S'' . S'$ ■

درجات الرؤوس (Vertex Degrees)

نستخدم في البيان الموجّه الرموز المستخدمة نفسها في حالة البيان للدلالة على عدد كلٍّ من الرؤوس والأضلاع، وتُجسد (incorporates) الرموز المستخدمة للتدليل على درجة الرأس التمييز بين رأس ذلك الضلع وذيله.

17.4.1. تعريف: ليكن v رأسًا في بيان موجّه، نعرّف درجة الخروج (**outdegree**) $d^+(v)$ على أنها عدد الأضلاع التي يكون v ذيلاً لها. في حين نعرف درجة الدخول $d^-(v)$ (**indegree**) على أنها عدد الأضلاع التي تكون v رأسًا لها، ونعرّف (**out – neighborhood**) جوار الخروج أو (**successorset**) مجموعة التوابع (الخلف) $N^+(v)$ على أنها $\{x \in V(G): v \to x\}$، ونعرّف كذلك مجموعة (**in – neighborhood**) جوار الدخول أو (**predecessorset**) مجموعة السلف $N^-(v)$ على أنها $\{x \in V(G): x \to v\}$، ونرمز إلى أقل درجة دخول بالرمز $\delta^-(G)$ ولأكبر درجة دخول بالرمز $\Delta^-(G)$. في حين نستخدم الرمزين $\Delta^+(G)$ و $\delta^+(G)$ للإشارة إلى أقل وأكبر درجة خروج على التوالي.

نعطي فيما يأتي صيغة جمع الدرجات الموجهة التي تقابل صيغة جمع الدرجات للبيانات.

18.4.1. قضية. في البيان الموجّه G، يكون $\sum_{v\in V(G)} d^+(v) = e(G) = \sum_{v\in V(G)} d^-(v)$

الإثبات: كل ضلع له ذيل واحد ورأس واحد. لذا نحصل على هذه النتيجة. ■

لقد عرّفنا متتالية الدرجات (متتالية درجات الرؤوس) لبيان معين سابقًا، وفي حال البيان الموجه، نجد أن قائمة الأزواج $(d^+(v_i), d^-(v_i))$ هي التي تقابل هذه المتتالية، وتسمى عناصر هذه القائمة بأزواج الدرجات. والقضية (19.4.1) الآتية تعطي الشرط اللازم والضروري لكي تكون هذه القائمةُ قائمةَ أزواج درجات لبيان موجه معين، حيث يكون الأمر سهلاً عند السماح بوجود أضلاع مكررة.

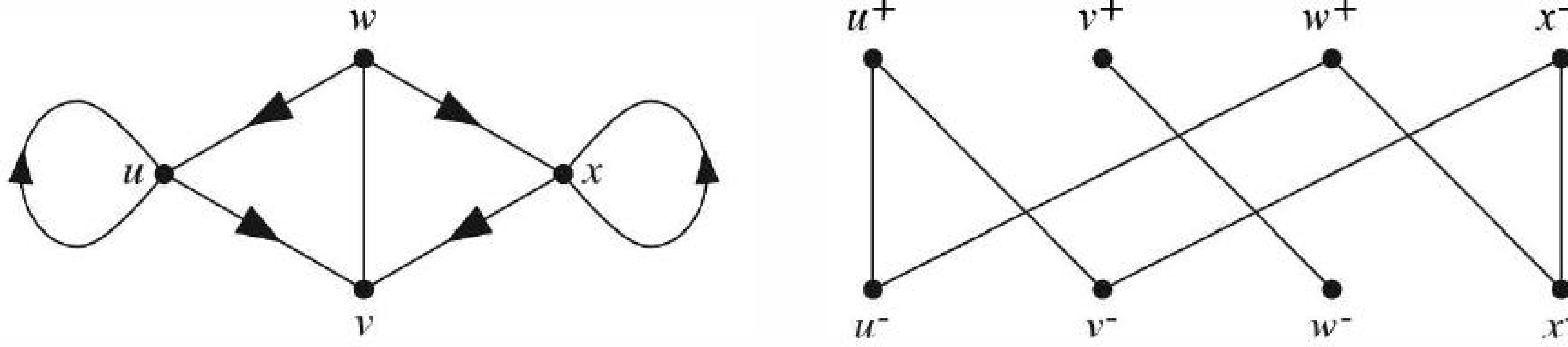
19.4.1. *قضية : إذا كانت لدينا قائمة من أزواج الأعداد الصحيحة غير السالبة، فإن هذه القائمة تصلح لأن تكون قائمة أزواج درجات لبيان موجه إذا وفقط إذا كان حاصل جمع عناصر الإحداثي الأول مساويًا لحاصل جمع عناصر الإحداثي الثاني.

الإثبات : إن ضرورة هذا الشرط تنبع من أن كل ضلع له ذيل واحد ورأس واحد فقط. لذا، فإن كل ضلع يسهم بواحد لكل مجموع. ولرؤية كفاية هذا الشرط؛ خذ الأزواج $\{(d_i^+ , d_i^-) : 1 \leq i \leq n\}$، والرؤوس $v_1,\dots,v_n$، وافترض أن $m = \sum d_i^+ = \sum d_j^-$.

خذ m من النقاط وأعطها علامات دالة (تسميات) (Labels) موجبة بحيث إن d_i^+ منها لها العلامة i، وكذلك أعط النقاط علامات دالة سالبة ، بحيث إن d_j^- منها لها العلامة $-j$. لكل نقطة لها العلامات i و $-j$ ضع ضلعًا من v_i إلى v_j، ولاحظ أن هذا يبني بيانًا موجهًا فيه $d^+(v_i)=d_i^+$ و $d^-(v_i) = d_i^-$. وهذا ينهي الإثبات. ■

إنّ السؤال المناظر في حال البيان الموجّه البسيط يكون أصعب، ولكن يمكن إعادة صياغة السؤال بدلالة البيانات الثنائية الفرع (bipartite) عن طريق تحويل (transformation) معين يكون مفيدًا للعديد من المسائل المتعلقة بالبيانات الموجّهة.

20.4.1. *تعريف : ليكن D بيانًا موجهًا، نعرف شطر D (*split*) على أنه بيان ثنائي الفرع G حيث مجموعتا رؤوسه هما: V^+, V^-، وكل منهما تمثل نسخة من $V(D)$، حيث يوجد لكل رأس x في x^+ في V^+ رأس x^- في V^-. ولكل ضلع uv في D يوجد ضلع في G طرفاه هما: u^+ و v^- (انظر الشكل أدناه).



21.4.1. *ملاحظة : إنّ درجات رؤوس مشطور D هي درجات كلّ من الدخول والخروج لرؤوس D.

بالإضافة إلى ذلك، يمكن تحويل (نقل) البيان الثنائي X,Y إلى بيان موجّه على n من الرؤوس ،حيث $|X| = |Y| = n$ وذلك برسم ضلع v_iv_j في D لكل ضلع x_iy_j في G. في هذه الحالة، تكون G مشطور (*split*) D. (لهذا السبب، سُمِحَ بإضافة العرى إلى البيانات الموجّهة البسيطة).

بناءً على ما سبق، يوجد بيان بسيط له أزواج الدرجات $\{(d_i^+ , d_i^-) : 1 \leq i \leq n\}$ إذا وفقط إذا وُجِدَ بيان ثنائي الفرع بسيط G، درجات رؤوسه هي $d_1^+ ,\dots, d_n^+$ لإحدى مجموعتي الرؤوس، و $d_1^- ,\dots, d_n^-$ لمجموعة الرؤوس الثانية. يقدم التمرين (32) طريقة لاختبار وجود مثل هذا البيان الثنائي، علمًا بأن النص والإثبات يشبهان نظرية هافل وحكيمي. وسيوضح ذلك من خلال التمارين. ■

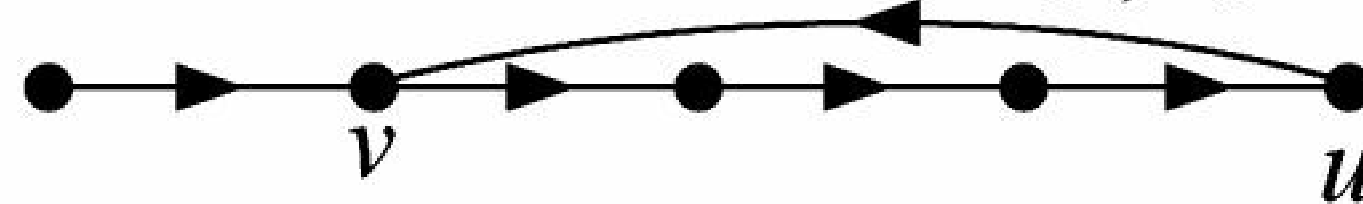
بيانات أويلر الموجّهة

إن تعريفات كل من المسرب، والممر، والحلقة، وعلاقة الربط للبيانات الموجهة هي تعريفاتها للبيانات نفسها، وذلك عندما نضع قائمة الأضلاع في صورة أزواج مرتبة من الرؤوس في البيان الموجه، لاحظ أن الأضلاع المتتابعة "تتبع الأسهم" وفي الممر $v_0, e_1, v_1, \dots\dots\dots, e_k, v_k$ يكون v_{i-1} ذيلاً للضلع e_i، ويكون v_i رأسًا له.

22.4.1. تعريف: يعرف مسرب أويلر في البيان (الموجه) على أنه مسرب يحوي الأضلاع جميعها، وتعرف حلقة أويلر على أنها مسرب مغلق يحوي الأضلاع جميعها، ويسمى البيان أويلريًّا (نسبة إلى أويلر) إذا وُجِدَت فيه حلقة أويلرية، حيث إن توصيف بيانات أويلر الموجهة يماثل توصيف بيانات أويلر، فضلًا عن الإثبات يماثل الإثبات في حالة البيانات. لذا، سيُوضّحُ ذلك من خلال التمارين. ■

23.4.1. تمهيدية: إذا كان G بيانًا موجّهًا، بحيث إنّ $\delta^+(G) \geq 1$، فإن G يحوي حلقة، وكذلك تكون النتيجة نفسها صحيحة عندما $\delta^-(G) \geq 1$.

الإثبات: افترض أنّ P تمثل أكبر مسار في G، ولتكن u هي آخر رأس في P، وبما أنه لا يمكن تكبير P أو توسيعها، فإن كل تابع لـ u يجب أن يكون رأسًا في P، وبما أن $\delta^+(G) \geq 1$ فإنه يوجد تابع $v > u$ في P، والضلع uv يكمل الحلقة مع جزء P الممتد من v إلى u. ■



24.4.1. نظرية: يكون البيان الموجه أويلريًّا إذا وفقط إذا كان $d^+(v) = d^-(v)$ لكل رأس v، وبحيث تكون للبيان المتضمن في البيان الموجه مركبة واحدة غير (تافهة) بديهية على الأكثر.

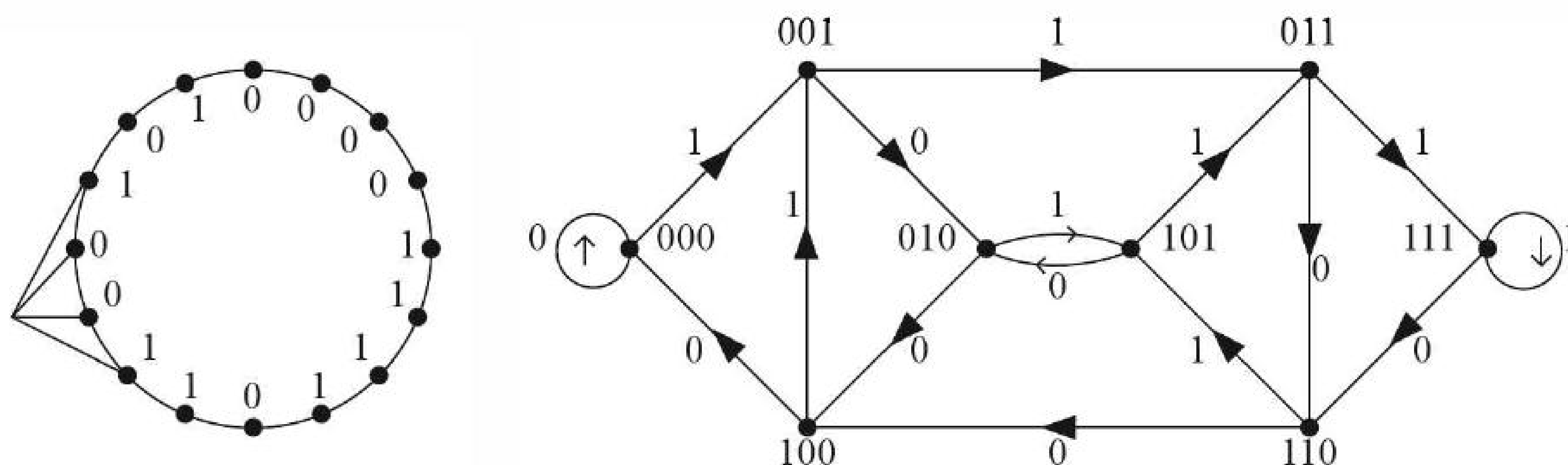
الإثبات: انظر التمرين (19) أو التمرين (20). ■

كل بيان موجه أويلري لا يحوي رؤوسًا معزولة يكون مترابط بقوة، على الرغم من أن التوصيف يشير إلى أن الترابط الضعيف كافٍ.

25.4.1. تطبيق: لحلقات ديبروجن (de Bruijn) يوجد 2^n صف (strings) ثنائي، طول كل منها n. هل توجد ترتيبة حلقية لـ 2^n رقم ثنائي، بحيث إن الـ 2^n صف المؤلفين من n من الأرقام المتتابعة تكون مختلفة؟ إذا كانت $n=4$، فإن الترتيب (0000 1111 0 11 00 1 0 1) يفي بالغرض.

يمكن استخدام مثل هذه الترتيبة لمتابعة موقع طبل يتحرك بصورة دورانية (Good [1946]). حيث يوجد لهذا الطبل 2^n موقع دوراني. تنقسم الفرقة حول المحيط إلى 2^n جزء يمكن تشفيرها بـ 0 أو 1. يستطيع جهاز الإحساس أن يقرأ n جزءًا متتابعًا. إذا تمتع التشفير بالخاصية المحددة أعلاه، فإن موقع الطبل يتحدد بالصف الذي تقرأه أجهزة الإحساس.

للحصول على هذه الترتيبة الدورانية؛ عرِّف بيانًا موجهًا D_n بحيث تكون رؤوسه هي الثنائيات التي تحوي $(n-1)$ من الإحداثيات (binary $(n-1)$ tuples)، ضع ضلعًا من a إلى b إذا كانت آخر $n-2$ من مدخلات a تتوافق مع أول $n-2$ من مدخلات b. سَمِّ (علِّم أو أعطِ علامة) الضلع الذي يحوي آخر مدخلة من b. يظهر الشكل أدناه D_4. سنثبت فيما يأتي أن D_n أويلريّ. وكذلك سنرى كيف نحصل على الترتيبة الدائرية المطلوبة من حلقة أويلرية. ■



26.4.1. نظرية: إن البيان الموجه D_n الموجود في التطبيق (25.4.1) هو بيان أويلري. وعلامات (تسميات) الأضلاع في أي حلقة أويلرية من D_n تشكل ترتيبة حلقية (دائرية) ويوجد فيها 2^n قطعة متتابعة مختلفة طول كل منها n.

الإثبات: أولاً، سنثبت أن D_n أويلري. كل رأس له درجة خارجة 2 (out degree)؛ وذلك لأنه يمكن إلحاق (تذييل) 0 أو 1 لاسم الرأس من أجل الحصول على اسم الرأس التابع. وبالمثل، فإن الدرجة الداخلة لكل رأس هي 2 أيضًا؛ لأن التعليل (argument) نفسه ينطبق عندما نتحرك عكس الاتجاه السابق، وذلك بوضع 0 أو 1 على مقدمة الاسم. إضافة إلى أن D_n مترابط بقوة؛ لأنه يمكننا الوصول إلى الرأسل $b = (b_1, \ldots b_{n-1})$ من أي رأس آخر بتتبع الأضلاع المسماة $b_1, \ldots, b_{n-1}$ بالتتابع. لذا، فإن D_n تحقق فرضيات النظرية (24.4.1). لذا، فإن D_n أويلري.

افترض أن C حلقة أويلرية في D_n. إن الوصول إلى الرأس $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ يجب أن يتمّ من خلال ضلع علامته (اسمه) a_{n-1}؛ لأن العلامة (الاسم) على الضلع الذي يدخل على رأس معين تتطابق مع آخر إحداثي (مدخلة) من اسم الرأس.

وبما أننا نحذف المقدمة، وننقل مواقع باقي الإحداثيات للحصول على باقي الاسم عند الرأس، فإن التسميات (العلامات) المتتابعة السابقة (بالنظر إلى الخلف) يجب أن تكون $a_{n-2}, \ldots, a_1$ على الترتيب.

وعليه، إذا استخدمت C ضلعًا له اسم a_n، فإنّ القائمة المؤلفة من n من الأضلاع المسماة بأقرب وقت هي: $a_1, \ldots, a_n$، وبما أن الـ 2^{n-1} اسم للرؤوس مختلفة، وكلّ ضلعين يغادران (ينطلقان من) كل رأس لهما أسماء مختلفة، وبما أننا نتتبع كلّ ضلع من كلّ رأس مرة واحدة من خلال C، عندها، نكون قد أثبتنا أن الـ 2^n صف (خط) التي طول كل منها n في الترتيبة الدائرية المعطاة باسم (بعلامة) الضلع من خلال C مختلفةٌ (يختلف كل منهما عن الآخر). ■

إنّ البيان الموجه D_n هو بيان ديبروجن (**de bruijn**) من الرتبة n على حرفين هجائيين، وهي مفيدة لأغراض أخرى؛ ولأن فيها العديد من الرؤوس، والقليل من الأضلاع (ضعف عدد الرؤوس فقط). ومع ذلك، نستطيع الوصول إلى أيّ رأس من أيّ رأس آخر بمسار قصير، حيث يمكننا الوصول إلى أيّ رأس نريده من خلال $n - 1$ خطوة وذلك من خلال إدخال (introducing) قواطع (bits) على اسم ذلك الرأس بترتيب معين وبدءًا من الرأس الحالي.

التوجيهات والتدويرات (Orientations and Tournaments):

يوجد n^2 زوجًا مرتبًا من العناصر التي يمكن تكوينها (تشكيلها) من مجموعة الرؤوس التي عددها n. إن البيان البسيط يسمح بوجود العرى، ولكنه يسمح باستخدام كل زوج مرتب بوصفه ضلعًا مرة واحدة على الأكثر. لذا، هناك n_2 زوجًا مرتبًا يمكن أن تكون أو لا تكون أضلاعًا، ويوجد 2^n بيان موجه بسيط رؤوسه $v_1, \ldots, v_n$. أحيانًا، نرغب في منع وجود العرى.

27.4.1. تعريف. نعرف التوجيه لبيان G على أنه البيان الموجه D الذي نحصل عليه من G باختيار اتجاه (توجيه) (إما $x \rightarrow y$ أو $y \rightarrow x$) لكل ضلع xy في $E(G)$. **وتوجيه البيان** يعني إعطاء اتجاه لهذا البيان، ويعرف **الدوري** (تدوير البيان) على أنه إعطاء اتجاه لبيان تام.

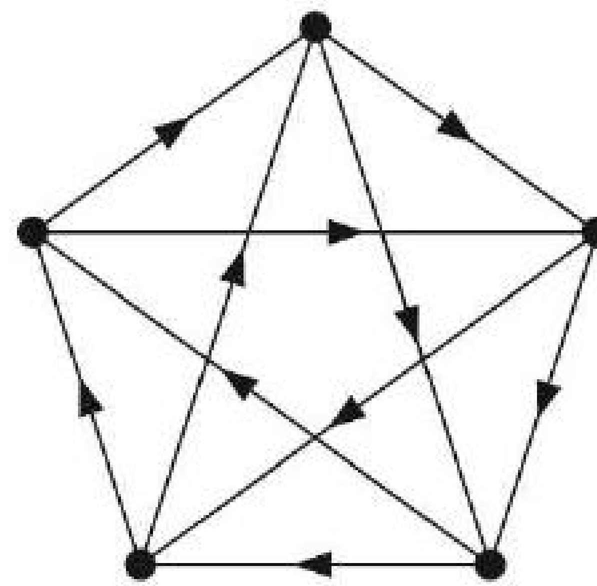
لاحظ أن توجيه البيان يعني بيانًا موجهًا خاليًا من العرى. عندما تمثل أضلاع البيان مقارنة بين أشياء ترتبط (تُمثّل) بالرؤوس، فبإمكاننا تسجيل النتائج بوضع $x \rightarrow y$ للتدليل على أن وضع x أفضل من وضع y خلال المقارنة، والناتج من هذا هو توجيه للبيان G.

لاحظ أنّ عدد البيانات المعطاة إتجاها على الرؤوس $v_1, \ldots, v_n$ هو $3^{\binom{n}{2}}$، وأنّ عدد التدويرات (الدوريات) هو $2^{\binom{n}{2}}$.

28.4.1. مثال: إن إعطاء اتجاهات (توجيه) للبيانات التامة يعطي نموذجًا لدورة المباريات المستديرة. افترض

أن لديك اتحادًا يضمّ n من الفرق، وكل فريق يلعب مع كل فريق آخر مباراة واحدة فقط. لكل زوج u و v نعدُّ $u\,v$ ضلعًا إذا ربح الفريق u، ويُعَدُّ $v\,u$ ضلعًا إذا كان الرابح هو فريق v، ومع نهاية الموسم، يكون لدينا توجيه للبيان K_n. وتكون علامة الفريق هي الدرجة الخارجة للرأس (cutdegree) وهي تساوي عدد المرات التي ربحها الفريق الذي يمثله الرأس u. لذا، نطلق على متتالية الدرجات الخارجة متتاليةَ الدرجات (العلامات). لاحظ أن الدرجات الخارجة تحدد الدرجات الداخلة، وبما أن $d^+(v) + d^-(v) = n-1$ لكل رأس v، فإن التعامل مع متتالية علامات (درجات) الدوري أسهل من التعامل مع متتالية درجات الرؤوس للبيانات البسيطة (التمرين 35). ■

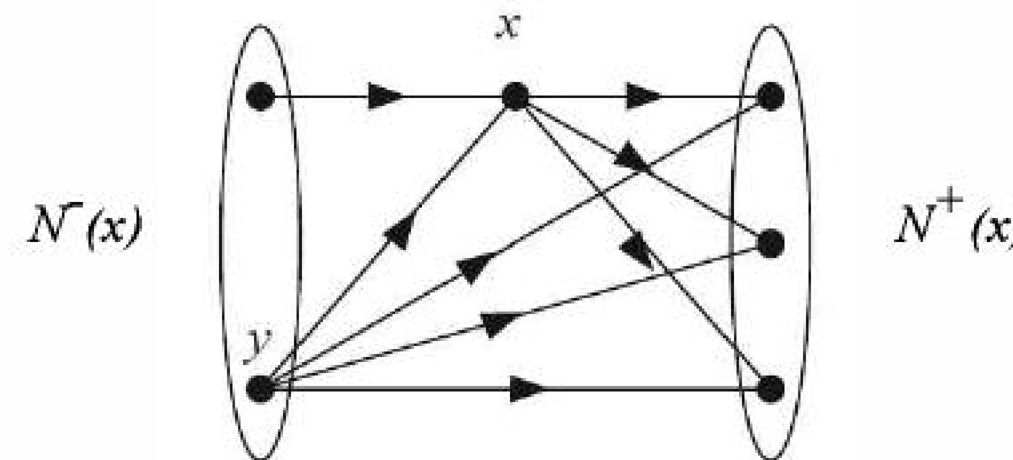
لاحظ أنه من الممكن (خلال دوري معين) الحصول على أكثر من رأس له الدرجة القصوى نفسها، وفي مثل هذه الحالة، لا يكون هنالك رابح واضح (في المثال أدناه كل رأس له درجة خارجة 2 ودرجة داخلة 2). إن اختيار البطل لا يكون سهلاً عادة في حال تساوي العلامات (الدرجات) القصوى لبعض الفرق، وعلى الرغم من أنه ليس هناك حاجة لأن يكون هنالك رابح واضح، إلا أننا سنرى فيما يأتي وجود فريق x دائمًا، بحيث يكون x قد فاز على كل فريق z، أو أن x قد فاز على فريق آخر كان قد فاز على z.



29.4.1. تعريف: في البيان الموجه، نعرِّف **الملك** على أنه رأس يمكن الوصول منه إلى أي رأس آخر من خلال مسار طوله 2 على الأكثر.

30.4.1. قضية: (Landau [1953]) كل دوري له ملك.

الإثبات: افترض أن x رأس في دوري T، إذا لم يكن x ملكًا، فيوجد عندها رأس y لا يمكن الوصول إليه من x بمسار طوله أقل من 2 أو يساويه. لذا، لا يوجد للرأس x تابع (خلف) من أسلاف (سوابق) y. وبما أن T توجيهٌ لبيان تام، فإن كل خلف للرأس x يكون خلفًا للرأس y، وكذلك $y \to x$. واستنادًا إلى ذلك، فإن $d^+(y) > d^+(x)$. إذا لم يكن y ملكًا، فإننا نعيد التعليل السابق من أجل إيجاد رأس z درجته الخارجة أكبر. وبما أن T منتهية، فإن هذه العملية يجب أن تنتهي، وبانتهائها نحصل على الرأس الملك. ■



لقد أثبتنا أن كل رأس في البيان الذي يمثل دوريًّا معينًا ذا درجة خارجة كبرى يكون ملكًا. في التمارين (38 – 36) نجد أسئلة أخرى تتعلق بالملوك (انظر [1980] Maurer). يعمم التمرين 39 النتيجة لبيانات موجهة اختيارية.

تمـــارين (Exercise)

1.4.1. (-) جد علاقة واقعية لا توجد حلقات لبيانها الموجه، وجد علاقة أخرى ذات حلقات إلا أنها غير تماثلية.

2.4.1. (-) في التطبيق (4.4.1) المتعلق بمفتاح الضوء، افترض أن المفتاح الأول مفصول من السلك، ارسم البيان الموجه الذي يمثل النظام الناتج.

3.4.1. (-) أثبت أنّ كلّ ممرّ من u إلى v في بيانٍ موجه يحوي مسارًا من u إلى v.

4.4.1. (-) أثبت أن كلّ ممرّ مغلق فردي الطول في بيانٍ موجه يحتوي على ضلع لحلقة فردية (مساعدة: تتبع البديهية 15.2.1).

5.4.1. (-) افترض أنّ G بيان موجه، فيه الدرجة الخارجة لكلّ رأس تساوي الدرجة الداخلة لذلك الرأس، أثبت أنه يمكن تحليل (تفكيك) G إلى حلقات.

6.4.1. (-) ارسم D_2 و D_3 من بيانات ديبروجن.

7.4.1. (-) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كان D توجيهًا لبيان بسيط له عشرة رؤوس، فإنه لا يمكن أن تكون الدرجات الخارجة لرؤوس D مختلفة.

8.4.1. (-) أثبت أنه يوجد دوري له n من الرؤوس، بحيث إن الدرجة الداخلة تساوي الدرجة الخارجة لكل رأس إذا وفقط إذا كان n عددًا فرديًّا.

• • • • •

9.4.1. أثبت $n \geq 1$ العبارة الآتية أو انقضها: يوجد في كل بيان موجه بسيط رأسان لهما الدرجة الخارجة نفسها أو الدرجة الداخلة نفسها.

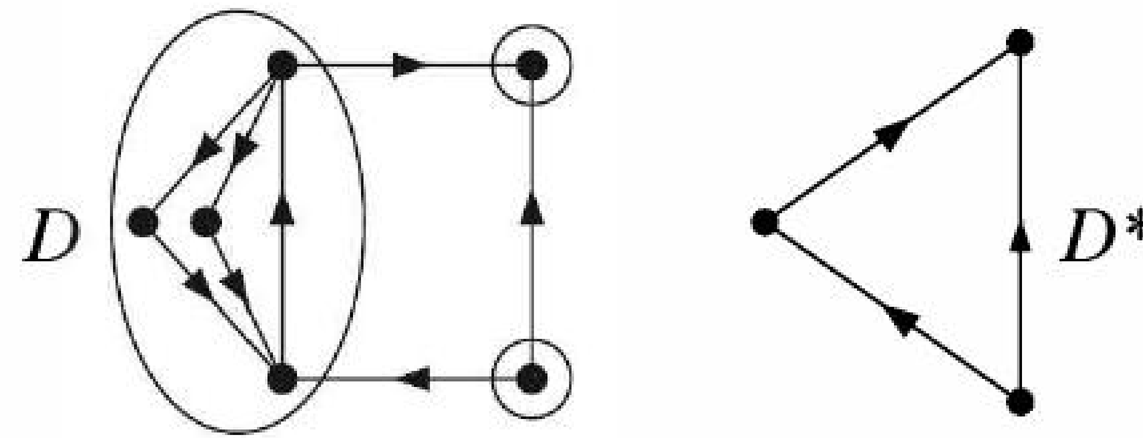
10.4.1. (!) أثبت أن البيان الموجه يكون مترابطًا بقوة إذا وفقط إذا تحقق أنه لكل تجزئة لمجموعة رؤوسه إلى مجموعتين غير خاليتين S و T يوجد ضلع من أضلاعه يربط بين S و T.

11.4.1. (!) أثبت أنه في كل بيان موجه، توجد مركبة قوية (مترابطة بقوة) ليس لها أضلاع داخلة (لا يدخلها أضلاع) كما توجد مركبة قوية ليس لها أضلاع خارجة (لا يخرج منها أضلاع).

12.4.1. للبيان الموجه D، عرّف علاقة R على $V(D)$ على الصورة الآتية: (x,y) إذا وجد مسار من x إلى y، ومسار آخر من y إلى x في D، فأثبت أن R علاقة تكافؤ، وأن صفوف التكافؤ هي مجموعات رؤوس المركبات القوية للبيان الموجه D.

13.4.1. a) أثبت أن المركبات القوية لبيان موجه D تكون منفصلة زوجًا زوجًا.

b) افترض أن $D_1,\ldots,D_k$ هي المركبات القوية للبيان الموجه D، وافترض أيضا أن D^* هي البيان الموجه الخالي العرى الذي رؤوسه $v_1,\ldots v_k$، بحيث إن $v_i \to v_j$ إذا وفقط إذا كانت $i \neq j$ ويوجد في D ضلع من D_i إلى D_j. أثبت أنه لا توجد حلقات في D^*.



14.4.1. (!) افترض أن G بيان موجه له n من الرؤوس دون حلقات. أثبت أنه يمكن ترتيب رؤوس D على الصورة $v_1,\ldots,v_n$، بحيث إنه إذا كان $v_iv_j \in E(G)$، فإن $i < j$.

15.4.1. افترض أن G بيان موجه بسيط مجموعة رؤوسه هي $\{(i ، j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i \leq m$ و $0 \leq n\}$: ويوجد ضلع من (i,j) إلى (i', j') إذا وفقط إذا أمكن الحصول على $(i' ، j')$ من $(i ، j)$ بإضافة العدد 1 إلى أحد إحداثيي (i,j). أثبت أن عدد المسارات في G من (0.0) إلى (m,n) هو $\binom{m+n}{n}$.

16.4.1. (+) نظرية فيرمات الصغيرة: (*Fermat's Little theorem*). افترض أن n عدد أولي. عرف علاقة التكافؤ $\equiv$ على $\mathbb{Z}$ على الصورة $a \equiv b \bmod n$ إذا وفقط إذا كان $a-b$ يقبل القسمة على n (انظر الملحق A) اجعل $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ تمثل صفوف تكافؤ هذه العلاقة. افترض أن a عدد طبيعي ليس له عوامل أولية مشتركة مع العوامل الأولية للعدد n. إن الضرب في a يمثل تبديلة لعناصر $\mathbb{Z}$. وافترض أن l هي أقل عدد طبيعي يحقق أن: $a^l \equiv a$:

a) افترض أن G هي البيان الموجه الدالي الذي رؤوسه $\mathbb{Z}_n$ وذلك للتبديلة المعرفة بدلالة الضرب في a. أثبت أن طول كل حلقة في G (ما عدا الأنشوطة على الرأس n) يساوي $l-1$.

b) استنتج من الفرع a أن $a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$.

17.4.1. (*) أثبت أن الحلقة الفردية (الموجهة) تمثل بيانًا موجهًا ليس له نواة. جد مثالاً لبيان موجه له حلقة فردية مستحدثة بوصفها بيانًا جزئيًا، ولكن له نواة.

18.4.1. (*) أثبت أنه توجد نواة واحدة للبيان الموجه الذي ليس فيه حلقات.

19.4.1. استخدم البديهية (23.4.1) والاستقراء على عدد الأضلاع لإثبات الخاصية المميزة للبيانات الموجهة الأويلرية (النظرية (24.4.1). (مساعدة: تتبع النظرية 26.2.1)

20.4.1. أثبت صحة الصفة المميزة للبيانات الموجهة الأويلرية (النظرية 24.4.1) باستخدام مفهوم المسارب القصوى (مساعدة: اتبع 32.2.1) والإثبات الثاني للنظرية 26.2.1).

21.4.1. تعطي النظرية 24.4.1 الشروط الضرورية والكافية لكي يكون للبيان الموجه (حلقة) أويلرية، حدد (مثبتًا) الشروط الضرورية والكافية لكي يكون للبيان الموجه مسربٌ أويلريّ. (التعريف 22.4.1)، ([Good [1946]).

22.4.1. افترض أن D بيان موجه فيه $d^-(v) = d^+(v)$ لكل رأس v ما عدا $d^+(x) - d^-(x) = k = d^-(y) - d^+(y)$ استخدم الصفة المميزة للبيانات الموجهة الأويلرية لتثبت أن D تحوي K ممرًا من x إلى y ، بحيث إنّ هذه الممرات منفصلة الأضلاع (pairwise edge disjoint) زوجًا زوجًا (أي أنّ مجموعة تقاطع أضلاع أيّ ممرين من هذه الممرات تكون مجموعة خالية).

23.4.1. أثبت أنّ لكلّ بيان G توجيه D (بيان موجه D) موزون عند كل رأس؛ بمعنى أن $|d_D^+(v) - d_D^-(v)| \leq 1$ لكل $v \in V(G)$

24.4.1. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: يوجد لكل بيان G توجيه بحيث إنه إذا كانت S مجموعة جزئية من $S \subseteq V(G)$، فإنّ عدد الأضلاع التي تدخل S وتخرج منها تختلف عن بعضها بمقدار 1 على الأكثر.

25.4.1. (!) التوجيهات والتفكيك إلى P_3:

a) أثبت أنّ لكل بيان مترابط توجيهًا فيه عدد الرؤوس التي درجتها الخارجة فردية على الأكثر يساوي 1 (Rotman [1991])

b) استخدم فرع (a) لتستنتج أن كلّ بيان بسيط مترابط عدد أضلاعه زوجي يمكن أن يُحَلّلَ (يفكك) إلى مسارات طول كل منها 2.

26.4.1. رتّب 7 أصفار و 7 آحاد حلقيًا، بحيث يكون 14 صفًّا المكون كل منها من أربعة حدود ثنائية متتابعة، هي كل ما يمكن تكوينه من صفوف رباعية (باستخدام هذين الرقمين) مختلفة عن 0101 و 1010.

27.4.1. متتالية (De Bruijn) ديبروجن لأيّ هجائية (al phapet) مهما كان طولها. افترض مجموعة حروف هجائية حجمها k. أثبت وجود ترتيبة حلقية مؤلفة من k^l من الحروف المختارة من A، بحيث تكون الـ k^l صفًّا التي طول كل منها l في هذه المتتالية مختلفة بعضها عن بعض، أي أن يكون كلّ منها مختلفًا عن الآخر (Good [1966]، Rees [1946])

28.4.1. افترض أن S هجائية حجمها m. وضّح كيف يمكن الحصول على ترتيبة حلقية مؤلفة من $m^4 - m$ حرفًا من S بحيث إنّ الصفوف المؤلفة من أربعة أحرف من الحروف المتتابعة جميعها تكون مختلفة بعضها عن بعض، وتحوي حرفين مختلفين على الأقل.

29.4.1. (!) افترض أن G بيان، وأن D توجيه (إعطاء اتجاه) للبيان G ، بحيث إن D مترابط بقوة. أثبت أنه إذا وُجدَت حلقه فردية في G، فإنه توجد حلقة فردية في D. (مساعدة: خذ في الحسبان الأزواج $\{v_i,v_{j+1}\}$ في حلقة فردية ($v_1,\ldots,v_k$) في G).

30.4.1. (+) إذا كان D بيانًا موجهًا قويًا، افترض أن $f(D)$ هو طول أقصر ممر مغلق يمر بكل رأس. أثبت أن أكبر قيمة لـ $f(D)$ على البيانات جميعها الموجهة القوية التي لها n من الرؤوس هي $[(n+1)^2/4]$ على افتراض أن $n \geq 2$ (cull [1980]).

31.4.1. حدّد أصغر عدد n بحيث توجد بيانات لدورين غير متشاكلين لكل منهما n من الرؤوس، ولهما قائمة الدرجات الخارجة نفسها.

32.4.1. افترض أنّ $P = P_1,\ldots,P_m$ و $q = q_1,\ldots,q_n$ قائمتان من الأعداد الصحيحة غير السالبة. نقول: إن الزوج (P,q) قابل للتمثيل بوصفه بيانًا ثنائيًا إذا وجد بيان بسيط ثنائي الفرع ، بحيث تمثل $P_1,\ldots,P_m$ إحدى مجموعتي رؤوسه، في حين تمثل $q_1,\ldots,q_n$ المجموعة الثانية من الرؤوس. عندما يكون مجموع p موجبًا، أثبت أن (p,q) قابل للتمثيل بوصفه بيانًا ثنائيًا إذا وفقط إذا كان (p',q') قابلاً لهذا التمثيل ، حيث يمكن الحصول على (p',q') من (p,q) بحذف أكبر عنصر Δ من P، وبطرح 1 من كل عنصر Δ من عناصر q القصوى. (مساعدة: اتبع طريق إثبات النظرية 31.3.1).

33.4.1. (*) افترض أن A و B مصفوفتان من الحجم $m \times n$، وبحيث إن مدخلاتهما من $\{1 ، 0\}$ تعوض عملية التبادل مصفوفة من النوع $\binom{01}{10}$ بمصفوفة من النوع $\binom{10}{01}$ أو بالعكس. أثبت أنه إذا كان حاصل جمع عناصر أي صف $\binom{01}{10}$ في A يماثل حاصل جمع عناصر الصف $\binom{10}{01}$ الذي يناظره في B، فإنه يمكن تحويل A إلى B بعدد محدود من عمليات التبادل. وضّح هذه النتيجة في حال البيانات الثنائية (الثنائية الفرع)، ([Ryser [1957]).

34.4.1. (!) افترض أن G و H بيانان دوريان على مجموعة من الرؤوس V. أثبت أن $d_G^+(v) = d_H^+(v)$ لكل $v \in V$ إذا وفقط إذا أمكن تحويل G إلى H عن طريق عمل مجموعة من عكس الاتجاهات على حلقات ثلاثية الطول. (مساعدة: خذ في الحسبان رأسًا له درجة خارجة كبرى في البيان الجزئي من G الذي يتألف من أضلاع أعطيت اتجاهًا معاكسًا في ([Ryser [1964]. H.

35.4.1. (+) افترض أن $p_1,\ldots,p_r$ أعداد صحيحة غير سالبة، بحيث إن $p_1 \leq \ldots \leq p_n$. افترض أن $p'_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$. أثبت أنه يوجد بيان يمثل دوريًا درجاته الخارجة $p_1,\ldots,p_n$ إذا وفقط إذا كان $p'_k \geq \binom{k}{2}$. لكل $1 \leq K < n$، و $p'_k = \binom{n}{2}$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $\sum_{k=1}^{n}[p'_k - \binom{k}{2}]$ (Landau [1953]).

36.4.1. من القضية 30.4.1، نعلم أنه يوجد ملك لكل دوري. افترض أن T بيان يمثل دوريًا ليس له رأس درجته الداخلة صفر:

a) أثبت أنه إذا كان x ملكًا في T، فإن ملكًا آخر يوجد لـ T في $N^-(x)$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت وجود ثلاثة ملوك على الأقل للدوري T.

c) لكل $n \geq 3$، جد دوري T يحقق أنه $\delta^-(T) > 0$، وله ثلاثة ملوك فقط.

(تعليق: يوجد دوري على n من الرؤوس له k من الملوك عندما $n \geq k \geq 1$ ما عدا عندما $k = 2$ وعندما

([1980] Maurer $(n = k = 4)$).

37.4.1. خذ في الحسبان الخوارزمية الآتية التي مدخلها دوري T:

1- اختبر رأسًا x في T.
2- إذا كانت درجة x الداخلة مساوية للصفر، فسَمّ x ملكًا لـ T وتوقف.
3- بعكس ذلك، احذف $\{x\} \cup N^+(x)$ من T لتحصل على T'.
4- طبق الخطوات السابقة على T'، وسمّ المخرج ملكًا لـ T وتوقف.

أثبت أن هذه الخوارزمية تنتهي وتنتج ملكًا في T.

38.4.1. (+) لكل $n \in \mathbb{N}$، أثبت أنه يوجد دوري له n من الرؤوس، بحيث إن كل رأس يكون ملكًا إذا وفقط إذا كانت $n \notin \{2،4\}$.

39.4.1. (+) أثبت أنه يوجد لكل بيان موجه خالٍ من العرى D مجموعة S من الرؤوس غير المتجاورة زوجًا زوجًا، بحيث يمكن الوصول إلى أيّ رأس خارج S من S بمسار طوله 2 على الأكثر. (مساعدة: استخدم الاستقراء القوي على $n(D)$. تعليق: هذا يعمم القضية 30.4.1). ([1974] chvatal − Lovaz).

40.4.1. نقول: إن البيان الموجه فريد المسار إذا وجد على الأكثر مسار واحد (موجه) يربط بين أي رأسين x و y. افترض أن Tn دوري على n من الرؤوس، حيث إن الضلع الذي يربط v_i بـ v_j يكون موجهًا في اتجاه الرأس الذي دليله أكبر. ما أكبر عدد للأضلاع الموجودة في بيان جزئي فريد المسار من Tn؟ كم بيانًا جزئيًا فريد المسار عدد أضلاعه أكبر ما يمكن موجودًا في مثل هذا البيان؟ (مساعدة: أثبت أن البيان المتضمن في هذا البيان الموجه لا يحوي أي مثلثات) ([1980] Maurer − Rabinovitch − Trotter).

41.4.1. افترض أن G دوري، وافترض كذلك أن L_0 هي قائمة بعناصر $V(G)$ بترتيب معين. إذا كان y يتبع x مباشرة في L_0، ولكن $x \to y$ في G، فإن yx ضلع معكوس (عكسي). يمكننا تبديل x مع y في الترتيب عندما يكون yx ضلعًا معكوسًا (هذا يمكن أن يزيد عدد الأضلاع المعكوسة). افترض أن متتالية. ... ،L_0، L_1 تنتج بسبب عمليات تبديل الأضلاع المعكوسة في الترتيب الحالي ضلعًا واحدًا في كل مرة وبالتتابع. أثبت أن هذا يعطي قائمة من الأضلاع خالية من الأضلاع المعكوسة دائمًا، وحدّد عدد الخطوات اللازمة للانتهاء من هذه العملية (تعليق: في الحالة الخاصة، عندما تمثل الرؤوس بأعداد، ويشير كل ضلع في اتجاه العدد الأعلى، فإنّ النتيجة تشير إلى أن تبديل الأعداد المتجاورة بالتتابع وغير المرتبة دائمًا وبالنهاية يعطي تصنيفًا للقائمة) (*Locke* [1995]).

42.4.1. (!) افترض أن $\sigma = v_1,\ldots,v_n$ تمثل ترتيبًا لرؤوس دوري (بيان يمثل دوريًا). اجعل $f(\sigma)$ تمثل مجموع أطوال الأضلاع الراجعة (feedback edges)، ونعني بذلك مجموع $j - i$ على الأضلاع $v_j v_i$ حيث $j > i$. أثبت أن كل ترتيب يجعل لـ $f(\sigma)$ قيمة صفرى يرتب الرؤوس ترتيبًا غير متزايد بحسب الدرجة الخارجة. (مساعدة: حدد كيف تتغير $f(\sigma)$ عندما نبدل عنصرين متتابعين من عناصر (σ) و(-Kano − Sakamoto [1983]، Isaak − Tes man [1991]).

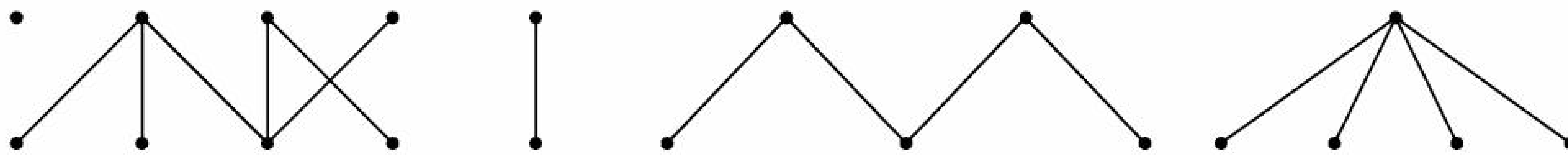
الفصل الثاني

الأشجار والمسافات (Trees and Distance)

1.2. الخصائص الأساسية (Basic Properties)

تعني كلمة شجرة تفرعًا لأغصان من جذر معين لا يمكن من خلاله الحصول على حلقة. وتستعمل هذه الأشجار بوصفها بيانات في العديد من التطبيقات، وخاصة في تخزين المعطيات، وعمليات البحث والاتصالات.

1.1.2. تعريف: تدعى البيانات التي تخلو من الحلقات أنها لا حلقية أو غير حلقية (*acyclic*). في حين تعرَّف الغابة على أنها بيان مترابط لا حلقي. وتعرف الورقة (أو الرأس المتدلي) على أنها رأس درجته 1، أما البيان الجزئي المولد لبيان G فهو بيان جزئي من G رؤوسه $V(G)$، والشجرة المولدة هي بيان جزئي مولد ومع ذلك فهو شجرة.



2.1.2. مثال: تعرف الشجرة على أنها غابة مترابطة، وكل مركبة من مركبات الغابة هي شجرة. لاحظ أن البيان الذي لا توجد فيه حلقات لا يحتوي على حلقات فردية، وعليه فهو بيان ثنائي الفرع. لذا فإن الأشجار والغابات تمثل بيانات ثنائية الفرع.

إن المسارات هي أشجار، وتكون الشجرة مسارًا إذا وفقط إذا كانت أكبر درجة رأس من رؤوسها تساوي 2. تعرف النجمة على أنها شجرة بحيث يجاور أحد رؤوسها رؤوسَها الأخرى جميعها، لاحظ أن **النجمة** التي لها n من الرؤوس هي البيان الثنائي الفرع $K_{1,n-1}$.

إذا كان البيان شجرة، فتوجد له شجرة مولدة واحدة وهي البيان نفسه. لاحظ أنه ليس من الضروري أن يكون البيان الجزئي المولد لبيان G مترابطًا، كما أنه ليس من الضروري أن يكون البيان الجزئي المترابط لبيان G بيانًا جزئيًّا مولدًا للبيان G. فعلى سبيل المثال إذا كان $n(G) > 1$، فإن البيان الجزئي الخالي الذي رؤوسه $V(G)$ ومجموعة أضلاعه Ø يكون مولدًا وغير مترابط، وإذا كانت $n(G)>2$، فإن البيان الجزئي المؤلف من ضلع واحد بالإضافة إلى طرفي هذا الضلع يمثل بيانًا جزئيًّا مترابطًا وغير مولد. ■

خواص الأشجار (Properties of Trees)

تتميز الأشجار بأن لها عدة توصيفات (صيغ) مُميّزة متكافئة يمكن اعتماد أي منها بصفته تعريفًا لها. وتعدّ هذه التوصيفات مفيدة؛ لأنه يكفي إثبات أنَ البيان يكون شجرة إذا حقق أي صفة من هذه الصفات. ويمكن بعد ذلك استخدام ما تبقى من صفات بحسب حاجتنا. وسنثبت أولًا أن حذف ورقة من الشجرة يعطينا شجرة أصغر.

3.1.2. تمهيدية : كل شجرة لها رأسان على الأقل، وتحتوي على ورقتين على الأقل. إن حذف ورقة واحدة من شجرة لها n من الرؤوس يعطينا شجرة عدد رؤوسها $n - 1$.

الإثبات: إن البيان المترابط الذي له رأسان على الأقل يحتوي على ضلع. في البيان اللاحلقي، لا يوجد للنقاط الطرفية لمسار أعظمي غير تافه جارٌ مختلف عن جاره في المسار. لذا فإن النقاط الطرفية لمثل هذا المسار تكون أوراقًا.

افترض أن v ورقة في شجرة G، وأن $G' = G - v$. إن الرأس الذي درجته 1 لا يمكن أن ينتمي إلى أي مسار يربط بين رأسين آخرين. لذا، نجد أنه إذا كان u و w رأسين في $V(G')$ ، فإن كل مسار من u إلى w في G يكون كذلك مسارًا في G' . واستنادًا إلى ذلك، فإن G' مترابط. وبما أن حذف أي رأس لا يولد حلقة، فإن G' يكون كذلك غير حلقي. لذا فإن G' شجرة لها $n - 1$ من الرؤوس. ■



تشير البديهية 3.1.2. إلى أنه يمكن الحصول على كل شجرة لها أكثر من رأس من شجرة أصغر بإضافة رأس درجته 1 (بياناتنا جميعها منتهية؛ أي أن لها عددًا منتهيًا من الرؤوس ومن الأضلاع). إن هذا يُجَنِّبُ بعض البراهين من الوقوع في مصيدة الاستقراء. وأن عملية بناء شجرة لها $n + 1$ من الرؤوس من شجرة اختيارية عدد رؤوسها n من خلال إضافة جار جديد إلى رأس اختياري من رؤوسها القديمة تولد الأشجار جميعها التي لها $n + 1$ من الرؤوس. تعني كلمة "اختياري" أننا نأخذ في الحسبان الطرق الممكنة جميعها عند اتخاذ الخيار.

تعتمد براهيننا للصفات المتكافئة للأشجار على استخدام طرق متعددة مثل: الاستقراء، والنتائج السابقة، والتعليل الحسابي عن طريق العدّ، والتطرفيّة، والتناقض.

4.1.2. نظرية : إذا كان G بيانًا له n من الرؤوس ($n \geq 1$) فإن العبارات الآتية متكافئة (وتعطي وصفًا مميزًا للأشجار التي لها n من الرؤوس).

A) G مترابط ولا يحتوي على حلقات.

B) G مترابط وله $n - 1$ ضلعًا.

C) G يحوي $n - 1$ ضلعًا ولا يحوي أي حلقة.

D) G لا يحوي عرى، ولكل $u, v \in V(G)$ يوجد مسار واحد فقط من u إلى v.

الإثبات: سنثبت أولاً التكافؤ بين كلّ من A، و B، و C من خلال إثبات أنه إذا تحقق أيّ شرطين من: الترابط، لاحلقي، $n - 1$ من الأضلاع، فإن الشرط الثالث يتحقق بالضرورة.

$A \Rightarrow \{B, C\}$. باستخدام الاستقراء على n؛ إذا كانت $n = 1$، فإن نتيجة ذلك هي بيان له رأس واحد بلا أضلاع. إذن، فالنتيجة متحققة تلقائيًّا. لذا، افترض الآن أن $n > 1$، وافترض كذلك أن النتيجة متحققة للبيانات التي عدد رؤوسها أقل من n جميعها. وافترض الآن أن G بيان مترابط لا حلقي، لذا فإن البديهية 3.1.2 تضمن وجود ورقة v، وتضمن كذلك أن البيان $G'=G-v$ يكون مترابطًا وغير حلقي أيضًا (انظر الشكل أعلاه). لذا

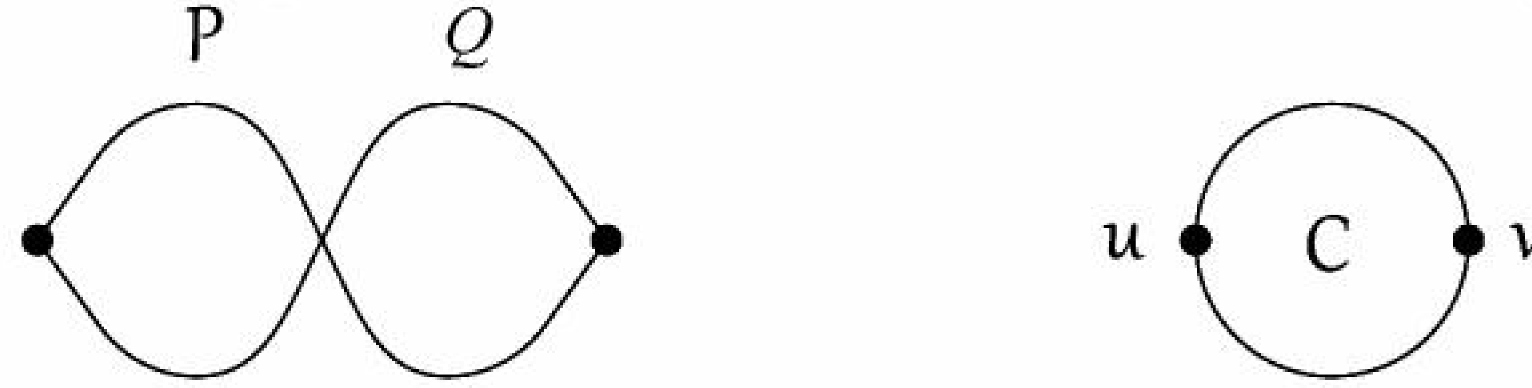
وبتطبيق فرضية الاستقراء على البيان G' ، نجد أن $e(G') = n-2$، وبما أن v يقع على ضلع واحد، فإن $e(G) = n-1$.

$B \Rightarrow \{A, C\}$ احذف أضلاعًا من G واحدًا تلو الآخر حتى تحصل على بيان G' لاحلقي. وبما أن كل ضلع في أي حلقة لا يمثل ضلع قطع (فصل) (النظرية 14.2.1)، فإن G' يكون مترابطا. وكما في الفقرة السابقة، نجد أن $e(G') = n - 1$، وعندها لا يمكن أن يكون هناك أضلاع قد حذفت. لذا، فإن $G'=G$، وأن G غير حلقي.

$C \Rightarrow \{A, B\}$ افترض أن $G_1, \ldots, G_k$ هي مركبات G. وبما أن كل رأس يجب أن يظهر في أحد المركبات، لذا فإن $\sum_i n(G_i) = n$، وبسبب عدم وجود حلقات في G، فإنّ الخاصية A تتحقق. لذا فإن $e(G_i) = n(G_i) - 1$ وبالجمع على i نجد أن: $n - 1 = e(G) = \sum_i n(G_i) - 1 = n - k$. إذن، $k = 1$ و G مترابط.

$A \Rightarrow D$: بما أنّ G مترابط، إذن يوجد مسار يربط بين أيّ رأسين من رؤوسه. وإذا وُجِدَ رأسان مربوطان بأكثر من مسار، فإننا نختار أقصر مسارين (من حيث الطول الكلي) مختلفين P وَ Q لهما النقاط الطرفية نفسها. لاحظ أن هذا الخيار يضمن أن الرؤوس الداخلية للمسارين P و Q تكون منفصلة (انظر الشكل أدناه). لذا، فإن $P \cup Q$ تمثل حلقة، وهذا يتناقض مع A .

$D \Rightarrow A$: إذا وُجد مسار من u إلى v لكلّ زوج من رؤوس G، فإنّ G يكون مترابطًا. وإذا احتوى G على حلقة C، فهذا يعني وجود مسارين يربطان بين أيّ رأسين u, v موجودين في $V(G)$. لذا فإن G لاحلقي (وهذا يمنع حدوث العرى). ■



5.1.2. نتيجة :

a) يكون كل ضلع في أيّ شجرةٍ ضلعَ قطعٍ (فصل).

b) إن إضافة ضلع واحد لأيّ شجرة يعطي حلقة واحدة فقط.

c) يحوي كل بيان مترابط شجرة مولدة.

الإثبات: (a) بما أنّ الأشجار لا تحوي حلقات. لذا فإنّ النظرية 14.2.1 تضمن لنا أن كل ضلع هو ضلع قطع (فصل).

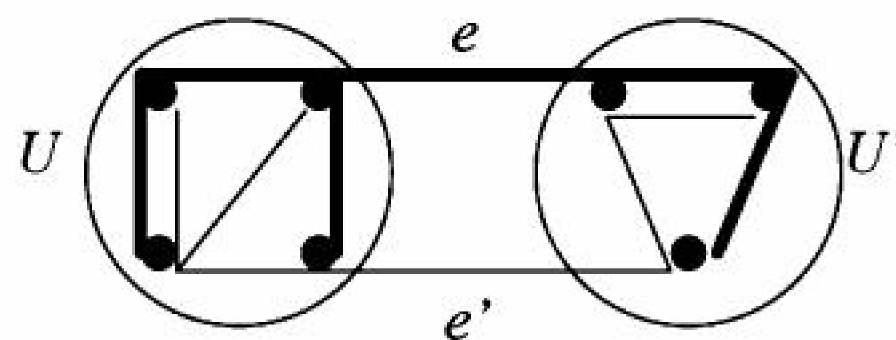
(b) يوجد مسار واحد فقط في الشجرة بين أيّ رأسين (النظرية 4D.2.1). لذا فإن ربط أيّ رأسين بضلع يعطينا حلقة واحدة فقط.

(c) كما في إثبات أن $B \Rightarrow A, C$ في النظرية 4.1.2، فإنّ حذف الأضلاع من الحلقات الموجودة في بيان G بالتتابع يعطينا بيانًا جزئيًّا مولدًا مترابطًا حلقيًّا.

6.1.2. قضية : إذا كانت كلّ من T و T' شجرة مولدة لبيان مترابط G، وكانت $e \in E(T) - E(T')$. إذن، هناك ضلع $e' \in E(T') - E(T)$ بحيث تكون $T - e + e'$ شجرةً مولدةً للبيان G.

الإثبات: من النتيجة 5.1.2a، نعلم أن كل ضلع في T هو ضلع قطع لـ T. لذا، افترض أن U و U' هما مركبتا $T - e$. وبما أن T' مترابطة، فهناك ضلع e' في T' بحيث يكون أحد طرفيه في U، والطرف الآخر في U'. الآن، $T-e+e'$ شجرة مترابطة لها $n(G) - 1$ ضلعًا وهي مولدة للبيان G.

(في الشكل أدناه، المثلثان T بخط غامق و T' بخطّ متصل مشتركان في ضلعين). ■



7.1.2. قضية : إذا كانت كلّ من T وT' شجرة مولدة لبيان مترابط G، وكان $e \in E(T) - E(T')$ إذن، هناك ضلع $e' \in E(T') - E(T)$ بحيث تكون $T' + e - e'$ شجرة مولدة للبيان G.

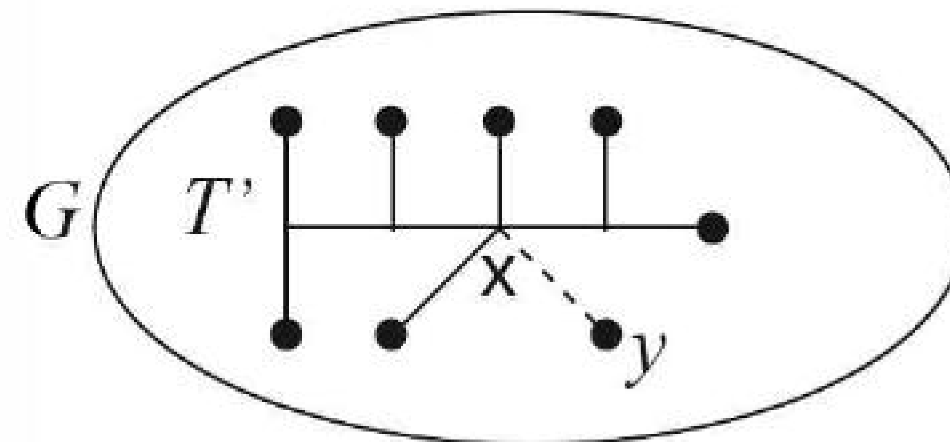
الإثبات: من النتيجة 2.1.5b، نجد أن البيان $T' + e$ يحوي حلقة فريدة C. وبما أن T لاحلقي، إذن هناك ضلع $e' \in E(C) - E(T)$. إن حذف e' يقضي على الحلقة الفريدة في $T'+e$. الآن، $T'+e-e'$ يمثل بيانًا مترابطا حلقيًّا، وهو شجرة مولدة للبيان G. (إن إضافة e إلى T في الشكل أعلاه يعطينا حلقة C طولها 5. والأضلاع الأربعة للبيان $C-e$ تنتمي إلى $E(T) - E(T')$، ويمكن لأي منها أن يقوم مقام e'). ■

يمكن اختيار الضلع e' ليحقق نتيجتي القضيتين 6.1.2 و 7.1.2 في الوقت نفسه وكما هو موضح في الشكل المرسوم بينهما. والنتيجة الآتية توضّح الإثبات بالاستقراء باستخدام حذف ورقة.

8.1.2. قضية : إذا كانت T شجرة لها k من الأضلاع، وكان G بيانًا بسيطًا يحقق أن $\delta(G) \geq k$، فإن **T** تمثل بيانًا جزئيًّا من G.

الإثبات: استخدم الاستقراء على k. إذا كانت $k=0$، فإن كل بيان بسيط يحوي K_1، وهي الشجرة الفريدة التي لا يوجد بها أضلاع. افترض أن $k>0$، وأن النتيجة صحيحة للأشجار جميعها التي عدد أضلاعها أقل من k. بما أن $k > 0$، فإن البديهية 3.1.2 تسمح لنا باختيار ورقة v في T. افترض أن u جار v، ثم افترض الشجرة $T' = T - v$، وحيث إن عدد أضلاعها أقل من k، لذا وباستخدام الإستقراء، نجد أن G يحوي T' بوصفها بيانًا جزئيًّا؛ لأن $\delta(G) \geq k > k - 1$.

افترض أن x هي الرأس في هذه النسخة من T' الذي يرتبط بـ u (انظر التوضيح أدناه). بما أن T' تحوي $k - 1$ رأسًا مختلفًا فقط عن u و $d_G(x) \geq k$، لذا يوجد لـ x جار y في G غير موجود في هذه النسخة من T'، وبإضافة الضلع xy، نحصل على تمديد لهذه النسخة من T' إلى نسخة من T في G، حيث يؤدي y دور v. ■



إن المتباينة في الفرضية 8.1.2 حادة؛ حيث إن البيان K_k له درجة صغرى قيمتها $k - 1$، إلا أنه لا يحوي شجرة لها k من الأضلاع. هذه الفرضية تضمن أن أي بيان بسيط G عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه يزيد على $n(k - 1)$ يحوي T بوصفها بيانًا جزئيًّا (التمرين 34). ومن الجدير بالذكر أن تخمين إردوز (Erdős) وسوز (Sós) يعطي نتيجة أقوى، وهو أنه إذا كانت $e(G) > n(k - 1)/2$ ، فإن T يجب أن تكون بيانًا جزئيًّا ([Erdős [1964)، لقد بُرهن هذا التخمين للبيانات التي لا تحوي حلقات رباعية (طولها 4) ([Saclé-Woźniak [1997). وأثبت كل من اجتاي (Ajtai) وكوملوز Komlós وسيميردي (Szemeré-di) نتيجة قريبة من ذلك، وذلك كما ورد في سوفر ([Soffer [2000).

المسافات في الأشجار والبيانات (Distance in Trees and Graphs)

عندما نستخدم البيانات لتمثيل شبكات الاتصالات، فإننا نرغب بأن تكون الرؤوس قريبة من بعضها لنتجنب التأخير في الاتصالات. ونقيس المسافات باستخدام أطوال المسارات.

9.1.2. تعريف: إذا وُجِدَ في البيان G مسارٌ من u إلى v. فنُعرّف المسافة من u إلى v، ونرمز إليها بالرمز $d_G(u, v)$ أو $d(u, v)$ على أنها طول أقصر مسار من u إلى v. وإذا خلا G من مثل هذا المسار من u إلى v، فإن $d(u, v)$. ونعرّف قُطر G (diam G) على أنه $\max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$.

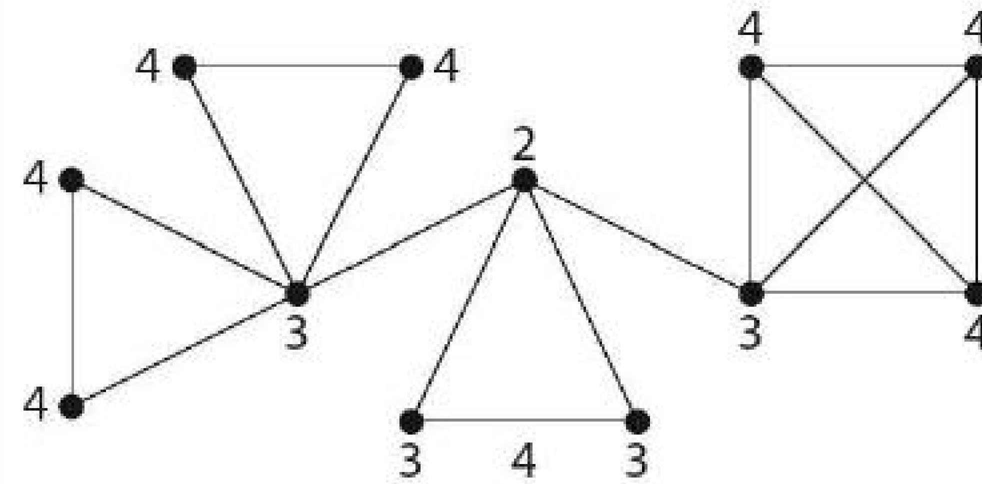
نعرف الاختلاف المركزي للرأس u، ونرمز إليه بالرمز $\epsilon(u)$ على أنه $\max_{v\in V(G)} d(u, v)$. نصف قطر G ($\mathrm{rad}\ G$) على أنه $\min_{u\in V(G)} \in(u)$، أي أن $\in(u) = \max_{v\in V(G)} d(u, v)$ و $\mathrm{rad}\ G = \min_{u\in V(G)} \epsilon(u)$.

لاحظ أن قطر G يساوي أكبر قيمة للاختلافات المركزية للرؤوس. وإذا كان البيان غير مترابط، فإن القطر ونِصْفَهُ (وكل اختلاف مركزي) يكونان ما لانهاية؛ لأن المسافة بين المركبات المختلفة تكون لانهائية. نستخدم كلمة قطر بمعناها الهندسي في أنها تقيس أكبر مسافة بين عنصرين من عناصر مجموعة معينة.

10.1.2. مثال: يساوي قطر بيان بيترسون 2 بسبب وجود جار مشترك لأي ضلعين غير متجاورين في هذا البيان. أما قطر Q_k، فإنه يساوي k وذلك لأنه يلزمنا k خطوة من أجل تغيير الإحداثيات التي عددها k جميعها. في حين أنّ قطر C_n يساوي $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. لاحظ أن كل رأس في هذه البيانات له الاختلاف المركزي نفسه، وأن $\mathrm{diam}\ G = \mathrm{rad}\ G$.

إذا كان $n \geq 3$، فإن الشجرة التي لها n من الرؤوس وقطرها أصغر ما يمكن هي النجمة؛ لأن قطرها يساوي 2، ونصف قطرها يساوي 1. أما الشجرة التي قطرها أكبر ما يمكن فهي المسار؛ حيث قطره يساوي $n - 1$، ونصف قطره $\lceil (n-1)/2 \rceil$. لاحظ أن كل مسار في شجرة يمثل أقصر (الفريد) مسار بين طرفيه. لذا فإن قطر أي شجرة هو طول أطول مسار فيها.

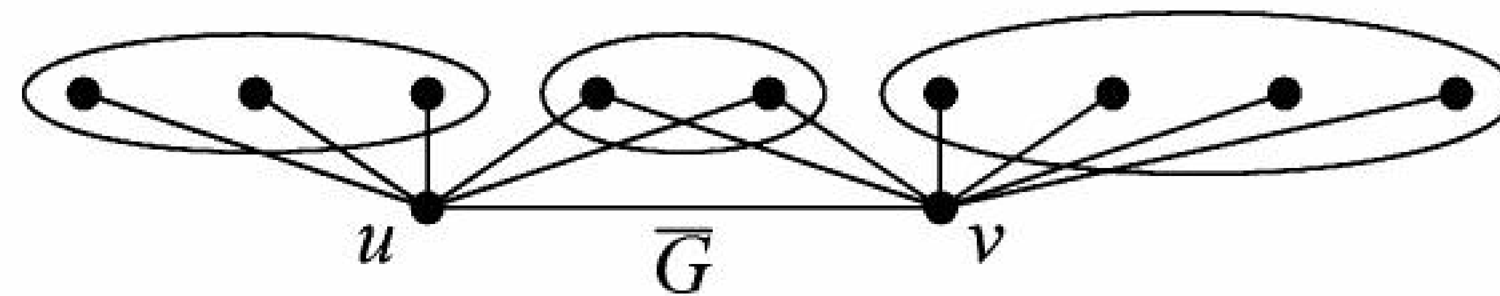
في البيان أدناه، عُلِّم كل رأس بقيمة اختلافه المركزي، حيث يساوي نصف القطر 2، في حين يساوي القطر 4، أما طول أطول مسار فيساوي 7. ■



لاحظ أنه من أجل أن يكون للبيان قطر كبير، فيجب أن يكون هناك عدد كبير من الأضلاع غير موجود. لذا توقّع أنه إذا كان قطر البيان كبيرًا، فإن قطر متممة هذا البيان يكون صغيرًا. لاحظ أن قطر البيان يساوي 2 على الأكثر إذا وفقط إذا وُجِدَ جارٌ مشترك لكل رأسين غير متجاورين (انظر التمرين 15).

11.1.2. نظرية: إذا كان G بيانًا بسيطًا، بحيث إن $\mathrm{diam}\ G \geq 3$، فإن $\mathrm{diam}\ \overline{G} \leq 3$.

الإثبات: عندما $\mathrm{diam}\ G > 2$، فيوجد رأسان u, v في $V(G)$ دون جار مشترك. لذا، فإنه لكل $x \in V(G) - \{u,v\}$، إما أن يكون u أو v لا يجاور x، وهذا يجعل x جارًا إما لـ u أو لـ v في $\overline{G}$. وبما أن uv ينتمي إلى $E(\overline{G})$، إذن يوجد لكل زوج من الرؤوس x, y مسار من x إلى y في $\overline{G}$ طوله يساوي 3 على الأكثر، ويمر خلال $\{u, v\}$. واستنادًا إلى ذلك، فإن $\mathrm{diam}\ \overline{G} \leq 3$. ■



12.1.2. تعريف: مركز البيان G هو البيان الجزئي الذي تولده الرؤوس التي اختلافها المركزي أقل ما يمكن.

إن مركز البيان يساوي البيان كاملاً إذا وفقط إذا كان نصف قطر البيان مساوياً لقطره. وسنعطي فيما يأتي وصفاً لمراكز الأشجار. في خطوة الاستقراء، نحذف الأوراق جميعها بدلاً من ورقة واحدة فقط.

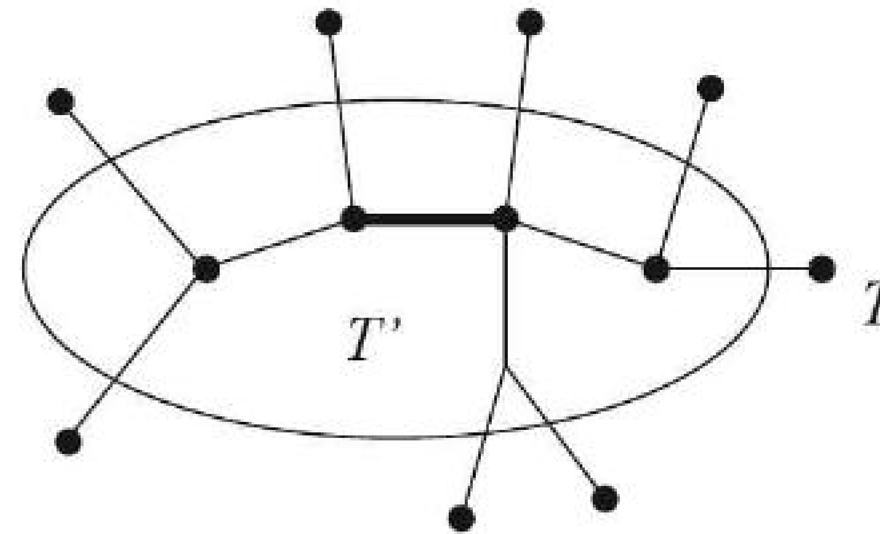
13.1.2. نظرية: (Jordan [1869]) يكون مركز الشجرة رأساً أو ضلعاً.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على عدد رؤوس T. إذا كانت $n(T) \leq 2$، فإن المركز يكون الشجرة التامة، افترض أن $n(T) > 2$. كوّن الشجرة T' وذلك بحذف كل ورقة من أوراق T. ومن البديهية 3.1.2 نجد أن T' شجرة. وبما أن الرؤوس الداخلية للمسارات بين أوراق T لا تتأثر بالحذف، فإن T' تحوي رأساً واحداً على الأقل.

افترض أن $u \in V(T)$، ولاحظ أن كل رأس في T يكون ورقة بحيث يكون بُعده في T أكبر ما يمكن عن u (بغير ذلك، فإن المسار الواصل إلى هذه الورقة من u يمكن تمديده (تكبيره) أكثر). بما أنه حُذفت الأوراق جميعها، وأنّ أي مسار بين أيّ رأسين آخرين لا يستخدم أيّاً من الأوراق، فإن $\in_{T'}(u) = \in_T(u) - 1$ لكل $u \in V(T')$.

وكذلك فإن الاختلاف المركز لكل ورقة في T أكبر من الاختلاف المركزي لجارها في T، لذا فإن الرؤوس التي تجعل $\in_T(u)$ أقل ما يمكن هي الرؤوس نفسها التي تجعل قيمة $\in_{T'}(u)$ أقل ما يمكن.

وبذلك نكون قد أثبتنا على أن T و T' لهما المركز نفسه. وبناءً على ذلك، فإن مركز T' هو رأس أو ضلع. ■



يكون القطر الكبير مقبولاً في شبكات الاتصال إذا وُصلت الأزواج جميعها من الرؤوس بمسارات قصيرة، ويقودنا إلى دراسة معدل (متوسط) المسافة بدلاً من دراسة أكبر مسافة، وبما أن معدل المسافة يساوي مجموع المسافات مقسومًا على $\binom{n}{2}$ (عدد الأزواج من الرؤوس)، فإن دراسة (معدل) متوسط المسافة يكافئ دراسة $D(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u,v)$.

إن المجموع $D(G)$ يسمى (يرمز إليه أيضًا بالرمز $W(G)$) معامل واينر (**Weiner Index**) للبيان G. لقد استخدم واينر $W(G)$ لدراسة درجة غليان البارفين (مادة دهنية تستخرج من الخشب، والفحم الحجري، والبترول، وتستخدم في صناعة الشموع). يمكن تمثيل الجزيئات بواسطة البيانات؛ حيث تمثل الرؤوس الذرات، أما الأضلاع فتمثل الروابط بين هذه الذرات. إن العديد من الخواص الكيميائية للجزيئات ترتبط بدليل (معامل) واينر للبيانات التي تمثل هذه الجزيئات، وسندرس القيم القصوى لـ $D(G)$.

14.1.2. نظرية: من بين الأشجار التي لها n من الرؤوس، يكون معامل واينر $D(T) = \sum_{u,v} d(u,v)$ أقل ما يمكن إذا كانت الشجرة نجمة، ويكون أكبر ما يمكن إذا كانت الشجرة مسارًا، وفي الحالتين يكون الحلّ وحيدًا.

الإثبات: بما أن أيّ شجرة على n من الرؤوس تحوي $n - 1$ ضلعًا، فإن لها $n - 1$ زوجًا من الرؤوس حيث يساوي البُعد بين الرأسين في أي زوج منها 1، أما البعد بين أي رأسين آخرين فيساوي 2 على الأقل. وبما أن النجمة تحقق ذلك، فإنها تعطي قيمة صغرى لـ $D(T)$. ولإثبات عدم وجود أي شجرة أخرى تحقق ذلك؛ خذ ورقة x في T، واجعل v جارًا لـ x. فإذا كان بُعْدُ أي رأس آخر عن x يساوي 2، فإن كل رأس منها يجب أن يكون جارًا للرأس v. وعليه، فإن T تكون نجمة، ويكون معامل واينر مساويًا:

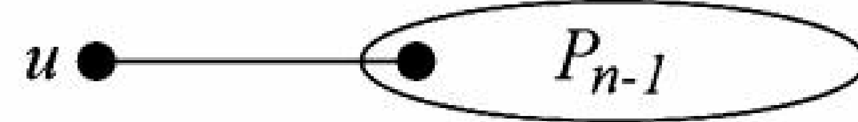
$$D(K_{1,n-1}) = (n - 1) + 2\binom{n-1}{2} = (n - 1)^2$$

ومن أجل إيجاد الشجرة التي يكون معامل واينر لها أكبر ما يمكن؛ خذ أولاً $D(P_n)$، ولاحظ أن هذه القيمة تساوي مجموع المسافات من نقطة طرفية u للمسار إلى باقي رؤوس هذا المسار إضافة إلى $D(P_{n-1})$. ولذا نجد أن:

$$D(P_n) = D(P_{n-1}) + \binom{n}{2}$$

وذلك لأن: $\sum_{v\epsilon V(P_n)} d(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \binom{n}{2}$

وباستخدام صيغة باسكال (الملحق A): $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$، فإن الاستقراء يعطينا أن: $D(P_n) = \binom{n+1}{3}$



سنثبت باستخدام الاستقراء على n أن P_n تمثِّل الشجرة الفريدة من بين الأشجار التي لها n من الرؤوس جميعها والتي تعطينا أكبر قيمة لـ $D(T)$.

إذا كانت $n=1$، فإن الشجرة الفريدة التي لها رأس واحد هي P_1. لذا، افترض أن $n>1$، وأن u يمثل ورقة في الشجرة T التي لها n من الرؤوس، ولاحظ أن: $D(T)=D(T\text{-}u)+\sum_{v\in V(T)} d(u,v)$، من فرضية الاستقراء نعلم أن $D(T\text{-}u) \le D(P_{n-1})$، مع تحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت $T\text{-}u$ تمثل مسارًا. لذا، يكفي أن نثبت أن $\sum_{v\in V(T)} d(u,v)$ يكون أكبر ما يمكن عندما تكون T مسارًا، و u نقطة طرفيه لـ T.

خذ في الحسبان قائمة المسافات من u. نجد في Pn أن هذه القائمة هي: $1, 2, \ldots.\ n-1$، وهذه القيم جميعها مختلفة عن بعضها. إن أقصر مسار من u إلى أبعد رأس عن u يحوي رؤوسًا تقع على الأبعاد جميعها من u. لذا، فإن قائمة المسافات من u إلى الرؤوس الأخرى تخلو من القفزات (الفجوات) بين الأعداد التي تمثل هذه المسافات. ومن هنا، فإن أي تكرار في المسافات يجعل $\Sigma_{v\in V(T)}\, d(u,v)$ أصغر من المجموع في الحالة التي تكون فيها u ورقة في المسار. لاحظ أنه يجب حصول تكرار في هذه المسافات في الحالة التي لا تكون فيها T مسارًا. وهذا ينهي الإثبات. ■

من بين البيانات المترابطة جميعها التي لها n من الرؤوس، نجد أن k_n يعطي أقل قيمة لـ $D(G)$. إن مسألة القيمة العظمى (أكبر قيمة) تختزل عادة للمسألة التي عالجناها سابقًا في حالة الأشجار.

15.1.2. تمهيدية : إذا كان H بيانًا جزئيًّا من البيان G، فإن $d_G(u,v) \le d_H(u,v)$.

الإثبات: إن أي مسار من u إلى v في H هو أيضًا مسار في G. لذا، فإن أقصر مسار من u إلى v في G لا يمكن أن يكون أطول من أقصر مسار من u إلى v في H. ■

16.1.2. نتيجة : إذا كان G بيانًا مترابطا له n من الرؤوس، فإن $D(G) \le D(P_n)$.

الإثبات: إذا كانت T شجرة مولدة للبيان G، فإن البديهية 15.1.2 تضمن أن $D(G) \le D(T)$ ومن النظرية 14.1.2. نعلم أن $D(G) \le D(P_n)$. ■

الأشجار المولدة المنفصلة (اختياري) (Disjoint Spanning Trees)

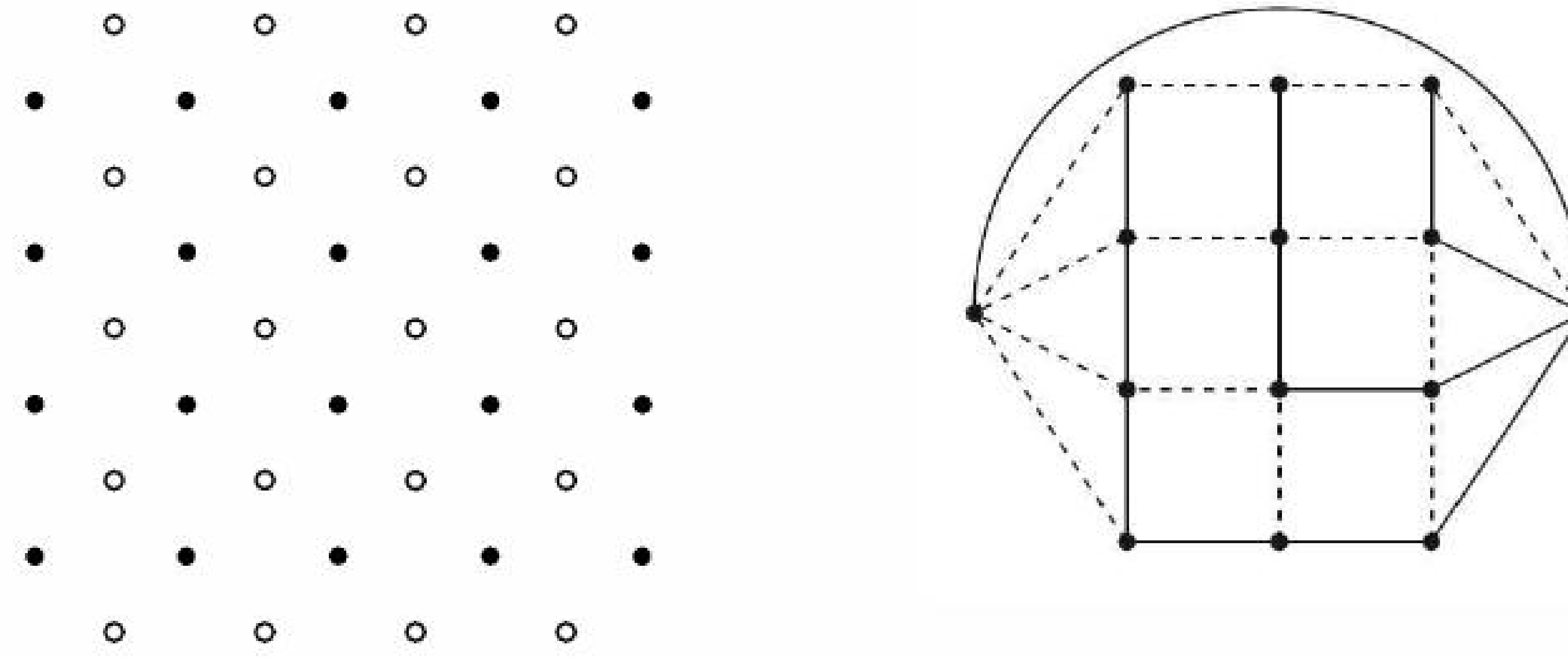
لقد رأينا وجود شجرة مولدة لكل بيان مترابط. إن الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا توفر لنا مسالك بديلة عندما يفشل ضلع في الشجرة الأصلية عن توفير هذا المسلك. لقد قام كل من توت (Tutte [1961أ]) وناش وويليامز (Nash-williams [1961]) كل منهما بصورة مستقلة دون اعتماد أي منهم على نتائج الآخر بإعطاء توصيف للبيانات التي يوجد لها k من الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. (انظر التمرين 67).

سنقوم بتوصيف أحد التطبيقات على الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا. لقد ابتكر ديفيد غيل (David Gale) لعبة سُوِّقَتْ تحت اسم جَسِّرْها (أي اعملها على صورة جسر 'Bridg-it') (حقوق الطبع لعام 1960 للإخوة هازنفلد، شركة ألعاب هازبرو) (Copyrisht 1960 by Hassenfeld Bros., Inc.-"Hasbro Toys"). في هذه اللعبة، يمتلك كل لاعب شبكة من المواقع في صورة صفوف وأعمدة، ويتحركان بالتناوب؛ حيث يقوم اللاعب في كل حركة بوصل

موقعين من مواقعه بجسر طوله وحدة واحدة. يوضح الشكل أدناه عن اليسار، اللوح الذي عليه مواقع اللاعبين، حيث المواقع الغامقة هي مواقع اللاعب رقم 1، أما المواقع المجوفة فهي مواقع اللاعب رقم 2. ويكون هدف اللاعب رقم واحد إيجاد (بناء) مسار من الجسور من العمود الموجود على اليسار إلى العمود الموجود عن اليمين، في حين يهدف اللاعب رقم 2 إلى إيجاد مسار من الجسور من الصف العلوي إلى الصف السفلي. لاحظ عدم تقاطع هذه الجسور في هذه اللعبة. لذا، فإن كل جسر يبنى من قبل أحد اللاعبين يمنع حركة اللاعب الآخر، وبما أن كل مسار من اليسار إلى اليمين يقطع كل مسار من الأعلى إلى الأسفل، فهذا يشير إلى عدم فوز كلا اللاعبين معًا. ولاحظ أيضًا أن تشكيلة المواقع على لوح اللعب متماثلة بالنسبة إلى اللاعبَيْن.

لاحظ عدم وجود استراتيجية للفوز لدى اللاعب رقم 2، وذلك لأنه إنْ وَجد مثل هذه الاستراتيجية، فإن اللاعب رقم 1 سيبدأ بأي حركة، ومن ثم يتبع استراتيجية اللاعب رقم 2. وإذا كانت استراتيجية اللاعب رقم 2 تتضمن القيام بحركة تعطي جسرًا قد عُمل سابقًا، فإن اللاعب رقم 1 سيقوم بحركة اختيارية. لذا، فإن اللاعب رقم 1 يستطيع أن يفوز قبل اللاعب رقم 2 من خلال تتبع استراتيجيته.

إذا استمرّ اللعب بحيث لم يتبقَ أيّ مجال لأي حركة جديدة، فإن أحد اللاعبَيْن يجب أن يفوز (التمرين 70). وبسبب عدم وجود استراتيجية للفوز لدى اللاعب رقم 2، فإنّ هذا يعني وجود استراتيجية فوز لدى اللاعب رقم 1. وسنعطي استراتيجية واضحة تمكن اللاعب رقم 1 من الفوز. (يتحقق هذا التعليل بوجه عام للماترويدات. انظر النظرية 46.2.8).



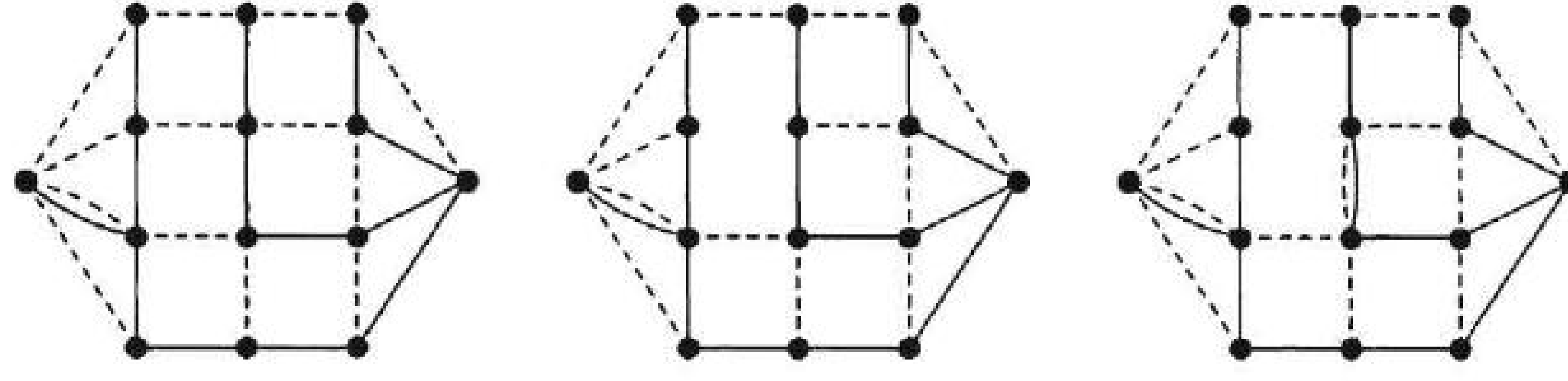
17.1.2. نظرية : توجد استراتيجية فوز لدى اللاعب رقم 1 في لعبة التّجْسير.

الإثبات: نُكوّن بيانًا يمثل التوصيلات الممكنة التي تخصّ اللاعب رقم 1. لاحظ أن المواقع على الطرف نفسه تكون متكافئة. لذا، نجمع المواقع (الغامقة) من العمودين الموجودين في الطرفين، ونمثل مواقع كل طرف برأس واحد فقط، ونضيف ضلعًا مساعدًا يربط بين الطرفين. والبيان الموجود عن اليمين في الرسم أعلاه يمثل هذه الحالة، ويوضّح أن هذا البيان يتكون من اتحاد شجرتين مولدتين ومنفصلتين ضلعيًّا، وسنحذف الوصف التقني لهاتين الشجرتين.

لاحظ أن الشجرتين معًا تحتويان على مسارات منفصلة ضلعيًّا تصل بين الرؤوس المستهدفة، وبما أن الضلع المساعد هو ضلع وهمي وغير موجود، فإننا نتظاهر بأن اللاعب رقم 2 بدأ اللعب وأخذ هذا الضلع. إن أي حركة من قبل اللاعب رقم 2 تقطع ضلعًا واحدًا e في البيان، وبذلك يكون هذا الضلع غير موجود، وهذا يفصل إحدى الشجرتين لمركبتين. وباستخدام الفرضية 6.1.2، فإن الضلع e' من الشجرة الثانية يوجد ويعيد ترابط الشجرة الأولى. وعلى اللاعب الأول أن يختار هذا الضلع ويجعله غير قابل للقطع. لذا، نضع e' في كلتا الشجرتين المولدتين (ضلع مكرر). وبعد حذف e، وجعل e' ضلعًا مكررًا بحيث إن كل شجرة تحوي نسخة من e'، نجد أن بياننا ما زال يتكوّن من شجرتين مولدتين منفصلتين ضلعيًّا، وبما أن اللاعب رقم 2 لا يستطيع قطع ضلع مكرر، فإنه لا يستطيع قطع أيّ من الشجرتين، لذا فإن اللاعب رقم 1 يستطيع القيام بالدفاع. والشكل التالي يوضّح هذه الاستراتيجية.

تنتهي العملية أعلاه بفوز اللاعب رقم 1، أو عندما لا يبقى أيّ ضلع غير مكرر يمكن قطعه، وفي الحالة الأخيرة، نجد أن الأضلاع المتبقية أضلاع مكررة (مرتين فقط)، وتشكل شجرة مولدة مكونة من الجسور التي بناها اللاعب رقم

1. لذا، نجد في الحالات جميعها أنّ اللاعب رقم 1 بنى مسارًا يربط بين الرؤوس المستهدفة. ■



اللاعب رقم 1 يعيد الربط   اللاعب رقم 2 يقطع   اللاعب رقم 1 يعيد الربط

تمـارين (Exercise)

2.1.1. (−). لكل k، عدد صفوف التشاكل للأشجار التي درجتها القصوى تساوي k ولها ستة رؤوس على الأكثر. نفّذ العمل نفسه للأشجار التي قطرها k. (وضّح سبب عدم وجود أشجار غير الأشجار الموجودة في القائمة التي عملتها).

2.1.2. (−). افترض أنّ G بيان:

a) أثبت أن G شجرة إذا وفقط إذا كان مترابطًا، وكل ضلع فيه هو ضلع قطع (فصل).

b) أثبت أن G شجرة إذا وفقط إذا أُنتجت حلقة واحدة فقط بسبب إضافة أيّ ضلع جديد يربط بين رأسين من $V(G)$.

2.1.3. (−). أثبت أنّ البيان يكون شجرة إذا وفقط إذا خلا من العرى، وكان له شجرة مولدة واحدة فقط.

2.1.4. (−). أثبت العبارة الآتية أو انقضها. كل بيان عدد أضلاعه أقلّ من عدد رؤوسه يحوي شجرة بوصفها مركبة من مركباته.

2.1.5. (−). افترض أن G بيان. أثبت أن أكبر بيان جزئي لاحلقي من G يتألف من شجرة مولدة من كل مركبة من مركباته.

2.1.6. (−). افترض أن T شجرة، معدل درجة رؤوسها يساوي a. حَدِّدْ $n(T)$ بدلالة a.

2.1.7. (−). أثبت أن البيان الذي له n من الرؤوس، وm من الأضلاع يحوي $m - n + 1$ حلقة على الأقل.

2.1.8. (−). أثبت أن كلّ خاصية من الخواص المعطاة فيما يأتي تعطي توصيفًا مميزًا للغابات:

a) كل بيان جزئي مستحدث يحوي رأسًا درجته 1 على الأكثر.

b) كل بيان جزئي مترابط يكون بيانًا جزئيًّا مُستحدثًا (مُحدَّث).

c) عدد المركبات يساوي عدد الرؤوس ناقصًا عدد الأضلاع.

2.1.9. (−). لكل $2 \leq k \leq n - 1$، أثبت أنه توجد شجرة مولدة قطرها k للبيان الذي له n من الرؤوس الناتج من إضافة رأس واحد مجاور لكل رأس من رؤوس P_{n-1}.

2.1.10. (−). افترض أن u,v رأسان في بيان بسيط مترابط له n من الرؤوس. أثبت أنه إذا كانت $d(u,v)>2$، فإن $d(u)+d(v) \leq n+1-d(u,v)$. جد أمثلة تبيّن أن هذه العلاقة تفشل عندما $n \geq 3$ و $d(u,v) \leq 2$.

2.1.11. (−). افترض أن x و y رأسان متجاوران في بيان G، أثبت أن:

$|d_G(x, z) - d_G(y,z)| \leq 1$ لكل $z \in V(G)$.

2.1.12. (−). احسب القطر ونصفه للبيان ثنائي الفرع $K_{m,n}$.

2.1.13. (−). أثبت أنّ لكل بيان قطره d مجموعةً مستقلة عدد رؤوسها يساوي $\lceil \frac{(d+1)}{2} \rceil$ على الأقل.

2.1.14. (−). افترض أنّ معالجات الحاسوب سُمّيت بدلالة مرتبات ثنائية (بمعنى أن كل مدخلة إما 0 أو 1)

عدد إحداثياتها k، وافترض أنه يمكن الربط بين هذه المرتبات إذا كانت أسماؤها متجاورة في المكعب Q_K، وافترض أيضًا أن المعالج u يريد أن يرسل رسالة إلى المعالج v. بيّن كيف يستطيع u إيجاد الخطوة الأولى على أقصر مسار إلى v.

15.1.2. (–). افترض أن G بيان بسيط قطره يساوي 4 على الأقل. أثبت أن قطر $\overline{G}$ يساوي 2 على الأكثر. (مساعدة: استخدم النظرية 11.1.2.)

16.1.2. (–). افترض أن G بيان بسيط. عرف G' ليكون البيان البسيط الذي له رؤوس G نفسها، بحيث إن $x\,y \in E(G')$ إذا وفقط إذا كان كل من x و y متجاورين في G، أو أن لهما جارًا مشتركًا في G، أثبت أن: $\text{diam}\,(G') = \lceil \text{diam}(G)/2 \rceil$.

• • • • •

17.1.2. (!). في النظرية 4.1.2. أثبت أن: $C \Rightarrow \{A,B\}$ من خلال إضافة أضلاع تربط بين المركبات.

18.1.2. (!). أثبت أن كلّ شجرة درجتها القصوى تساوي $\Delta > 1$، تمتلك Δ من الرؤوس التي درجة كل منها تساوي 1. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن من خلال إيجاد شجرة على n من الرؤوس ولها بالضبط Δ من الأوراق لكل Δ، n حيث $n > \Delta \geq 2$.

19.1.2. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كانت n_i ترمز إلى عدد الرؤوس التي درجتها i في شجرة T، عندها تكون $\Sigma i n_i$، معتمدة على عدد رؤوس T فقط.

20.1.2. إن الهيدروكربون المشبع جُزَيء مؤلف من k من ذرات الكربون، و l من ذرّات الهيدروجين، وذلك بإضافة روابط بين الذرّات حيث تكون كل ذرّة كربون موجودة في أربع روابط، وكل ذرّة هيدروجين في رابطة واحدة، وأن أيّ متتالية روابط لا تشكل حلقة من الذرّات. أثبت أن $l = 2k + 2$ ($Bondy - Murty$ [1976,827]).

21.1.2. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، بحيث يوجد له تفكيك إلى k شجرة مولدة، وافترض أن $\Delta(G) = \delta(G) + 1$. أثبت استحالة هذا الأمر إذا كانت $2k \geq n$. أما إذا كانت $2k < n$، فحدّد متتالية درجات G بدلالة كلّ من n و k.

22.1.2. افترض أن T شجرة لها n من الرؤوس، وتحوي رأسًا واحدًا درجته i لكل $2 \leq i \leq k$، أما باقي الرؤوس التي عددها $n - k + 1$ فتمثل أوراقًا. حدّد n بدلالة k.

23.1.2. افترض أن T شجرة، درجة كل رأس من رؤوسها إما 1 أو k، حدّد القيم الممكنة لـ $n(T)$.

24.1.2. أثبت أنه توجد لكل شجرة غير تافهة مجموعتان مستقلتان كبيرتان من الرؤوس على الأقل. ويوجد كذلك مجموعتان فقط إذا كانت الشجرة نجمة (لاحظ: قيمة عظمى $\neq$ أكبر ما يمكن بالنسبة إلى الاحتواء).

25.1.2. من بين الأشجار التي عدد رؤوسها n، أثبت أن النجمة تمتلك أكبر عدد من المجموعات المستقلة.

26.1.2 (!). لكل $n \geq 3$، افترض أن G بيان له n من الرؤوس ،بحيث إنه إذا حذفنا أيّ رأس من رؤوس G، فإننا نحصل على شجرة. حدّد $e(G)$، واستخدم ذلك لتحديد G نفسه.

27.1.2 (!). افترض أن $d_1, \ldots, d_n$ هي أعداد صحيحة حيث $n \geq 2$. أثبت أنه توجد شجرة درجات رؤوسها هي: $d_1, \ldots, d_n$ إذا وفقط إذا كان $\Sigma d_i = 2n\text{-}2$.

28.1.2. افترض أن $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ مجموعة أعداد صحيحة غير سالبة. أثبت أنه يوجد (بيان مترابط بحيث يُسْمح للعرى والأضلاع المكررة) متتالية درجات رؤوسه هي $d_1, \ldots, d_n$ إذا وفقط إذا كان Σd_i زوجيًّا، $d_n \geq 1$ و $\Sigma\, d_i \geq 2n\text{-}2$. (مساعدة: خذ في الحسبان بيانًا يحقق الخاصية (تحقيقًا) عدد مركباته أقل ما يمكن). هل النتيجة صحيحة للبيانات البسيطة؟

29.1.2. (!) . كل شجرة تمثل بيانًا ثنائي الفرع. أثبت أنه توجد في كل شجرة ورقة في فرعها الذي عدد رؤوسه أكبر (وفي كلا الفرعين إذا تساوى فيهما عدد الرؤوس).

30.1.2. افترض أن T شجرة يتحقق فيها أن درجة كل رأس يجاور ورقة تساوي 3 على الأقل. أثبت وجود رأسين في T لهما جار مشترك.

31.1.2. أثبت أنّ البيان البسيط المترابط الذي له رأسان فقط ليسا رأسي قطع (فصل) هو مسار.

32.1.2. أثبت أن الضلع e في البيان المترابط G يكون ضلع قطع (فصل) إذا وفقط إذا كان e ينتمي إلى كل شجرة مولدة. و أثبت أن e يكون أنشوطة إذا وفقط كان لا ينتمي إلى أي شجرة مولدة.

33.1.2. (!). افترض أن G بيان مترابط له n من الرؤوس. أثبت أنه يمتلك حلقة واحدة إذا وفقط إذا كان عدد أضلاعه يساوي n بالضبط.

34.1.2. (!). افترض أنّ T شجرة لها k ضلعًا، وأن G بيان بسيط عدد رؤوسه n، وعدد أضلاعه أكبر من $n(k-1) - \binom{k}{2}$. استخدم قضية 8.1.2 لبرهان أن $T \subseteq G$ إذا كان $n > k$.

35.1.2. (!). افترض أن T شجرة. أثبت أن درجة كل رأس من رؤوسها تكون فردية إذا وفقط إذا تحقق أنه لكل $e \in E(T)$ تكون رتبة كل مركبة من مركبتي T-e فردية.

36.1.2. (!). افترض أنّ T شجرة ذات رتبة زوجية. أثبت أنه يوجد لها بيان جزئي مولد واحد فقط، بحيث إن درجة كل رأس من رؤوسه تكون فردية.

37.1.2. (!). افترض أنّ T و T' شجرتان مولدتان للبيان المترابط G، إذا كان $e \in E(T) - E(T')$، فأثبت أنه يوجد ضلع e' في $E(T') - E(T)$ بحيث إن كلًّا من $T' + e - e'$ و $T - e + e'$ تكون شجرة مولدة للبيان G.

38.1.2. افترض أنّ T و T' شجرتان لهما الرؤوس نفسها، وأن $d_T(v) = d'_T(v)$ لكل رأس v. أثبت أنه يمكن الحصول على T' من T باستخدام مفتاح ثنائي (التعريف 32.3.1)، وبذلك يكون كل بيان نحصل عليه خلال عملنا هذا هو شجرة أيضًا.

39.1.2. (!). افترض أنّ G شجرة فيها $2k$ رأسًا درجة كل منها فردية. أثبت أنه يمكن تفكيك (تحليل) G إلى k من المسارات. (مساعدة: أثبت النتيجة الأقوى وهي أن الادعاء أعلاه يتحقق في الغابات جميعها).

40.1.2. (!). افترض أن G شجرة لها k من الأوراق. أثبت أنها اتحاد لمسارات $P_1, \ldots, P_{\lceil k/2 \rceil}$ ، بحيث $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ لكل $i \neq j$ (Ando – Kaneko – Gervacio [1996]).

41.1.2. لكل $n \geq 4$، افترض أن G بيان بسيط عدد رؤوسه n، وعدد أضلاعه $e(G) \geq 2n - 3$.. أثبت أنه توجد لـ G حلقتان متساويتان في الطول (لقد أكدّ كلّ من chen و Lehel و Jacbson و shreve هذه النتيجة في العام [1998]).

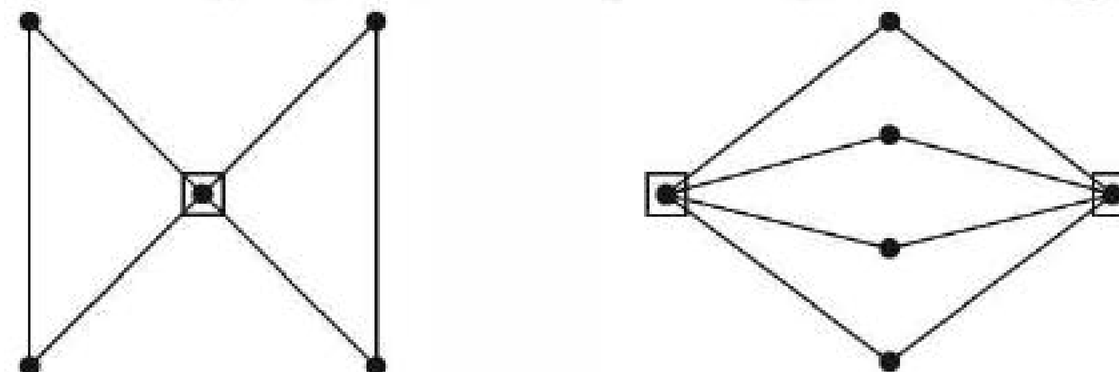
42.1.2. افترض أن G بيان أويلري مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل. نقول: إن الرأس v الموجود في G قابل للتمديد إذا أمكن تمديد كل مسرب يبدأ في G إلى حلقة أويلرية في G. فعلى سبيل المثال في البيانات المعطاة في الشكل أدناه، نجد أن الرؤوس المعلّمة هي الرؤوس القابلة للتمدد فقط. أثبت العبارات الآتية المتعلقة بـ G (مأخوذ من Chartrand – Lesniak [1986,p61]).

a) الرأس $v \in V(G)$ قابل للتمدّد إذا وفقط إذا كان $G - v$ هو غابة (Ore [1951م]).

b) إذا كان v قابلًا للتمدّد، فإن $d(v) = \Delta(G)$ (Bäbler [1953م]).

c) رؤوس G كلّها تكون قابلة للتمدد إذا وفقط إذا كان G حلقة.

d) إذا لم يكن G حلقة فإنه يوجد له على الأكثر رأسان قابلان للتمدد.

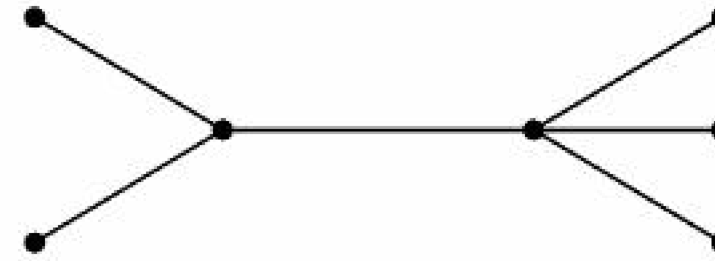


43.1.2. افترض أن a رأس في بيان مترابط G، أثبت أنه يمكن أن نختار أقصر المسارات من u إلى باقي رؤوس G ، بحيث يكوِّنُ اتحادُ هذه المسارات شجرةً.

44.1.2. (!). أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا وُجد لبيان بسيط قطره 2 رأسُ فصل، فيوجد لمتممة هذا البيان رأسٌ معزول.

45.1.2. افترض أن G بيان له أشجار مولدة قطرها 2، وأشجار مولدة أخرى قطرها l. إذا كانت $2 < k < l$ فأثبت أنه يوجد لـ G أيضًا شجرة مولدة قطرها k، (Galvin).

46.1.2. (!). أثبت أن الأشجار التي قطرها 3 هي النجوم الثنائية (نعني بالنجم الثنائي: الشجرة التي لها رأسان مركزيان وباقي رؤوسها أوراق)، احسب صفوف تشاكل النجوم الثنائية التي لها n من الرؤوس.



47.1.2. (!). القطر ونصف القطر:

a) أثبت أن دالة المسافة بين أي رأسين $d(u, v)$ تحقق المتباينة المثلثية $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

b) استخدم فرع a لإثبات أن $diam\ G \leq 2rad\ G$ لكل بيان G.

c) للأعداد الصحيحة الموجبة r و d جميعها التي تحقق أن $r \leq d \leq 2r$ أوجد بيانًا بسيطًا نصف قطره r وقطره d. (مساعدة: جد بيانًا مناسبًا له حلقة واحدة).

48.1.2. (!). إذا كانت $n \geq 4$، فأثبت أن أقل عدد من الأضلاع لبيان له n من الرؤوس وقطره 2 وأكبر درجة من درجات رؤوسه $n - 2$ هو $2n - 4$.

49.1.2. افترض أن G بيان بسيط. أثبت أنه إذا كان $\text{rad}\ G \geq 3$، فإن $\text{rad}\ \overline{G} \leq 2$.

50.1.2. نصف القطر والاختلاف المركزي.

a) أثبت أن الاختلافات المركزية للرؤوس المتجاورة تختلف عن بعضها بمقدار 1 على الأكثر.

b) بدلالة نصف القطر r، حدد أكبر مسافة ممكنة بين رأس اختلافه المركزي $r + 1$ ومركز G (مساعدة: استخدم بيانًا فيه حلقة واحدة فقط).

51.1.2. افترض أن x و y جاران مختلفان للرأس v في بيان G.

a) أثبت أنه إذا كان G شجرة، فإن $2\in(v) \leq \in(x) + \in(y)$.

b) حدّد أصغر بيان تفشل فيه هذه المتباينة.

52.1.2. افترض أن x رأس في بيان G، وافترض أن $\in(x) > rad\ G$:

a) أثبت أنه إذا كان G شجرة، فإنه يوجد جار للرأس x اختلافه المركزي $k - 1$.

b) أثبت أن فرع a لا يتحقق للبيانات جميعها وذلك من خلال إيجاد (بناء) بيان نصف قطره r حيث r عدد زوجي يساوي 4 على الأقل، بحيث إن الاختلاف المركزي للرأس x في هذا البيان يساوي $r + 2$، ولا يوجد له جار اختلافه المركزي يساوي $r + 1$. (مساعدة: استخدم بيانًا له حلقة واحدة فقط).

53.1.2. أثبت أن مركز البيان يمكن أن يكون غير مترابط، ويمكن أن يكون له مركبات متباعدة بالقدر الذي نريد من خلال إيجاد (بناء) بيان يتألف مركزه من رأسين المسافة بينهما تساوي k.

54.1.2. مراكز الأشجار. افترض أن T شجرة:

a) أعط برهانًا غير استقرائي تبيّن فيه أنّ مركز T رأس أو ضلع.

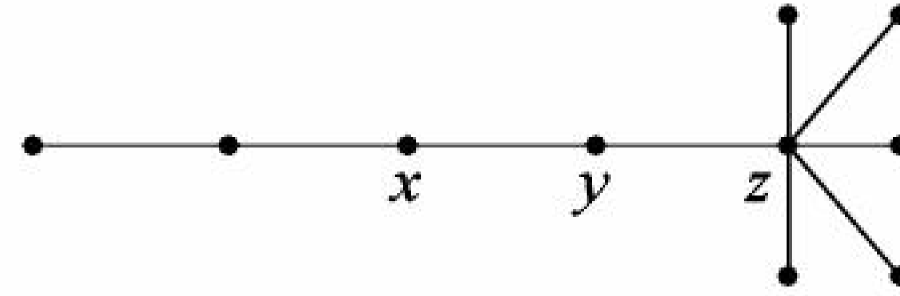
b) أثبت أن مركز T يكون رأسًا واحدًا إذا وفقط إذا كان $\text{diam}T = 2\text{rad}\ T$.

c) استخدم فرع a لتثبت أنه إذا كان $n(T)$ عددًا فرديًّا، فإن كلّ تشاكل ذاتي لـ T يثبت أحد رؤوس T (يأخذ رأسًا من الرؤوس لنفسه).

55.1.2. افترض أن $x \in V(G)$، وأن $s(x) = \sum_{v\in V(G)} d(x,v)$ ، نعرف مركز كتلة (barycenter) G على أنه البيان الجزئي المحدث من مجموعة الرؤوس التي تعطي قيمة صغرى لـ $s(x)$ (تسمى هذه المجموعة أيضًا بالوسيط (median)):

a) أثبت أن مركز كتلة أي شجرة هو رأس أو ضلع (مساعدة: ادرس $s(u) - s(v)$ في الحالة التي يكون فيها u و v متجاورين)، (Jordan [1869]).

b) حدّد أكبر مسافة بين مركزي الشجرة التي قطرها d وكتلتها. (**مثال:** في الشجرة المرسومة أدناه، المركز هو الضلع xy، ومركز الكتلة هو Z فقط، والمسافة بينهما تساوي 1).



56.1.2. افترض أن T شجرة. أثبت أنّ لها رأسًا هو v، بحيث إن لمركبة T-e التي تحوي v $\lceil \frac{n(T)}{2} \rceil$ رأسًا على الأقل، وذلك لكل $e \in E(T)$، ثمّ أثبت أن الرأس v إما أن يكون وحيدًا، أو أن يكون له رأسان متجاوران يحققان هذه الخاصية.

57.1.2. افترض أن $n_1, \dots, n_k$ أعداد صحيحة موجبة مجموعها يساوي $n - 1$.

a) بحساب عدد الأضلاع في البيانات التامة، أثبت أن $\sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{2} \le \binom{n-1}{2}$.

b) استخدم فرع a لبرهان أن $\sum_{v\in V(T)} d(u,v) \le \binom{n}{2}$ عندما يكون u رأسًا لشجرة T. (مساعدة: استخدم الاستقراء القوي على عدد الرؤوس).

58.1.2. (+) افترض أن S و T شجرتان، أوراقهما $\{x_1, \dots, x_k\}$ و $\{y_1, \dots, y_k\}$ على الترتيب. وافترض أن $d_S(x_i,x_j) = d_T(y_i,y_j)$ لكل زوج i, j، أثبت أن S و T متشاكلتان (Smolenskii [1962]).

59.1.2. (!). افترض أن T شجرة لها n من الرؤوس، و k من الأوراق، ودرجتها القصوى تساوي k.

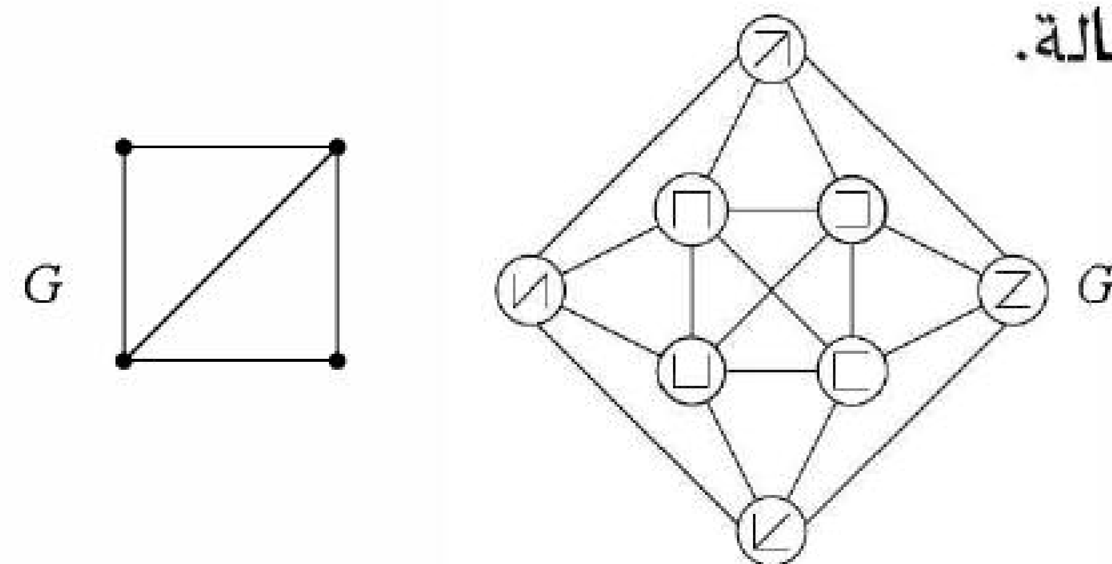
a) أثبت أن G هي اتحاد k من المسارات التي لها نقطة طرفية مشتركة.

b) حدّد أكبر وأصغر قيمة ممكنة لقطر (diam G).

60.1.2. افترض أن G بيان قطره d، ودرجته القصوى k، أثبت أن $n(G) \le 1+[(k-1)^d - 1]\ k/(k-2)$ (تعليق: المساواة تتحقق لبيان بيترسون).

61.1.2. (+) افترض أن G بيان رتبته أصغر ما يمكن من بين البيانات المنتظمة من الدرجة k التي خصرها يساوي g على الأقل (التمرين 16.3.1 يضمن وجود مثل هذه البيانات). أثبت أن قطر G يساوي g على الأكثر. (مساعدة: إذا كانت $d_G(x, y) > g$، فعدّل G لتحصل على بيان أصغر منتظم من الدرجة k خصره يساوي g على الأقل.(Erdős – sachs [1963]).

62.1.2. (!) افترض أن G بيان مترابط له n من الرؤوس، عرّف بيانًا جديدًا G' من G حيث G' يحتوي على رأس واحد من كل شجرة مولدة للبيان G، وبحيث تكون الرؤوس في G' متجاورة إذا وفقط إذا وجد $n(G)$-2 ضلع مشترك بين الأشجار المرتبطة بهذه الرؤوس، أثبت أن G' يكون مترابطا، ثم حدِّد قطر G'. الشكل أدناه يعطي مثالًا على هذه الحالة.



63.1.2. (!): افترض أن G بيان له n من الرؤوس، و $n + 1$ من الأضلاع. أثبت أن خصر G أقل من أو يساويه. $\lfloor (2n+2)/3 \rfloor$ ثم جد مثالاً (بيانًا) يحقق هذا الحدّ لـ n جميعها.

64.1.2. (!): أثبت أن $2k + 1$ هي أكبر خصر لبيان من البيانات التي قطرها k جميعها، وأنها ليست أشجارًا. (مساعدة: أثبت أنه إذا وُجد في G حلقة طولها $2k + 2$ على الأقل، فيوجد في G حلقة أقصر).

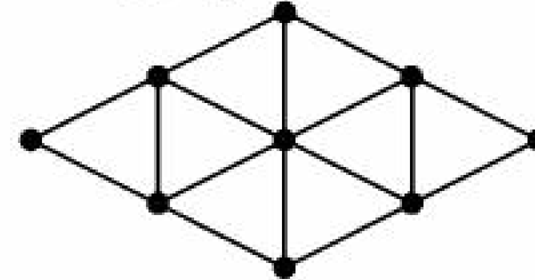
65.1.2. (+): افترض أن G بيان مترابط له n من الرؤوس ودرجته الصغرى تساوي k، حيث $k \geq 2$ و $n\text{-}2 \geq 2(k+1)$. أثبت أن $diam\ G \leq 3[(n-2)/(k+1)] - 1$. وفي الحالة التي تكون فيها $k \geq 2$ و $(n-2)/(k+1)$ عددًا صحيحًا أكبر من 1، جد بيانًا يتحقق فيه هذا الحدّ، ويكون: $diam\ G = 3[(n\text{-}2)/(k+1)]\text{-}1$، (Moon [1965b]).

66.1.2. افترض أن $F_1, \ldots, F_m$ غابات اتحادها يساوي G، وأثبت أن $m \geq \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{e(H)}{n(H)-1} \right\rceil$

(تعليق: لقد أثبت كلّ من ناش ووليامز [1964] وكذلك إدموندز [1965b] إمكانية تحقيق هذا الحدّ دائمًا – النتيجة 57.2.8).

67.1.2. أثبت أنّ العبارة الآتية تمثل الشرط الضروري لوجود k من الأشجار المولدة لبيان G، بحيث تكون هذه الأشجار منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا: لكل تجزئة لرؤوس G إلى r مجموعة، وجد على الأقل $k\ (r-1)$ ضلعًا في G بحيث تقع النقاط الطرفية لهذه الأضلاع في مجموعات مختلفة من مجموعات التجزئة. (تعليق: النتيجة 59.2.8 توضح أن هذا الشرط كافٍ أيضًا (Edmonds [1965c]، Nash – Williams [1961]، Tutte [1961a]) .

68.1.2. تأمل البيان الموضّح في الشكل أدناه. هل يمكن تفكيك هذا البيان إلى أشجار مولدة منفصلة ضلعيًّا؟ وهل يمكن تفكيكه إلى أشجار مولدة منفصلة ضلعيًّا ومتشاكلة؟



69.1.2. (*) خذ في الحسبان البيان الموجود قبل النظرية 17.1.2 الذي له، 12 ضلعًا عموديًّا وستة عشر ضلعًا أفقيًّا أو مائلة. افترض أن $g_{i,j}$ هي الضلع رقم i من الأعلى في العمود رقم j من الأضلاع العمودية. وافترض أيضًا أن $h_{i,j}$ تمثل الضلع رقم j من اليسار في الصف رقم i من الأضلاع الأفقية أو القطرية، وافترض كذلك أن اللاعب الأول يتبع الاستراتيجية الموجودة في النظرية 17.1.2، وأخذ الموقع $h_{1,1}$ أولًا. عندها، يحذف اللاعب الثاني الموقع $g_{2,2}$، في حين يأخذ اللاعب الأول الموقع $h_{2,3}$. بعد ذلك، يقوم اللاعب الثاني بحذف الموقع $v_{3,2}$، ويأخذ اللاعب الأول الموقع $h_{4,2}$. في هذه المرحلة، ارسم الشجرتين المولدتين. إذا علمت أن اللاعب الثاني يحذف بعد ذلك الموقع $g_{2,1}$، فاعمل قائمة بالحركات المتوافرة للاعب الأول من خلال هذه الاستراتيجية (Pritikin).

70.1.2. (*) أثبت أن لعبة التّجسير لا يمكن أن تنتهي بالتعادل بغض النظر عن الكيفية التي تتم بها الحركات. أي أثبت أنه في الحالة التي يتعذر فيها إجراء المزيد من الحركات، فإنّ أحد اللاعبَيْن يكون قد حصل على مسار يربط بين أهدافه.

71.1.2. (*) افترض أن اللاعبَيْن غيّرا قواعد هذه اللعبة؛ حيث يستطيع اللاعب الخاسر عمل مسار يربط بين طرفين صديقين. في هذه الحالة، يمنع الربط من خلال بناء جسر بين مواقع طرفية، أو من خلال ربط مواقع مرتبطة أصلا بمسار. أثبت أنه يوجد لدى اللاعب الثاني استراتيجية تمنع اللاعب الأول من الفوز، أي أنها ترغم اللاعب الأول على الخسارة. (مساعدة: استخدم الفرضية 7.1.2. بدلاً من الفرضية 6.1.2. (Pritikin).

72.1.2. (+): أثبت أنه إذا كانت $G_1, \ldots, G_k$ أشجارًا جزئية للشجرة G بحيث تتقاطع هذه الأشجار زوجًا زوجًا، فإنه يوجد لـ G رأس ينتمي إلى كل من $G_1, \ldots, G_k$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على k).

(تعليق: تسمى هذه النتيجة خاصية هيلي للأشجار).

73.1.2. (+): أثبت أن البيان البسيط G يكون غابة إذا وفقط إذا تحقق أنه يوجد لكل عائلة من المسارات المتقاطعة زوجًا زوجًا في G رأسٌ مشترك بين هذه المسارات. (مساعدة: لبرهان أن الشرط كافٍ؛ استخدم الاستقراء على حجم عائلة هذه المسارات).

74.1.2. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، و $n - 2$ من الأضلاع. أثبت أنه إما يوجد لـ G رأس معزول، أو أنّه يوجد له مركبتان ليستا أشجارًا خالية من الأضلاع. استخدم هذه النتيجة في إثبات أن G بيان جزئي من $\overline{G}$ عن طريق الاستقراء. (تعليق: الادعاء أعلاه غير صحيح للبيانات جميعها التي لها $n - 1$ من الأضلاع). ([Burns-Schuster [1977]).

75.1.2. (+): أثبت أن كل شجرة على n من الرؤوس (مختلفة عن $k_{1,n-1}$) تكون محتواة في متممتها. (مساعدة: استخدم الاستقراء على n في إثبات النتيجة الأقوى: إذا كانت T شجرة على n من الرؤوس، وبما أن T ليست نجمة، فإن K_n يحوي نسختين منفصلتين ضلعيًّا من T، ويتحقق فيها أن كل نسخة من نسختي أي رأس (حيث هذا الرأس ليس ورقة) من رؤوس T تظهر عند رأس مختلف ومتميز عن الرأس الآخر.

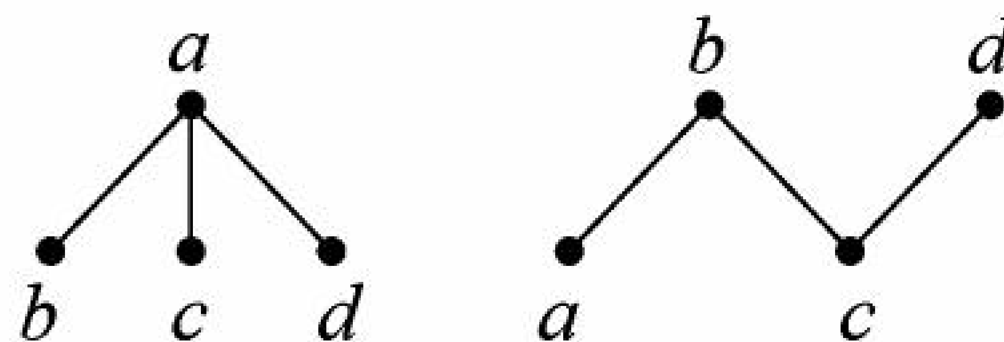
76.1.2. (+) افترض أن S مجموعة فيها n من العناصر. وافترض كذلك أن $\{A_1, \dots, A_n\}$ هي n من المجموعات الجزئية (المختلفة) من S، أثبت أنه يوجد في S عنصر x بحيث تكون المجموعات $A_1 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$ مميزة ومختلفة. (مساعدة: عرف بيانًا رؤوسه $a_1, \dots, a_n$ بحيث إن $a_i \leftrightarrow a_j$ إذا وفقط إذا أمكن الحصول على إحدى $\{A_i, A_j\}$ من الأخرى بإضافة عنصر واحد y. استخدم y بوصفها علامة دالة على الضلع، وأثبت وجود غابة تتألف من ضلع واحد لكل علامة مستخدمة، استخدم هذا للحصول على العنصر المنشود x)، ([Bondy [1972a]).

2.2. الأشجار المولدة والتعداد (spanning trees and Enumeration)

يوجد $2^{\binom{n}{2}}$ بيانًا بسيطًا رؤوسها المجموعة $[n] = \{1,2,\dots,n\}$؛ وذلك لأن كل زوج من هذه الرؤوس يمكن أن يشكّل أو لا يشكّل ضلعًا، والسؤال المطروح هو: كم بيانًا من هذه البيانات شجرة؟ في هذا الجزء من الفصل، سنحلّ مسألة التعداد هذه، وسنجدُ كم شجرة مولدة يوجد لبيان معطى، ثمّ سنعطي العديد من التطبيقات.

تعداد الأشجار

في حالة وجود رأس واحد أو رأسين، فيمكن تشكيل شجرة واحدة فقط، وفي الحالة التي يكون لدينا فيها ثلاثة رؤوس، فإنه يوجد صفّ تشاكل واحد فقط لهذه البيانات، إلا أن مصفوفة التجاور تتحدد من خلال معرفة أيّ من هذه الرؤوس هو المركز. لذا، فهناك ثلاث أشجار لها مجموعة رؤوس المجموعة [3]، أما إذا كانت مجموعة الرؤوس هي المجموعة [4]، فيوجد أربع نجمات و 12 مسارًا، وهذا يعطينا 16 شجرة. إضافة إلى أننا نستطيع إثبات وجود 125 شجرة على مجموعة الرؤوس [5] من خلال دراسة متأنية لهذه المجموعة.



يتبيّن لنا من خلال ما سبق وجود n^{n-2} شجرة على $[n]$ من الرؤوس. وتسمى هذه صيغة كيلي (Cayley's farmula). لقد وجد كل من برفر (Prüfer) وكيركوف (Kirch hoff) وبوليا (Pölya) ورينيي (Renyi) وآخرين برهانًا لهذه الصيغة. في حين كتب مون J.w. moon عام 1970 كتابًا حول تعداد صفوف الأشجار. وسنعطي إثبات

تناظر من خلال إيجاد ارتباط واحد لواحد بين مجموعة الأشجار على $[n]$ من الرؤوس مع مجموعة حجمها معروف.

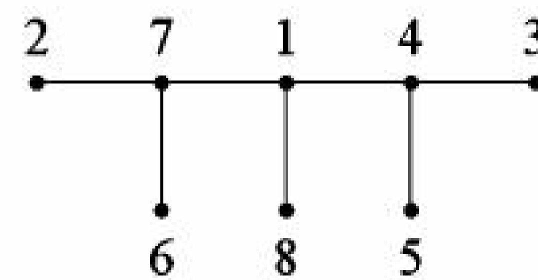
إذا أعطينا مجموعة S من n من الأعداد، فإنه يوجد n^{n-2} طريقة لتشكيل قائمة طولها $n - 2$ مدخلاتها في S، وسنرمز بالرمز S^{n-2} إلى مجموعة هذه القوائم (انظر الملحق A).

سنستخدم S^{n-2} لتشفير الأشجار التي رؤوسها المجموعة S. وتسمى القائمة التي نحصل عليها من الشجرة شفرة برفر (Prüfer code) لهذه الشجرة.

2.2.1. خوارزمية. شفرة برفر (Prüfer code) إنتاج $f(T) = (a_1, \ldots, a_{n-2})$.
المدخلات: شجرة T مجموعة رؤوسها هي S، حيث $S \subseteq \mathbb{N}$.

خطوات مرات الحدوث: عند الخطوة رقم i، احذف أقل ورقة باقية، واجعل a_i تمثل جارًا لهذه الورقة. ■

2.2.2. مثال: بعد إجراء $n - 2$ من العمليات، نجد أن ضلعًا واحدًا فقط من الـ $n - 1$ ضلعًا الأصلية يبقى، وبذلك نكون قد حصلنا على قائمة $f(T)$ طولها $n - 2$ ومدخلاتها في S. وفي الشجرة المرسومة في الشكل أدناه، نجد أن أقل ورقة هي الرأس 2. نحذفها ونسجل 7، وبحذف 3 و 5 وتسجيل 4 في كل مرة، نجد أن أقل ورقة في الشجرة المتبقية على الرؤوس الخمسة الباقية هي 4. لذا، فإن الشفرة التامة هي (744171) أما الرأسان المتبقيان أخيرًا فهما 1 و 8. لاحظ أن ما يتبقى بعد الخطوة الأولى من شفرة برفر هي شفرة برفر للشجرة الجزئية T' التي مجموعة رؤوسها $[8]-\{2\}$.



إذا علمنا مجموعة الرؤوس S، فإنه يمكننا استرجاع الشجرة من الشفرة a، حيث إن الفكرة في ذلك هي استرجاع الأضلاع جميعها، وسنبدأ العمل من الرؤوس المعزولة، ونسترجع في كل خطوة ضلعًا واحدًا، ونضع علامة على رأس واحد فقط. وعندما نكون مستعدين لأخذ a_i في الحسبان، فسيتبقى لدينا $n - i+1$ رأسًا بغير علامة و $n - i -1$ مدخلة من a (من ضمنها a_i). وبناءً عليه، فإن رأسين على الأقل من الرؤوس غير المعلّمة لا يظهران بين المدخلات المتبقية من مدخلات a، ولتكن x هي أقلهما، ثمّ نضيف xa_i إلى قائمة الأضلاع، ونضع علامة على الرأس x. وبتكرار هذه العملية $n - 2$ مرة، نجد أنه يتبقى لدينا رأسان فقط دون علامات. لذا، نصلهما معًا للحصول على الضلع الأخير.

في المثال أعلاه، نعلم أن أقل عنصر من عناصر S غير موجود في الشفرة هو 2. لذا، فإن الضلع الأول الذي يجب إضافته هو الضلع الذي يربط بين الرأسين 2 و 7، ونضع علامة على الرأس 2. الآن، سنجد أن أقل رأس دون علامة من الرؤوس المتبقية هو 3. لذا، نصله مع 4 وهذا هو a_2، وبمتابعة هذه العملية، نستطيع إعادة الأضلاع بالترتيب نفسه الذي تم به حذفها للحصول على a من T.

لاحظ أنه يوجد رأس واحد دون علامة في كل مُركبة من مركبات البيان التي حصلنا عليها خلال العملية السابقة، وهذا صحيح. لذا، فإن إضافة أيّ ضلع له طرفان غير معلّمين تنتج ربطًا بين مركبتين لهذا البيان. وبعد وضع علامة على أحد رأسي الضلع الجديد، نجد أيضًا أنه يوجد لكل مركبة رأس واحد دون علامة.

وبعد إجراء $n - 2$ من الخطوات يتبقى لدينا رأسان فقط دون علامات. لذا، فإنه يوجد لدينا مركبتان. وبإضافة الضلع الأخير، نحصل على بيان مترابط. إذن، نكون قد بنينا بيانًا له n من الرؤوس، و $n - 1$ من الأضلاع، ومن النظرية 2.1.4B، نعلم أنّ هذا البيانَ شجرة، لكننا حتى الآن لم نثبت أن a هي شفرة برفر لهذه الشجرة. ■

2.2.3. نظرية: (صيغة كيلي [1889])، (Cayley's formula [1889]).

إذا كانت S مجموعة جزئية من N حجمها n، فإنه يوجد n^{n-2} شجرة رؤوسها هي المجموعة S.

الإثبات: (prüfer [1918]). لاحظ أن النتيجة صحيحة عندما $n=1$. لذا، افترض أن $n \geq 2$. سنثبت أنّ الخوارزمية 1.2.2. تعرف دالة تناظر f من مجموعة الأشجار التي رؤوسها S إلى المجموعة S^{n-2} التي عناصرها هي قوائم من عناصر S طول كل قائمة منها يساوي $n - 2$. يجب أن نثبت أنه لكل $a = (a_1, ..., a_{n-2})$ في S^{n-2} توجد شجرة واحدة فقط T رؤوسها S وتحقق أن $f(T) = a$، وسنثبت ذلك من خلال الاستقراء على n.

الخطوة الأساس: $n = 2$. في هذه الحالة، توجد شجرة واحدة لها رأسان. لذا، فإن شفرة برفر هي قائمة طولها صفر، وهي القائمة الفريدة التي تحقق الخاصية المطلوبة.

خطوة الاستقراء: $n > 2$. إن حساب $f(T)$ يختزل كل رأس إلى رأس درجته تساوي 1، ويمكن أن يُحذف مثل هذا الرأس خلال عملية الحساب هذه. لذا، فإن كل رأس لا يمثل ورقة في T. يجب أن يظهر في $f(T)$. لاحظ عدم ظهور أي ورقة في $f(T)$ لأن تسجيل ورقة بوصفها جارًا لورقة أخرى، يتطلب اختصار الشجرة إلى رأس واحد فقط. لذا، فإن أوراق T هي عناصر S التي لا تظهر في $f(T)$. إذا كانت $f(T) = a$، فإن أول ورقة تحذف هي أقل عنصر في S غير موجود في a (لنقل إن هذا العنصر هو x)، وأن جار x هو a_1.

لقد أعطينا a في S^{n-2}، ونبحث عن حلول $f(T)=a$ جميعها. لقد بيّنا أن كل شجرة من هذه الأشجار لها x بوصفها ورقة ولها الضلع xa_1. وحذف x يبقي الشجرة التي رؤوسها $S' = S-\{x\}$. وأن شفرة برفر لها هي: $a' = (a_2, ..., a_{n-2})$ وهذه مرتبة عدد عناصرها $n - 3$، وشُكلت من S'.

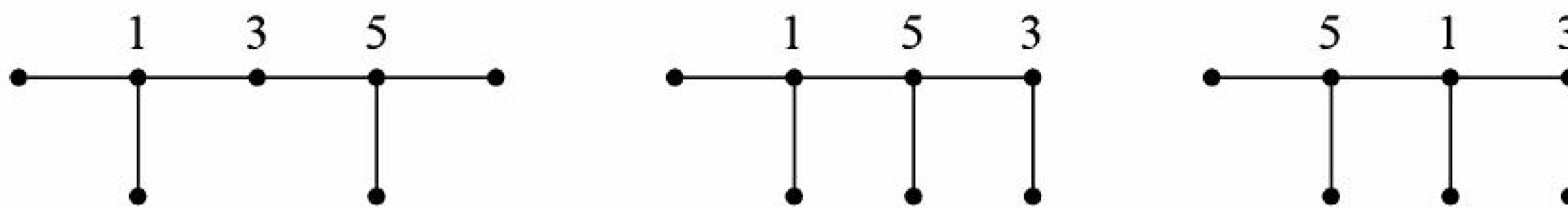
من افتراض الاستقراء، توجد شجرة واحدة فقط T' رؤوسها S'، وشفرة برفر لها هي a'. وبما أنه يمكن الحصول على كل شجرة لها a بوصفها شفرة برفر من خلال إضافة الضلع xa_1 لمثل هذه الشجرة، فإن هناك حلًّا واحدًا للمعادلة $f(T) = a$ على الأكثر. وبالإضافة إلى ذلك، فإننا نعلم أن إضافة xa_1 إلى T' يعطينا شجرة رؤوسها S، ولها a كشفرة برفر. لذا، هناك حل واحد للمعادلة $f(T) = a$ على الأقل. وهذا ينهي الإثبات. ■

لقد حلّ كيلي المسألة جبريًّا، وعدَّ الأشجار من خلال درجات رؤوسها، لاحظ أن دالة التناظر الخاصة ببرفر تُوفّر مثل هذه المعلومات أيضًا.

4.2.2. نتيجة: افترض أن $d_1, ..., d_n$ مجموعة أعداد صحيحة مجموعها يساوي $2n - 2$. ويوجد $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!}$ بالضبط شجرة رؤوسها المجموعة $[n]$ بحيث إن درجة الرأس i هي d_i لكل i.

الإثبات: عند بناء شفرة برفر لشجرة T، نسجل x في كل مرة نحذف فيها جارًا لـ x حتى نحذف x نفسها أو نبقيها من بين آخر رأسين. لذا، فإن كل رأس x يظهر بمقدار $d_T(x) - 1$ مرة في شفرة برفر. واستنادًا إلى ذلك، فإننا نحسب الأشجار التي لرؤوسها هذه الدرجات من خلال حساب قوائم طول كل منها $n - 2$ والتي لها d_i-1 نسخة من i لكل i. إذا حددنا دليلاً سفليًّا لنسخ i جميعها، وذلك لتمييز هذه النسخ، فإننا نبدل $n - 2$ شيئًا مختلفًا، وهذا يعطينا $(n - 2)!$ قائمة، وبما أنه لا يمكن التمييز بين نسخ i، فإننا نكون قد حسبنا كل ترتيبة منشودة بمقدار $\prod(d_i-1)!$ مرة، مرة لكل طريق لترتيب الدليل السفلي على كل نوع من العلامات (label) (يناقش الملحق A جوانب أخرى لمسألة التعداد هذه). ■

5.2.2. مثال: الأشجار ذات الدرجات الثابتة. خذ في الحسبان الأشجار التي رؤوسها $[1,2,3,4,5,6,7]$ حيث درجات هذه الرؤوس هي: $(3،1،2،1،3،1،1)$ على الترتيب. وبالحساب، نجد أن $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!} = 30$؛ إن هذه الأشجار مقترحة أدناه، لاحظ أن الرؤوس $\{1,3,5\}$ فقط هي التي لا تمثل أوراقًا. وبحذف الأوراق، نحصل على شجرة جزئية على الرؤوس $\{1,3,5\}$. وهناك ثلاث من هذه الأشجار الجزئية يُحَدّدُ كلّ منها بحسب الرأس الموجود في الوسط.



ومن أجل إكمال كل شجرة، نضيف عددًا مناسبًا من جيران الأوراق لكل رأس لا يمثل ورقة لإعطاء هذا الرأس الدرجة المنشودة. هناك ستّ طرق لإكمال الشجرة الأولى (اختر من بين الرؤوس الأربعة المتبقية

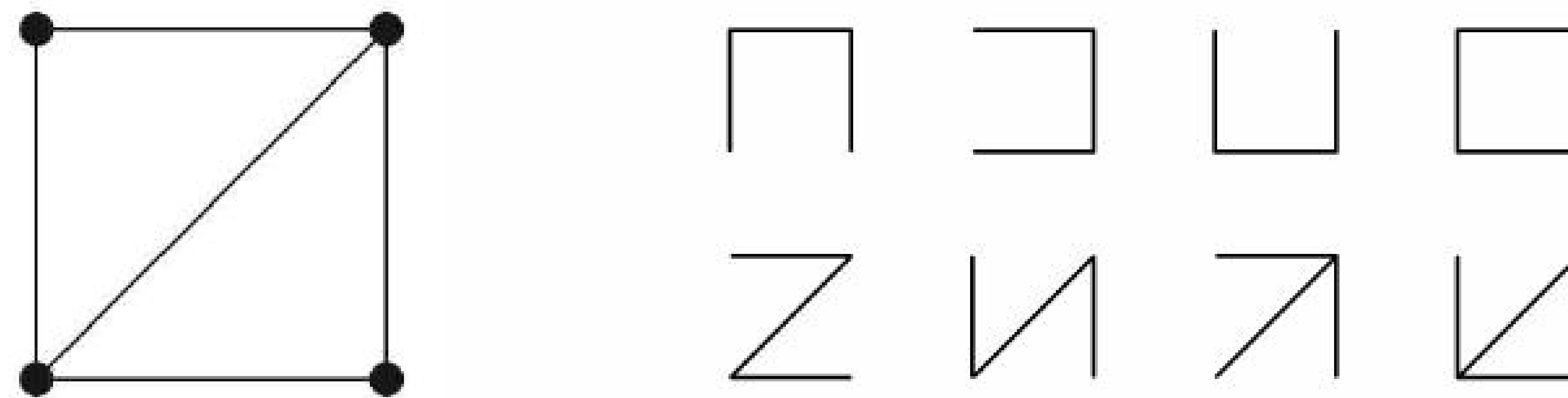
الرأسين المجاورين للرأس 1). وهناك 12 طريقة لإكمال كل شجرة من الأشجار الأخرى (اختر جارَ الرأس 3 من بين الرؤوس الأربعة المتبقية، ثم اختر جارَ الرأس المركزي من الرؤوس الثلاثة المتبقية). ■

الأشجار المولدة في البيانات (Spaning Trees Graphs)

يمكننا توضيح صيغة كيلي بطريقة ثانية، هي: بما أن البيان التام الذي مجموعة رؤوسه $[n]$ يمتلك الأضلاع جميعها التي يمكن أن تُستَخدَمَ لتشكيل الأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$، فإن عدد الأشجار التي لها مجموعة رؤوس محددة حجمها n يساوي عدد الأشجار المولدة في بيان تام على n من الرؤوس.

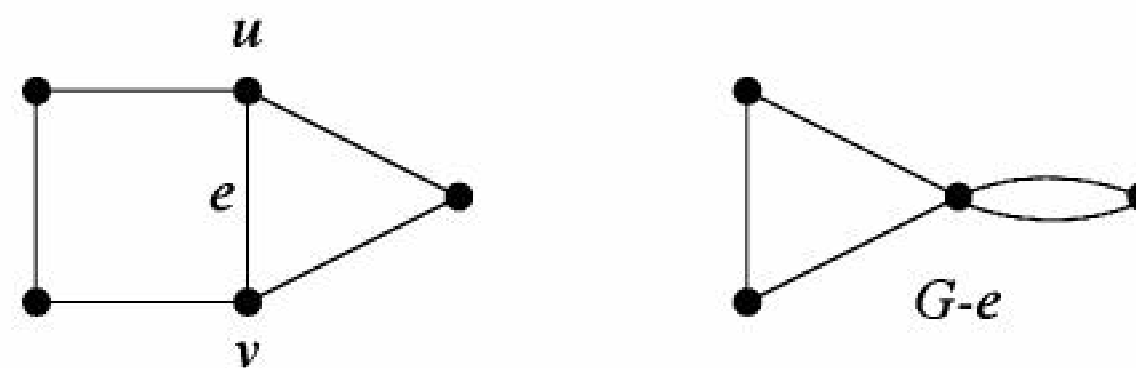
الآن، نأخذ المسألة الأعم المتعلقة بحساب عدد الأشجار المولدة في أي بيان G. عمومًا، لايوجد في G تماثل كالبيان التام. لذا، يستحيل أن نتوقع صيغة بسيطة مثل الصيغة السهلة للبيان k_n، ولكننا نأمل في إيجاد خوارزمية تعطينا طريقًا سهلاً لحساب الجواب لأي بيان G.

6.2.2. مثال: في الشكل أدناه، تجد الطائرة الورقية. لحساب عدد الأشجار المولدة، لاحظ أن أربعًا من هذه الأشجار تمثل المسارات حول الدائرة الخارجية للرسم. إن الأشجار المولدة المتبقية تستخدم الضلع الموجود على القطر، وبما أنه يجب أن تشمل ضلعًا لكل رأس درجته 2، فإننا نحصل على أربع أشجار مولدة إضافية. لذا، فإن العدد الكلي للأشجار المولدة للطائرة الورقية يساوي 8. ■



لقد حسبنا في المثال 6.2.2 الأشجار التي لها ضلع قطري، وكذلك الأشجار التي لا يوجد لها ضلع قطري كل على حدة، وهذا يقترح علينا خطوات مكررة لحساب عدد الأشجار المولدة. ومن الواضح أن الأشجار المولدة للبيان G التي لا تحوي الضلع e هي نفسها الأشجار المولدة للبيان $G - e$. ولكن، كيف يمكن حساب الأشجار المولدة التي تحوي e؟ يستخدم الجواب عملية بسيطة (أولية) على البيانات.

7.2.2. تعريف: افترض أن e ضلع في بيان G بحيث إن u ,v هما رأسا e. نعرّف تقليص e أو انقباضه أو انكماشه على أنه استبدال u و v برأس واحد فقط، حيث إن الأضلاع التي تقع على هذا الرأس هي الأضلاع جميعها ما عدا e الذي كان يقع على u أو على v، لاحظ أن عدد أضلاع البيان الناتج الذي نرمز إليه بالرمز $G.e$ يقل واحدًا عن عدد أضلاع G.



لاحظ أنه عندما نرسم G، فإن الانقباض للضلع e يختزل الضلع إلى نقطة واحدة فقط، إضافة إلى أن عملية انكماش الأضلاع أو انقباضها يمكن أن تولد أضلاعًا مكررة أو عرى. لحساب عدد الأشجار المولدة؛ يجب أن نحافظ على الأضلاع المكررة (انظر المثال 9.2.2). إلا أنه في بعض التطبيقات الأخرى للانكماش يمكن أن تكون الأضلاع المكررة غير ذات صلة، ولكن الحساب بطريقة الخطوات المكررة ينطبق على البيانات جميعها.

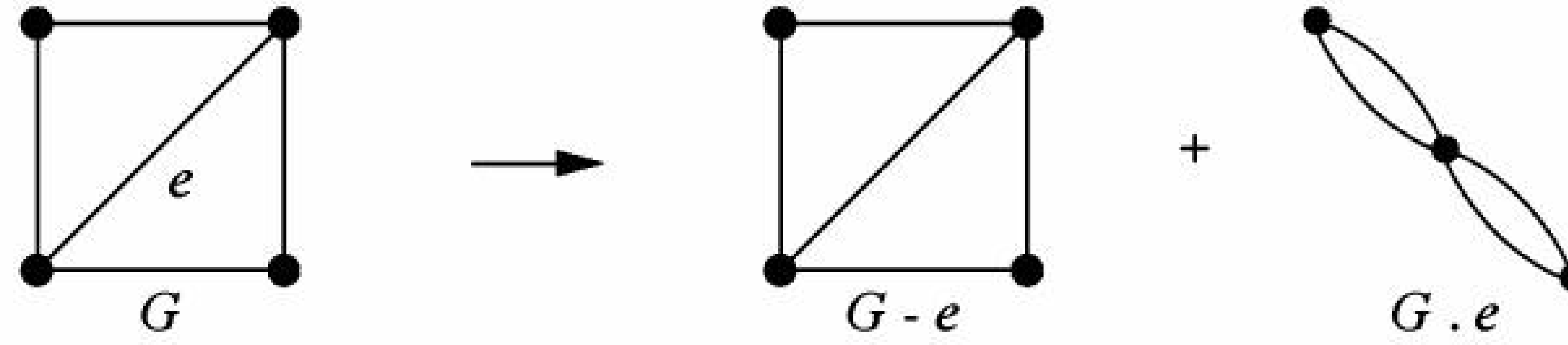
8.2.2. قضية. افترض أن $\tau(G)$ تمثل عدد الأشجار المولدة لبيان G. إذا كان e ضلعًا في $E(G)$ بحيث إنه ليس

أنشوطة، فإن $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G.e)$.

الإثبات: إن الأشجار المولدة للبيان G التي لا تحوي الضلع e هي الأشجار المولدة للبيان $G - e$ تمامًا. ولبرهان أن لـ G $\tau(G.e)$ شجرة مولدة تحوي الضلع e، فإننا سنثبت أن انكماش e يعرف دالة تناظر من مجموعة الأشجار المولدة للبيان G التي تحوي e مع مجموعة الأشجار المولدة للبيان $G.e$.

عندما نعمل انكماشًا للضلع e في شجرة مولدة تحويه، فإننا نحصل على شجرة مولدة للبيان $G.e$؛ لأن البيان الجزئي الناتج هو مولد ومترابط، وله العدد المناسب من الأضلاع. لاحظ أن الأضلاع الأخرى تحافظ على نفسها تحت الانكماش. لذا، لا توجد شجرتان صورتاهما هي صورة الشجرة المولدة نفسها للبيان $G.e$ تحت هذه العملية، وستظهر كل شجرة مولدة لـ $G.e$ بهذه الطريقة أو بهذه الصورة أيضًا؛ لأن إعادة مدّ هذا الرأس إلى الضلع e يعطينا شجرة مولدة للبيان G، وبما أن كل شجرة مولدة للبيان $G.e$ تظهر مرة واحدة فقط، فإن الدالة هي دالة تناظر. ■

9.2.2. مثال: خطوة في عملية الخطوات المكررة. هناك أربع أشجار مولدة لكل بيان من البيانات الموجودة عن اليمين. لذا، فإن الفرضية 8.2.2 تضمن وجود ثماني أشجار مولدة للطائرة الورقية، لاحظ أن الحسابات تفشل في حال عدم وجود الأضلاع المكررة. ■



لاحظ أنه يمكن توفير بعض الوقت والجهد في الحسابات من خلال معرفتنا لعدد الأشجار المولدة $\tau(G)$ لبعض البيانات الخاصة G، وذلك مثل البيانات الموجودة عن اليمين في الشكل أعلاه.

10.2.2. ملاحظة: إذا كان G بيانًا مترابطًا خاليًا من العرى ولا توجد فيه أيّ حلقة طولها 3 على الأقل، فإن $\tau(G)$ تساوي حاصل ضرب عدد تكرارات الأضلاع. لاحظ عدم وجود أي شجرة مولدة للبيان غير المترابط. ولاحظ أيضًا أنه لا يمكن تطبيق عملية الخطوات المكررة الموجودة في الفرضية 8.2.2. عندما يكون الضلع e أنشوطة. فعلى سبيل المثال، توجد شجرة مولدة واحدة للبيان الذي له رأس واحد وأنشوطة واحدة. ولكن حذف الأنشوطة وانقباضها يحسب الشجرة المولدة مرتين، وبما أن وجود العرى لا يؤثر في عدد الأشجار المولدة، فبإمكاننا حذفها أينما ظهرت. ■

تتطلب عمليةُ حساب الأشجار بطريقة الخطوات المكررة وضعَ شرط ابتدائي على البيانات التي تكون أضلاعها جميعها عرًى، وهو وجود شجرة مولدة واحدة لها في حال وجود رأس واحد فقط لها، في حين لا يوجد لها أي أشجار مولدة عندما يكون لها أكثر من رأس، وإذا أتممنا عملية الحساب هذه من خلال الحاسوب عن طريق حذف كلّ ضلع لبيان خالٍ من العرى وانكماشه، فإنه من الممكن أن يحسب $2^{e(G)}$ حدًّا. لاحظ أنه ومع أخذ الملاحظة 10.2.2 في الحسبان من حيث توفيرها للوقت والجهد، إلا أن كمية الحسابات التي يجب عملها تنمو أسّيًّا مع حجم البيان، وهذا بالطبع غير عملي.

توجد تقنية أخرى تؤدي إلى حسابات أسرع. وهذا معطًى من خلال نظرية مصفوفة الشجرة التي ظهرت من خلال عمل كيركوف في العام (Kirchhoff [1847م])؛ حيث نحسب $\tau(G)$ من خلال حساب المحددة. إن هذه الطريقة أسرع كثيرًا؛ لأن حساب محددة المصفوفة من الحجم $n \times n$ يتم من خلال أقل من n^3 من العمليات. وكذلك نعلم أن صيغة كيلي تتبع من نظرية مصفوفة الشجرة بأخذ $G = k_n$ (تمرين 17). ولكنها لا تتبع بسهولة من الفرضية 8.2.2.

وقبل أن نعطي هذه النظرية، سنوضح الحسابات التي تحدّدها هذه النظرية من خلال المثال الآتي:

11.2.2. مثال: حسابات مصفوفة الشجرة. ترشدنا النظرية 12.2.2 إلى طريق تكوين المصفوفة من خلال وضع درجات الرؤوس على القطر، وطرح مصفوفة التجاور من هذه المصفوفة القطرية، ثمّ حذف صفّ وعمود، وأخيرًا حساب المحددة. لاحظ أنه عندما تكون G هي الطائرة الورقية الموجودة في المثال 9.2.2، فإنّ درجات الرؤوس هي: 3،3،2،2 وهنا نُكَوِّنُ المصفوفةَ الموجودةَ عن اليسار، ونحسب محددة المصفوفة الموجودة في الوسط، فيكون العدد الناتج هو عدد الأشجار المولدة. ■

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow 8$$

وبما أن العرى لا تؤثر في الأشجار المولدة، فإننا نحذفها قبل بدء عملية الحسابات. ومن الجدير بالذكر أن إثبات النظرية يستخدم خواص المحددة.

12.2.2. نظرية: (نظرية مصفوفة الشجرة). افترض أن G بيان خالٍ من العرى رؤوسه $v_1,\dots,v_n$. وافترض أيضًا أن $a_{i,j}$ عدد الأضلاع التي طرفاها v_i و v_j. وافترض كذلك أن Q هي المصفوفة التي مدخلتها (i,j) هي $-a_{i,j}$ عندما $i \neq j$ و $d(v_i)$ عندما $i=j$. إذا حصلنا على المصفوفة Q^* من المصفوفة Q بحذف صفّ s وعمود t فإن:

$$\tau(G) = (-1)^{s+t} \det Q^*$$

الإثبات*: سنثبت الحالة عندما $s = t$، أما الحالة العامة، فإنها تتبع من نتيجة في الجبر الخطي (عندما يكون مجموعُ مدخلات أعمدة مصفوفة مساويًا للمتجه الصفري، فإن مرافقات المعاملات (cafactors) (مُتعامل) تكون ثابتة في كلّ صفّ – التمرين 18.6.8).

أولاً: إذا كان D توجيهًا للبيان G، وكانت M مصفوفةَ وقوع D، فإن $Q = MM^T$. وإذا كانت $e_1,\dots,e_m$ هي أضلاع D، فإن مدخلات M هي $m_{i,j} = 1$ عندما يكون v_i هو ذيل e_j و $mi,,j = -1$ عندما يكون v_i رأسًا للضلع e_j، و $m_{i,j} = 0$. بخلاف ذلك، لاحظ أن المدخلة i, j في MM^T هي الجداء النقطي للصف i مع عمود j من المصفوفة M. ولاحظ أيضًا أنه عندما $i \neq j$، فإن الجداء يحسب 1- لكل ضلع من G يربط بين الرأسين، وعندما $i = j$، فإنه يحسب 1 لكل ضلع يقع على الرأس، وعليه فهو يعطي الدرجة لذلك الرأس.

$$M=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Q=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ثانيًا: إذا كانت B مصفوفة جزئية من M، حجمها$(n - 1) \times (n - 1)$، فإن $\det B = \pm 1$ وذلك عندما تشكل الـ $n - 1$ ضلعًا المرتبطة بهذه المصفوفة شجرة مولدة للبيان G، وتكون $\det B = 0$ بخلاف ذلك. في الحالة الأولى، نستخدم الاستقراء على n لبرهان أن $\det B = \pm 1$. إذا كانت $n = 1$، فإننا نتفق على أن محددة المصفوفة من الحجم 0×0 هي 1 اصطلاحًا. لذا، افترض أن $n > 1$، وافترض أن T شجرة مولدة أضلاعها أعمدة B. بما أنه توجد للشجرة T ورقتان على الأقل، وبما أنه حُذف صف واحد فقط، فإنه يوجد للمصفوفة B صف يرتبط بورقة x من T، إضافة إلى أن لهذا الصّفّ مُدخلةً واحدة فقط مختلفة عن الصفر وموجودة في B. وبحساب المحددة بتمديدها حول هذا الصّفّ، نجد أن المصفَوفة الجزئية الفريدة B' التي لها وزن غير صفري في هذا التمديد هي المصفوفة المرتبطة بالشجرة

الجزئية المولدة للبيان $G - x$ ، والتي نحصل عليها بحذف x والأضلاع الواقعة عليها من T، وبما أن حجم B' هو $(n - 2) \times (n - 2)$ وهي مصفوفة جزئية من مصفوفة الوقوع لتوجيه للبيان G-x، فإن فرضية الاستقراء تضمن لنا أن $\det B' = \pm 1$، وبما أن كل مُدخلة غير صفرية في صف x هي ± 1، فإننا سنحصل على النتيجة نفسها للمصفوفة B. أي أن $\det B = \pm 1$.

إذا كانت الـ $n - 1$ ضلعًا المرتبطة بأعمدة B لا تشكّل شجرة مولدة، فإن النظرية 4c.1.2 تضمن وجود حلقة C ضمن هذه الأضلاع. وفي هذه الحالة، سنكوّن التركيب الخطي للأعمدة على الصورة الآتية: يكون المعامل صفرًا إذا كان الضلع (العمود) غير موجود في C، ويكون 1+ إذا تم تتبعه إلى الأمام من خلال C في حين يكون 1- إذا تم تتبعه رجوعًا إلى الخلف من خلال C. لذا، نحصل على وزن كلي يساوي صفرًا على كل رأس. إذن، تكون الأعمدة غير مستقلة خطيًّا، وهذا يعطينا أن $\det B = 0$.

ثالثًا. حساب $\det Q^*$. افترض أن M^* هي ما نحصل عليه بحذف الصف t من M. لذا، فإن $Q^* = M^*(M^*)^T$. إذا كانت $m < n - 1$، فإن المحددة تساوي صفرًا، ولا توجد أشجار مولدة. لذلك، افترض أن $m \geq n - 1$، في هذه الحالة استخدم صيغة بنيت وكوشي (Binet-Cauchy formula) (التمرين 19.6.8) التي تحسب محددة حاصل ضرب مصفوفات غير مربعة باستخدام محددات مصفوفات جزئية مربعة مكونة من المعاملات، والتي تتضمن على أنه عندما $m \geq p$، وعندما تكون A من الرتبة $p \times m$ و B من الرتبة $m \times p$، فإن $\det AB = \sum_S \det A_S \det B_S$؛ حيث إن المجموع مأخوذ على المجموعات S جميعها التي تحوي p من العناصر الموجودة في $[m]$، و A_S هي المصفوفة الجزئية من A المؤلفة من أعمدة دليلها S، أما B_S فهي المصفوفة الجزئية من B المؤلفة من صفوف دليلها S. وعندما نطبق هذه الصيغة على $Q^* = M^*(M^*)^T$، فإن المصفوفة الجزئية A_S هي $(n - 1) \times (n - 1)$ مصفوفة جزئية من M كما هي الحال في ثانيًا أعلاه. وكذلك فإن $B_S = A_S^T$. إذن، فالمجموع يحسب $(\pm 1)^2 = 1$ لكل مجموعة مؤلفة من $(n - 1)$ ضلعًا مرتبطة بشجرة مولدة، ويحسب صفرًا للمجموعات الأخرى جميعها التي بها $n - 1$ ضلعًا. ■

التفكيك ووضع العلامات الدالة الجميلة (Decomposition and grecefull labelings)

سنأخذ في الحسبان مسألة أخرى متعلقة بتفكيك البيانات (التعريف 32.1.1). لاحظ أنه بإمكاننا أن نفكك G دائمًا إلى أضلاع منفردة. والسؤال المطروح هو: هل بإمكاننا تفكيك G لنسخ من شجرة أكبر T؟ إن هذا يتطلب أن تكون $e(T)$ قاسمًا من قواسم $e(G)$ و$\Delta(G) \geq \Delta(T)$. ولكن، هل هذا الشرط كافٍ؟ لاحظ أنه حتى عندما يكون G منتظمًا من الدرجة $e(T)$، فإن هذا يفشل (التمرين 20). فعلى سبيل المثال، نجد أن بيان بيترسون لا يتفكك إلى مخالب.

وضع هاجكقست (Häggkvist) المخمنة الآتية: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة $2m$، وكانت T شجرة لها m من الأضلاع، فإن $E(G)$ تتفكك إلى $n(G)$ نسخة من T. إلا أنه وحتى الحالة البسيطة التي يكون فيها G بيانًا تامًا ما زالت مسألة دون حلٍّ.

13.2.2. مخمنة (تخمين). (Ringel [1964])، إذا كانت T شجرة معلومة وثابتة ولها m من الأضلاع، فإن K_{2m+1} يتفكك إلى $2m+1$ نسخة من T. ■

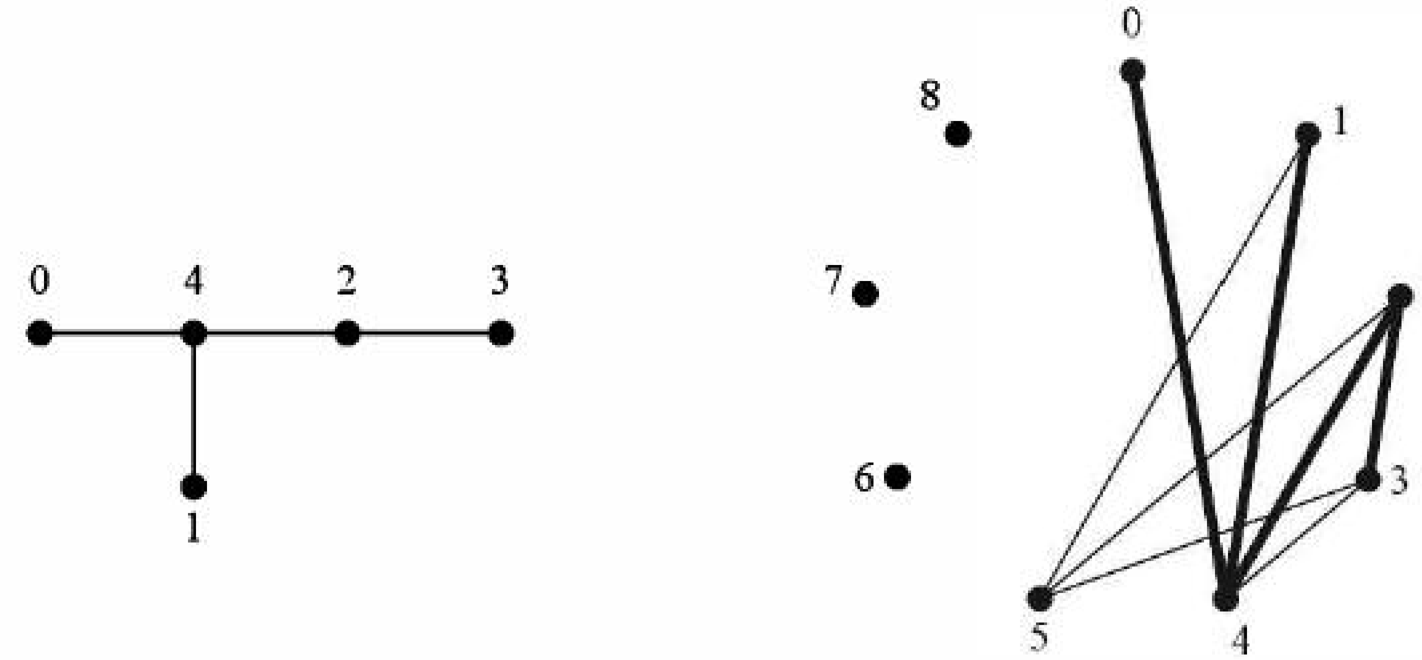
ركزت المحاولات لبرهان مخمنة رينجل (Ringel) على المخمنة الأقوى المتعلقة بالشجرة الجميلة (ذات الصفات الحلوة). إن مخمنة الشجرة الجميلة تعطينا مخمنة رينجل، بالإضافة إلى بعض النتائج المتعلقة بتفكيك البيانات التامة ذات الرتبة الزوجية (التمرين 23).

14.2.2. تعريف: العلامات الدالة الجميلة لبيان G له m من الأضلاع هي دالة $f: V(G) \longrightarrow \{0, \ldots, m\}$ بحيث يُحَدّدُ للرؤوس المختلفة قيمٌ عدديةٌ مختلفةٌ وبحيث إن: $\{|f(u) - f(v)| : uv \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, m\}$ ونقول: إن البيان **جميل** إذا وُجِدَت له علامات دالة جميلة.

15.2.2. مخمنة (مخمنة الشجرة الجميلة) .(Kotzig, Ringle, [1964]) يوجد لكل شجرة علامات دالة جميلة. ■

16.2.2. نظرية : (Rosa [1967]) إذا كانت T شجرة لها m من الأضلاع، ولها علامات دالة جميلة، فيوجد تفكيك للبيان K_{2m+1} إلى $2m+1$ نسخة من T.

الإثبات : تخيل رؤوس K_{2m+1} بوصفها صفوف تطابق بمقياس $2m+1$ مرتبة بصورة دائرية (حلقية). إن الفرق بين أي صفي تطابق يساوي 1 إذا كانا متتابعين، ويساوي 2 إذا وُجِدَ بينهما صَف آخر وهكذا، حيث يساوي هذا الفرق m إذا وُجد بينهما m من الصفوف. نضع أضلاع K_{2m+1} بزمر بحسب الفرق بين أطراف هذه الأضلاع. لاحظ أنه لكل $1 \le j \le m$، يوجد $2m+1$ ضلعًا الفرق بين طرفي كل منها يساوي j، وهذا يضع الأضلاع ضمن صفوف تسمى صفوف الفرق أو الاختلاف (difference classes).

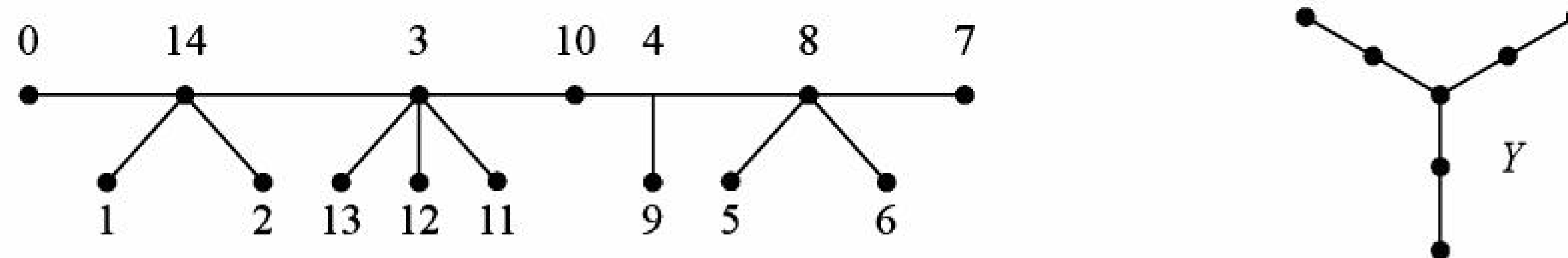


من العلامات الدالة الجميلة الموجودة على T، نعرّف نسخًا من T في K_{2m+1}. ولتكن هذه النسخ هي: $T_0, \ldots, T_{2m}$. إن رؤوس T_k هي: $K, \ldots, K+m \pmod{2m+1}$، حيث إن $k+i$ يجاور $k+j$ إذا وفقط إذا كان i يجاور j في العلامات الدالة الجميلة الموجودة على T. تظهر النسخة T_0 تمامًا كصورة العلاقات الدالة الجميلة ولها ضلع مشترك مع كل فرق. وأن الانتقال إلى النسخة الثانية ينقل كل ضلع إلى ضلع آخر له الفرق نفسه من خلال إضافة واحد إلى كل اسم (علامة) لكل نقطة طرفية. إن لكل صَفٍّ فرقًا من الأضلاع ضلعًا موجودًا في T_k. وبناءً عليه، فإن $T_0, \ldots, T_{2m}$ تفكك K_{2m+1} ■

من المعلوم أن العلامات الدالة الجميلة موجودة لبعض الأنواع من الأشجار، ولبعض العائلات الأخرى من البيانات (انظر [1998] Gallian). ومن السهل جدًا إيجاد علامات دالة جميلة للنجوم والمسارات. ونعرّف فيما يأتي عائلة من الأشجار يُعَدّ تعميمًا لكل من النجوم والمسارات من خلال السماح بإضافة أضلاع تقع على مسار.

17.2.2. تعريف : تعرّف الجرارة (Gaterpillar) على أنها شجرة فيها مسار واحد (العمود الفقري أو الرئيس) يقع على (أو يحوي) كل ضلع.

18.2.2. مثال : إن رؤوس الجرارة التي لا تقع على العمود الفقري هي أوراق (وتسمّى أيضًا أقدامًا). في الشكل أدناه، تجد جرارة لها علامات دالة جميلة. وفي الحقيقة، فإنّ كلّ جرارة بيان جميل (التمرين 31). الشجرة Y في الرسم أدناه ليست جرارة. ■



19.2.2. نظرية : تكون أي شجرة جرارة إذا وفقط إذا كانت غير محتوية على الشجرة Y المبينة أعلاه.

الإثبات: افترض أن G' هي الشجرة التي نحصل عليها من الشجرة G من خلال حذف كل ورقة من G. بما أن الرؤوس التي تبقى في G ليست أوراقًا فيها، فيوجد في G' رأس درجته 3 على الأقل إذا وفقط إذا ظهر الشكل Y في G. لذا، فإن G لا تحوي نسخة من Y إذا وفقط إذا كانت $\Delta\ (G') \leq 2$، وهذا يكافئ أن تكون G مسارًا، وهذا يكافئ أن تكون G جرارة أيضًا. ■

التفريع والبيانات الموجهة الأويلرية (اختياري) (Branching and Eulerian Diagraphs)

لقد عَمَّمَ توت (Tutte) نظرية مصفوفة الشجرة إلى البيانات الموجهة. لاحظ أنه في الحالة التي يكون فيها البيان الموجه متماثلاً، فإن نظرية توت تكون نظرية الشجرة نفسها. (يكون البيان الموجه متماثلاً إذا كانت مصفوفة تجاوره متماثلة. وفي هذه، الحالة يكون البيان الموجه نموذجًا لبيان). ومن الجدير بالذكر وجود ربط مدهش بين هذه النظرية من جهة والحلقات الأويلرية من جهة أخرى.

20.2.2. تعريف: نُعرّف التفريع أو الشجرة الخارجة على أنه توجيه لشجرة لها جذر درجة دخوله صفر، ودرجة دخول أي رأس آخر من رؤوسها تساوي 1. في حين نعرف الشجرة الداخلة على أنها شجرة خارجة تم عكس (قلب) أضلاعها.

إن التفريع الذي جذره v اتحاد لمسارات تبدأ من v (التمرين 33). لاحظ أنه يمكن الوصول إلى كل رأس من رؤوس هذا التفريع من خلال مسار واحد فقط. وهناك نتيجة مماثلة تتحقق للأشجار الداخلة، وهي أن الشجرة الداخلة اتحاد لمسارات إلى الجذر؛ مسارٍ واحدٍ من كل رأس. وفيما يأتي نعطي نصًّا دون إثبات لنظرية توت من أجل إيجاد عدد التفريعات.

21.2.2. نظرية: مصفوفة الشجرة الموجهة. (Tutte [1948]) افترض أن G بيان موجه خالٍ من العرى، اجعل $Q^{-} = D^{-} - A'$ و $Q^{+} = D^{+} - A'$، حيث D^{+} و D^{-} هي المصفوفات القطرية لدرجات كل منَ الدخول والخروج في G، وأن المدخلة (i,j) في A' هي عدد الأضلاع من الرأس V_j إلى الرأس V_i. في هذه الحالة، يكون عدد الأشجار الخارجة (الأشجار الداخلة) لـ G التي جذرها V_i هو قيمة كل متعامل (مرافق معامل) في الصف i للمصفوفة Q^{-} (عمود i للمصفوفة Q^{+}). ■

$$Q^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q^{+} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

22.2.2. مثال: يوجد للبيان الموجه أعلاه شجرتان خارجتان مولدتان جذر كل منهما الرأس رقم 1. وشجرتان داخلتان مولدتان جذر كل منهما الرأس رقم 3. لاحظ أن كل متعامل في الصف الأول للمصفوفة Q^{-} هو 2، وكل متعامل في العمود الثالث للمصفوفة Q^{+} هو 2. ■

نعلم أن الرؤوس المعزولة لا تؤثر في الحلقات الأويلرية، وبإهمال هذه الرؤوس، نقول: إن البيان الموجه يكون أويلريًا إذا وفقط إذا كانت درجة الدخول = درجة الخروج لكل رأس، وكان البيان المتضمن مترابطًا (النظرية 24.4.1). إن مثل هذه البيانات الموجهة تكون مترابطة بقوة ممّا يسمح لنا بإيجاد الشجرة الداخلة المولدة. وسنصف أيضًا الحلقات الأويلرية بدلالة الشجرة الداخلة المولدة.

23.2.2. تمهيدية: في البيان الموجه القوي، يكون كل رأس جذرًا لشجرة خارجة (ولشجرة داخلة).

الإثبات: خذ رأسًا v، وابدأ بإضافة الأضلاع للحصول على تفريع منه. اجعل S_i تمثل مجموعة الرؤوس التي تصلها بإضافة i من الأضلاع، اجعل $S_0=\{v\}$. بما أنّ البيان الموجّه مترابط بقوة، إذن، يوجد ضلع يخرج من S_i (التمرين 10.4.1). أضف هذا الضلع للتفريع الموجود لديك، ثمّ أضف رأس هذا الضلع إلى المجموعة S_i لتحصل على S_{i+1}. كَرِّرْ هذه العملية لتصل إلى الرؤوس جميعها.

للحصول على شجرة داخلة من المسارات إلى v، اعكس الأضلاع جميعها وطبق الخطوات السابقة نفسها؛ علمًا بأن البيان الموجه الذي نحصل عليه من عكس أضلاع بيان موجه قوي يكون أيضًا قويًّا. ■

تعطينا البديهية السابقة طريقًا للبحث عن شجرة لمسارات من جذر معين. وفي الجزء التالي، سنناقش البحث عن أشجار بشمول أكثر.

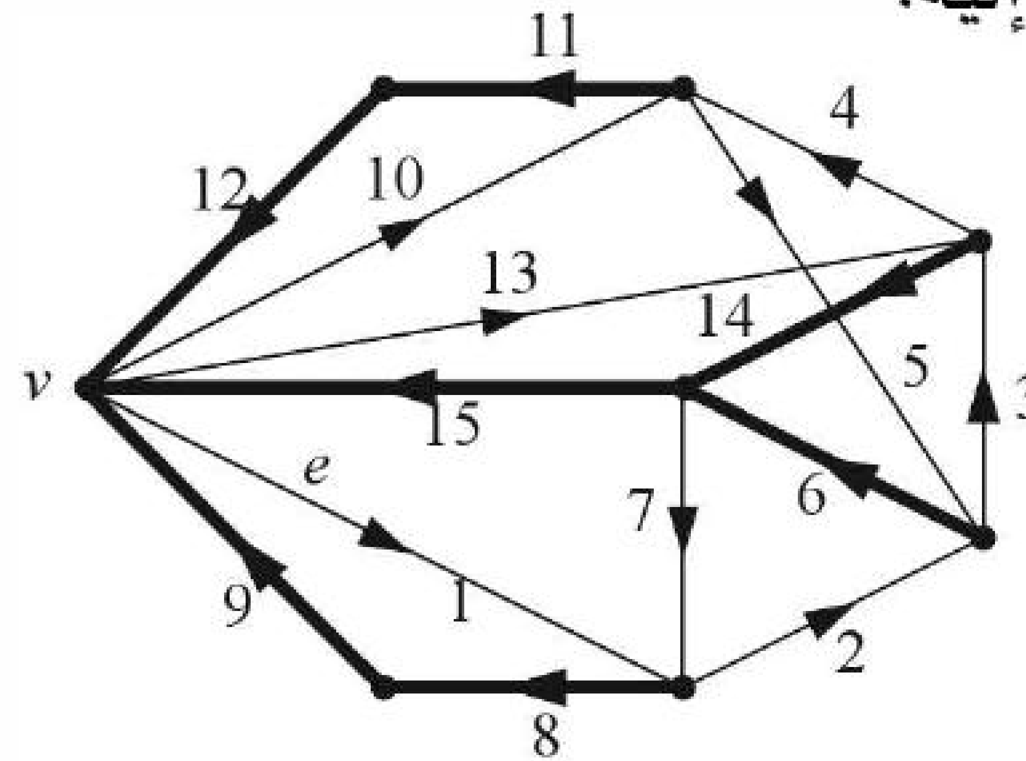
24.2.2. خوارزمية: (حلقة أويلرية في بيان موجه)

المدخلات: بيان موجه أويلري G ليس له رؤوس معزولة، وشجرة داخلة مولدة T مؤلفة من مسارات إلى الرأس v.

أولاً: لكل $u \in V(G)$، حدّد ترتيبًا للأضلاع المغادرة إلى u بحيث إنه إذا كانت $u \neq v$، فإن الضلع المغادر إلى u في T يأتي في آخر الترتيب. ■

ثانيًا: مبتدئًا من v، كوّن حلقة أويلرية، وذلك بخروجك الدائم من الرأس الحالي u عن طريق الضلع التالي غير المستخدم سابقًا، والموجود ضمن الترتيب المحدد عند u.

25.2.2. مثال: في البيان الموجه أدناه، نجد أن الأضلاع الغامقة تشكل شجرة داخلة T من المسارات إلى V. أما الأضلاع المعلّمة بالترتيب بدءًا من 1 فتشكل حلقة أويلرية، وتغادر هذه الأضلاع رأسًا من خلال ضلع من T عندما لا تجد بديلاً آخر للمغادرة. إذا قام الترتيب عند V بوضع 1 قبل 10 قبل 13، فإن الخوارزمية تتبع الأضلاع بحسب الترتيب المشار إليه. ■



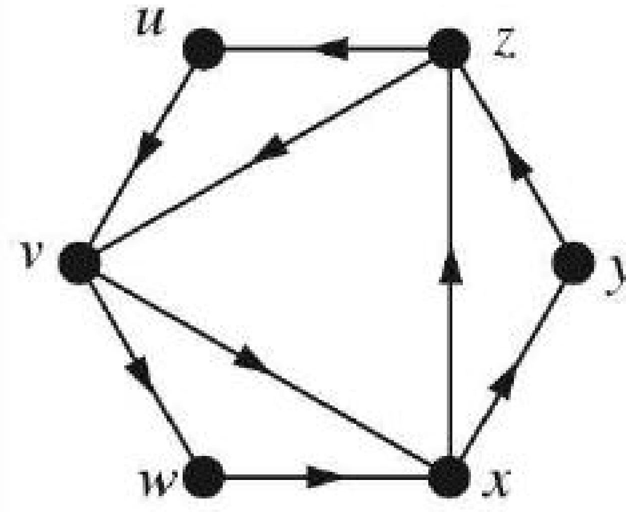
26.2.2. نظرية: الخوارزمية 24.2.2 تنتج دائمًا حلقة أويلرية.

الإثبات: باستخدام تمهيدية 23.2.2، نُكَوِّنُ شجرة داخلة T إلى رأس v، وبعد ذلك نطبق الخوارزمية 24.2.2 لبناء مسرب. لاحظ أنه يكفينا إثباتَ أن هذا المسرب يجب أن ينتهي عند v فقط بعد أن يكون قد مرّ على الأضلاع جميعها.

عندما ندخل إلى رأس $u \neq v$، فإن الضلع المغادر إلى u في T يكون غير مستخدم بعد؛ لأن $d^+(u) = d^-(u)$. لذا، عندما ندخل إلى u، فإن هناك طريقًا دائمًا للخروج منه. إذن، فالمسرب لا ينتهي إلا عند v فقط.

وننهي فقط في الحالة التي لا نستطيع بعدها الاستمرار، وهذا يعني أننا استخدمنا الأضلاع الخارجة جميعها عند v، وبما أن $d^-(v)=d^+(v)$، فيجب أن نكون قد استخدمنا الأضلاع الداخلة إلى v جميعها، وبما أنه لا يمكننا استخدام ضلع من T إلا إذا كان هو الضلع الوحيد المتبقي والمغادر لذيله، فإنه لا يمكننا استخدام الأضلاع الداخلة إلى v جميعها إلا بعد مرورنا على الرؤوس كلّها؛ لأن v تحوي مسارًا من كل رأس إلى v. ■

27.2.2. مثال: في البيان الموجه أدناه، كل شجرة داخلة إلى الرأس v تحوي كلًّا من uv, yz, wx وضلعًا واحدًا بالضبط من $\{zu, zv\}$ وضلعًا واحدًا بالضبط من $\{xy, xz\}$. يوجد أربع أشجار داخلة إلى v. لكل شجرة داخلة نفترض $\Pi(d_i - 1)! = (0!)^3 (1!)^3 = 1$ ترتيبًا للأضلاع المغادرة من الرؤوس. لذا، نستطيع الحصول على حلقة أويلرية واحدة من كل شجرة داخلة عندما نبدأ من v في اتجاه الضلع $e = vw$. وفي الشكل أدناه، تجد الأشجار الأربعة الداخلة والحلقات المرتبطة بها.



الحلقات	الأشجار الداخلة التي تحوي
$(v, w, x, z, v, x, y, z, u)$	zu و xy
$(v, w, x, y, z, v, x, z, u)$	zu و xz
$(v, w, x, z, u, v, x, y, z)$	zv و xy
$(v, w, x, y, z, u, v, x, z)$	zv و xz

نقول: إن حلقتين أويلريتين هما الحلقة نفسها، إذا كانت أزواج الأضلاع المتتابعة في كل منهما هي الأزواج نفسها، ولكل شجرة داخلة إلى v، لاحظ أن الخوارزمية 24.2.2 تولد $\Pi_{u \in V(G)}(d^+(u) - 1)!$ حلقة أويلرية مختلفة. ولاحظ أيضًا أن آخر ضلع خارج يُثبّت من قبل الأشجار التي نحصل عليها من الرؤوس المختلفة عن v. وبما أننا نهتم بالترتيب الحلقي للأضلاع فقط، فبإمكاننا اختيار ضلع محدد e لبدء ترتيب الأضلاع المغادرة إلى الرأس v. إن أيّ تغيير في ترتيب الأضلاع الخارجة عند الرؤوس يحدد عند نقطة معينة الخيارات المختلفة للضلع التالي. لذا، فإن الحلقات تكون مختلفة. وبالمثل، فإن الحلقات التي نحصل عليها من الأشجار الداخلة تكون مختلفة. وهنا، نكون قد ولدنا $c\Pi_{u \in V(G)}(d^+(u) - 1)!$ حلقة أويلرية مختلفة، حيث c هي عدد الأشجار الداخلة إلى v.

وفي الحقيقة، فإن هذه الحلقات هي الحلقات الأويلرية جميعها، وهذا يعطينا برهانًا تركيبيًّا (حسابيًّا) لحقيقة أن عدد الأشجار الداخلة إلى كل رأس في بيان موجه أويلري يكون العدد نفسه. إن البيان الذي نحصل عليه عن طريق عكس الأضلاع جميعها له عدد الحلقات الأويلرية نفسه. لذا، فإن عدد الأشجار الخارجة من كل رأس يكون له القيمة c نفسها. تعطينا النظرية 21.2.2 طريقًا لاحتساب C.

28.2.2. نظرية: (Van Aardenne-Ehrenfest and de Burijn [1951]). في البيان الأويلري الذي فيه $d_i = d^+(vi)=d^-(vi)$، يكون عدد الحلقات الأويلرية يساوي $c\,\Pi_i (d_i - 1)!$، وحيث c تمثل عدد الأشجار الداخلة إلى أيّ رأس أو الخارجة منه.

الإثبات: لقد بينّا أن الخوارزمية 24.2.2 تولد هذا العدد المختلف من الحلقات الأويلرية من خلال استخدام الأشجار الداخلة إلى الرأس v (بدءًا من v في اتجاه ضلع e). لذا، نحتاج فقط إلى إثبات أن هذا يولد الحلقات الأويلرية جميعها.

لإيجاد الشجرة والترتيب الذي يولد الحلقة الأويلرية C، تتبع C من e، وسجل ترتيب الأضلاع المغادرة من كل رأس. اجعل T تمثل البيان الموجه الجزئي المؤلف من آخر ضلع على C يغادر كل رأس مختلف عن v. بما أن آخر ضلع يغادر رأسًا يكون موجودًا في C بعدما تدخل الأضلاع جميعها هذا الرأس، فإن كل ضلع في T قابل للتمدّد لمسار في T يصل إلى v، بوجود $n - 1$ ضلعًا في T، فإن T تشكل شجرة داخلة إلى v. وأكثر من ذلك، فإن C هي الحلقة التي حصلنا عليها باستخدام الخوارزمية 24.2.2 من T ومن ترتيب الأضلاع الخارجة التي سجّلناها سابقًا. ■

تمـارين (Exercises)

1.2.2. (−) حَدّدْ أيّ الأشجار لها شفرة برفر التي:

a) تحوي قيمة واحدة فقط.

b) تحوي قيمتين بالضبط.

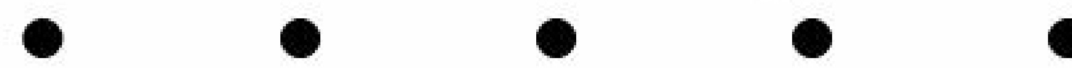
c) لها قيم مختلفة في المواقع جميعها.

2.2.2. (−). احسب عدد الأشجار المولدة للبيان الموجود على اليسار في الشكل أدناه (لاحظ أن الفرضية 8.2.2 تعطي طريقًا منظمًا لعمل هذا. وبعد ذلك، يمكن استخدام الملاحظة 10.2.2 والمثال 6.2.2 من أجل اختصار الحسابات).

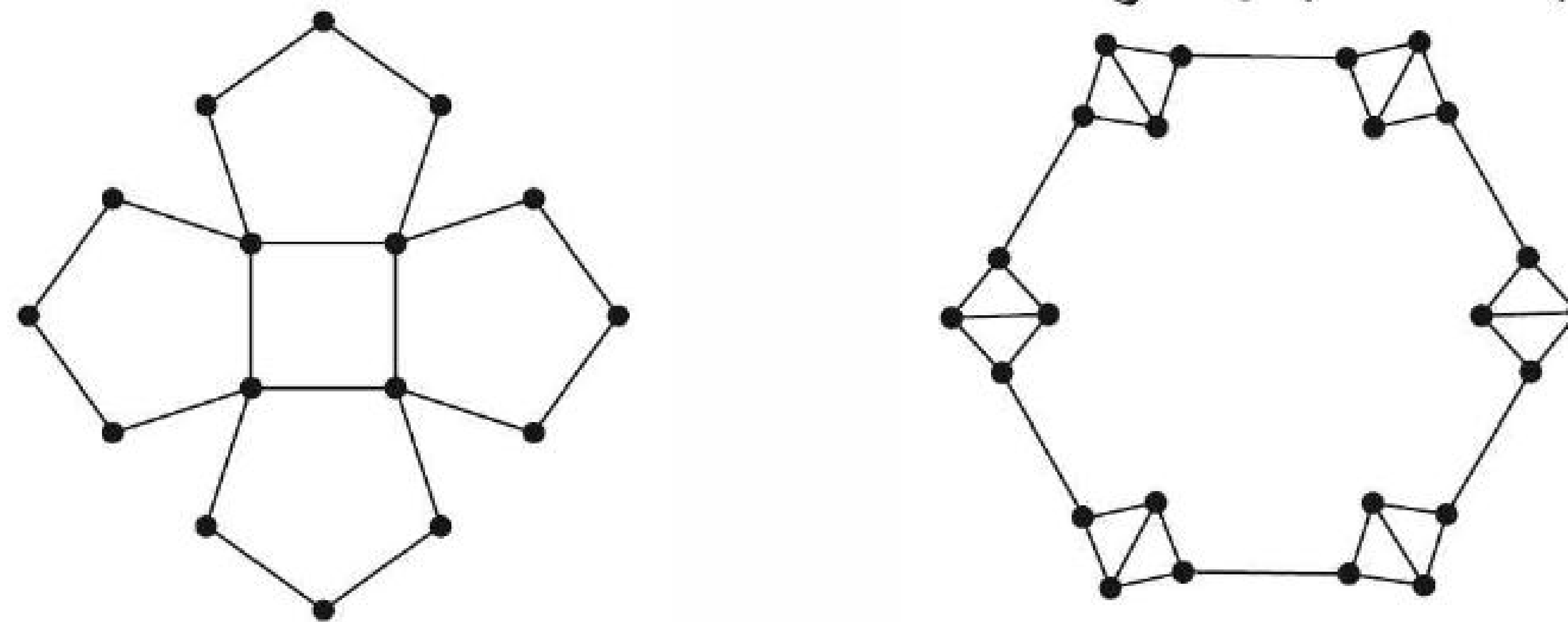


3.2.2. (−). لتكن G البيانَ الموجودَ على اليمين في الشكل أعلاه. استخدم نظرية مصفوفة الشجرة لإيجاد مصفوفة محددتها تساوي $\tau(G)$ واحسب $\tau(G)$.

4.2.2. (−). افترض أن G بيان بسيط له m من الأضلاع. أثبت أنه إذا وجد لـ G علامات دالة جميلة، فإن K_{2m+1} يتفكك إلى نسخ من G. (مساعدة: تتبع إثبات النظرية 16.2.2).



5.2.2. يمثل البيان الموجود على اليسار في الشكل أدناه سجلًّا لكلمات المتحدثين في المؤتمر الدولي التاسع لنظرية البيانات الذي يُعْقَدُ بصورة دورية كل أربع سنوات، والذي عُقِدَ في العام 2000 م في كالمازو (Kalamazoo) احسب عدد أشجاره المولدة.



6.2.2. (!) افترض أن G بيان ثلاثي منتظم من الدرجة 3 له $4m$ من الرؤوس، بحيث شُكّلَ من m من الطائرات الورقية المنفصلة زوجًا زوجًا، بإضافة m من الأضلاع لكي تربط بين هذه الطائرات الورقية، لتشكل طوقًا، كما يظهر في الجانب الأيمن من الشكل أعلاه الذي يمثل الحالة التي تكون فيها $m = 6$. أثبت أن $\tau(G)=2m\ 8^m$.

7.2.2. (!) استخدم صيغة كيلي لبرهنة أنه يوجد $(n\text{-}2)\ n^{n-3}$ شجرة مولدة للبيان الذي نحصل عليه من k_n بحذف أحد الأضلاع.

8.2.2. احسب عدد الأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$ في كل مجموعة من المجموعات الآتية؛ وذلك بإعطاء

برهانين لكل مجموعة؛ أحدهما باستخدام ارتباط برفر، والآخر باستخدام طريقة عَدٍّ مباشرة:

a) الأشجار التي لها ورقتان.

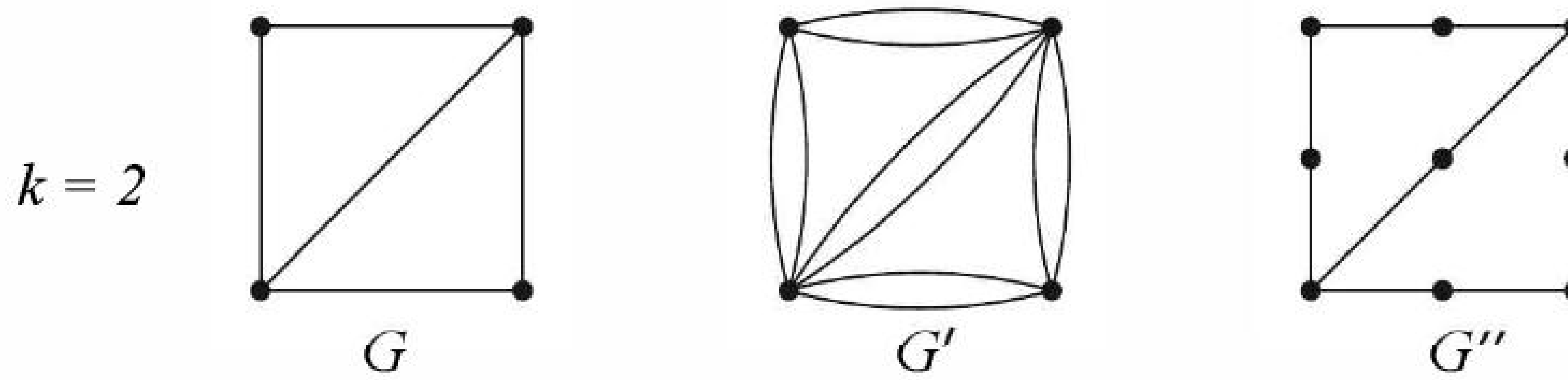
b) الأشجار التي لها $n - 2$ ورقة.

9.2.2. لتكن $S(m,r)$ تمثل عدد التجزئات لمجموعة فيها m من العناصر إلى r من المجموعات غير الخالية. بدلالة هذه الأعداد، احسب عدد الأشجار التي رؤوسها $\{v_1, \dots, v_n\}$ ولها بالضبط k ورقة. (Re'nyi [1959]).

10.2.2. جد $\tau(k_{2,m})$، واحسب عدد صفوف تشاكل الأشجار المولدة للبيان $k_{2,m}$.

11.2.2. (+) احسب $\tau(k_{3,m})$.

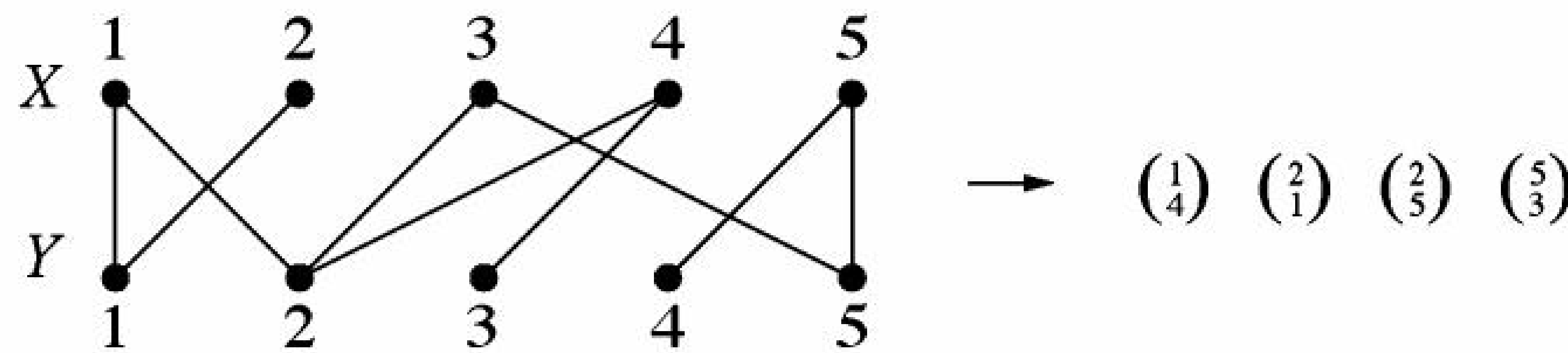
12.2.2. نعرف من البيان G بيانين جديدين كالآتي: لتكن G' تمثل البيان الذي نحصل عليه من البيان G باستبدال كل ضلع من أضلاع G بـ k نسخة من هذا الضلع، ولتكن G'' هي البيان الذي نحصل عليه من G بأن يحل محل كل ضلع $uv \in E(G)$ مسارٌ من u إلى v طوله k يمر بـ $k - 1$ رأسًا جديدًا. جد $\tau(G')$ و$\tau(G')$ بدلالة $\tau(G)$ و k.



13.2.2. افترض أن X و Y تجزئتان ثنائيتان للبيان $k_{n,n}$، حيث $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ و $Y = \{y_1,\dots,y_n\}$ لكل شجرة مولدة T نكوّن قائمة $f(T)$ من الأزواج المرتبة (تكتب عموديًا). بعد توليد جزء من هذه القائمة، اجعل u تمثل الورقة ذات الدليل الأقل في X في الشجرة الجزئية المتبقية. وبالمثل، اجعل v تمثل الورقة ذات الدليل الأقل في Y. ألحق الزوج $\binom{a}{b}$ بالقائمة، حيث a دليل E جار u، أما b فدليل جار v. احذف $\{u,v\}$، كرر العملية حتى تحصل على $n - 1$ زوجًا لتشكيل $f(T)$ (يبقى ضلع واحد فقط). يوضح فرع (a) أن f معرّفة:

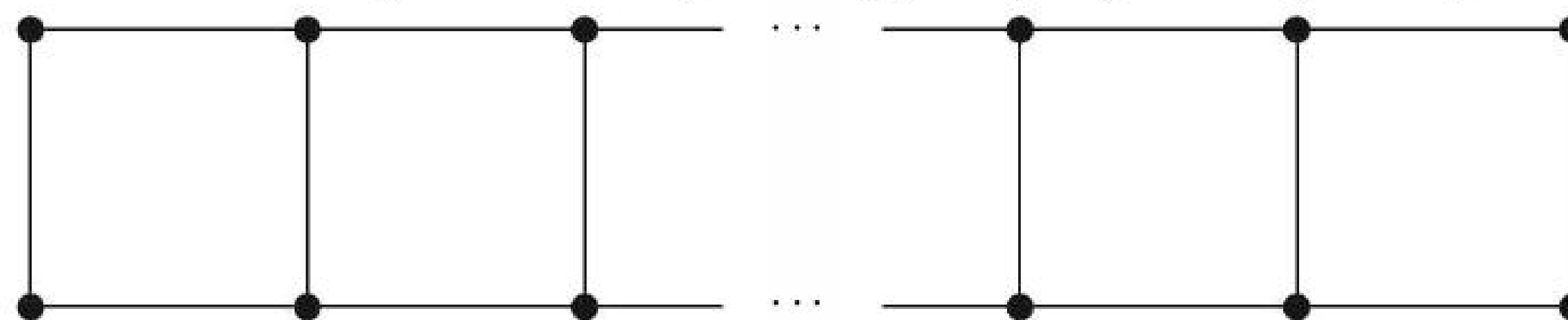
a) أثبت أنه يوجد لكل شجرة مولدة للبيان $k_{n,n}$ ورقةٌ في كلٍّ من مجموعتي التجزئة.

b) أثبت أن f دالة تناظر من مجموعة الأشجار المولدة للبيّان $k_{n,n}$ إلى $([n]\times[n])^{n-1}$. لذا، فإنه يوجد n^{2n-2} شجرة مولدة للبيان $k_{n,n}$. (Re'nyi[1966], Kelmans [1992], Pritikin [1995])

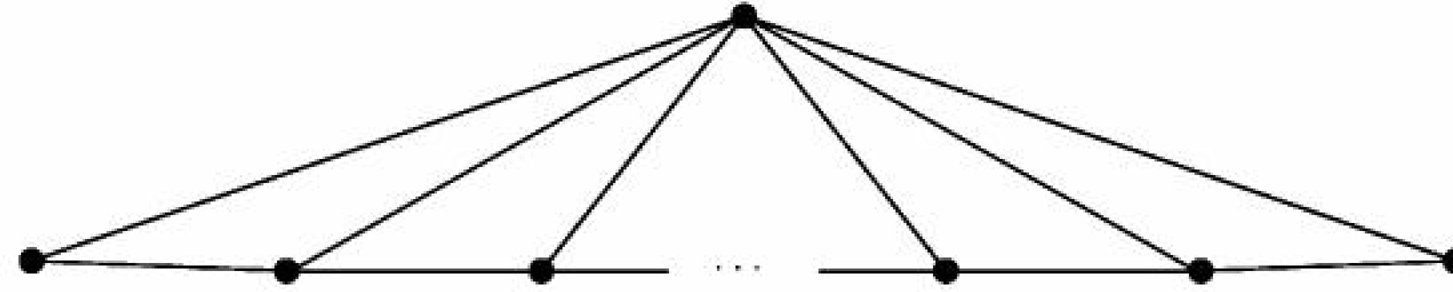


14.2.2. (+) اجعل $f(r, s)$ تمثل عدد الأشجار التي رؤوسها المجموعة $[n]$، والتي حجم مجموعاتها الجزئية r و s (حيث $r + s = n$). أثبت أنه إذا كانت $r \neq s$، فإن $f(r, s) = \binom{r+s}{s} s^{r-1} r^{s-1}$. ما قيمة $f(r, s)$ إذا كانت $r = s$؟ (مساعدة: بَيّنْ أن متتالية برفر لمثل هذه الشجرة تحوي $r - 1$ حدًّا من المجموعة الجزئية التي حجمها s، و $s - 1$ حدًّا من المجموعة الجزئية التي حجمها r، (Scoins [1962], Glicksman [1963]).

15.2.2. ليكن G_n البيان المرسوم أدناه الذي له $2n$ رأسًا، و $3n-2$ ضلعًا، حيث $n \geq 1$. أثبت أنه إذا كانت $n > 2$، فإن $\tau(G_n) = 4\tau(G_{n-1}) - \tau(G_{n-2})$. (Kelmans [1967a]).



16.2.2. لكل $n \geq 1$، اجعل a_n تمثل عدد الأشجار المولدة للبيان المكوّن من P_n بإضافة رأس يجاور كلّ رأس من رؤوس P_n. فعلى سبيل المثال $a_1=1$. و $a_2=3$ و $a_3=8$ إذا كانت $n > 1$ فأثبت أن $a_n = a_{n-1} + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$. استخدم هذه النتيجة إثبات أنه إذا كانت $n > 2$، فإن $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$.
(تعليق: من الممكن استخدام تعليل مباشر لبيان أن $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$).



17.2.2. استخدم نظرية مصفوفة الشجرة لإثبات صيغة كيلي.

18.2.2. استخدم نظرية مصفوفة الشجرة لحساب $\tau(k_{r,s})$. (Loväs [1979,P223]) ثم انظر (Kelmans [1965]) من أجل التعميم.

19.2.2. (+) افترض أن t_n هي عدد الأشجار التي رؤوسها المجموعة $[n]$. أثبت أن t_n تحقق العلاقة مرات الحدوثية $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-2}{k-1} t_k t_{n-k}$. (تعليق: بما أن $t_n = n^{n-2}$، فإن هذا يثبت المتطابقة $n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1} k^{k-1}(n-k)^{n-k-2}$، (Dziobek[1917]) انظر Lova'sz [1979, p219]).

20.2.2. افترض أن G بيان بسيط منتظم من الدرجة d. أثبت أنه يوجد للبيان G تفكيك نسخ من $k_{1,d}$ إذا وفقط إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع.

21.2.2. (+) أثبت أنه يمكن تفكيك $k_{2m-1,2m}$ إلى m من المسارات المولدة.

22.2.2. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس بحيث يمكن تفكيكه إلى k شجرة مولدة. إذا علمت أن $\Delta(G) = \delta(G)+1$، فحدّدْ متتالية درجات رؤوس G بدلالة n و k.

23.2.2. (!) إذا كانت مَخمنةُ الشجرة الجميلة صحيحةً، وكانت T شجرة لها m من الأضلاع، فأثبت أن k_{2m} قابل للتفكيك إلى $2m - 1$ نسخة من T (مساعدة: طبّق التفكيك اللامتغير الحلقي للبيان k_{2m-1} على الأشجار التي لها $m - 1$ ضلعًا والموجود في إثبات النظرية 16.2.2).

24.2.2. من البيانات التي رؤوسها $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ والتي لها $n - 1$ ضلعًا، جد كم بيانًا منها يمكن أن نضع عليه علامات دالة جميلة مستخدمًا أسماء رؤوسها.

25.2.2. (!) إذا كان G بيانًا جميلاً أويلريًّا، فأثبت أن $e(G)$ تكافئ 0 أو3 (mod 4) (أي أنه إذا قسمنا $e(G)$ على 4، فإن باقي القسمة يساوي 0 أو 3)، (مساعدة: اجمع مطلق فرق الضلع (mod2) بطريقتين مختلفتين).

26.2.2. (+) أثبت أن C_n يكون جميلاً إذا وفقط إذا كان 4 يقسم n، أو $n + 1$. (Rosa [1967]).

27.2.2. (+) افترض أن G بيان مؤلف من k من الحلقات الرباعية التي لها رأس مشترك واحد. أثبت أن G بيان جميل (مساعدة: ضع 0 على الرأس الذي درجته $2k$).

28.2.2. لتكن $d_1, \ldots, d_n$ أعدادًا صحيحة موجبة، أثبت مباشرة وجود جرارة رؤوسها $d_1, \ldots, d_n$ إذا وفقط إذا تحقق أن $\Sigma d_i = 2n - 2$.

29.2.2. أثبت أنه يمكن تحويل كل شجرة إلى جرارة لها متتالية درجات الرؤوس نفسها باستخدام التبديل الثنائي (التعريف 32.3.1) بحيث يكون كل بيان وسطي (واقع في الوسط) شجرة.

30.2.2. يمكن رسم البيان الثنائي الفرع على قناة، إذا أمكن وضع رؤوس إحدى مجموعتي رؤوسه على خط معين في المستوى (بترتيب معين)، ووضع رؤوس المجموعة الأخرى على خط مواز لخط المجموعة الأولى، وتم رسم الأضلاع بوصفها قطعًا مستقيمة تصل بين هذه الرؤوس. إذا كان G بيانًا مترابطًا، فأثبت أنه يمكن رسم G على قناة دون تقاطع بين الأضلاع إذا وفقط إذا كان G جرارة.

31.2.2. (!) نعرف العلامات الدالة من أعلى إلى أسفل على أنها علامات دالة جميلة لها قيمة حرجة α، بحيث يربط كل ضلع بين رؤوس لها علامات دالة أعلى α وأسفلها. أثبت أنه يوجد لكل جرارة علامات دالة

من أعلى إلى أسفل، وأثبت أيضًا أنه لا توجد علامات دالة من أعلى إلى أسفل لأيّ شجرة على سبعة رؤوس بحيث إن هذه الشجرة ليست جرارة.

32.2.2. (+) أثبت أن عدد صفوف تشاكل أيّ جرارة على n من الرؤوس يساوي، $2^{\lfloor n/2 \rfloor -2} + 2^{n-4}$ إذا كانت $n \geq 3$ (Harrary –Schwenk [19873], Kimble – Schwenk [1981]) .

33.2.2. (!) افترض أن T توجيه لشجرة بحيث إن رؤوس الأضلاع جميعها مختلفة؛ إن الرأس الوحيد الذي لا يمثل رأسًا لضلع هو الجذر. أثبت أن T هي اتحاد لمسارات من الجذر. وأثبت أيضًا أنه يوجد لكل رأس من رؤوس T مسارٌ واحدٌ فقط يصل من الجذر إلى هذا الرأس.

34.2.2. (*) استخدم النظرية 2.2.26 لبرهان أنّ الخوارزمية أدناه تولد حلقة ديبروجن الثنائية بطول 2^n (الحلقة في التطبيق 25.4.1 تظهر بهذه الطريقة). ابدأ بـ n منزلة من القيمة 0، ثمّ ألحق القيمة 1 إذا كان عمل ذلك لا يكرر صفًا سابقًا عدد منازله n، وبخلاف ذلك ألحق القيمة 0.

35.2.2. (*) خوارزمية تاري (Tarry's Algarithm) (كما عُرض من قبل د. ق. هوفمان (D.G. Hoffman). افترض أن لدينا قلعة فيها عدد محدود من الغرف والدهاليز، ولكل دهليز طرفان، وفي كل طرف باب لغرفة، ولكل غرفة باب أو أبواب تفتح على دهليز، ويمكن الوصول إلى كل غرفة بالانتقال عبر الدهاليز والغرف. إبتداءً، لا توجد إشارات دالة على الأبواب. افترض أن لديك إنسانًا آليًا يرغب في اكتشاف القلعة مبتدئًا من غرفة مُعينة بحسب الشروط الآتية:

1) بعد دخوله دهليزًا، يمشي في هذا الدهليز حتى يدخل الغرفة الموجودة على الطرف الثاني لهذا الدهليز.
2) بعد دخول غرفة لا يوجد على أبوابها إشارات، ضع الإشارة 1 على باب الدخول.
3) إذا كُنْتَ في غرفة لها باب غير مؤشر عليه، فضع 0 على هذا الباب واستخدمه للخروج.
4) إذا كُنْتَ في غرفة أشّر على أبوابها جميعًا، فاخرج من خلال باب غير مؤشّر عليه بالإشارة 0.
5) إذا كنت في غرفة مؤشّر على أبوابها جميعها بالإشارة 0، فتوقف.

أثبت أن الروبوت سيمرّ في كل دهليز مرتين بالضبط؛ مرة واحدة في كل اتجاه، ثمّ سيتوقف. (مساعدة: أثبت أن هذا يتحقق لكل دهليز عند كل رأس تمّ الوصول إليه، وأثبت أنه تمّ الوصول إلى كل رأس. تعليق: القرارات جميعها موضعية؛ لأن الإنسان لا يرى أي شيء غير الغرفة أو الدهليز الذي يكون موجودًا فيه. خوارزمية تاري [1985] وبعض الخوارزميات الأخرى وُصفت من قبل كونج (König [1936, P35-36]) وُصفت أيضًا من قبل فلشنر (Fleishner [1983,1991]).

3.2 الأمثلية والأشجار (optimization and Trees)

من الممكن جدًّا أن يكون هناك معانٍ مختلفة للعبارة "أفضل شجرة مولدة"، حيث يعتمد هذا على المسألة التي لدينا. ويُعرّف البيان الموزون على أنه بيان زُوّدت أضلاعه بعلامات دالة عددية. عندما نبني وصلات لتربط بين المواقع المختلفة، فإن التكلفة المحتملة لهذه الوصلات تعطينا بيانًا موزونًا. إن أقل تكلفة لربط النظام هي أقل وزن كلي لأشجاره المولدة.

لاحظ أن الأوزان يمكن أن تكون مسافات، وفي هذه الحالة نعرّف طول المسار على أنه مجموع أوزان أضلاعه. وربّما نبحث عن شجرة مولدة بأقل المسافات، وعند الحديث عن البيانات الموزونة فإننا نهتم فقط بالأوزان غير السالبة للأضلاع. وكذلك سندرس مسألة متعلقة بإيجاد أشجار جيدة لتشفير الرسائل.

أدنى شجرة مولدة (Minimum spanning tree)

تحتوي الأشجار المولدة جميعها لبيان موزون مترابط ممثل لوسائل ربط الاتصالات الممكنة على n - 1 ضلعًا. نبحث عن شجرة واحدة تُكبِّر أو تُصغِّر مجموع أوزان الأضلاع. ولهذه المسائل، فإن أبسط مُوجه أو مساعد

على الكشف يعطينا حلًّا أمثل بسرعة.

1.3.2. خوارزمية: (خوارزمية كروسكال [Kruskal] لإيجاد أصغر شجرة مولدة)

المدخلات: بيان مترابط موزون.

الفكرة: حافظ على بيان جزئي مولد لاحلقي H، وسّعْ H بواسطة أضلاع وزنها قليل لتكوين شجرة مولدة، افترض أن الأضلاع مرتبة بحسب أوزانها ترتيبًا غير متناقص من خلال كسر الروابط اختياريًّا.

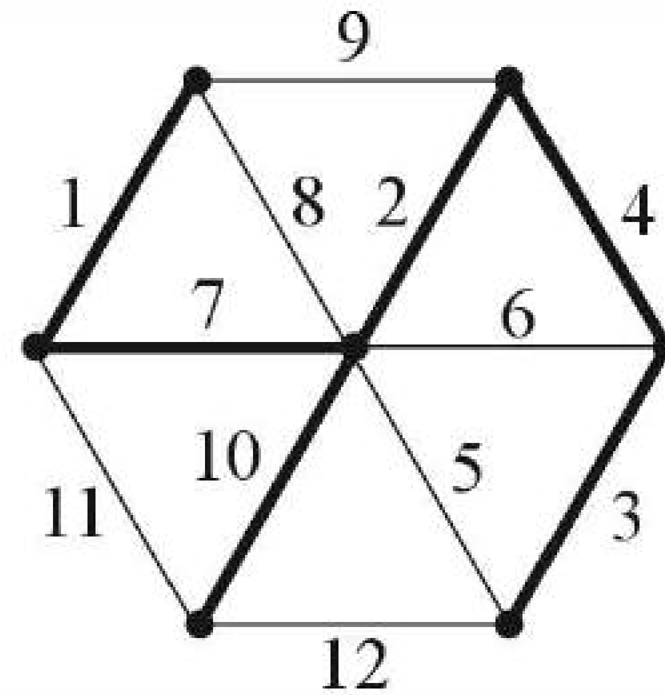
البداية: ضع $E(H) = \emptyset$

خطوات مرات الحدوث: إذا كان أقل ضلع وزنًا يربط بين مركبتين من مركبات H، فإننا نضيف هذا الضلع إلى الشجرة. وبخلاف ذلك، نحذف هذا الضلع، وننهي هذه العملية عندما يصبح H مترابطًا. ■

توضّح النظرية 3.3.2. أن خوارزمية كروسكال تنتج شجرة مثلى. تسمى الموجّهات (المساعدات على الكشف) المثلى البسيطة موضعيًّا بالخوارزميات الجشعة التي لا تضمن حلولاً مُثلى عادة، إلا أن هذه الخوارزمية تعطي حلًّا أمثل.

في الحاسوب، تظهر الأوزان على صورة مصفوفة حيث يكون الوزن كبيرًا جدًّا للضلع غير المتوافر للإستخدام، علمًا بأنه يمكن اختيار الأضلاع التي لها الوزن نفسه بأي ترتيب، إن الأشجار الناتجة لها الوزن نفسه. لاحظ أن خوارزمية كروسكال تبدأ من غابة مؤلفة من n رأسًا معزولا، وكل ضلع يتم اختياره يربط بين مركبتين.

2.3.2. مثال: تعتمد الخيارات في خوارزمية كروسكال تعتمد على ترتيب الأوزان فقط وليس على قيمها، واستخدمنا في البيان أدناه، أعدادًا صحيحة موجبة بوصفها أوزانًا للتأكيد على ترتيب اختيار الأضلاع، حيث نختار أقل أربعة أضلاع وزنًا، وبناءً على ذلك لا نستطيع اختيار الأضلاع التي أوزانها 5 أو 6. ونستطيع أخذ الضلع الذي وزنه 7، وعندها لا نستطيع أخذ الأضلاع التي أوزانها 8 أو 9. ■



3.3.2. نظرية: ((Kruskal [1956]). في البيان الموزون المترابط G، تبني خوارزمية كروسكال شجرة مولدة لها أصغر وزن ممكن.

الإثبات: سنُبين أولاً أن الخوارزمية تنتج شجرة. لاحظ أن هذه الخوارزمية لا تختار أي ضلع يُتَمّمُ حلقة. إذا وُجدَ للبيان النهائي أكثر من مركبة، فهذا يعني أننا لم نأخذ في الحسبان أي ضلع يربط بين مركبتين؛ لأن مثل هذا الضلع يكون مقبولاً، وبما أن G مترابط، فإنه يوجد مثل هذا الضلع الذي يجب أن نكون قد أخذناه في الحسبان. لذا، فإن البيان النهائي الذي نحصل عليه يكون مترابطًا ولا حلقيًّا، وهذا يجعل هذا البيان شجرة.

افترض أن T هي الشجرة التي نحصل عليها، وافترض أيضًا أن T^* هي شجرة مولدة لها أصغر وزن، فإذا كانت $T = T^*$؛ فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة، وإذا كانت $T \neq T^*$، فاجعل e يمثل أول ضلع تختاره في T بحيث لا يكون موجودًا في T^*. إن إضافة e إلى T^* يولد حلقة واحدة C، وبما أن T تخلو من الحلقات، فإن C تحوي ضلعًا e' بحيث إن $e' \notin E(T)$. الآن، خذ في الحسبان الشجرة المولدة $T^* + e - e'$. بما أن T^* تحوي e' وتحوي أضلاع T كلها التي اختيرت قبل e، فإن كلًّا من e و e' يكون متوافرًا للخيار عندما تختار

الخوارزمية e. لذا فإن $w(e) \le w(e')$ (أي أن وزن e يساوي وزن e' أو أقل منه). لذا، فإن $T^* + e - e'$ هي شجرة مولدة بوزن يساوي وزن T^* أو أقل منها، وتتفق مع T أكثر من T^* على قائمة أطول من الأضلاع.

إن تكرار التعليل السابق سيعطينا أخيرًا شجرة مولدة ذات أصغر وزن، وتتفق تمامًا مع T. وبذا، نكون قد أثبتنا أن أصغر شجرة مولدة تتفق مع T هي T نفسها. ■

4.3.2*. ملاحظة: لتنفيذ خوارزمية كروسكال؛ نفرز m بحسب أوزان أضلاعها، وبعد ذلك نحتفظ لكل رأس بالعلامة الدالة للمركّبة التي تحوي هذا الرأس، ونقبل الضلع الأقل وزنًا التالي إذا وُجدَتْ على طرفيه علامات دالة مختلفة، ومن ثمّ ندخل كلًا من المركبتين بتغيير العلامة الدالة لكل رأس في المركبة الصغرى بالعلامة الدالة للمركبة القصوى. وبما أن حجم المركبة يتضاعف عند تغيير العلامات الدالة، فإن كل علامة دالة تتغير بمقدار $lg\ n$ مرة على الأكثر، وأن العدد الكلي لهذه التغييرات هو $n\ lg\ n$ (نستخدم lg للتدليل على اللوغاريتم للأساس 2).

من خلال هذه الطريقة لوضع العلامات الدالة، يتبين لنا أن الزمن اللازم لتنفيذ هذه العملية للبيانات الكبيرة يعتمد على الزمن اللازم لفرز (تصنيف) m من الأعداد. مع أخذ هذا الثمن في الحسبان، قد نجد أن بعض الخوارزميات أسرع من خورازمية كروسكال. في خوارزمية برم (prim's Algorithm) (التمرين 10)، والتي تعود أيضًا إلى جارنك (Jarnik)، يمكن تنمية الشجرة المولدة بدءًا من رأس واحد بإضافة الضلع ذي الوزن الأقل الذي يُدخل رأسًا جديدًا. ومن الجدير بالذكر أن كلًا من خوارزميتي برم وكروسكال تحتاجان إلى الوقت نفسه للتنفيذ في الحالة التي تُفرَز فيها الأضلاع مسبقًا بحسب أوزانها.

لقد وضع كل من بورفكا (Borùvka) في العام 1926م وجارنك في عام 1930م مسألة أصغر شجرة مولدة وحلا ما، حيث تعتمد خوارزمية بورفكا على التقاط الضلع التالي من خلال الأخذ في الحسبان أقل ضلع وزنًا يغادر كلّ مركبة من الغابة الموجودة في تلك اللحظة. تستخدم التحسينات الحديثة معطيات بنائية ذكية لدمج المركبات بطريقة أسرع. لقد ظهرت النسخ السريعة في ترجان [Tarjan] في العام 1984م وذلك فيما يخص الحالة التي يتمّ فيها الفرز المسبق للأضلاع. وكذلك ظهرت في جابو وجاليل سبنسر وترجان [Gabow-Galil-Spencer-Tarjan] في العام 1986م عندما لا يكون هناك فرز مسبق للأضلاع. لمزيد من النتائج حول الموضوع؛ يمكن الرجوع إلى (Ahuja-Magnanti-Orlin,[1993],ch.13) وإلى المرجع الأحدث وهو ([1995] Karger-Klein-Tarjan). ■

أقصر المسارات (Shortest paths)

كيف يمكننا إيجاد أقصر مسلك من موقع إلى آخر؟ كيف نستطيع إيجاد أقصر مسلك من بيتنا إلى كل مكان في البلدة؟ إن هذا يتطلب إيجاد أقصر المسارات من رأس معين إلى باقي الرؤوس في بيان موزون. و تُشكّل هذه المسارات مجتمعة شجرةً مولدة.

إن خوارزمية كلّ من ديجكسترا ([1959] Dijkstra) و وايتنج وهيلير ([1960]Whiting-Hillier) تحلُّ هذه المسألة بسرعة. وملاحظة أنّ الجزء من u إلى v من المسار الأقصر من u إلى z يكون مسارًا أصغر من u إلى v، تساعد على إيجاد المسلك الأمثل من u إلى أي رأس آخر مثل z مرتبًا تصاعديًّا بحسب $d(u, z)$. وأن المسافة $d(u, z)$ في بيان موزون تساوي حاصل جمع الأوزان الموجودة على أضلاع المسار من u إلى z (حيث نأخذ في الحسبان الأوزان غير السالبة فقط).

5.3.2. خوارزمية: (خوارزمية ديجكسترا — المسافات من رأس واحد).

المدخلات: بيان (أو بيان موجه) موزون ضلعيًّا بأوزان غير سالبة، ورأس u نبدأ منه، ونرمز بالرمز $w(xy)$ إلى

وزن الضلع xy، ويكون $w(xy) = \infty$ إذا لم يكن xy ضلعًا.

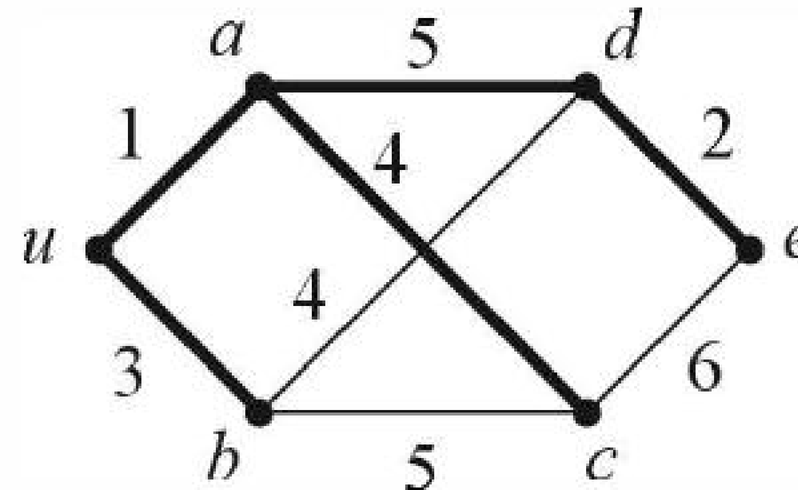
الفكرة: خزّن مجموعة رؤوس S بحيث إن أقصر مسافة من u إلى كل رأس في S تكون معلومة. وسّع S لتشملَ الرؤوس جميعها من خلال تخزين المسافة المؤقتة $t(z)$ من u إلى كل رأس $z \notin S$، ولاحظ أن $t(z)$ هي طول أصغر مسار مغلق من u إلى z حتى هذه اللحظة.

البداية: ضع $S=\{u\}$، $t(u)=0$، $t(z)=w(uz)$ لكل $z \neq u$

خطوات مرات الحدوث: اختر رأسًا v خارج S بحيث إن $t(v) = min_{z \notin S}\, t(z)$. أضف v إلى S، ثمّ ارصد الأضلاع الخارجة من v لتحديث المسافات المؤقتة (التجريبية): لكل ضلع vz حيث $z \notin S$ حدّث $t(z)$ لتصبح $min\{t(z), t(v)+w(vz)\}$. استمر في تكرار الخطوات السابقة حتى تحصل على $S=V(G)$، أو حتى تحصل على أن $t(z) = \infty$ لكل $z \notin S$. وأخيرًا، ضع $d(u,v) = t(v)$ لكل v. ■

6.3.2. مثال: في البيان الموزون أدناه، تمّ إيجاد أقصر المسارات من u إلى الرؤوس الأخرى بحسب الترتيب a, b, c, d, e حيث المسافات هي: 1,3,5,6,8 على الترتيب. لإعادة بناء المسارات؛ نحتاج فقط إلى الضلع الذي حصلنا عنده على أقصر مسار من u إلى مبتغانا؛ لأن الجزء الأول من أقصر مسار من u إلى z والذي يصل z عبر الضلع uz يكون أقصر مسار من u إلى v.

تستطيع الخوارزمية المحافظة على هذه المعلومات من خلال تسجيل ماهية أو هوية "الرأس الذي اختير"، وذلك كلما تمّ تحديث المسافة إلى z. عندما يُختارُ z، فإن الرأس الذي سُجّلَ عند آخر تحديث للمسافة $t(z)$ هو الرأس الذي يسبق z على المسار من u إلى z والذي يساوي طوله $d(u, z)$. في هذا المثال، نجد أن الأضلاع النهائية على المسارات إلى a و b, c, d, e والتي تولدها الخوارزمية هي: ua و ub, ac, ad, de على الترتيب، وهذه هي أضلاع الشجرة المولدة الناتجة من u. ■



أسلوب الصياغة المستخدم في الخوارزمية 5.3.2. يضمن لنا أن خوارزمية ديجكسترا تتعامل مع البيانات الموجهة أيضًا، حيث إنها تولد شجرة خارجة جذرها u إذا أمكن الوصول إلى كل رأس من u. إن الإثبات صحيح لكل من البيانات والبيانات الموجهة، وتُسمّى التقنيةُ المستخدمةُ لبرهان عبارة أقوى من أجل جعل إثبات استقرائي قابلاً للعمل أو التطبيق "تحميل فرضياتِ الاستقراء".

7.3.2. نظرية: إذا كان G بيانًا موجهًا، وكان $u \in V(G)$، فإن خوارزمية ديجكسترا تحسب $d(u, z)$ لكل $z \in V(G)$.

الإثبات: سنثبت النتيجة الأقوى التي تنصُّ على ما يأتي عند كل خطوة مكررة:

1) لكل $z \in S$، $t(z)=d(u,z)$.

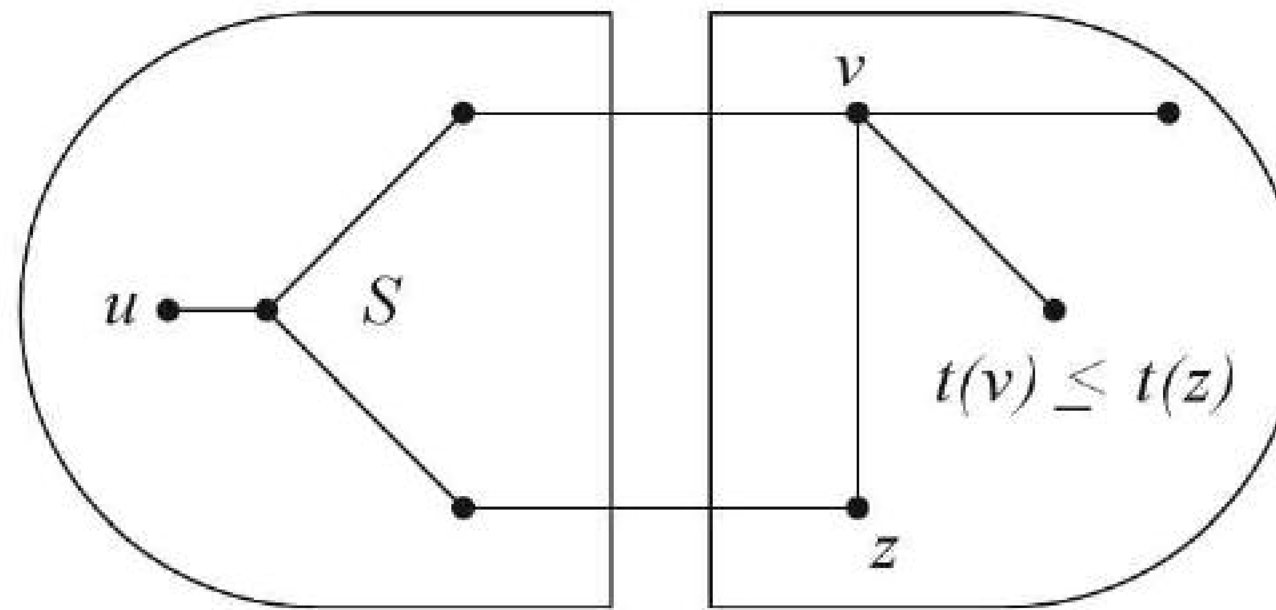
2) لكل $z \notin S$، $t(z)$ تكون أقل طول لمسار من u إلى z يصل إلى z مباشرة من S.

نستخدم الاستقراء على $k = |S|$. إذا كانت $k = 1$، ولأنّ $S = \{u\}$؛ نجد أن $d(u,u) = t(u) = 0$. وبهذا يكون أقل طول لمسار من u إلى z يصل إلى z مباشرة من S يساوي $t(z) = w(uz)$، والذي يساوي مالانهاية في الحالة التي لا يكون فيها uz ضلعًا.

الآن، افترض أن (1) و (2) يتحققان عندما $|S| = k$. وافترض أيضًا أن v رأس من بين الرؤوس z حيث z لا ينتمي إلى المجموعة S، بحيث $t(z)$ أقلّ ما يمكن. تختار الخوارزمية في هذه الحالة v. لذا، اجعل

$S' = S \cup \{v\}$. سنثبت أولاً أن $d(u, v) = t(v)$. لاحظ أن أقصر مسار من u إلى v يخرج من S قبل الوصول إلى v. تنصُّ خطوة الاستقراء على أن طول أقصر مسار مباشر إلى v من S يساوي $t(v)$. وأن فرضية الاستقراء واختيار v يضمنان لنا أن طول أيّ مسار يصل إلى أيّ رأس خارج S، ثمّ إلى v يكون مساويًا للمقدار $t(v)$ على الأقل. لذا، فإن $d(u,v) = t(v)$ وهذا يعني أن (1) يتحقق لـ S'.

ولبرهان أن (2) يتحقق لـ S'، افترض أن z رأس خارج S ،حيث $z \neq v$. من الافتراض، نعلم أن طول أصغر مسار من u إلى z يصل مباشرة من S إلى z يساوي $t(z)$ (أو ∞ إذا لم يوجد مثل هذا المسار). وعندما نضيف v إلى S، فيجب أن نأخذ في الحسبان المسارات التي تصل إلى z من v. وبما أننا حسبنا الآن $d(u,v) = t(v)$، فإن طول أقصر مسار من هذه المسارات هو في $t(v) + w(vz)$. وسنقارن هذا الطول بالقيمة السابقة لـ $t(z)$ من أجل إيجاد أقصر مسار يصل إلى z مباشرةً من S'، لقد أثبتنا أنّ (1) و (2) تتحققان للمجموعة الجديدة S' التي حجمها يساوي $k + 1$، وهذا يكمل الإثبات. ■



لاحظ أنّ الخوارزمية تحافظ على الشرط $d(u, x) \leq t(z)$ لكل $x \in S$ ولكل $z \notin S$؛ لذا فإنّ هذه الخوارزمية تختار الرؤوس مرتبةً ترتيبًا غير متناقص بحسب بعدها عن u. وتفترض أن $d(u, v) = \infty$ إذا كان من غير الممكن الوصول إلى v من u. ونعالج الحالة الخاصة للبيانات غير الموزونة عن طريق البحث الأفقي أولاً بدءًا من الرأس u، (Breadth-first search from u) . في هذه الحالة نجد أن للخوارزمية وبرهانها (التمرين 17) وصفًا أسهل.

8.3.2. خوارزمية : البحث الأفقي أولاً (BFS)

المدخلات: بيان (أو بيان موجه) غير موزون، ورأس u نبدأ منه.

الفكرة: حافظ على مجموعة رؤوس R التي تمّ الوصول إليها إلا أنها لم تُبحث بعد، ومجموعة S التي تمّ بحثها. تتم المحافظة على المجموعة R كصفّ أو طابور من الرؤوس على أساس أن الرأس الذي يدخلها أولاً يخرج منها أولاً. لذا، فإن الرؤوس التي نجدها أولاً هي الرؤوس التي نتحرّى عنها أولاً.

البداية: $d(u, u) = 0, S = \varnothing, R = \{u\}$

خطوات مرات الحدوث: إذا كانت $R \neq \varnothing$ ، فإننا نبدأ البحث من عند أول رأس v في R. نضيف جيران v التي لا تنتمي إلى $S \cup R$ إلى مؤخرة R، ونحدّد لها البعد $d(u, v) + 1$ ، وبعد ذلك نزيح v من مقدمة R ونضعها في S. ■

نعرّف الاختلاف المركزي $\in(u)$ على أنه أكبر مسافة من الرأس u إلى رأس آخر. لذا، نستطيع حساب قطر أي بيان من خلال تشغيل خوارزمية (BFS) من أي رأس.

تمامًا كما في خوارزمية ديجكسترا، فإن الـ BFS من u يعطينا شجرة T يتحقق فيها أن المسار من u إلى v هو أصغر مسار وذلك لكل رأس v. لذا، لا يوجد للبيان أضلاع إضافية تربط بين رؤوس مسار من u إلى v في الشجرة T.

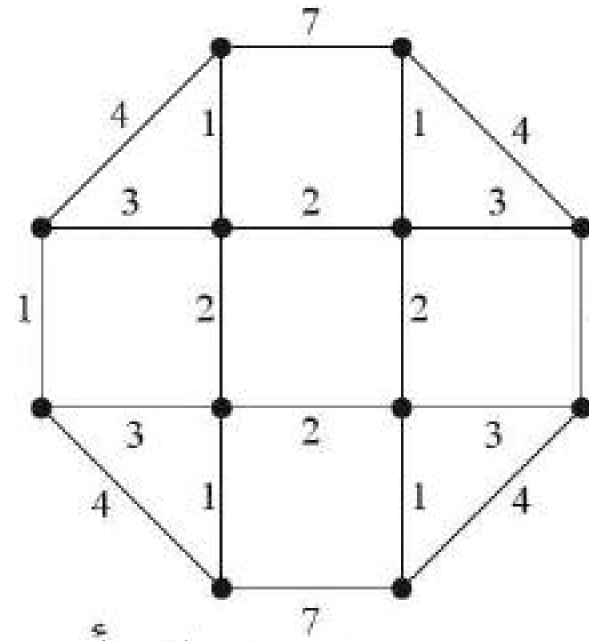
تنويه: تظهر خوارزمية ديجكسترا بصورة واضحة في حلّ مسألة أمثلية أخرى معروفة مَعرفة تامة.

9.3.2. تطبيق. من المعلوم أن ساعي البريد يجب أن يسلك الأضلاع الممثلة لشبكة طرق بدءًا من مكتب البريد وانتهاء عنده. وأن الأوزان الموجودة على الأضلاع تمثل المسافات أو الزمن اللازم لقطع هذه المسافات، نبحث عن

ممر مغلق طوله أقصر ما يمكن ويمر على الأضلاع جميعها. وتسمى هذه المسألة مسألة ساعي البريد الصيني؛ تخليدًا لذكرى العالم الصيني ميوجان (Meigu Guan) الذي وضع هذه المسألة في العام 1962م.

إذا كان كل رأس زوجيًا (درجته زوجية)، فإن البيان يكون بيانًا أويلريًّا، ويكون الجواب هو حاصل جمع أوزان الأضلاع. وبخلاف ذلك، يجب أن نكرر أضلاعًا. وأن كلّ عُبور (اجتياز) يمثل حلقة أويلرية لبيان نحصل عليه بمضاعفة بعض الأضلاع. إن إيجاد أقصر اجتياز يكافئ إيجاد أصغر وزن كلي للأضلاع التي بمضاعفتها نجعل درجة كل رأس زوجية. ونقول مضاعفة؛ لأننا لا نحتاج إلى استخدام أي ضلع أكثر من مرتين. وإذا استعملنا ضلعًا ثلاث مرات أو أكثر من أجل جعل درجة الرؤوس زوجية، فإن حذف نسختين من هذه الأضلاع يبقي درجة الرؤوس زوجية، ومن الممكن أن يكون هناك عدة طرق لاختيار الأضلاع التي تمّ مضاعفتها. ■

10.3.2. مثال: في المثال أدناه، تجد أن درجة كل رأس من الرؤوس الثمانية الخارجية هي درجة فردية، فإذا واءمنا هذه الرؤوس حول الخارج لتصبح درجاتها زوجية، فإن التكلفة الإضافية هي: 4+4+4+4 = 16 أو 16=1+7+7+1. ولكن يمكننا أن نعمل أفضل من ذلك من خلال استخدام الأضلاع العمودية التي مجموع أوزانها الكلي يساوي 10. ■



إن إضافة ضلع من رأس فردي إلى آخر زوجي تجعل الرأس الزوجي فرديًّا. يجب أن نستمر في إضافة الأضلاع حتى نحصل على مسرب يصل إلى رأس فردي.

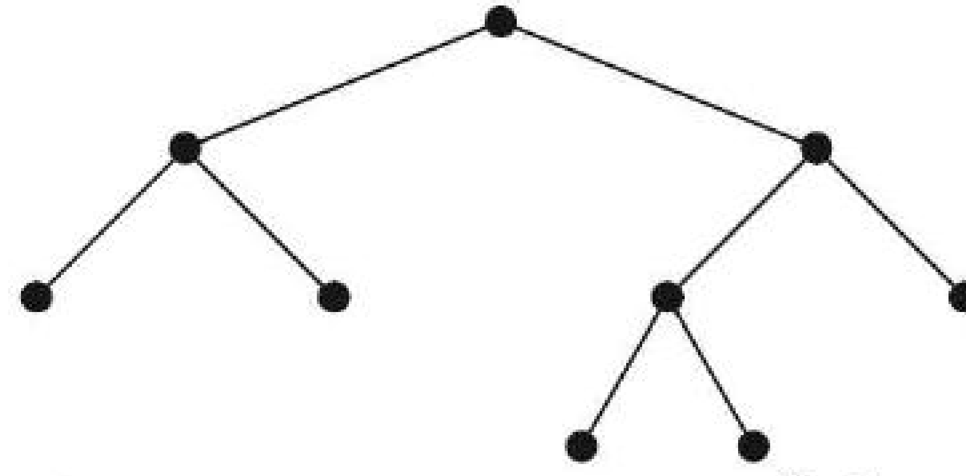
يجب أن تتألف الأضلاع المضاعفة من مجموعة مسارب تُزاوج بين الرؤوس الفردية، وقد نحصر اهتمامنا بالمسارات التي تُزاوج بين الرؤوس الفردية (التمرين 24). وفي هذه الحالة، يمكن أن يكون هناك تقاطع بين هذه المسارات.

لقد أعطى كل من إدموندز (Edmonds) وجونسون (Johnson) طريقة لحلّ مسألة ساعي البريد الصيني. إذا وُجد رأسان فقط درجةُ كل منهما فردية فإننا نستخدم خوارزمية ديجكسترا لإيجاد أقصر مسار بينهما. وبذا نحلُّ المسألة. وإذا وُجد $2k$ رأسًا فرديًّا، فإننا نستطيع أيضًا استخدام خورازمية ديجكسترا لإيجاد أقصر المسارات التي تربط بين كل زوج من الرؤوس الفردية، وهذه المسارات هي التي تكون مرشحة للاستخدام في حل المسألة. نستخدم هذه الأطوال بوصفها أوزانًا على أضلاع K_{2k}، وبذلك فإن مسألتنا تصبح كيفية إيجاد أقل وزن كلي لـ k من الأضلاع التي تزاوج بين الـ $2k$ رأسًا. تمثّل هذه المسألة نسخة موزونة من مسألة أعظم (أكبر) مواءمة التي سَتُناقشُ في الجزء 3.3. شرحت هذه المسألة في كتاب جيبونز (Gibbons [1985, p163-165]).

الأشجار في علم الحاسوب (اختياري) (Trees in Computer science (optional))

تستخدم معظم تطبيقات الأشجار في علم الحاسوب أشجارًا مجذرة (لها جذر).

11.3.2. نعرّف الشجرة المجذّرة على أنها الشجرة التي تم اختيار أحد رؤوسها r ليكون جذرًا لها. لكل رأس v اجعل $P(v)$ تمثل المسار الوحيد من r إلى v. نعرف **والد** v على أنه جار v في $P(v)$، ونسمي الجيران الأخرى للرأس v بأبناء (**أولاد**) v. ونطلق على رؤوس v - $P(v)$ سلف v، أما سلالة v (خلف v) فهي الرؤوس u، بحيث إن $p(u)$ يحوي v. تمثّل الأوراقُ الرؤوسَ التي ليس لها أبناء. ونعرّف الشجرة المستوية المجذّرة أو الشجرة المزروعة على أنها شجرة مجذرة حُدّدَ لأبناء كل رأس من رؤوسها ترتيبٌ من اليسار إلى اليمين.



بعد تطبيق خوارزمية BFS من u، تُعَدُّ الشجرة الناتجة T شجرةً مجذرة عند u.

12.3.2. تعريف: تعرّف **الشجرة الثنائية** على أنها شجرة مستوية مجذرة لها على الأكثر ولدان، ويُسَمّى كلُّ مولد لرأس **الطفلَ الأيسرَ** أو **الطفلَ الأيمنَ**. في حين تُسمّى الأشجارُ الجزئيةُ المجذرةُ عند أبناء الجذر **الشجرَةَ الجزئيةَ اليسرى** أو **الشجرةَ الجزئيةَ اليمنى** للشجرة. أمّا الشجرة ذات المتعدد k (k-ary tree) فهي الشجرة التي تسمح بأن يكون لكل رأس k من الأولاد على الأكثر.

في الكثير من تطبيقات الأشجار الثنائية، يكون للرؤوس (غير الأوراق) ولدان بالضبط (التمرين 26). إن الأشجار الثنائية تسمح بتخزين المعطيات بطريقة تُسرّع الوصول إلى هذه المعلومات؛ حيث نُخزّن كل مفردة على ورقة، ونصل إليها عن طريق تتبع مسار يبدأ من الجذر وينتهي عند هذه الورقة. ونُشفّر المسار بوضع صفر عندما نتحرك في اتجاه طفل أيسر، في حين نضع 1 عندما نتحرك في اتجاه طفل أيمن. إن زمن البحث هو طول الشفرة حتى نصل إلى الورقة. فإذا أعطينا احتمالات وصول من بين n من البنود، فإننا نرغب في وضع هذه البنود على أوراق شجرة ثنائية مجذرة من أجل تقليل الزمن المتوقع للبحث.

وبالمثل، إذا كان لدينا ملفات حاسوبية كبيرة وسعة تخزين محدودة، فإننا نرغب في تشفير الحروف بوصفها قوائم ثنائية لتقليل الطول الكلي. إن قسمة مرات الحدوث على الطول الكلي للملف تزودّنا بالاحتمالات. وبناءً عليه، فإن مسألة التشفير هذه تُختزَل للمسألة الموجودة أعلاه.

إن طول كلمات الشفرة عادة ما يكون مختلفًا. لذا فإننا بحاجة إلى طريقة نعرف من خلالها متى تنتهي الكلمة الحالية. وإذا كانت كل كلمة شفرة ليست جزءًا أوليًّا من كلمة أخرى، فإن الكلمة الحالية تنتهي عندما تنتهي الأرقام الثنائية؛ لأن نهاية الكلمة السابقة تشكل كلمة شفرة. بهذا الشرط الخالي من المقدمات (أي أن كلمة الشفرة ليست جزءًا أوليًّا من كلمة أخرى)، فإنّ كلمات التشفير الثنائية ترتبط بالأوراق لشجرة ثنائية باستخدام التشفير من اليسار إلى اليمين الذي وُصفَ أعلاه.

إن الطول المتوقع لرسالة هو $\sum p_i l_i$؛ حيث إنّ P_i هي احتمالية الكلمة رقم i التي طول شفرتها يساوي l_i. وممّا يجدر ذكره أنّ سهولة الحصول على الشفرة المثالية مدهشة.

13.3.2. خوارزمية: (خوارزمية هفمان [Huffman 1952] – التشفير الخالي من المقدمات [prefix-free coding])

المدخلات: أوزان (مثل: ترددات، أو تكرارات، أو احتمالات) $P_1,\dots,P_n$.

المخرجات: تشفير خالٍ من المقدمات (يكافئ شجرة ثنائية).

الفكرة: يوجد للمفرداتَ النادرة (غير المتكررة بصورة دورية) شفرات أطول، ضع البنود (الرؤوس) غير المتكررة كثيرًا بمكان أعمق وذلك بربطها مع الرؤوس الممثلة للوالدين.

البداية: عندما $n = 2$، فإن الطول الأمثل يساوي 1 حيث يختار 0 و 1 بوصفها شفرة على المفردتين أو الرأسين. (يوجد للشجرة جذر وورقتان، فضلًا عن أنه يمكن استخدام $n = 1$ بوصفها بداية).

خطوات مرات الحدوث: عندما $n>2$، استبدل المفردتين P', P، ذاتي الاحتمال الأقل بمفردة واحدة q وزنها $p + p'$. تعامل مع المجموعة الأصغر الناتجة بوصفها مسألة فيها $n - 1$ من البنود. بعد حلّ المسألة، أعطِ الورقة الناتجة التي وزنها q أولادًا بوزن p و p'. مكافئًا لذلك، استبدل الشفرة التي احتسبت للمفردة q

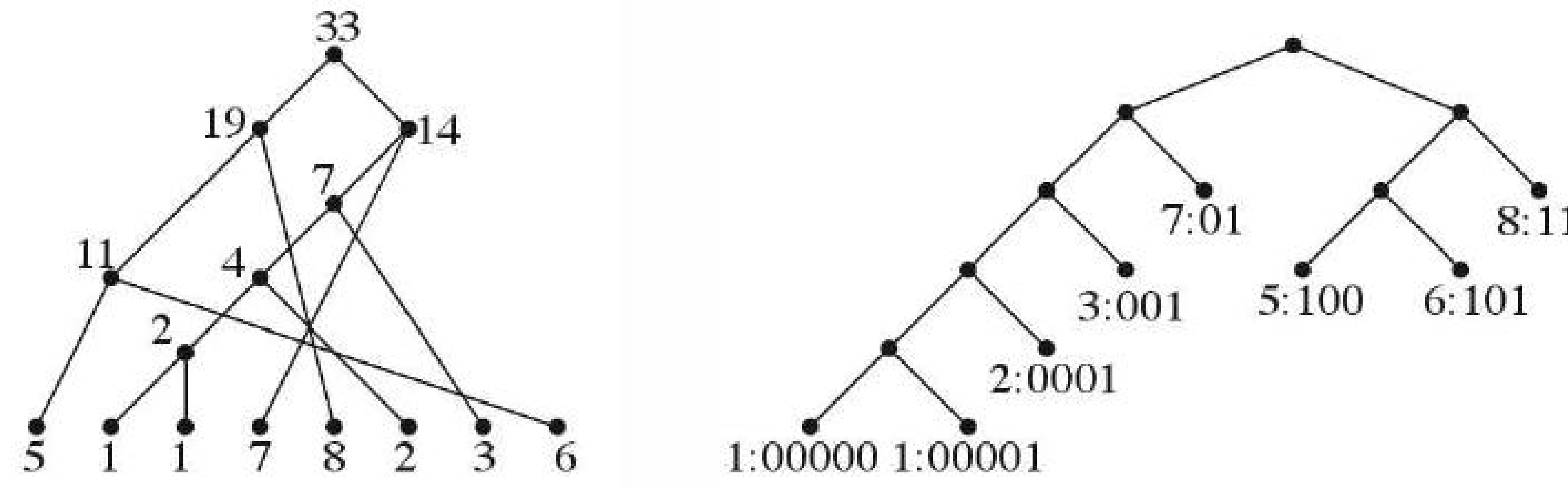
(الناتجة عن ربط p و p') بامتداداتها بـ 1 و 0 التي عينت للمفردات المستبدلة. ■

14.3.2. مثال: تشفير هفمان. افترض مفردات ثمانية لها مرات الحدوث: 5,1,1,7,8,2,3,6. إن خوارزمية 13.3.2. تربط بين البنود بحسب الشجرة الموجودة على اليسار في الشكل أدناه، حيث يتم العمل من أسفل إلى أعلى. بداية، يربط الرأسان اللذان وزن كل منهما 1 للحصول على مفردة جديدة وزنها = 2، ثمّ نربط هذه المفردة بالمفردة الأصلية التي وزنها = 2 للحصول على مفردة وزنها = 4، بعد ذلك نربط بين المفردة التي وزنها 3 بالمفردة التي وزنها 4 لنحصل على مفردة وزنها 7، ثمّ نربط بين المفردتين الأقل احتمالا، وهما المفردتان اللتان وزنهما 5 و 6 في القائمة الأصلية. إن ربط الرؤوس المتبقية يعطينا رؤوسًا بأوزان مرتبة تصاعديًّا على الصورة التالية

11 = 6 + 5 ، 14 = 7 + 7 ، 19 = 11 + 8 و 33 = 19 + 14.

من رسم هذه الشجرة عن اليمين في الشكل أدناه، نحصل على كلمات الشفرة (الكلمات السِّرِّيّة). لاحظ أنه بحسب الترتيب الأصلي للمفردات، نجد أن الكلمات السرية هي:

100، 0000، 00001، 01، 11، 0001، 001، 101. وأن الطول المتوقع لطول الشفرة هو $\Sigma p_i L_i = 90/33$، وهذا أقل من 3، وذلك من خلال استخدام ثماني كلمات طول كل منها = 3. ■



15.3.2. نظرية: إذا أعطينا توزيعًا احتماليًّا $\{p_i\}$ على n من البنود، فإن خوارزمية هفمان تنتج الشفرة الخالية من المقدمات التي لها أصغر طول متوقع.

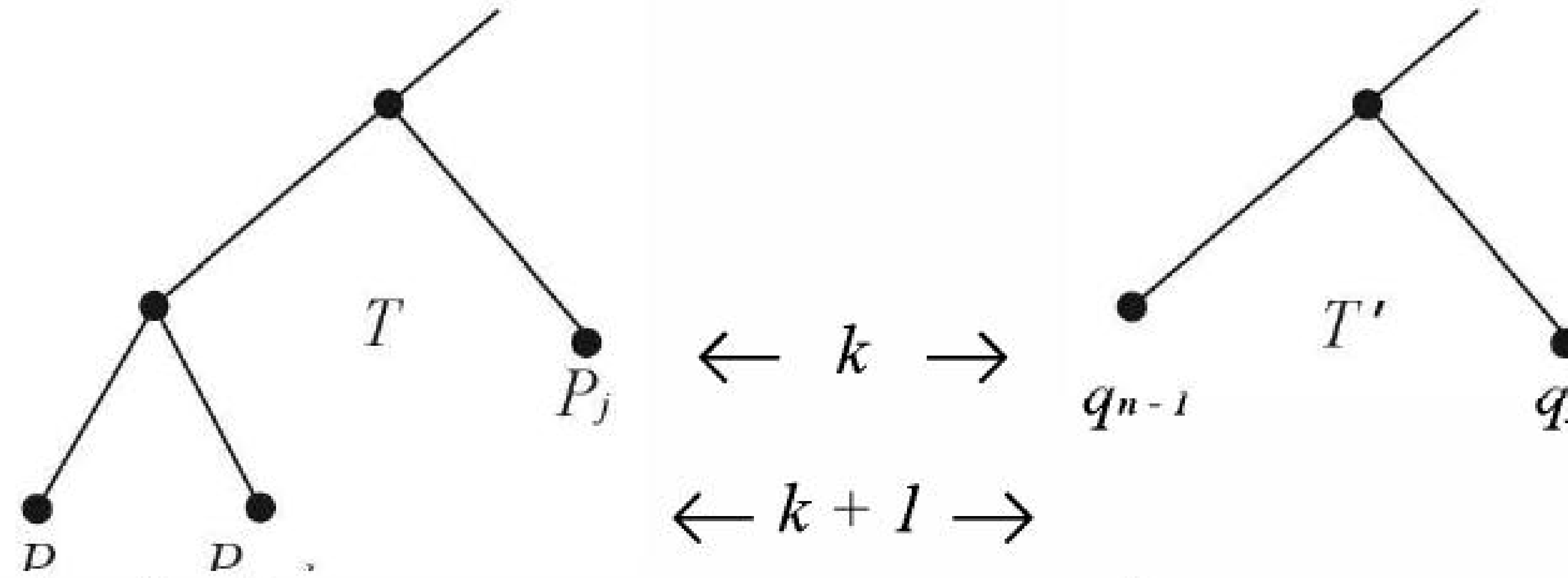
الإثبات: باستخدام الاستقراء على n، إذا كانت $n = 2$، نرسل أحد العددين 0 أو 1 لإرسال رسالة، وتُشفّر الخوارزمية كل مفردة بوصفها أحد هذين العددين. لذا فإنّ الطول الأمثل المتوقع يساوي 1. افترض أن $n > 2$، وأن الخوارزمية تحسب الشيفرة المثلى عندما يكون لدينا توزيع احتمالي على $n - 1$ من البنود. تُعيِّن كل شفرة مفردات لأوراق شجرة ثنائية. إذا أعطينا شجرة لها n من الأوراق، فإننا نستطيع تصغير الطول المتوقع من خلال التعيين الجشع للرسائل التي احتمالاتها: $p_1 \geq .... \geq p_n$ على الأوراق بترتيب متزايد بحسب العمق (البُعد).

لذا، يوجد لكل شفرة مثالية رسائل قليلة الاحتمالية تم تعيينها للأوراق التي لها أكبر عمق (بُعد). بما أنه توجد لكل ورقة تقع على أكبر عمق ورقةٌ أخرى تمثل أختًا لهذه الورقة، وبما أن تبديل البنود التي تقع على عمق معين لا يغيّر الطول المتوقع، فإننا نستطيع الافتراض أنّ الرسالتين الأقل احتمالا تظهران بوصفهما أختين عند أكبر عمق.

إفرض أن T شجرة مثالية لـ $p_1, ..., p_n$ بحيث إن p_n و p_{n-1} المفردتان الأقل احتمالاً وتقعان بوصفهما ورقتين أختين عند أكبر عمق. ولتكن T' الشجرةَ التي نحصل عليها من الشجرة T من خلال حذف هذه الأوراق. وافترض أيضا أن $q_1, ..., q_{n-1}$ التوزيعُ الاحتماليُّ الذي نحصل عليه بتبديل $\{p_{n-1}, p_n\}$ عن طريق وضع $q_{n-1} = p_{n-1} + p_n$. لاحظ أن الشجرة T' تعطينا شفرة لـ $\{q_i\}$. إن الطول المتوقع للشجرة T هو الطول المتوقع نفسه للشجرة T' مضافًا إليه q_{n-1}؛ لأنه إذا كان k هو العمق المحدد للورقة التي عينت بـ q_{n-1}، فإننا نخسر Kq_{n-1}، ونربح $(p_{n-1}+p_n)$ $(k+1)$ عندما نتحرك من T' إلى T.

وهذا يتحقق لكل خيار للشجرة T'. لذا، فمن الأفضل استخدام الشجرة T' التي تكون الشجرة المثلى

لـ $\{q_i\}$. ومن فرضية الاستقراء، نجد أن أفضل خيار لـ T' هو الذي نحصل عليه من تطبيق خوارزمية هفمان على $\{q_i\}$. بما أنه تمّ استبدال مكان q_{n-1} $\{p_{n-1},p_n\}$ في الخطوة الأولى من خوارزمية هفمان لـ $\{P_i\}$، فإننا نستنتج أن هذه الخوارزمية تولد الشجرة الأمثل T لـ $\{P_i\}$. ■



نعلم أن خوارزمية هفمان تحسب أفضل شفرة تخلو من المقدمات (أي ألا تأتي كلمة شفرة في بداية كلمة شفرة أخرى). وأن طولها المتوقع يكون قريبًا من الطول الأمثل من بين الأطوال جميعها التي تحددها الشفرات الثنائية. لقد أثبت شانون (Shannon) في العام 1984م أن الطول المتوقع لكل شفرة ثنائية (مؤلفة من عددين) يساوي على الأقل إنتروبي (entropy) التوزيع الاحتمالي المتقطع $\{pi\}$ والمعرّف على أنه $-\sum p_i \, lg \, p_i$ (التمرين 31). لاحظ أنه إذا كانت كل P_i أسًّا للعدد 1/2، فإن شفرة هفمان تحقق هذا الحدّ تمامًا (التمرين 30).

تمــارين (Exercises)

1.3.2. (−) عيّن أعدادًا صحيحة بوصفها أوزانًا لأضلاع K_n. أثبت أن الوزن الكلي على كل حلقة يكون زوجيًّا إذا وفقط إذا كان الوزن الكلي زوجيًّا على كل مثلث.

2.3.2. (−) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كانت T شجرة لها أصغر وزن ومولدة لبيان موزون G، فإن كل مسار من u إلى v في T يكون مسارًا في G من u إلى v، وله أصغر وزن.

3.3.2. (−) افترض أن لديك خمس مدن، وتريد بناء شبكة طرق بينها، مع العلم أن تكلفة بناء طريق من i إلى j هي المدخلة $a_{i,j}$ في المصفوفة أدناه، وأنّ المدخلة ∞ في المصفوفة تشير إلى وجود جبل كبير بين المدينتين ولا يمكن بناء طريق بينهما. جِدْ أقل تكلفة تمكّن الانتقال من أيّ مدينة إلى أخرى.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & \infty & 10 \\ 11 & 9 & \infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.2. (−) للبيان الذي تحصل عليه من K_5 بحذف ضلعين غير متجاورين، عيّن الأوزان (1,1,2,2,3,3,4,4) للأضلاع بطريقتين؛ بحيث يكون في إحداهما وزن أصغر شجرة مولدة وحيدًا. وفي الأخرى لا يكون كذلك.

5.3.2. (−) افترض أنّ لديك شبكة تحوي خمس مدن، وأنّ المدخلة $a_{i,j}$ في المصفوفة أدناه تمثّل زمن الانتقال المباشر من i إلى j. لاحظ أنّ المصفوفة غير متماثلة (استخدم البيانات الموجهة) وإذا كانت $a_{i,j} = \infty$، فإن هذا يعني عدم وجود مسلك مباشر من i إلى j. جِدْ أقل زمن ممكن، وأسرع مسلك من i إلى j لكل زوج i و j.

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & \infty & 17 \\ 7 & 0 & 5 & 22 & 33 \\ 14 & 13 & 0 & 15 & 27 \\ 30 & \infty & 17 & 0 & 10 \\ \infty & 15 & 12 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

• • • • •

6.3.2. (!) عيّن أوزانًا صحيحة لأضلاع K_n، وليكن وزنُ الحلقة مجموعَ أوزان أضلاعها، أثبت أن للحلقات جميعها

وزنًا زوجيًّا إذا وفقط إذا كان البيانُ الجزئي المكوّن من الأضلاع التي وزنها فردي عصبةً ثنائية مولدة. (مساعدة: أثبت أن كل مركبة من مركبات البيان الجزئي المؤلف من الأضلاع ذات الوزن الزوجي بيان تام).

7.3.2. افترض أن G بيان مترابط موزون، حيث إن أوزان أضلاعه مختلفة بعضها عن بعض. أثبت دون استخدام خوارزمية كروسكال أنه يوجد للبيان G شجرة مولدة واحدة فقط وزنها أقل ما يمكن (مساعدة: استخدم التمرين 34.1.2).

8.3.2. افترض أن G بيان مترابط موزون. أثبت أنه - بغض النظر عن كيفية تكسير الروابط لاختيار الضلع التالي في خوارزمية كروسكال- أن قائمة الأوزان لشجرة مولدة ذات أصغر وزن (مرتبة ترتيبًا غير متناقص) تكون فريدة.

9.3.2. افترض أن F غابة مولدة لبيان موزون G، وافترض أيضًا أن e ضلع بأصغر وزن من بين أضلاع G التي يقع طرفاها في مركبتين مختلفتين من مركبات F. أثبت أنه من بين الأشجار المولدة للبيان G التي تحوي F، توجد واحدة وزنها أصغر ما يمكن وتحوي e. استخدم هذا لإعطاء إثبات آخر على أن خوارزمية كروسكال تعمل بصورة صحيحة.

10.3.2. (!). خوارزمية برم (prim's Algorithm). تعمل هذه الخوارزمية على إثبات شجرة مولدة لبيان مترابط موزون G بدءًا من رأس معين من خلال تكرار إضافة أقل ضلع وزنًا من رأس تم الوصول إليه مسبقًا إلى رأس لم يتم الوصول إليه بعد. وينتهي عمل الخوارزمية بالوصول إلى الرؤوس جميعها (تُكسر الروابط اختياريًّا). أثبت أن خوارزمية برم تنتج شجرة مولدة لـ G وزنها أقل ما يمكن (Jarnik [1930], prim [1957], Dijkstra [1959])

11.3.2. لتكن T شجرة مولدة لبيان موزون، اجعل $m(T)$ تمثل أكبر وزن من أوزان أضلاع T. اجعل x أقلّ قيمة لـ $m(T)$ من بين قيم $m(T)$ على الأشجار المولدة جميعها لبيان موزون G. أثبت أنه إذا كانت T شجرة مولدة للبيان G حيث وزنها الكلي أصغر ما يمكن، فإن $m(T) = x$ (بكلمات أُخرى، T تصغر أكبر وزن). جد مثالاً تبيّن فيه أن العكس غير صحيح. (تعليق: تسمّى الشجرةُ التي تصغر أكبر وزن عنقَ الزجاجة أو أصغر أكبر شجرة مولدة).

12.3.2. في بيانٍ تام موزون، تمّ بتكرار خطوة اختيارُ ضلع أقلّ وزنًا، بحيث تُشكّل الأضلاع التي اختيرت إلى الآن اتحادًا منفصلاً من المسارات. بعد إجراء $n - 1$ خطوة، فإنك تحصل على مسار مولد. أثبت أن هذه الخوارزمية دائمًا تعطينا مسارًا مولدًا أقلّ وزنًا. أو هات عائلة غير منتهية من الأمثلة التي تفشل فيها الخوارزمية.

13.3.2. (!) افترض أنّ T شجرة وزنهاَ أقلّ ما يمكن مولدة للبيان G، وافترض أيضًا أنّ T' شجرة مولدة أُخرى في G. أثبت أنه يمكن تحويل T' إلى T من خلال إجراء عدّة عمليات تبديل ضلع من T' مع ضلع من T، بحيث نحافظ على بقاء مجموعة الأضلاع هذه بوصفها شجرة مولدة، وألا تتمّ أيّ زيادة على الوزن الكلي.

14.3.2. (!). افترض أنّ C حلقة في بيانٍ مترابط موزون. وافترض أيضًا أن e ضلع ذو أكبر وزن على C، أثبت أنه توجد شجرة مولدة ذات أقلّ وزن ولا تحوي e. استخدم هذا لبرهان أن تكرار حذف أثقل (ذو الوزن الأكبر) ضلع لا يمثل ضلع قطع لنحصل على بيان لا حلقي ينتج شجرة مولدة ذات أقل وزن.

15.3.2. افترض أن T شجرة مولدة ذات أقل وزن في بيان مترابط موزون G. أثبت أن T تحذف بعض الأضلاع ذات الوزن الثقيل من كل حلقة في G.

16.3.2. افترض أنّ لديك أربعة أشخاص يريدون أن يعبروا واديًا سحيقًا في الليل من خلال جسر متداع، علمًا بأنه لا يمكن أن يوجد أكثر من شخصين على الجسر في الوقت نفسه، وأن العبور يتطلب من كلّ عابر أن يكون لديه مصباح، ويوجد لديهم مصباح واحد فقط (يجب حمل المصباح مع كل من يعبر الجسر)، إذا قطع كل منهم الجسر وحده، لزمهم الزمن التالي للعبور: 10 دقائق للأول، و5 دقائق للثاني، ودقيقتان للثالث، ودقيقة واحدة للرابع. ولكن عندما يقطع اثنان معًا، فإنهما يمشيان بسرعة الأبطأ منهما، افترض أنه بعد 18 دقيقة سيأتي فيضان في الوادي يدمر الجسر، فهل يستطيع الأشخاص الأربعة العبور في الوقت المناسب؟ أثبت أن جوابك صحيح دون استخدام نظرية البيانات، وصفْ كيف يمكن الحصول على الجواب من خلال نظرية البيانات.

17.3.2. إذا أُعطيت رأسًا للبدء u في بَيان (بيان موجه) غير موزون G، فأثبت مباشرة (دون استخدام

خوارزمية ديجكسترا) أن الخوارزمية 8.3.2 تحسب $d(u, z)$ لكل $z \in V(G)$.

18.3.2. وضّح كيفية استخدام البحث أفقيًّا أولاً (BFS) لإيجاد خصر البيان G.

19.3.2. (+) أثبت صحّة قيام الخوارزمية التالية بإيجاد القطر لشجرة.

أولاً، شغل BFS من أيّ رأس تختاره w لإيجاد رأس u، بحيث يكون بُعْدُهُ عن w أكبرَ ما يمكن. بعد ذلك شغّل BFS من u لتصل إلى رأس v بُعْدُهُ عن u أكبرُ ما يمكن، سَجِّل $d(u, v) = T$ diam.
(Cormen-Leiserson-Rivest [1990,P476])

20.3.2. الشجرة المولدة ذات القطر الأصغر. نعرف الـ MDST (Minimum diameter spanning tree) على أنها شجرة مولدة يكون فيها أكبر طول لمسار صغيرًا قدر الإمكان. إن الحدس يقترح أن تشغيل خوارزمية ديجكسترا بدءًا من رأس ذي اختلاف مركزي أصغر (مركز) ينتج لنا MDST، إلا أنّ هذا قد يكون فاشلاً:

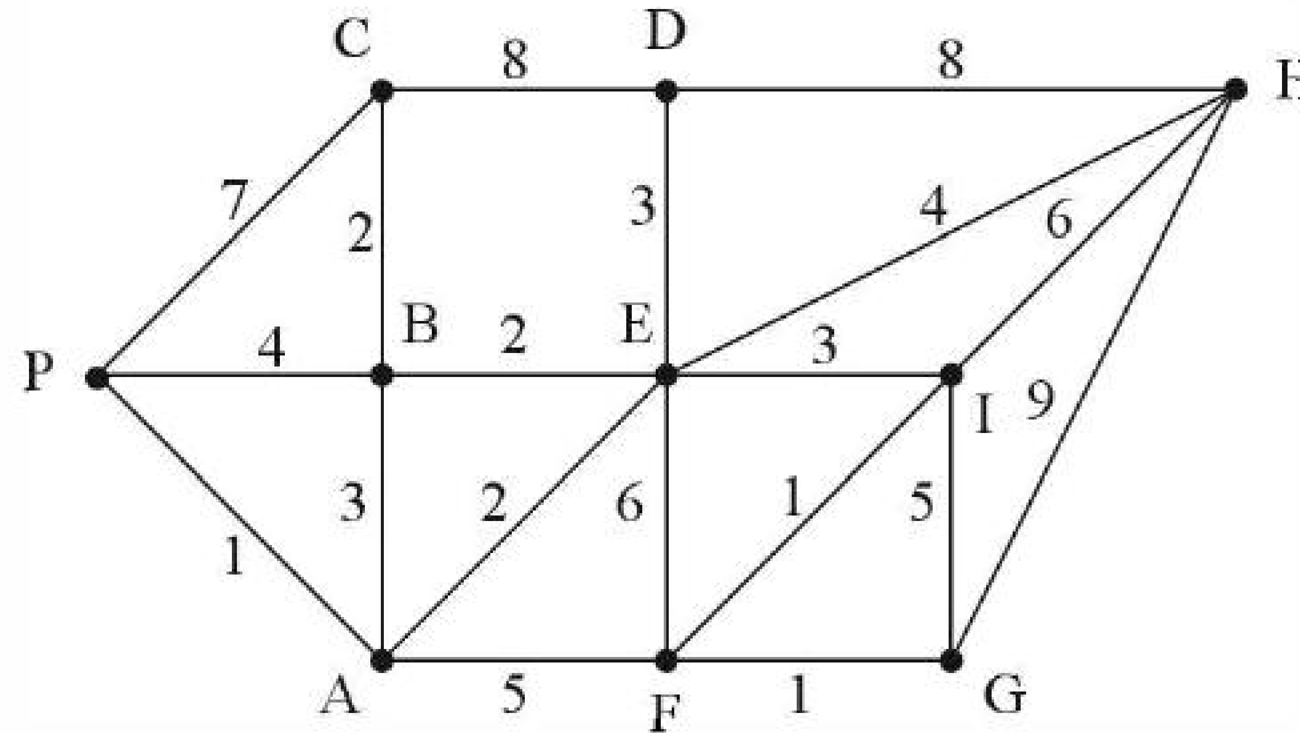
a) أعط مثالاً لبيان غير موزون له خمسة رؤوس (وزن كل ضلع يساوي 1) بحيث يمكن تشغيل خوارزمية ديجكسترا من رأس ذي اختلاف مركزي أصغر، وينتج عن ذلك شجرة مولدة ليس لها قطر أصغر.

b) أعط مثالاً لبيان موزون له أربعة رؤوس بحيث إنّ خوارزمية ديجكسترا لا تنتج MDST عند تشغيلها من أيّ رأس.

21.3.2. طوّر خوارزمية سريعة لاختيار ما إذا كان البيان الموجود لديك ثنائي الفرع، على افتراض أن البيان معطى بدلالة مصفوفة تجاوره، أو في صورة قائمة من الرؤوس وجيرانها، وأن الخوارزمية ليست بحاجة إلى افتراض أيّ ضلع أكثر من مرتين.

22.3.2. (−) جد حلًّا لمسألة ساعي البريد الصيني في البيان Q_k على افتراض أن وزن كل ضلع يساوي 1.

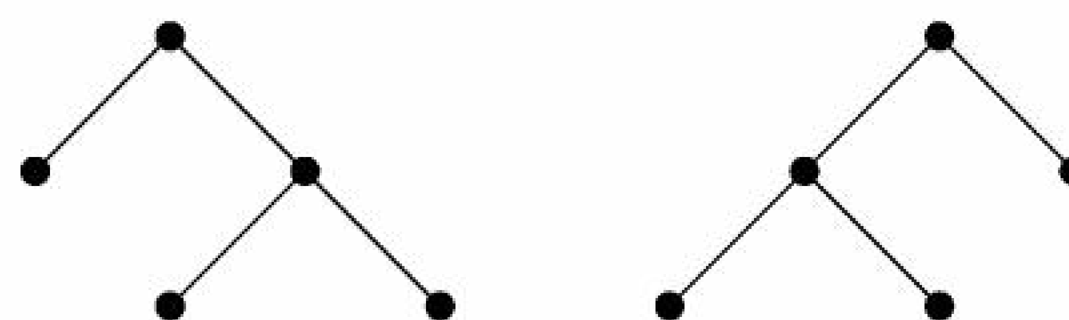
23.3.2. يركب ساعي البريد الكسول الحافلة في كل صباح للوصول إلى مكتب البريد، ومن هناك يختار مسلكًا للوصول إلى بيته بأسرع ما يمكن (لا ينهي جولته عند مكتب البريد). في البيان أدناه، تجد خارطة تمثل الشوارع التي يسير عليها من أجل تسليم الرسائل لأصحابها، ومعطى عليها الدقائق التي يستغرقها في السير سواء سلّم الرسالة أو لم يقم بذلك. فضلًا عن أن P ترمز إلى مكتب البريد وH ترمز إلى منزله. ماذا يجب أن تحقق الأضلاع التي قطعت أكثر من مرة؟ جد كم مرة يجب أن يمر على كل ضلع في حال اتباعه لمسلك مثالي.



24.3.2. (−) فسّر لماذا يمكن افتراض أنّ المسارب المثلى التي تزاوج بين الرؤوس الفردية لحلّ أمثل لمسألة ساعي البريد الصيني هي مسارات. جد بيانًا موزونًا له أربعة رؤوس فردية يتحقق فيه أنّ الحلّ الأمثل لمسألة ساعي البريد الصيني يتطلب مضاعفة الأضلاع الموجودة في مسارين لهما رأس مشترك.

25.3.2. افترض أنّ G شجرة مجذرة بحيث يوجد لكلّ رأس فيها إما 0 أو k من الأبناء. إذا أعطينا k، فما قيم $n(G)$ التي تجعل هذا ممكنًا؟

26.3.2. جد علاقة تكرارية لحساب عدد الأشجار الثنائية التي لها $n + 1$ ورقة (هنا يوجد ولدان بالضبط لكلّ رأس لا يمثل ورقة، فضلًا عن أن هناك أهمّية وتأثيرًا لترتيب الأبناء من اليسار إلى اليمين). الشجرتان أدناه تمثلان الحالات الممكنة عندما $n = 2$.



27.3.2. جدد علاقة تكرارية تعطي عدد الأشجار المستوية المجذرة التي لها n من الرؤوس. (كما في حالة الشجرة الثنائية المجذّرة. إن الأشجار الجزئية التي نحصل عليها بحذف الجذر من شجرة مستوية مجذّرة تُميّز من خلال ترتيبها من اليسار إلى اليمين).

28.3.2. (−) جد شفرة طولها المتوقع أصغر ما يمكن لمجموعة مؤلفة من عشر رسائل تردداتها النسبية هي: $1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9$ ، ما الطول المتوقع لرسالة في هذه الشفرة المثالية؟

29.3.2. يوجد في لعبة للكلمات المتقاطعة 100 حرف مكرّر بحسب القائمة أدناه، لاحظ أنّ هذا لا يتفق مع اللغة الإنجليزية. إن تكرار الحرف "S" قليل. فعلى سبيل المثال، لتحسين اللعبة؛ تظاهر أن هذه تكرارات نسبية في اللغة الإنجليزية، وجد شفرة تخلو من المقدمة بأقصر طول متوقع لنقل الرسائل. أعطِ جوابًا من خلال إعطاء قائمة بمرات الحدوث النسبية لكلّ طول لكلمة شفرة (كلمة سريّة). احسب الطَول المتوقع للشفرة (لكل حرف مستخدم) (تعليق: إن تشفر ASCII يستخدم خمسة أرقام لكلّ حرف، وتعدّ هذه الشفرة أفضل من الشفرة السابقة. بالطبع، يعاني تشفر ASCII عدم وجود شفرات لعلامات الترقيم فيه).

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	*Ø*
9	2	2	4	12	2	3	2	9	1	1	4	2	6	8	2	1	6	4	6	4	2	2	1	2	1	2

30.3.2. افترض أنّ لديك n من الرسائل التي احتمالات حدوثها هي: $p_1, \dots, p_n$؛ حيث p_i هي أُسّ للعدد $1/2$ (كل $p_i \geq 0$ و $\sum p_i = 1$):

a) أثبت أن احتمالية الرسالتين الأقل احتمالاً تكون متساوية.

b) أثبت أنّ طول الرسالة المتوقع لشفرة هفمان لهذا التوزيع هي: $-\sum p_i \lg p_i$

31.3.2. (+). افترض أن n من الرسائل تحدث باحتمالات $p_1, \dots, p_n$، وأنه تم تحديد كلمات شفرة ثنائية مختلفة للكلمات. أثبت أنه لكل شفرة يكون الطول المتوقع لكلمة سرية (شفرة) بالنسبة إلى هذا التوزيع مساوية $-\sum p_i \lg p_i$ على الأقل (مساعدة: استخدم الاستقراء على n) ([Shannon [1948]).

الفصل الثالث

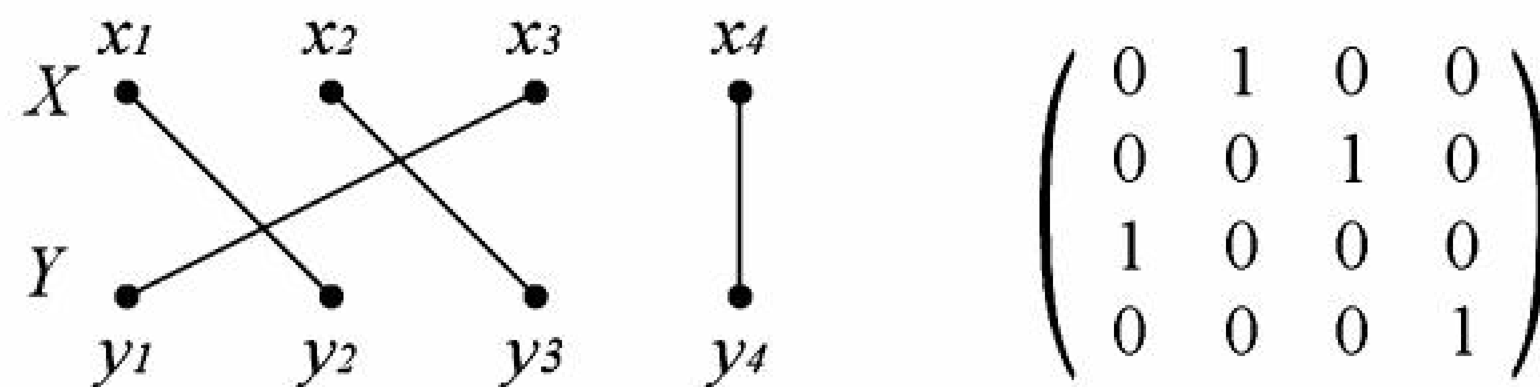
المواءمات والعوامل (Matchings and Factors)

1.3 المواءمات والغطاءات (Matchings and Covers)

لأيّ مجموعة من الأشخاص، هنالك أزواج منهم منسجمون بوصفهم رفقاء في غرف موجودين فيها؛ ماالشروط التي يجب أنْ تتوافر لكي نضعهم جميعًا في أزواج منسجمة؟ إنَّ العديد من تطبيقات البيانات تشتمل على مثل هذه الأزواج. ففي المثال 9.1.1 أخذنا في الحسبان مسألة ملء وظائف بمتقدمين مؤهّلين للعمل. ونعلم أنَّه توجد للبيانات الثنائيّة الفرع تجزئة طبيعيّة للرّؤوس إلى مجموعتين، ونريد معرفة ما إذا كان بالإمكان وضع المجموعتين في صورة أزواج باستخدام الأضلاع. لاحظ أنّه ليس من الضّروريّ أنْ يكون البيان ثنائيّ الفرع في مسألة رفقاء الغرف.

1.1.3. تعريف: المواءمة (matching) في البيان G هي مجموعة أضلاع ليست أنشوطات، ولا تتشارك في النّقاط الطّرفيّة. وتكون الرّؤوس الواقعة على أضلاع المواءمة M **مشبعة** (saturated) من قبل M؛ أمّا الرّؤوس الأخرى فتكون **غير مشبعة** (unsaturated) (نقول مشبعة من قبل M (*M-saturated*) وغير مشبعة من قبل M (M-unsaturated). **والمواءمة الكاملة** (perfect matching) في البيان هي المواءمة التي تكون رؤوسها جميعها مشبعة.

2.1.3. مثال: المواءمات الكاملة في $K_{n,n}$. خذ $K_{n,n}$ مع المجموعات المجزّأة $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ لاحظ أنّ المواءمة الكاملة تعرف دالة تناظر من X إلى Y. وأنّ إيجاد رفقاء لـ $x_1, x_2, \ldots$ بالتتابع يعطي $n!$ مواءمة كاملة. كلّ مواءمة تمثل بتبديل لـ $[n]$، حيث تُرسَل i إلى j عندما تكون x_i تلائم y_j. ونستطيع التعبير عن المواءمات، ويمكننا كذلك وضع X و Y بوصفه دليلًا للصّفوف والأعمدة، وذلك بوضع 1 في المواقع i, j لكلّ ضلع $x_i y_j$ في المواءمة M لنحصل على المصفوفة المقابلة؛ حيث إنَّ العدد 1 يوجد مرة واحدة فقط في كلّ صف وفي كلّ عمود. ■

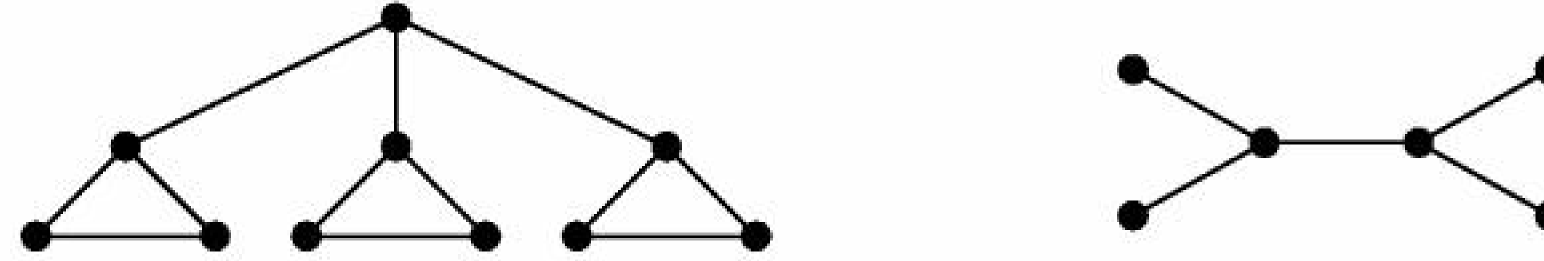


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.3. مثال: (المواءمات الكاملة في البيانات التامّة). بما أنَّ رتبة K_{2n+1} فرديّة، فلا يوجد له مواءمة كاملة. لاحظ أنَّ عدد المواءمات f_n في K_{2n} هو عدد الطرق لوضع $2n$ شخصًا مختلفًا في صورة أزواج. يوجد $2n$-1 طريقة لاختيار شريك للرّأس v_{2n}، وفي كل اختيار مماثل هناك f_{n-1} طريقة لإكمال المواءمة. لذلك، فإنّ $f_n=(2n-1)f_{n-1}$ لكلّ $n \geq 1$. وبجعل $f_o=1$، سنجد من الاستقراء أنَّ $f_n = (2n-1)\ (2n-3)\ldots(1)$.

يوجد أيضًا طريقة عدّ لحساب f_n. فمن ترتيب $2n$ شخصًا، نشكل مواءمة بوضع أول شخصين في زوج، ثم الاثنين التاليين، وهكذا. لذا، فإنَّ كلّ ترتيب سيؤدي إلى مواءمة واحدة. وبما أنَّ تغيير التّرتيب للأزواج، أو تغيير التّرتيب داخل الزوج نفسه لا يغير المواءمة الناتجة، فإنَّ كلّ مواءمة ستتولد بـ $2^n n!$ ترتيبًا. وعليه، يوجد $f_n = (2n)!/(2^n n!)$ مواءمة كاملة. ■

الرسم الاعتيادي لبيان بيترسون يظهر مواءمة كاملة وحلقتين على خمسة رؤوس. يحتاج حساب المواءمات الكاملة إلى بعض الجهد (التمرين 14). لاحظ أنَّ البناء الاستقرائيّ للمكعّب الزائدي Q_k يؤدي إلى العديد من المواءمات الكاملة (التمرين 16)، إلا أنّ حسابها بدقة يعدّ صعبًا. لاحظ أنَّ البيانات أدناه ذات رتب زوجيّة ولكن ليس لها مواءمات كاملة.



المواءمات العظمى (Maximum Matchings)

المواءمة هي مجموعة أضلاع. لذا، فإنَّ **حجمها** (size) هو عدد الأضلاع. ونستطيع البحث عن مواءمة كبيرة باختيار أضلاع واحدًا بعد الآخر، بحيث إنَّ نقاطها الطّرفيّة لم تستخدم في الأضلاع التي اختيرت سابقًا، حتى لا تبقى أيّ أضلاع موجودة. وهذا يؤدي إلى مواءمة عظمى، ولكنّها قد لا تكون مواءمة كبرى.

4.1.3. تعريف: المواءمة العظمى (maximal matching) في البيان هي المواءمة التي لا يمكن توسيعها بإضافة ضلع. أمّا **المواءمة القصوى** (maximum matching) فهي المواءمة التي لها أكبر حجم من بين المواءمات جميعها في البيان.

تكون المواءمة M عظمى إذا تحقّق أنَّ كلّ ضلع غير موجود في M يقع على ضلع موجود أصلاً في M. ولاحظ أنَّ كلّ مواءمة كبرى هي مواءمة عظمى، ولكن ليس بالضرورة أنْ يتحقق العكس.

5.1.3. مثال: عظمى $\neq$ كبرى. البيان الأصغر الذي له مواءمة عظمى ولكنها ليست مواءمة كبرى هو P_4. فإذا أخذنا الضّلع الأوسط، فإنّنا لا نستطيع إضافة أيّ أضلاع أخرى، ولكن الضّلعيّن الآخرين الطرفيين يشكلان مواءمة أوسع. وسنبيّن أدناه هذه الظاهرة في كل من P_4 و P_6. ■



في المثال 5.1.3، يؤدي استبدال الأضلاع الغامقة بالأضلاع الرّفيعة إلى مواءمة أوسع. وهذا يعطينا طريقة للبحث عن مواءمات أوسع.

6.1.3. تعريف: لتكن M مواءمة، نعرِّف **المسار المتناوب للمواءمة** M (M-alternating path) على أنّه المسارُ الذي يتناوب بين أضلاع في M وأضلاع أخرى ليست فيها. أمّا المسار المتناوب للمواءمة الذي تكون نقاطه الطّرفيّة غير مشبعة من M فهو **المسار الموسّع للمواءمة** M (M-alternating path) .

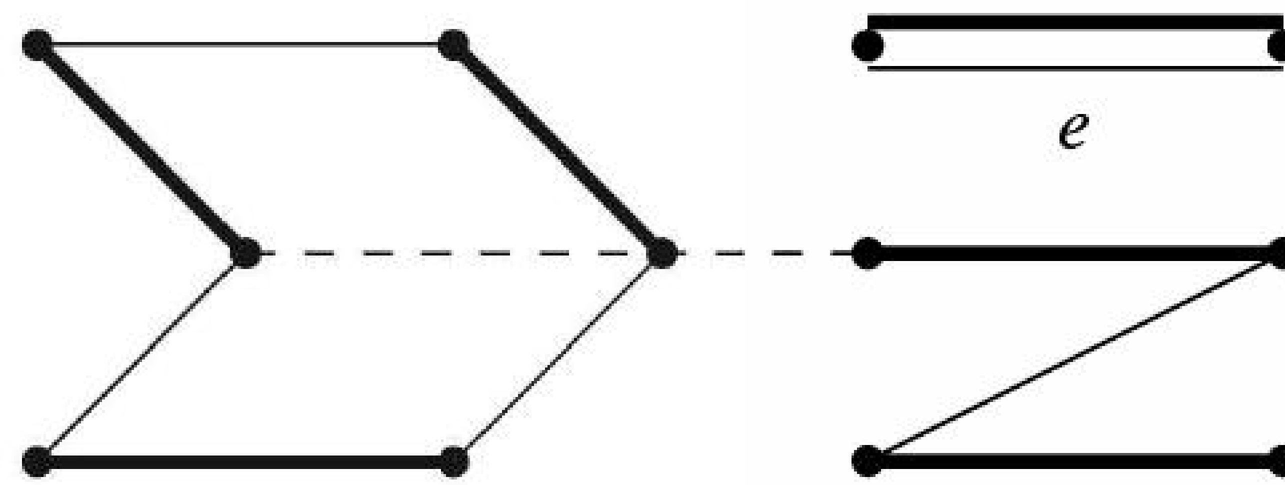
إذا أعطينا مسارًا P موسّعا للمواءمة M، فإنّنا نستطيع استبدال أضلاع المواءمة M في P مع بقية الأضلاع لـ P لنحصل على مواءمة جديدة M' مع ضلع إضافيّ واحد. ولذلك، عندما تكون M مواءمة كبرى، فلا يوجد مسار موسّع للمواءمة M.

سنثبت فيما يأتي أنَّ المواءمات العظمى تُميّز بواسطة المسارات الموسّعة المفقودة. فإذا أعطينا مواءمتين، فسنأخذ في الحسبان مجموعة الأضلاع التي تنتمي بالضبط إلى إحدى المجموعتين. وتسمّى هذه العملية عمليةَ "الفرق التّماثليّ" للمجموعات (انظر الملحق A) التي من الممكن توسيعها إلى البيانات.

7.1.3. تعريف: للبيانين G و H، نعرِّف **الفرق التّماثليّ** (Symmetric difference) $G \Delta H$ على أنّه البيانُ الجزئيّ من $G \cup H$ الذي تكون أضلاعه هي الأضلاع في $G \cup H$ والتي تظهر بالضبط في واحد من G أو H. ونستخدم أيضًا هذا الرمز لمجموعات الأضلاع؛ بصورة خاصة، إذا كانت كلّ من M و M' مواءمتين، فإنَّ:

$$M \Delta M' = (M - M') \cup (M' - M)$$

8.1.3. مثال: في البيان أدناه، لاحظ أنَّ M مواءمةٌ لجسم له خمسة أضلاع رفيعة، أمّا M' فهي مواءمة لجسم له ستة أضلاع سميكة، والأضلاع المنقّطة لا تنتمي إلى M ولا إلى M'. ويوجد للمواءمتين ضلع مشترك واحد هو e وهو لا ينتمي إلى فرقهما التّماثليّ، إضافة إلى أنَّ أضلاع $M \Delta M'$ تشكّل حلقة طولها 6 ومسارًا طوله 3. ■



9.1.3. تمهيدية: كلّ مركبة للفرق التّماثليّ لمواءمتين هي مسار أو حلقة زوجيّة. الإثبات: لتكن M و M' مواءمتين، وليكن $F = M\Delta M'$. بما أنَّ M و M' مواءمتان، فإنَّ كلّ رأس يقع على ضلع واحد من كل منهما على الأكثر. لذا، يوجد ضلعان لـ F عند كل رأس على الأكثر. وبما أنَّ $\Delta(F) \leq 2$، فإنَّ كلّ مركبة لـ F هي حلقة أو مسار. وأكثر من ذلك، فإنَّ كلّ مسار أو حلقة في F يتناوب بين أضلاع $M - M'$ وأضلاع $M' - M$. لذا، فإنَّ لكلّ حلقة طولًا زوجيًّا مع عدد متساوٍ من الأضلاع من M و M'. ■

10.1.3. نظرية: (بيرج [1957] (Berge)). تكون المواءمةُ M في البيان G مواءمةً كبرى إذا وفقط إذا خلا G من مسار موسّع للمواءمة M.

الإثبات: سنثبت المكافئ العكسيّ لكلّ اتجاه؛ لاحظ أنَّ لـ G مواءمة أوسع من M إذا وفقط إذا كان لـ G مسار موسّع للمواءمة M. وقد لاحظنا أنّه من الممكن استخدام المسار الموسّع للمواءمة M لينتج مواءمة

أوسع من M. وبالنسبة إلى الاتجاه العكسيّ، لتكن M' مواءمة في G أوسع من M؛ سوف ننشئ مسارًا موسّعًا للمواءمة M. ليكن $F = M \Delta M'$. فباستخدام التمهيدية 9.1.3، نجد أنّ F يتكون من مسار وحلقة زوجيّة؛ والحلقات لها عدد الأضلاع نفسه من M و M'. وبما أنّ $|M'| > |M|$، فيجب أنْ يكون لـ F مركّبة عدد أضلاعها من M' أكثر من عدد أضلاعها من M. إنّ مثل هذه المركّبة يمكن أنْ تكون فقط مسارًا يبدأ وينتهي بضلع في M'؛ لذلك فهي مسار موسّع للمواءمة M في G. ■

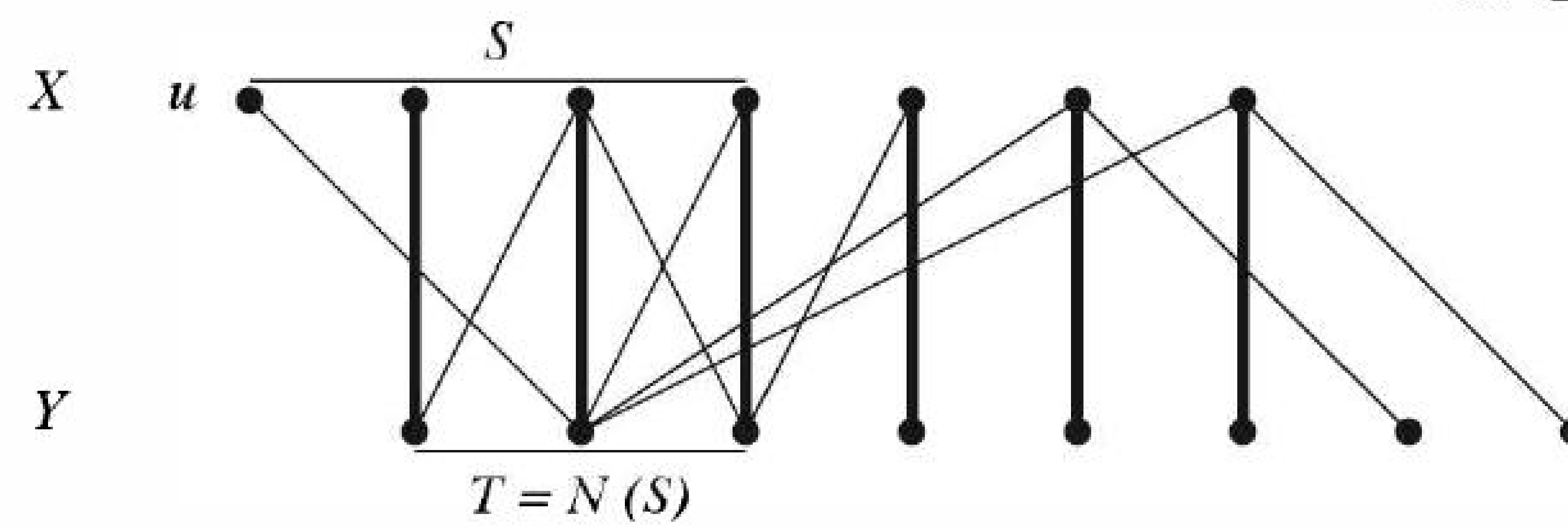
شرط هال للمواءمة (Hall's Matching Condition)

عندما نشغل الوظائف بالمتقدّمين للعمل، عادة ما يكون عدد المتقدمين أكثر من عدد الوظائف؛ فضلًا أنّ تعبئة الوظائف بصورة متتابعة لا يوظّف المتقدمين للعمل جميعهم. لنمذجة هذه المسألة، نأخذ بيانًا ثنائيّ الفرع مع التّجزئة الثّنائيّة X ،Y (التعريف 17.2.1)، ونبحث عن مواءمة مشبعة لـ X.

إذا كانت المواءمة M مشبعة لـ X، فإنّ لكل $S \subseteq X$ يجب أنْ يوجد على الأقلّ $|S|$ رأسًا لها جار في S؛ لأن الرّؤوس المواءمة لـ S يجب اختيارها من تلك المجموعة. وسنستخدم $N_G(S)$ أو $N(S)$ لنرمز إلى مجموعة الرّؤوس التي لها جار في S. وعليه، فإنّ $N(S) \geq |S|$ شرطٌ ضروريٌّ. الشرط "لكلّ $S \subseteq X$، فإنّ $|N(S)| \geq |S|$" هو شرط **هال** (Hall's Condition). ولقد أثبت هال أنّ الشّرط الضّروريّ الواضح هو أيضًا شرطٌ كافٍ (TONCAS).

11.1.3. نظرية: (نظرية هال –[1935] P. Hall) إذا كان G بيانًا ثنائيّ الفرع وتجزئته الثّنائيّة X ، Y، فإنّ له مواءمة مشبعة لـ X إذا وفقط إذا كان $|N(S)| \geq |S|$ لكلّ $S \subseteq X$.

الإثبات: الضّرورة. لاحظ أنّ الـ $|S|$ رأسًا التي تتواءم مع S يجب أنْ تقع في $N(S)$. الكفاية. لإثبات أنّ شرط هال كافٍ، فإنّنا سنثبت المكافئ العكسيّ. إذا كانت M مواءمة كبرى في G وليست مشبعة لـ X، فسنحصل على مجموعة $S \subseteq X$، بحيث يكون $|N(S)| < |S|$. ليكن u رأسًا من X غير مُشبع من M. من بين كلّ الرّؤوس التي يمكن الوصول إليها من u باستخدام مسارات متناوبة للمواءمة M في G، اجعل S تتكوّن من الرّؤوس المأخوذة من X، و T تتكوّن من الرّؤوس المأخوذة من Y (انظر الرسم أدناه حيث M هي الأضلاع السّميكة). لاحظ أنّ $u \in S$.



ندّعي أنّ M توائم T مع S-{u}. لاحظ أنّ المسارات المتناوبة للمواءمة M من الرّأس u تصل Y من خلال أضلاع ليست في M، وتعود إلى X من خلال أضلاع في M. وبما أنّه لا يوجد مسار موسّع للمواءمة M، فإنّ كلّ رأس في T هو رأس مشبع. لذلك، فإنّ المسار المتناوب للمواءمة M الذي يصل $y \in T$ يوسّع من خلال M ليصل إلى رأس في S. لذا، فإنّ أضلاع M تعطينا دالّة تناظر من T إلى S-{u}، وعليه $|T| = |S$-{u}$|$. لاحظ أنّ المواءمة بين T و S-{u} تعطينا $T \subseteq N(S)$. في الحقيقة، $T = N(S)$. افترض أنّ لـ $y \in Y$-T جار $v \in S$. بما أنّ الرّأس u غير مشبع، و S-{u} يتواءم مع T من خلال M لذا، لا يمكن أنْ يكون الضّلع vy في M. لذلك، فإنّ إضافة الضّلع vy إلى المسار المتناوب للمواءمة M للوصول إلى v يعطينا مسارًا متناوبًا للمواءمة M يصل إلى y. وهذا يناقض $y \notin T$. وعليه، لا يمكن أنْ يكون الضّلع vy موجودًا. وباستخدام $T = N(S)$ هذا الخيار للمجموعة S، نكون قد أثبتنا أنّ $|N(s)| = |T| = |S|-1 < |S|$. وهذا يكمل إثبات

المكافئ العكسيّ. ■

من الممكن أيضًا إثبات الكفاية بفرض شرط هال، وبافتراض عدم وجود مواءمة مشبعة لـ X، والحصول على تناقض. وكما شاهدنا، فإنَّ عدم وجود مواءمة مشبعة لـ X يؤدي إلى انتهاك شرط هال. لاحظ أنَّ نقض الفرضيّة عادة ما يعني أنَّ المكافئ العكسيّ للشّرط المطلوب قد أثبت. وعليه، نكون قد عرضنا الإثبات بذلك الأسلوب.

12.1.3. ملاحظة : تقتضي النظرية 11.1.3 أنّه عندما لا توجد للبيان الثنائيّ الفرع مع التّجزئة الثّنائيّة X,Y مواءمة مشبعة لـ X، فإنّنا نستطيع التّحقّق من ذلك بإظهار مجموعة جزئيّة من X مع عدد قليل جدًّا من الجيران. لاحَظ أيضًا أنَّ العبارة والإثبات يسمحان بأضلاع متكررة. ■

لقد نشر العديد من البراهين نظرية هال؛ انظر ([Mirsky [1971], p38) و ([Jacobs [1969]) للخلاصات. لاحظ أنَّ إثباتًا لهال ([M. Hall [1948]) يقود إلى الحدّ السّفليّ على عدد المواءمات المشبعة لـ X، بوصفها دالّة على درجات الرّؤوس. وسنأخذ في الحسبان الخوارزميّات في الدّرس 2.3.

عندما يكون لمجموعات ثنائيّة الحجمُ نفسُه ؛ فإنَّ نظرية هال تصبح **نظرية الزواج** (Marriage Theorem)، التي أثبتت أصلاً من قِبَل فيربينيوس [1917] (Frobenius). وقد ظهر الاسم من وضع علاقة الانسجام بين مجموعة فيها n رَجُلًا ومَجموعة أخرى فيها n امرأة. إذا وجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث يكون كلّ رجل منسجمًا بالضبط مع k امرأة، وكلّ امرأة منسجمة مع k رجلاً، فإنّه لا بدّ من وجود مواءمة كاملة. مرة أخرى نسمع بوجود الأضلاع المتكرّرة التي توسّع مجال التّطبيقات (انظر المبرهنتين 9.3.3 و 7.1.7 على سبيل المثال).

13.1.3. نتيجة : لـ $k > 0$، يوجد لكلّ بيان ثنائيّ الفرع منتظم من الدّرجة k مواءمةٌ كاملة.

الإثبات : ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y ومنتظمًا من الدّرجة k. إنَّ عدد الأضلاع التي نقاطها الطّرفيّة في X، وعدد الأضلاع التي نقاطها الطّرفيّة في Y يظهر أنَّ $k\,|X| = k\,|Y|$. وهكذا، فإنَّ $|X| = |Y|$. لذلك، يكفي التّحقّق من شرط هال؛ ولاحظ أنَّ المواءمة التي تشبع X سوف تشبع Y أيضًا، وسوف تكون مواءمة كاملة. لنأخذ $S \subseteq X$ في الحسبان. ليكن m عدد الأضلاع من S إلى $N(S)$. بما أنَّ G بيان منتظم من الدّرجة k، فإنَّ $m = k|S|$. وهذه الـ m ضلعًا تقع على $N(S)$. لذلك، فإنَّ $m \leq k|N(S)|$. و $k|S| \leq k\,|N(S)|$ ، وهذا يؤدي إلى أنَّ $|N(S)| \geq |S|$ عندما $k > 0$. وبما أنَّ اختيار $S \subseteq X$ كان عشوائيًّا، فنكون قد أثبتنا شرط هال. ■

لاحظ هنا أنّه يمكن استخدام التّناقض. بافتراض أنَّ G لا يملك مواءمة كاملة، فإنَّ هذا يعطي مجموعة $S \subseteq X$ بحيث $|N(S)|<|S|$. وأنَّ الإثبات الذي يعطي تناقضًا يكافئ إعادة صياغة الإثبات المباشر المعطى في الأعلى.

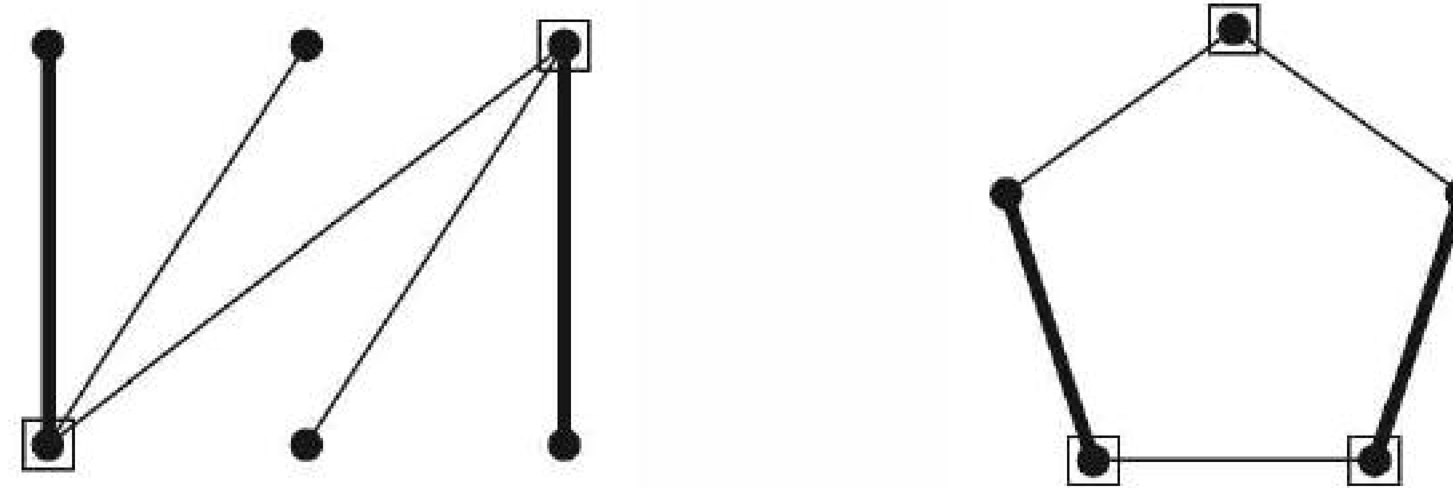
نظريات أدنى أكبر (Min - Max Theorems)

عندما لا يكون للبيان G مواءمة كاملة، فإنَّ النظرية 3.1.10 تسمح لنا بإثبات أنَّ M مواءمةٌ كبرى من خلال إثبات أنَّه لا يوجد لـ G مسار موسّع للمواءمة M. إنَّ استكشاف المسارات المتناوبة جميعها للمواءمة M لحذف إمكانيّة التّوسيع قد يأخذ وقتًا طويلاً.

ولقد واجهنا موقفًا مشابهًا عندما أثبتنا أنَّ البيان ليس ثنائيّ التّجزئة، وبدلاً من فحص التّجزئات المحتملة، نستطيع إيجاد حلقة فردية. وهنا مجددًا، بدلاً من استكشاف المسارات المتناوبة جميعها للمواءمة M، فإنَّنا نفضل إيجاد بناء صريح في G يمنع وجود أيّ مواءمة أوسع من M.

14.1.3. تعريف: الغطاء الرّأسيّ (vertex cover) للبيان G هو مجموعة جزئية Q من $V(G)$ تحوي على الأقلّ نقطةً طرفيّة واحدة من كلّ ضلع؛ أيّ أنَّ الرّؤوس في Q تغطي $E(G)$. في البيان الذي يمثّل شبكة طرق (طرق مستقيمة ولا يوجد رؤوس معزولة)، نستطيع تفسير المسألة بإيجاد أصغر غطاء رأسيّ، كمسألة وضع أقلّ عدد ممكن من رجال الشّرطة لحماية شبكة الطّرق بكاملها. إذن، وفي هذا السياق، فإنَّ "غطاء" تعني "مراقبة". بما أنَّه لا يوجد رأس يمكن أنْ يغطي ضلعين لمواءمة، فإنَّ حجم كلّ غطاء رأسيّ يساوي حجم كلّ مواءمة على الأقلّ. لذلك، فإنَّ الحصول على مواءمة و غطاء رأس بالحجم نفسه يثبت أنَّ كلّا منهما هي الأمثل. لاحظ أنَّ مثل هذه البراهين موجودة للبيانات الثنائيّة الفرع، ولكنها ليست موجودة للبيانات جميعها.

15.1.3. مثال: (المواءمات والأغطية الرّأسيّة). في البيان عن اليسار أدناه، عَلمنا غطاء رأسيًّا حجمه 2، وعرضنا كذلك مواءمة حجمها 2 مرسومة بخطّ سميك. إنَّ الغطاء الرّأسيّ الذي حجمه 2 يمنع وجود مواءمات بأكثر من ضلعين، إضافة إلى أنّ مواءمات حجمها 2 تمنع وجود أغطية الرّؤوس التي رؤوسها أقلّ من 2. وكما هو موضّح عن اليمين، فإنَّ القيم المثلى تختلف عن الحلقات الفردية بـ 1. ومن الممكن أنْ يكون الاختلاف كبيرًا بصورة عشوائيّة (التمرين 10.3.3). ■



16.1.3. نظرية: (كونج König [1931]، إيجرفاري Egervary [1931]) إذا كان G بيانًا ثنائيّ الفرع، فإنَّ أكبر حجم لمواءمة في G يساوي أصغر حجم لغطاء رأسيّ في G.

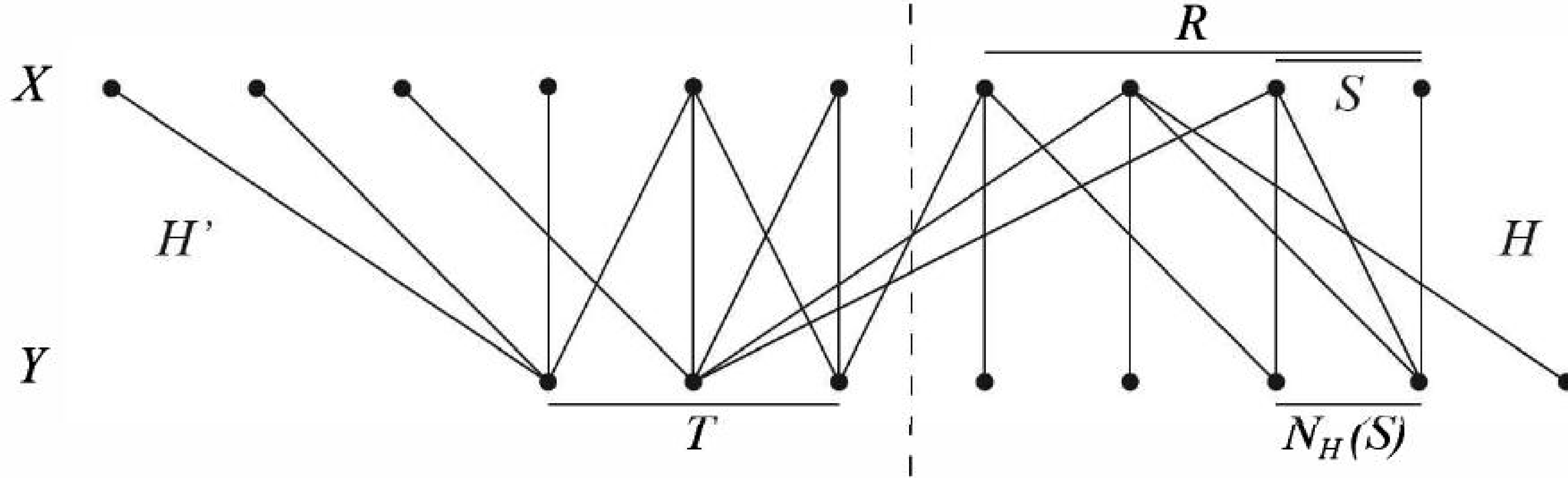
الإثبات: ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع بالتّجزئة $X،Y$. بما أنّه يجب استخدام رؤوس مختلفة لتغطية الأضلاع في المواءمة، فإنَّ $|Q| \geq |M|$ عندما يكون Q غطاءً رأسيًّا و M مواءمة في G. ليكن Q أصغر غطاء رأسيّ للبيان G. سوف ننشئ مواءمة حجمها $|Q|$، ونثبت أنَّنا نستطيع تحقيق المساواة دائمًا.

جزّئ Q بوضع $R = Q \cap X$ و $T = Q \cap Y$. ليكن H و H' بيانين جزئيّين في G مُحدثين بواسطة $R \cup (Y - T)$ و $T \cup (X - R)$، على التّرتيب. نستعمل نظرية هال لنثبت أنَّ H له مواءمة تشبع R إلى $Y - T$ و H' له مواءمة تشبع T. وبما أنَّ H و H' منفصلان، فإنَّ المواءمتين تشكّلان معًا مواءمة في G حجمها $|Q|$.

بما أنَّ $R \cup T$ غطاءٌ رأسيّ، فإنَّ G ليس له أضلاع من $Y - T$ إلى $X - R$. فلكلّ $S \subseteq R$، نأخذ في الحسبان

$N_H(S)$ والمحتوى في T - Y. إذا كان $|S| > |N_H(S)|$ وبما أنّ $N_H(S)$ تغطي الأضلاع جميعها التي تتقاطع مع S، والتي لم تغطّ بواسطة T، فنستطيع تعويض $N_H(S)$ لأجل S في Q لنحصل على أصغر غطاء رأسيّ.

إنّ الأصغريّة لـ Q تؤدي إلى شرط هال في H. لذا، يكون لـ H مواءمة مشبعة لـ R. إنّ تطبيق الحجة نفسها على H' تعطي مواءمة مشبعة لـ T. ■



ولأن نظريّة البيان مستمرّة في التّطور فستظهر براهين جديدة لنتائج أساسيّة مثل نظرية كونج وإيجرفاري (König – Egervary)؛ انظر ريزي .(Rizzi) [2000]

17.1.3. ملاحظة : تنصّ نظرية **علاقة أصغر – أكبر** (min – max relation) على المساواة بين الإجابات لمسألتي التّصغير و التّكبير على صفّ من الأمثلة. لاحظ أنّ نظرية كونج وإيجرفاري مثال على العلاقة بين أغطية الرّأس والمواءمة في البيانات الثنائيّة الفرع.

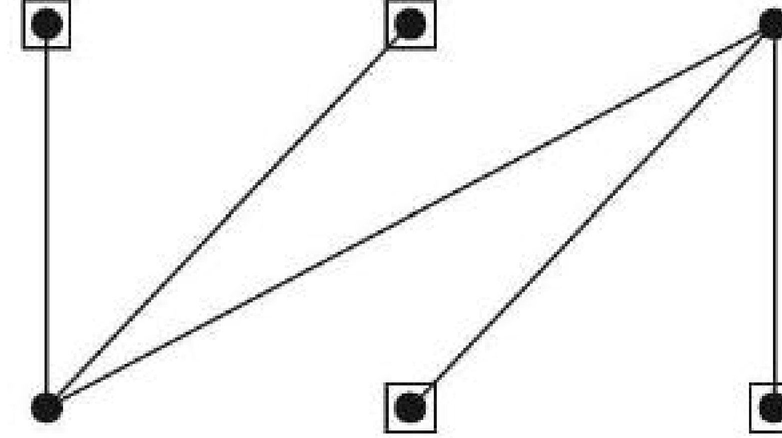
ولمناقشة ذلك؛ نفكّر في زوج من مسائل **الأمثليّة الثّنويّة** (dual optimization problems) لمسألتي التّكبير **M** و التّصغير **N**، معرفتين على الأمثلة نفسها (مثل البيانات)، بحيث يكون كلّ حلّ مرشحًا M لـ **M** وكلّ حلّ مرشحًا N لـ **N** (على المثال نفسه). إنّ قيمة M تساوي قيمة N أو أقلّ منها. غالبًا ما تكون "القيمة" أساسيّة (cardinality). ومثال ذلك عندما تكون **M** مواءمة كبرى و **N** أصغر غطاء رأسيّ.

عندما تكون **M** و **N** مسألتين ثنويّتين فإنّ الحصول على الحلول المرشحة M و N التي لها القيمة نفسها تثبت أنّ M و N هما حلّان مثليان لذلك المثال. سوف نرى العديد من الأزواج من المسائل الثنوية في هذا الكتاب. لاحظ أنّ علاقة أصغر – أكبر تنصّ على أنّ البراهين القصيرة للأمثلة موجودة على بعض صفوف الأمثلة. وأنّ هذه النظريات مرغوب فيها لأنها توفر الجهد؛ وهدفنا التالي هو نظرية أخرى مماثلة تتعلق بالمجموعات المستقلّة في البيانات الثنائيّة الفرع. ■

المجموعات المستقلة والأغطية(Independent Sets and Covers)

ننتقل الآن من المواءمات إلى المجموعات المستقلّة. ونعرّف عدد الاستقلال للبيان على أنّه أكبر حجم لمجموعة مستقلّة من الرّؤوس.

18.1.3. مثال: ليس بالضرورة أنْ يكون عدد الاستقلال لبيان ثنائيّ الفرع مساويًا لحجم مجموعة مجزّأة للبيان. في البيانات أدناه، كلّ من المجموعات المجزّأة حجمها 3، ولكننا أشرنا إلى مجموعة مستقلة حجمها 4. ■



لاحظ أنّه لا يوجد رأس يغطّي ضلعين في مواءمة. وبطريقة مماثلة، لا يوجد ضلع يحتوي على رأسين من مجموعة مستقلّة، وهذا يؤدي إلى مسألة غطائيّة ثنويّة أخرى.

19.1.3. تعريف: الغطاء الضّلعيّ (edge cover) للبيان G هو مجموعة L من الأضلاع، بحيث يكون كلّ رأس في G يقع على بعض الأضلاع في L. ونقول: إنَّ الرّؤوس في G مغطاة بأضلاع من L. ففي المثال 18.1.3، نجد أنَّ الأضلاع الأربعة الواقعة على الرّؤوس المعلّمة تشكّل غطاءً ضلعيًّا؛ ويكون الرأسان المتبقيان قد غطّيا "بصورة حرّة" "for free".

إنَّ البيانات التي ليس لها رؤوس معزولة هي البيانات التي تملك الغطاءات الضّلعيّة فقط، ولاحظ أنَّ المواءمة الكاملة تشكّل غطاء ضلعيًّا على $\frac{n(G)}{2}$ من الأضلاع. وعمومًا، نستطيع الحصول على غطاء ضلعيّ بإضافة أضلاع إلى المواءمة العظمى.

20.1.3. تعريف: للأحجام المثلى للمجموعات في الاستقلال، ومسائل الغطاءات التي عرّفت، نستخدم الرّموز أدناه.

$\alpha\,(G)$ أكبر حجم لمجموعة مستقلّة.

$\alpha'\,(G)$ أكبر حجم لمواءمة.

$\beta\,(G)$ أصغر حجم لغطاء رأسيّ.

$\beta'\,(G)$ أصغر حجم لغطاء ضلعيّ.

لاحظ أنّه قد يكون للبيان العديدُ من المجموعات المستقلّة التي حجمها هو الأكبر (C_5 له خمسة من هذه المجموعات)، ولكن عدد الاستقلال $\alpha\,(G)$ هو عدد صحيح ($\alpha\,(C_5) = 2$). إنَّ الرّموز تعامل الأعداد التي تجيب عن مسائل الأمثليّة بوصفها متغيّرات للبيان، كالترتيب، والحجم، وأكبر درجة، والقطر، إلخ. إنَّ استخدامنا للرّمز $\alpha'(G)$ لعدّ الأضلاع في مواءمة كبرى يقترح علاقة مع المتغيّر $\alpha\,(G)$ الذي يعدّ الرّؤوس في أكبر مجموعة مستقلّة. وسنكتشف هذه العلاقة في درس 1.7.

نستعمل $\beta(G)$ لأصغر غطاء رأس استنادًا إلى تداخلاتها مع المواءمات العظمى. ونستخدم "الفتحة" (ePrim) على $\beta'(G)$ بدلاً من $\beta(G)$؛ لأن $\beta(G)$ تحسب مجموعة الرّؤوس، أمّا $\beta'(G)$، فتحسب مجموعة الأضلاع.

وباستعمال هذه الرّموز، فإنَّ نظرية كونج وإيجرفاري تنصّ على أنَّ $\alpha'(G)= \beta\,(G)$ لكلّ بيان ثنائيّ الفرع مثل G. سنثبت أيضًا أنَّ $\alpha\,(G) = \beta'(G)$ للبيانات الثنائيّة الفرع التي ليس لها رؤوس معزولة. بما أنَّه لا يوجد ضلع قد يغطي رأسين في مجموعة مستقلّة واحدة، فإنَّ المتباينة $\beta'(G) \geq \alpha\,(G)$ تنتج مباشرة.

(عندما تكون $S \subseteq V(G)$، نستخدم عادة $\overline{S}$ للدّلالة على مجموعة $(V(G) - S)$، الرّؤوس المتبقيّة).

21.1.3. تمهيدية : في البيان G، تكون المجموعةُ $S \subseteq V(G)$ مستقلةً إذا وفقط إذا كانت $\overline{S}$ غطاءً رأسيًّا. وعليه، فإنَّ $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

الإثبات: إذا كانت S مجموعة مستقلة، فإنَّ كلّ ضلع يقع على رأس واحد في $\overline{S}$ على الأقلّ. وعكس هذا، إذا كانت $\overline{S}$ تغطي الأضلاع جميعها، فإنَّه لا يوجد أضلاع تربط بين رؤوس S. لذا، فإنّ كلّ مجموعة مستقلة كبرى هي المتممةُ للغطاء الرأسيّ الأصغر، و $\alpha (G) + \beta (G) = n (G)$. ■

إنَّ العلاقةَ بين المواءمات وغطاءات الأضلاع علاقةٌ دقيقة بدرجة كبيرة. وعلى الرّغم من ذلك، فهناك صيغة مشابهة تتحقّق.

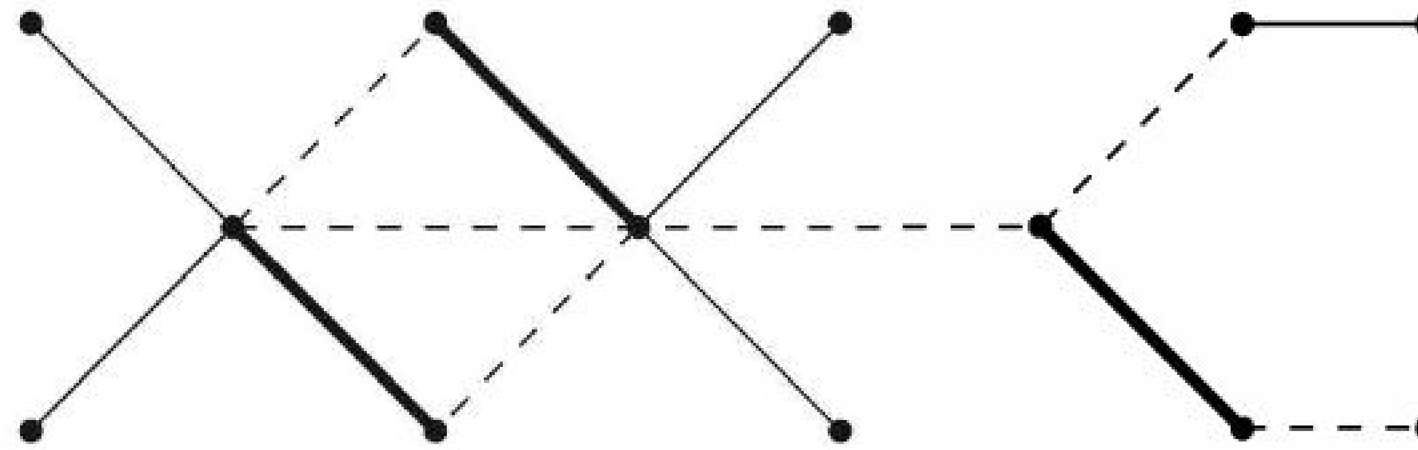
22.1.3. نظرية : (جالاي [1959] Gallai) إذا كان G بيانًا دون رؤوس معزولة، فإنَّ: $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$.

الإثبات: من مواءمة كبرى M، سنبني غطاءً ضلعيًّا من الحجم $n(G) - |M|$. وبما أنَّ أصغر غطاء ضلعيّ لا يكون أكبر من هذا الغطاء، فإنَّ $\beta'(G) \leq n(G) - \alpha'(G)$. ومن غطاء ضلعيّ أصغريّ L، سنبني مواءمة حجمها $n(G) - |L|$. وبما أنَّ أكبر مواءمة لا تكون أصغر من هذه المواءمة، فإنَّ هذا سيؤدي إلى أنَّ $\alpha'(G) \geq n(G) - \beta'(G)$. وهاتان المتباينتان تحققان الإثبات.

لتكن M مواءمة كبرى في G. ننشئ غطاءً ضلعيًّا لـ G بإضافة ضلع واحد يقع على كل رأس غير مشبع للمواءمة M. وبذلك نكون قد استخدمنا ضلعًا واحدًا لكلّ رأس، ماعدا أضلاع M التي تستخدم رأسين. لذلك، فإنَّ الحجم الكلّيّ لهذا الغطاء الضّلعيّ هو $n(G) - |M|$، كما نريد.

الآن، ليكن L غطاءً ضلعيًّا أصغريًّا. إذا كانت النّقاط الطّرفيّة للضّلع e تنتمي إلى أضلاع في L غير e، فإنَّ $e \notin L$؛ نظرًا إلى أنَّ $L - \{e\}$ هو أيضًا غطاء ضلعيّ. لذا، فإنَّ كلّ مركّبة شكّلت بأضلاع من L لها على الأكثر رأس واحد درجته تتجاوز 1 وهو نجمة (شجرة لها على الأكثر رأس واحد ليس ورقة). ليكن k عددَ هذه المركّبات. بما أنَّ L يملك ضلعًا واحدًا لكلّ رأس غير مركزيّ في كلّ نجمة، فإنَّ $|L| = n(G) - k$. الآن، نُشكّل مواءمة M بحجم $k = n(G) - |L|$ باختيار ضلع واحد من كلّ نجمة في L. ■

23.1.3. مثال: البيان أدناه له 13 رأسًا. ومواءمة حجمها 4 تظهر بصورة غامقة، وإضافة الأضلاع المفرّغة تعطي غطاءً ضلعيًّا حجمه 9. وفي هذا الغطاء، لا حاجة إلى الأضلاع المنقطة. أمّا الغطاء الضّلعيّ فيتكون من أربع نجوم؛ نستخلص من كلّ نجمة ضلعًا واحدًا (غامق) لتشكيل المواءمة. ■



24.1.3. نتيجة : (كونج [1916] König) إذا كان G بيانًا ثنائيّ الفرع، وليس فيه رؤوس معزولة، فإنَّ $\alpha(G) = \beta'(G)$.

الإثبات: من التمهيدية 21.1.3 والنظرية 22.1.3، نجد أنَّ $\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G) + \beta'(G)$. وبطرح علاقة كونج وإيجرفاري $\alpha'(G) = \beta(G)$ يكتمل الإثبات. ■

المجموعات المسيطرة (اختياري) (Dominating Sets (Optional

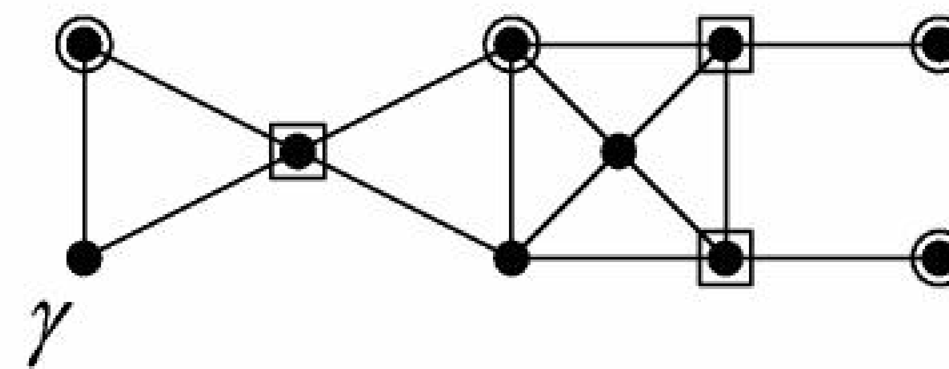
إنَّ الأضلاع التي غطّيت برأس واحد في الغطاء الرّأسيّ هي الأضلاع التي تقع عليه؛ فهي تشكّل نجمة. لذا، يمكن وصف مسألة الغطاء الرأسيّ بوصفها تغطية لمجموعة الأضلاع بأقلّ عدد من النّجوم. ونرغب أحيانًا في تغطية مجموعة الرّؤوس بأقلّ عدد ممكن من النّجوم. وهذا يكافئ وسيط البيان التّالي.

25.1.3. مثال: ترغب شركة ببناء أبراج إرسال في منطقة نائية. فحددت مواقع الأبراج على بنايات سكنية، بحيث يمكن وصول الإرسال إلى كلّ مبنى سكنيّ. فإذا كان جهاز الإرسال عند x يمكن أنْ يصل إلى y، فإنَّه يوجد جهاز إرسال عند y يمكن أنْ يصل إلى x. إذا أعطيتَ الأزواج التي يمكن أنْ يصل إرسال كلّ منهما إلى الآخر، فكم جهاز إرسال نحتاج لتغطية المباني كلّها؟

لاحظ أنّ مسألة مشابهة موجودة الرّياضيّات الحديثة، وهي: كم وزيرًا نحتاج لمهاجمة المربعات جميعها على لوحة الشّطرنج؟ (التمرين 56). ■

26.1.3. تعريف: نقول في البيان G: إنَّ المجموعة $S \subseteq V(G)$ **مسيطرةٌ** (dominating set) إذا وُجد لكلّ رأس خارج S جار في S. **ونعرّف عدد السيطرة** $\gamma(G)$ **dominating number** على أنَّه أصغر حجم لمجموعة مسيطرة في G.

27.1.3. مثال: للبيان G أدناه مجموعة مسيطرة أصغريّة حجمها 4 (الدّوائر) ومجموعة مسيطرة صغرى حجمها 3 (المربّعات). لذا، فإنَّ $\gamma(G) = 3$. ■



قدّم بيرج (Berge) [1962] مفهوم السّيطرة. واستحدث أور (Ore) [1962] هذا المصطلح، أما التّرميز $\gamma(G)$ فقد ظهر في المسح المبكر (Cockayne – Hedetniemi [1977]). وقد خُصِّصَ كتاب كامل لمفهوم السيّطرة وصورها المختلفة (Haynes- Hedetniemi- Slater [1998]).

28.1.3. مثال: إنَّ غطاء مجموعة الرّؤوس بالنّجوم يمكن ألّا يتطلّب الكثير منها كما يتطلّب غطاء مجموعة الأضلاع. وعندما لا يكون للبيان رؤوس معزولة، فإنَّ كلّ غطاء رأسيّ يكون مجموعة مسيطرة. لذا، فإنَّ $\gamma(G) \le \beta(G)$. وقد يكون الفرق بينهما كبيرًا. فمثلاً؛ $\gamma(K_n) = 1$، ولكن $\beta(K_n) = n\text{-}1$. ■

عند دراسة السّيطرة بوصفها مسألة قيم قصوى، فإنَّنا نحاول الحصول على حدود بلغة متغيّرات البيان الأخرى، مثل الرّتبة والدّرجة الصغرى. لاحظ أنَّ رأسًا درجته k يسيطر على نفسه وعلى k رأسًا غيره أيضًا. إذن، فإنّ حجم كلّ مجموعة مسيطرة في بيان منتظم G من الدّرجة k يساوي $n(G)/(k+1)$ على الأقلّ. لاحظ وجود خوارزميّة شرهة تنتج مجموعة مسيطرة ليست أكبر كثيرًا من هذا الحدّ لكلّ بيان درجته الصغرى k.

29.1.3. تعريف: الجوار المُغلق (closed neighborhood) $N[v]$ للرّأس v في بيان ما هو $N(v) \cup \{v\}$؛ وهي مجموعة الرّؤوس المُسيطَر عليها من v.

30.1.3. نظرية: (أرناتوف Arnautov [1974]، بايان Payan [1975]) توجد مجموعة مسيطرة حجمها $n\frac{1+\ln(k+1)}{k+1}$ على الأكثر لكلّ بيان على n من الرّؤوس ودرجته الصغرى k.

الإثبات: (ألون [1990] Alon) ليكن G بيانًا ذا درجة صغرى k. ولتكن $S \subseteq V(G)$، ولتكن U مجموعة الرّؤوس التي لا تسيطر عليها S. ندّعي وجود رأس y خارج S يسيطر على $|U|(k+1)/n$ رأسًا على الأقلّ من U. لاحظ أنّ k جارًا لكلّ رأس في U على الأقلّ. لذا، فإنّ $\sum_{v \in U}|N[v]| \geq |U|(k+1)$. وبما أنّ n جار لكلّ رأس في Gعلي الأكثر، وعليه يُحسب n مرة على الأكثر من قِبَل المجموعات $|U|$. لذلك، فإنّ رأسًا مثل y يظهر على الأقلّ $|U|(k+1)/n$ مرة ويحقّق الادعاء.

نختار -بصورة تكراريّة- رأسًا يسيطر على أكثر الرّؤوس المتبقية وغير المسيطر عليها. لقد أثبتنا أنّه عندما يبقى r رأسًا غير مسيطر عليها، فإنّه يبقى بعد الاختيار التالي $r(1 - (k + 1)/n)$ رأسًا على الأكثر غير مسيطر عليها. وبعد $n \frac{\ln(k+1)}{k+1}$ خطوة تبدأ من $S = \emptyset$، واستخدام المتباينة $1 - p < e^{-p}$ يظهر أنّ عدد الرّؤوس غير المسيطر عليها يساوي على الأكثر

$$n\left(1 - \frac{k+1}{n}\right)^{n\ln(k+1)/(k+1)} < n e^{-\ln(k+1)} = \frac{n}{k+1}$$

إنّ الرّؤوس المختارة والرّؤوس غير المسيطر عليها معًا يشكّلان مجموعة مسيطرة حجمها $n\frac{1+\ln(k+1)}{k+1}$ على الأكثر. ■

31.1.3. ملاحظة: إنّ هذا الحدّ يثبت أيضًا بطرق احتمالية، وذلك في النظرية 10.5.8. ولاحظ أنّ كار، وويرستر، وويست (Caro – Yuster- West) قد برهنوا أنّ عدد السّيطرة الكلّيّ لقيم k الكبيرة يقترب كثيرًا من هذا الحدّ. وقد استخدم ألون [1990] (Alon) طرقًا احتمالية ليثبت أنّ تقارب هذا الحدّ حادٌّ وواضح عندما تكون k كبيرة.

ولقيم k الصّغيرة، تبقى الحدود المضبوطة ضمن الاهتمام. ومن خلال البيانات المترابطة على n من الرّؤوس، نجد أنّ $\delta(G) \geq 2$ تعطي $\gamma(G) \leq 2n/5$ (ماكويج – شيفرد McCuaig – Shepherd [1989]، مع وجود سبعة استثناءات صغيرة)، إضافة إلى أنّ $\delta(G) \geq 3$ تؤدي إلى أنّ $\gamma(G) \leq 3n/8$ ريد (Reed [1996]). يُطلب في التمرين 53 إيجاد بناءات تحقّق هذه الحدود. ■

لقد دُرست العديد من التّغيّرات على مفهوم السّيطرة. ففي المثال 25.1.3 على سبيل المثال، ربما نريد أنْ تكون أجهزة الإرسال قادرة على الاتصال معًا، وهذا يتطلّب حدوث بيان جزئيّ مترابط.

32.1.3. تعريف: تكون المجموعة المسيطرة S في G **مجموعة مسيطرة مترابطة** (connected dominating set) إذا كانت $G[S]$مترابطة، وتكون **مجموعة مسيطرة مستقلّة** (independent dominating set) إذا كانت $G[S]$ لا تحتوي أضلاعًا، في حين تكون **مجموعة مسيطرة كلّيّة** (total dominating set) إذا كانت $G[S]$ لا تحوي رأسًا معزولا.

إنّ كلّ تغيير يضيف قيدًا. لذلك، فإنّ مجموعات السّيطرة لهذه الأنواع تكون كبيرة كَكِبَر $\gamma(G)$. لاحظ أنّ التمارين 54-60 تستكشف هذه التّغيّرات. وأنّ دراسة مجموعات السّيطرة تعادل دراسة المَجموعات المستقلّة الأعظميّة. وهذا يؤدي إلى نتيجة دقيقة حول البيانات التي لا تحوي مخالب.

33.1.3. تمهيدية: تكون مجموعة الرّؤوس في بيان ما مجموعة مسيطرة مستقلّة إذا وفقط إذا كانت مجموعة مستقلّة أعظميّة.

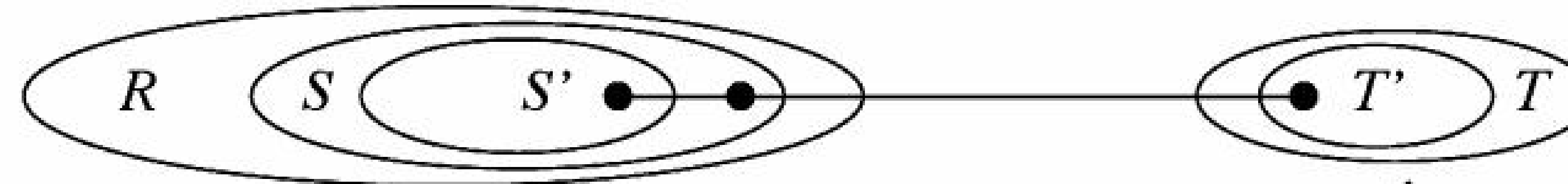
الإثبات: فيما بين المجموعات المستقلّة، تكون S أعظميّة إذا وفقط إذا كان لكلّ رأس خارج S جار في S؛ وهذا هو شرط أنْ تكون S مجموعة مسيطرة. ■

34.1.3. نظرية: (Bollobás-Cockayne [1979]) توجد مجموعة مسيطرة مستقلّة حجمها $\gamma(G)$ لكلّ بيان لا يحوي مخلبًا.

الإثبات: لتكن S مجموعة مسيطرة صغرى في البيان G الذي لا يحوي مخالب. ولتكن S' مجموعة مستقلّة أعظميّة جزئيّة من S. ولتكن $T = V(G) - N(S')$، حيث R مجموعة الرّؤوس $N(S') \cup S'$ المسيطر عليها بواسطة S'. ولتكن T' مجموعة مستقلة أعظميّة جزئيّة من T.

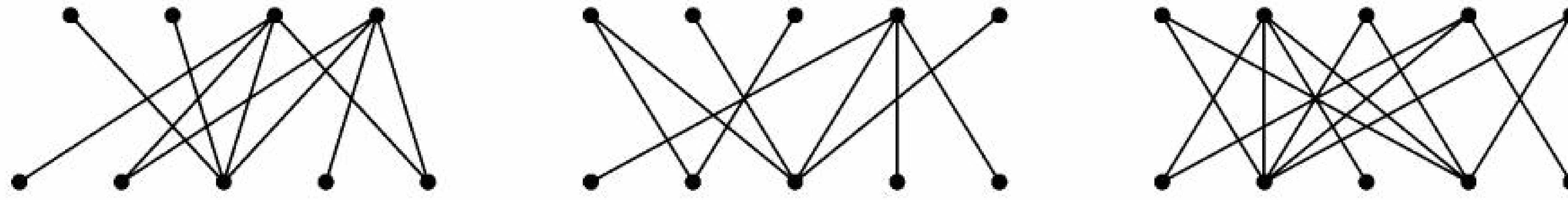
بما أنّ T' لا تحوي جارًا لـ S'، فإنَّ $S' \cup T'$ تكون مجموعة مستقلّة. وبما أنّ S' مجموعةٌ جزئيّة مستقلّة أعظميّة جزئيّة من S، فإنَّ لكلّ رأس من رؤوس $S\text{-}S'$ جارًا في S'. وبطريقة مشابهة، فإنَّ T' تسيطر على $T - T'$. وعليه، فإنَّ $S' \cup T'$ مجموعةٌ مسيطرةٌ.

بقي أنْ نبين أنَّ $|S' \cup T'| \le \gamma(G)$. لاحظ أنَّ لكلّ رأس في $S\text{-}S'$ جارًا واحدًا على الأكثر في T'؛ لأنَّ له جارًا في S'، وأنّ $S' \cup T'$ مجموعةٌ مستقلة، و G يخلو من المخالب. وبما أنَّ S مسيطرة، فإنَّ لكلّ رأس جارًا على الأقلّ لـ T' في $S\text{-}S'$. وعليه، فإنَّ $|S\text{-}S'| \le |T'|$، وهذا يؤدي إلى أنَّ $\gamma(G) = |S| \ge |S' \cup T'|$ ■



تمارين (Exercise)

1.1.3. (-) جد مواءمة كبرى في كلّ من البيانات المرسومة أدناه. وأثبت أنّها مواءمة كبرى عن طريق إيجاد الحلّ الأمثل للمسألة الثّنويّة (غطاء رأسيّ أصغر). واشرح لماذا يثبت هذا أنَّ هذه المواءمة هي الأفضل.



2.1.3. (-) حدّد الحجم الأصغر لمواءمة أعظميّة في الحلقة C_n.

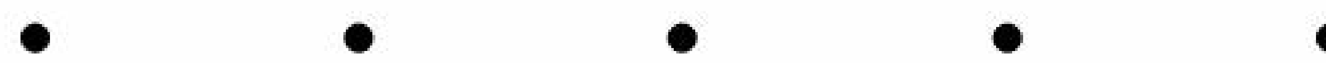
3.1.3. (-) لتكن S مجموعةَ الرّؤوس المشبعة بالمواءمة M في البيان G. أثبت أنَّ بعض المواءمات العظمى أيضًا تشبع S. وهل هذه العبارة يجب أنْ تكون صحيحة لكلّ مواءمة كبرى؟

4.1.3. (-) لكلّ من α , α' , β , β'، مَيّز البيانات البسيطة التي قيمة كلّ وسيط من هذه الوسائط تساوي 1.

5.1.3. (-) أثبت أنَّ $\alpha(G) \ge \frac{n(G)}{\Delta(G)+1}$ لكلّ بيان G.

6.1.3. (-) لتكن T شجرة على n من الرّؤوس، وليكن k الحجمَ الأكبر لمجموعة مستقلّة في T. حدّد $\alpha'(T)$ بدلالة n و k.

7.1.3. (-) استخدم نتيجة 24.1.3 لإثبات أنَّ البيان G يكون ثنائيّ الفرع إذا وفقط إذا كان $\alpha(H) = \beta'(H)$ لكلّ بيان جزئيّ H من G خاليًا من النّقاط المعزولة.



8.1.3. (!) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: كلّ شجرة لها مواءمة مكتملة واحدة على الأكثر.

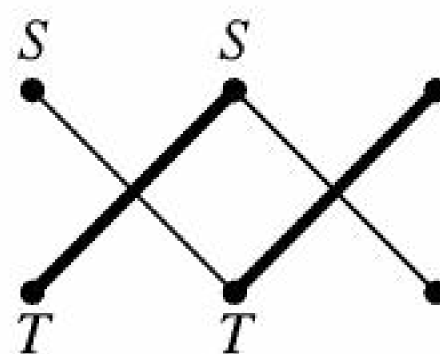
9.1.3. (!) أثبت أنّ كلّ مواءمة أعظميّة في البيان G لها $\alpha'(G)/2$ ضلعًا على الأقلّ.

10.1.3. افترض أنَّ M و N موائمتان في البيان G، بحيث $|M|>|N|$. أثبت وجود مواءمتين M' و N' في G بحيث إنَّ $|M'| = |M|-1$، و $|N'| = |N|+1$، وبحيث يكون اتحادهما وتقاطعهما (كمجموعات أضلاع) مثل M و N.

11.1.3. لتكن C وC' حلقتين في البيان G. أثبت أنَّ $C\Delta C'$ يتفكّك إلى حلقات.

12.1.3. لتكن C و C' حلقتين بطول k في بيان خصره k. أثبت أنَّ $C\Delta C'$ حلقةٌ أحادية إذا وفقط إذا كان $C\cap C'$ مسربًا أحاديًّا. (Jiang [2001])

13.1.3. لتكن M و M' مواءمتين في البيان الثنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة X، Y. افترض أنَّ M مشبعة لـ $S\subseteq X$ و M' مشبعة لـ $T\subseteq Y$ أثبت أنّه توجد لـ G مواءمة مشبعة لـ $S\cup T$. وعلى سبيل المثال، نعرضَ أدناه M بأضلاع سميكة، و M' بأضلاع رفيعة؛ ونستطيع إشباع $S\cup T$ باَستخدام ضلعٍ واحدٍ من كلّ مواءمة منهما.



14.1.3. ليكن G بيان بيترسون. في المثال 9.1.7، حلّلنا الحالات التي استخدمت لإثبات أنّه إذا كانت M مواءمة كاملة في G، فإنَّ $G\text{-}M=C_5+C_5$. افترض هذا، ثمَّ:

a) مكتملة أنَّ كلّ ضلع في G يقع في أربع حلقات على خمسة رؤوس. واحسب الحلقات الخماسية الموجودة في G.

b) حدّد عدد المواءمات مكتملة في G.

15.1.3. a) لكلّ $k\geq 2$؛ أثبت أنّه لكلّ مواءمة كاملة M في Q_k ولكلّ إحداثيّ $i\in[k]$، يوجد عدد زوجيّ من الأضلاع في M تختلف نقاطها الطّرفيّة في الإحداثيّ i.

b) استخدم فرع (a) لعدّ المواءمات الكاملة في Q_3.

16.1.3. لكلّ $k\geq 2$، أثبت أنّه يوجد $2(2^{k-2})$ مواءمة مكتملة لـ Q_k على الأقلّ.

17.1.3. الوزن لرأس في Q_k هو عدد تكرار العدد 1 في وسمه. أثبت أنّه لكلّ مواءمة مكتملة في Q_k، فإنَّ عدد الأضلاع التي توائم الكلمات التي وزنها i للكلمات التي وزنها $i+1$ هو $\binom{k-1}{i}$، لكلّ $0\leq i\leq k\text{-}1$.

18.1.3.(!) شخصان يلعبان لعبة على البيان G، ويتبادلان اختيار رؤوس مختلفة. يبدأ اللاعب الأوّل باختيار أيّ رأس، بحيث يكون كلّ اختيار لاحق مجاورًا للاختيار السّابق (للّاعب الآخر). لذلك، فإنَّهما يسلكان مسارًا معًا. واللاعب الفائز هو الذي يستطيع أنْ يحرك أخيرًا.

أثبت أنَّ الّلاعب الثّاني لديه استراتيجيّة للفوز إذا كان لـ G مواءمة مكتملة، وبخلاف ذلك فإنّ اللاعب الأوّل هو الذي لديه هذه الاستراتيجيّة. (مساعدة: للفرع الثّاني، يجب أنْ يبدأ اللاعب الأول برأس مهمل من مواءمة عظمى).

19.1.3. (!) لتكن $A=(A_1,\ \dots,\ A_m)$ جمعًا أو حشدًا لمجموعات جزئيّة من Y. نعرّف **نظام الممثلين المختلفين** (SDR) (System of distinct representatives) لـ A على أنّه مجموعة العناصر المختلفة $a_1,\ \dots,\ a_m$ في Y، بحيث إنَّ $a_i\in A_i$. أثبت أنَّ لـ A SDR إذا وفقط إذا كان $|S|\ \geq\ |\bigcup_{i\in S}A_i|$ لكلّ $S\subseteq\{1,\dots,m\}$. (مساعدة: حوّل هذا إلى مسألة بيان).

20.1.3. يخطّط أعضاء نادٍ لقضاء عطلتهم الصّيفيّة، حيث يتوافر لديهم الرّحلات $t_1,\dots,t_n$، ولكن سعة الرّحلة t_i هي n_i. وكلّ شخص يرغب في بعض هذه الرّحلات سيسافر على الأكثر في واحدة منها. بدلالة أيّ الأشخاص يرغب بأي الرحلات، اشتق الشّرط الضّروريّ والكافي لملء الرحلات جميعها (بسعتها) من الأشخاص الذين يرغبون فيها.

21.1.3.(!) ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة X، Y، بحيث إنَّ $|N(S)|>|S|$ عندما $\emptyset\neq S\subset X$. أثبت أنَّ كلّ ضلع في G ينتمي إلى مواءمة مشبعة لـ X.

22.1.3. أثبت أنَّ للبيان الثنائيّ الفرع G مواءمة مكتملة إذا وفقط إذا كان $|N(S)|\ \geq\ |S|$ لكلّ $S\subseteq V(G)$، وقدّم صفًّا لا نهائيًّا من الأمثلة لإثبات أنَّ هذا التّمييز لا يتحقّق للبيانات جميعها.

23.1.3.(+) إثبات بديل لنظرية هال. خذ في الحسبان بيانًا ثنائيّ الفرع G مع تجزئة ثنائيّة X، Y، ويحقّق المتباينة $|N(S)| \geq |S|$ لكلّ $S \subseteq X$. استخدم الاستقراء على $|X|$ لإثبات أنّه توجد مواءمة لـ G مشبعة لـ X. (مساعدة: خذ في الحسبان أولاً الحالة حيث $|N(S)| > |S|$ لكلّ مجموعة جزئيّة فعليّة S مَن X. وعندما لا يتحقّق ذلك، خذ في الحسبان مجموعة أصغريّة جزئيّة غير خالية $T \subseteq X$ بحيث $|N(T)| = |T|$.

(*M. Hall* [1948], *Halmos – Vaughan* [1950])

24.1.3. (!) **مصفوفة التّباديل** (permutation matrix) P: هي مصفوفة، مدخلاتها 1.0 فقط وتحوي في كلّ صفّ وعمود العدد 1 بالضبط مرّة واحدة. أثبت أنّ أيّ مصفوفة مربّعة مدخلاتها أعداد صحيحة غير سالبة يمكن كتابتها في صورة حاصل جمع k من مصفوفات التّباديل، إذا وفقط إذا كانت مجاميع الصفوف جميعها ومجاميع الأعمدة جميعها كذلك تساوي k.

25.1.3. (!) **مصفوفة مضاعف التّصادفيّة** (doubly stochastic matrix) Q: مصفوفة الأعداد الحقيقيّة غير السّالبة التي فيها مجموع أيّ صفّ ومجموع أيّ عمود يساوي 1. أثبت أنّ مصفوفة مضاعف التّصادفيّة Q يمكن كتابتها على الصورة $Q = c_1P_1 + \ldots + c_mP_m$، حيث $c_1, \ldots, c_m$ أعداد حقيقية غير سالبة مجموعها 1 و $P_1, \ldots, P_m$ هي مصفوفات تباديل. ومثال ذلك ما يأتي:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(مساعدة: استخدم الاستقراء على عدد المدخلات غير الصّفريّة في Q).

(Birkhoff [1946]، von Neumann [1953])

26.1.3. (!)تتكوّن مجموعة من أوراق اللعب من mn بطاقة مع m و n نقشًا عليها، بحيث يكون هنالك بطاقة واحدة لكلّ قيمة في كلّ نقش. وزّعت البطاقات إلى صفيف n في m:

a) أثبت أنّ هناك مجموعة تتكوّن من m بطاقة، بواقع بطاقة واحدة في كلّ عمود، ذات قيم مختلفة.

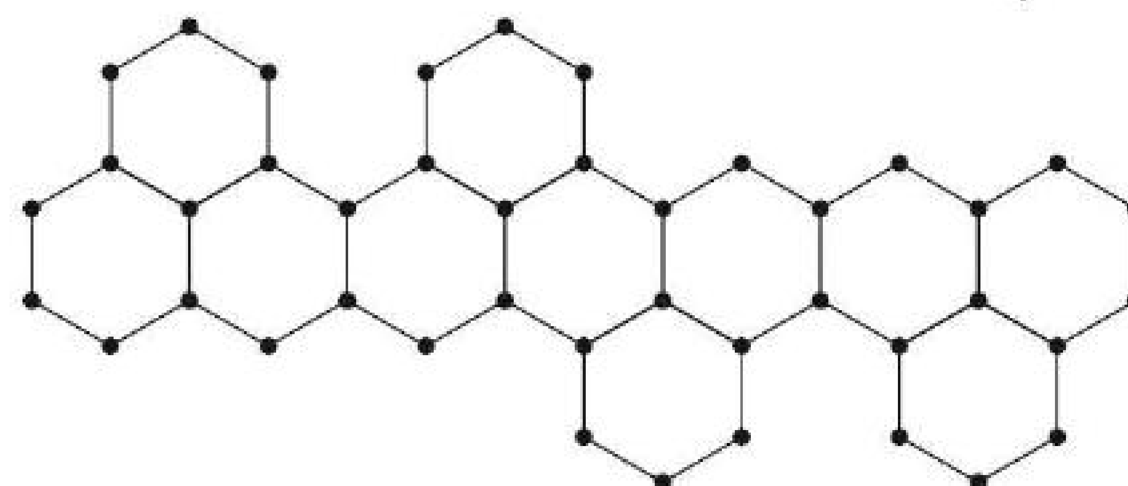
b) استخدم فرع (a) لبرهنة أنّه بمتتالية من تبديلات البطاقات التي لها القيمة نفسها ، يمكن إعادة ترتيب البطاقات بحيث يتكون كلّ عمود من n بطاقة من النّقوش المختلفة. (Enchev [1997])

27.1.3. (!) تعميم تك- تاك- تو(Generalizing Tic- Tac – Toe). تتكوّن **لعبة المواقع** من مجموعة مواقع $X = x_1, \ldots, x_n$ وعائلة مجموعات مواقع رابحة $W_1, \ldots, W_m$ (تك – تاك – تو لها 9 مواقع و8 مجموعات رابحة). حيث يختار اللاعبان المواقع بصورة متعاقبة؛ والفائز منهما من يجمّع مجموعة رابحة.

افترض أنّ كلّ مجموعة رابحة حجمها a على الأقلّ، وكلّ موقع يظهر في b على الأكثر مجموعة رابحة (في تك – تاك – تو، $a=3$ و $b=4$). أثبت أنّ اللاعب 2 يستطيع تحقيق التعادل بقوة إذا كان $a \geq 2b$. (مساعدة: شكّل بيانًا ثنائيّ الفرع G بالتّجزئة الثّنائيّة X، Y ، حيث $Y = \{w_1, \ldots, w_m\} \cup \{w'_1, \ldots, w'_m\}$، وأضلاعه هي x_iw_j و $x_iw'_j$ عندما يكون $x_i \in W_j$. كيف يستطيع اللاعب 2 استخدام مواءمة في G؟ تعليق: هذه النتيجة تؤدّي إلى أن اللاعب 2 يستطيع تحقيق التعادل بقوة في لعبة تك – تاك – تو ذات البعد d عندما يكون طول الجوانب كافيًا).

28.1.3. (!) جد مواءمة مكتملة في البيان أدناه، أو أعطِ إثباتًا قصيرًا تبيّن عدم وجود مواءمة مكتملة فيه.

(Lova'sz- Plummer [1986,P7])



29.1.3. (!) استخدم نظرية كونج وإيجرفاري لإثبات أنّ كلّ بيان ثنائيّ الفرع G له مواءمة حجمه $e(G)/\Delta(G)$ على الأقلّ. استخدم هذا لتستنتج أنّه توجد لكلّ بيان جزئيّ من $K_{n,n}$ عدد أضلاعه أكثر من $(k-1)n$ مواءمةٌ حجمها k على الأقلّ.

30.1.3. (!) حدّد أكبر عدد من الأضلاع في البيان الثنائيّ الفرع البسيط الذي لا يحوي مواءمة عدد أضلاعها k ولا يحوي نجمًا عدد أضلاعه l (Isaak).

31.1.3. استخدم نظرية كونج وإيجرفاري لإثبات نظرية هال.

32.1.3. (!) في البيان الثّنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y، إنَّ **العجز** (deficiency) للمجموعة S هو $\mathrm{def}(S)=|S|-|N(S)|$ لاحظ أنّ $\mathrm{def}(\phi)=0$. أثبت أنَّ $\alpha'(G)=|\times|-\max_{S\subseteq x}\mathrm{def}(S)$. (مساعدة: شكّل بيانًا ثنائيّ الفرع G' بحيث يكون لـ G' مواءمة مشبعة لِـ X إذا وفقط إذا كان لِـ G مواءمة بالحجم المطلوب، وبرهن أنَّ G' يحقق شرط هال). (Ore[1955])

33.1.3. (!) استخدم التمرين 32.1.3 لإثبات نظرية كونج وإيجرفاري. (مساعدة: احصل على مواءمة وغطاء رأسيّ لهما الحجم نفسه من مجموعة لها عجز أكبر).

34.1.3. (!) ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y ليس فيه رؤوس معزولة. عرّف العجز كما عُرّف في التمرين 32.1.3. أثبت أنَّ شرط هال يتحقق للمواءمات المشبعة لِـ X إذا وفقط إذا كان عجز كلّ مجموعة جزئيّة من Y على الأكثر $|Y|-|X|$.

35.1.3. ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y. أثبت أنَّ G يخلو من $(k+1)K_2$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة $S\subseteq X$ تحتوي على مجموعة جزئيّة حجمها k على الأكثر، ولها جوار N(S)) (Liu- Zhou [1997]) .

36.1.3. ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y وله مواءمة مشبعة لـ X. بوضع $m=|X|$ ، أثبت أنّه يوجد لـ G على الأكثر ضلعًا $\binom{m}{2}$ لا تنتمي إلى أيّ مواءمة حجمها m. أنشئ أمثلَة لتبيّن أنَّ هذا أفضل ما يمكن لكلّ m.

37.1.3. (+)ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y وله مواءمة مشبعة لـ X:

a) لتكن S و T مجموعتين من X بحيث إنَّ $|N(S)|=|S|$ و $|N(T)|=|T|$. أثبت أنَّ $|N(S\cap T)|=|S\cap T|$.

b) أثبت أنَّ X يحوي رأسًا x بحيث إنَّ كلّ ضلع يقع على x ينتمي إلى مواءمة كبرى.

(مساعدة: خذ مجموعة أصغريّة غير خالية $S\subseteq X$ بحيث $|N(S)|=|S|$، إنْ وجدت مثل هذه المجموعة).

38.1.3. (+) جزيرة مساحتها n، وفيها n عائلة تتكون كلّ منها من زوجين، أحدهما صيّاد والآخر مزارع. وقد قسّمت وزارة الصّيد الجزيرة إلى n منطقة صيد متساوية المساحة، أمّا وزارة الزّراعة فقد قسّمت الجزيرة إلى n منطقة زراعية متساوية المساحة. وتطلب وزارة الزواج أنْ يحصل كلّ زوجين على منطقتين متداخلتين.

ومن التمرين 25.1.3، نعلم أنّ هذا ممكن دائمًا. أثبت نتيجة أقوى: اضمن مزاوجة بحيث تشترك منطقتا كلّ زوجين على الأقلّ بـ $4/(n+1)^2$ عندما يكون n فرديًّا و بـ $[n(n+2)]/4$ عندما يكون n زوجيًّا. و أثبت أيضًا أنّه لا يمكن ضمان وجود مساحة مشتركة أكبر من هذه؛ لاحظ أنَّ المثال أدناه يحقق المساواة عندما $n=3$ (Marcus- Ree [1959], Floyd [1990]).

1	b	a	c
2	b	a	c
3	b		c

$$\begin{pmatrix} .5 & .25 & .25 \\ .5 & .25 & .25 \\ 0 & .5 & .5 \end{pmatrix}$$

39.1.3. ليكن G بيانًا بسيطًا غير تافه. أثبت أنَّ $\alpha(G)\le n(G)-e(G)/\Delta(G)$ واستنتج أنَّ $\alpha(G)\le n(G)/2$ عندما يكون G منتظمًا. (P. Kwok)

40.1.3. ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع. أثبت أنَّ $\alpha(G) = n(G)/2$ إذا وفقط إذا وُجدت لـ G مواءمة مكتملة.

41.1.3. نعلم أنَّ للبيان المترابط على n من الرّؤوس حلقة واحدة بالضبط إذا وفقط إذا كان له n ضلع بالضبط (التمرين 30.1.2). ليكن G بيانًا ليس ثنائيّ الفرع، وله حلقة واحدة بالضبط C. أثبت أنّ $\alpha(G) \geq \lfloor n(G)/2 \rfloor$، مع المساواة إذا وفقط إذا وُجدت لـ $G\text{-}V(C)$ مواءمة مكتملة.

42.1.3. (!) لكي تبني خوارزميّة مجموعةً مستقلّةً كبيرةً S بشراهة، يجب عليها اختيار رأس بعد الآخر تكراريًّا من الرّؤوس المتبقية، بحيث يكون هذا الرّأس ذا درجة صغرى تضيفه إلى S، وتحذفه مع جيرانه من البيان. أثبت أنَّ هذه الخوارزميّة تنتج مجموعة مستقلّة حجمها $\sum_{v\in V(G)} \frac{1}{d_G(v)+1}$ على الأقلّ في البيان البسيط G. (Wei [1981] , Caro [1979])

43.1.3. لتكن M مواءمة أعظمية، و L غطاءً ضلعيًّا أصغريًّا في بيان ليس فيه رؤوس معزولة. أثبت العبارتين الآتيتين. (Norman – Rabin [1959], Gallai [1959]):

a) تكون M مواءمة كبرى إذا وفقط إذا كانت محتواة في غطاء ضلعيّ أصغر.

b) يكون L غطاءً ضلعيًّا أصغر إذا وفقط إذا احتوى على مواءمة كبرى.

44.1.3. (–) ليكن G بيانًا بسيطًا بحيث يكون مجموع درجات أيّ k رأسًا من رؤوسه أقلّ من $n - k$. أثبت أنَّ كلّ مجموعة مستقلّة أعظميّة لها أكثر من k رأسًا. (Mayer [1972])

45.1.3. يكون الضّلع e في البيان G **حرجًا بالنسبة إلى** α (α-critical) إذا كان $\alpha(G - e) > \alpha(G)$. افترض أنَّ xy و xz ضلعان حرجان بالنسبة إلى α في G. أثبت أنَّ لـ G بيانًا جزئيًّا مُحدثًا ، أي أنّ له حلقة فرديّة تحوي xy و xz. (مساعدة: لتكن Y،Z مجموعتين مستقلّتين كبريين في $G\text{-}xy$ و $G\text{-}xz$ على التّرتيب. ليكن $H = G[Y\Delta Z]$. أثبت أنَّ لكلّ مركّبة في H عدد الرّؤوس نفسه من Y و Z. استخدم هذا الإثبات لإثبات أنَّ y و z ينتميان إلى المركّبة نفسها في H.) (*Berge*[1970]، مع تعميم صعب في Markossian – Karapetian) [1984])

46.1.3. (*–) أعطِ توصيفًا مميّزًا للبيانات التي عدد سيطرتها 1.

47.1.3. (*–) أوجد أصغر شجرة لايتساوى فيها عدد كلّ من السّيطرة والغطاء الرّأسيّ.

48.1.3. (*–) حدّد $\gamma(C_n)$ و $\gamma(P_n)$.

49.1.3. (*) ليكن G بيانًا لا يحوي رؤوسًا معزولة، ولتكن S مجموعة مسيطرة أصغريّة في G. أثبت أنَّ $\overline{S}$ مجموعة مسيطرة، واستنتج أنَّ $\gamma(G) \leq n(G)/2$. (Ore [1962])

50.1.3. (*) أثبت أنَّ $\gamma(G) \leq n - \beta'(G) \leq n/2$ عندما يكون G بيانًا على n من الرّؤوس ولا يحوي رؤوسًا معزولة. لـ $1 \leq k \leq n/2$ ، أنشئ بيانًا مترابطًا G على n من الرّؤوس بحيث يكون $\gamma(G)=k$.

51.1.3. (*) ليكن G بيانًا مترابطًا بسيطًا على n من الرّؤوس:

a) أثبت أنَّ $\lceil n/(1 + \Delta(G)) \rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

b) أثبت أنَّ $\lceil (1 + \text{diam}\, G)/3 \rceil \leq \gamma(G) \leq n - \lfloor 2\,\text{diam}\, G/3 \rfloor$. بين أنَّ هاتين المتباينتين هما أفضل ما يمكن لكلّ n.

52.1.3. (*) أثبت أنَّه إذا كان القطر للبيان G على الأقلّ 3، فإنَّ $\gamma(\overline{G}) \leq 2$.

53.1.3. (*) لكل $k \in \mathbb{N}$ ، أنشئ بيانًا مترابطًا له $5k$ رأسًا وعدد سيطرة $2k$. ثم أنشئ بيان G منتظمًا من الدّرجة 3 منفردًا، بحيث $\gamma(G) = 3n(G)/8$.

54.1.3. (*) حدّد عدد السّيطرة لبيان بيترسون، وحدّد الحجم الأصغر لمجموعة مسيطرة كلّيّة في بيان بيترسون كذلك.

55.1.3. (*) في المكعّب الزّائد Q_4، حدّد الأحجام الصّغرى لكلّ من: مجموعة مسيطرة، ومجموعة مسيطرة مستقلّة، ومجموعة مسيطرة مترابطة، ومجموعة مسيطرة كلّيّة.

56.1.3. (*) أوجد طريقة لوضع خمسة أزواج من الملكات غير المهاجمة زوجًا زوجًا على لوح شطرنج 8 في 8 بحيث تهاجم هذه الملكات المربّعات الأخرى جميعها.

57.1.3. (*) لكلّ $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 4$، أنشئ شجرة على n رأسًا مع عدد سيطرة 2، بحيث يكون الحجم الأصغر لمجموعة مسيطرة مستقلّة هو $\lfloor n/2 \rfloor$.

58.1.3. (*) أثبت أنَّ للبيان G الذي لا يحوي $K_{1,r}$ مجموعةً مسيطرة مستقلّة حجمها على الأكثر $(r\text{-}2)\,\gamma(G) - (r\text{-}3)$. (مساعدة: عمّم الإثبات في 34.1.3). (Bolloba's- Cockayne [1979])

59.1.3. (*) في البيان المترابط G الذي درجته n، أثبت أنَّ الحجم الأصغر لمجموعة مسيطرة مترابطة هو n ناقص أكبر عدد للأوراق في شجرة مولّدة.

60.1.3. (*) إذا كان $k \leq 5$، فإنَّ كلّ بيان G حيث $\delta(G) \leq k$ يملك مجموعة مسيطرة مترابطة حجمها على الأكثر $(3n\,(G)\,/\,(k+1))$ (Kleitman – West [1991], Griggs- Wu [1992]). أثبت أنَّ هذا الحدّ حادّ باستخدام بيان مشكّل. من ترتيب حلقيّ لـ $3m$ من العصب المنفصلة زوجًا زوجًا بجعل كلّ رأس يجاور كلّ رأس في العصبة التي قبله وفي العصبة التي بعده. ولتكن أحجام العصب $\lceil k/2 \rceil, \lfloor k/2 \rfloor, 1, \lceil k/2 \rceil, \lfloor k/2 \rfloor, 1 \ldots$.

2.3 الخوارزميّات والتّطبيقات (ALgoritims and Applications)

مواءمة ثنائيّ فرع كبرى (Maximum Bipartite Matching)

لإيجاد مواءمة كبرى؛ نبحث تكراريًّا عن المسارات الموسّعة لتوسعة المواءمة الحاليّة. فإذا لم نجد مسارًا موسّعًا في بيان ثنائيّ الفرع، فسنجد غطاء رأسيًّا حجمه هو حجم المواءمة الحاليّة نفسه، وهذا يبرهن أنَّ المواءمة الحاليّة لها أكبر حجم. ممّا يؤدّي إلى خوارزميّة لحلّ مسألة المواءمة العظمى، وإثبات خوارزميّ لنظرية كونج وإيجرفاري.

لتكن M مواءمة في البيان الثنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة X, Y. نبحث عن مسارات موسّعة للمواءمة M من بين الرّؤوس غير المشبعة جميعها من M في X. لاحظ أنّنا نحتاج إلى البحث في رؤوس X فقط؛ لأنَّ أيّ مسار موسّع له طول فرديّ. وعليه، فإنَّ نهايته في كلّ من X و Y. سنبحث آنيًّا في الرّؤوس غير المشبعة في X. ونبدأ بمواءمة حجمها 0. إنَّ تطبيق خوارزميّة المسار الموسّع $a'\,(G)$ مرة تنتج مواءمة كبرى. ■

1.2.3. خوارزميّة : (Algorithm). (خوارزميّة المسار الموسّع)

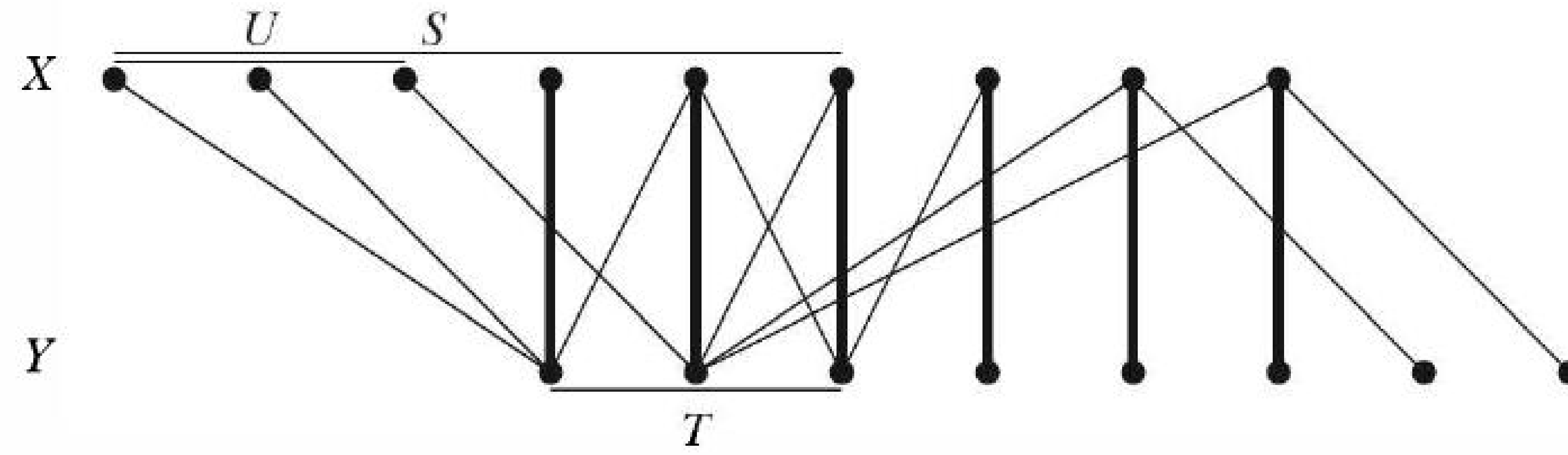
المدخلات: بيان ثنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة X, Y ومواءمة M في G و U مجموعة الرّؤوس غير المشبعة من M والموجودة في X.

الفكرة: استكشف المسارات المتناوبة للمواءمة M من U، لتكن $S \subseteq X$ و $T \subseteq Y$ مجموعتي الرّؤوس التي تمّ الوصول إليها. ضع علامة على رؤوس S التي استكشفت لتوسيعات المسار كرأس تمّ الوصول إليه، وسجّل من أين تمّ الوصول.

البداية: $S = U$ و $T = \emptyset$.

مرات الحدوث: إذا كانت S لا تحوي رؤوسا غير مُعَلّمة، توقف وقدّم تقريرًا بأنَّ $T \cup (X\text{-}S)$ هي غطاء أصغر وأنّ M مواءمة كبرى. وبخلاف ذلك، اختر رأسًا غير معلّم $x \in S$. لتستكشف X؛ خذ جميع $y \in N(x)$ بحيث $xy \notin M$. إذا كانت y غير مشبعة، توقف وقدّم تقريرًا بالمسار الموسّع للمواءمة M من U إلى y. وبخلاف ذلك، فإنَّ y توائم بعض $w \in X$ بواسطة M. في هذه الحالة، ضع y في T (وصلت من x) وضع w في S

(وصلت من y). وبعد استكشاف مثل هذه الأضلاع جميعها التي تقع على x، ضع علامة على x، وكرّر. ■



عندما نستكشف x في خطوة مرات الحدوث، فربما نصل إلى الرّأس $y \in T$ الذي وصلنا إليه سابقًا. وبتسجيل x لأنه الرّأس السّابق على المسار، ربما يغير أيّ مسار موسّع للمواءمة M قدمنا فيه تقريرًا (اخترناه)، ولكنه لا يغير ما إذا كان مثل هذا المسار موجودًا.

2.2.3. نظريّة: إنّ تطبيق خوارزميّة المسار الموسّع تكراريًّا على بيان ثنائيّ الفرع ينتج مواءمة وغطاءً رأسيًّا لهما الحجم نفسه.

الإثبات: نحتاج فقط إلى التّحقّق من أنَّ خوارزميّة المسار الموسّع تنتج مسارًا موسّعًا للمواءمة M أو غطاءً رأسيًّا حجمه $|M|$. إذا أنتجت الخوارزميّة مسارًا موسّعًا للمواءمة M، فنكون قد أنهينا الإثبات. وبخلاف ذلك، تنتهي بوضع علامات على رؤوس S جميعها، وتدّعي أنَّ $R = T \cup (X\text{-}S)$ هو غطاء رأسيّ حجمه $|M|$. وسنبرهن أنَّ R غطاءً رأسيًّ حجمه $|M|$.

لبرهنة أنّ R غطاءً رأسيًّ، يكفي أنْ نبرهن أنّه لا يوجد ضلع يصل S بـ Y-T. لاحظ أنَّ المسار المتناوب للمواءمة M من U يدخل X فقط من خلال ضلع في M. لذا، فإنَّ كلّ رأس x في $S\text{-}U$ يتواءم مع رأس في T من خلال M. وعليه، لا يوجد ضلع في M من S إلى $Y\text{-}T$. وكذلك، لا يوجد مثل هذا الضّلع خارج M. عندما يصل المسار $x \in S$، يستطيع الاستمرار خلال أيّ ضلع لا ينتمي إلى M، واستكشاف x يضع الجيران الأخرى لـ x جميعهم في T. وبما أنَّ الخوارزميّة علّمت رؤوس S كلّها قبل الانتهاء، فإنَّ أضلاع S جميعها تذهب إلى T.

الآن، ندرس حجم R. لاحظ أنَّ الخوارزميّة تضع الرّؤوس المشبعة في T فقط. وكلّ $y \in T$ يوائم رأسًا في S من خلال M. وبما أنَّ $U \subseteq S$، وكلّ رأس في $X\text{-}S$ مشبع، والأضلاع لـ M التي تقع على $X\text{-}S$ لا يمكن أنْ تستخدم T. فإنّها تختلف عن الأضلاع المشبعة لـ T. ونجد أنَّ M لها $|T|+|X-S|$ ضلعًا على الأقلّ. وبما أنّه لا توجد مواءمة أكبر من هذا الغطاء الرأسيّ، فإنَّ $|M| = |T|+|X\text{-}S| = |R|$. ■

بالإضافة إلى دراسة خاصّيّة التّصحيح للخوارزميّات، فإنّنا سنهتم بالزّمن (عدد خطوات الحساب) الذي استخدم؛ حيث نقيس هذا بوصفه دالّة لحجم المدخلات. وأمّا لمسائل البيان فإنّنا نستخدم الرتبة $n(G)$ و/أو حجم $e(G)$ لقياس حجم المدخلات عادة.

3.2.3. تعريف: إنَّ **زمن التّشغيل** (running time) للخوارزميّة هو العدد الأكبر لخطوات الحسابات المستخدمة، ويُعبّر عنه بوصفه دالّة لحجم المدخلات. أمّا **الخوارزميّة الحسنة** (*good algorithm*) فهي الخوارزميّة التي يكون زمن تشغيلها دالّة كثير حدود.

يُعبَّر عن زمن التشغيل عادة بـ "$O(f)$"، حيث f دالّة لحجم المدخلات. يرمز بـ $O(f)$ إلى مجموعة الدّوال g بحيث يكون $|g(x)|$ محدودًا بثابت مضروبًا في $|f(x)|$ عندما يكون x كبيرًا بما فيه الكفاية (بمعنى أنّه يوجد a,c بحيث $|g(x)| \le c|f(x)|$ عندما $|x| \ge a$).

إنَّ العديدَ من المسائل التي سندرسها في الفصول 1-4 خوارزمياتٌ حسنةٌ. وعلاوة على ذلك، فإنَّ المفاهيم الأخرى للتّعقيد (الملحق B) ليس شرطًا أنْ يكون مزعجًا لنا. بما أنّنا لا نعرف مقدار الوقت الذي تحتاج إليه عملية معينة على حاسوب معين، فإنَّ العوامل الثّابتة في زمن التشغيل لها معنى قليل. ولهذا السبب يكون الرمز $O(f)$ ملائمًا. نموذجيًّا، نسيء استعمال الرمز بكتابة $O(n^2)$ بدلاً من $O(f)$ لوصف الدّوال التي تنمو على الأكثر تربيعيًّا بدلالة n.

4.2.3. ملاحظة: ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y، فيه n رأسًا و m ضلعًا، بما أنَّ $\alpha'(G)\leq n/2$، فإنّنا نجد مواءمة كبرى في G من خلال تطبيق الخوارزميّة 1.2.3 على الأكثر $n/2$ مرة. وكلّ تطبيق للخوارزميّة 1.2.3 يستكشف رأسًا واحدًا من X على الأكثر قبل وضع علامة عليه. لذلك، فهي تأخذ في الحسبان كلّ ضلع مرة واحدة على الأكثر. إذا كان الزّمن لاستكشاف ضلع واحد محدودًا بثابت، فإنَّ هذه الخوارزميّة تحتاج إلى زمن تشغيلي $O(nm)$ لإيجاد مواءمة كبرى. تقدم النظرية 22.2.3 خوارزميّة أسرع مع زمن تشغيل $O(\sqrt{n}m)$. ويناقش الجزء 3.3 خوارزميّة حسنة لمواءمة كبرى في البيانات العامّة. ■

مواءمة ثنائيّ فرع موزونة (Weighted Bipartite Matching)

تعمّم نتائجنا حول المواءمة العظمى إلى البيانات الثّنائيّة بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y والموزونة، حيث نبحث عن مواءمة بأكبر وزن كلّيّ. إذا لم يكن البيان كلّ $K_{n,n}$ ، فإنّنا ندخل الأضلاع الناقصة مع وزن 0. وهذا لا يؤثر فيما نستطيع الحصول عليه مثل وزن مواءمة. لذلك، نستطيع افتراض أنّ البيان هو $K_{n,n}$. وكذلك 0 نستطيع اعتبار الأوزان جميعها غير سالبة؛ لأنّنا نستطيع تغيير الأوزان السالبة بـ 0. حلّ المسألة الناتجة، واحذف الأضلاع التي وزنها لتحصل على حلّ المسألة الأصليّة.

بما أنّنا أخذنا في الحسبان الأضلاع التي وزنها غير سالب فقط، فإنَّ بعضَ المواءمات الموزونة العظمى موائماتٌ مكتملة. لذا، فإنّنا نبحث عن مواءمة مكتملة. وسنحلّ مسألتي المواءمة الموزونة الكبرى وثنويّتها.

5.2.3. مثال: المواءمة ثنائيّة الفرع الموزونة وثنويّتها. تملك شركة زراعية n مزرعة و n مصنعًا للمعالجة. وكلّ مزرعة تستطيع إنتاج ذُرَة بسعة مصنع واحد. إنَّ الرّبح الذي يتحقّق من إرسال منتجات المزرعة i إلى المصنع j هو $w_{i,j}$. وأنَّ وزن $w_{i,j}$ على الضّلع x_iy_j يعطينا بيانًا ثنائيّ الفرع موزونًا مع مجموعات مجزّأة $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ و $Y=\{y_1,\dots,y_n\}$. وتريد الشّركة اختيار أضلاع تشكّل مواءمة لمضاعفة الربح الكلّيّ.

تدّعي الحكومة إنتاج الكثير من الذّرة. لذا، فإنّها ستدفع للشّركة لكي لا تقوم هذه الشّركة بمعالجة الذّرة وتصنيعها، حيث ستدفع الحكومة u_i إذا وافقت الشّركة على عدم استخدام المزرعة i في حين تدفع v_j إذا وافقت الشّركة على عدم استخدام المصنع j. إذا كان $u_i+v_j<w_{i,j}$ فإنَّ الشّركة تربح باستخدام الضّلع x_iy_j أكثر مما تدفعه الحكومة لهذه الرّؤوس. ولكي يتمّ توقف الإنتاج كلّه؛ يجب أنْ تقدم الحكومة عرضًا بحيث يكون $u_i+v_j\geq w_{i,j}$ لكلّ i,j . وتريد الحكومة إيجاد قيم لتصغير $\sum u_i+\sum v_j$ ■

6.2.3. تعريف: المستعرض (transversal) للمصفوفة المربّعة n في n يتكون من n موقعًا، بحيث يكون هناك موقع واحد في كلّ صفّ وفي كلّ عمود. يُسمّى إيجاد مستعرض بأكبر مجموع **مسألةَ الواجب** (Assignment Problem). وهذه هي الصّياغة بلغة المصفوفات لمسألة **المواءمة الموزونة العظمى**، حيث يُعيّن وزن غير سالب $w_{i,j}$ للضّلع x_iy_j في $K_{n,n}$، ونبحث عن مواءمة مكتملة M لتكبير الوزن الكلّيّ $w(M)$.

وبهذه الأوزان، فإنّ **الغطاء (الموزون)** ((weighted) cover) هو اختيار أوسمة $u_i,\dots,u_n$ و $v_j,\dots,v_n$ بحيث $u_i+v_j\geq w_{i,j}$ لكلّ i,j. أمّا **التّكلفة** $(cost)$ $c(u,v)$ للغطاء (u,v) فهي $\sum u_i+\sum v_i$. و أنّ مسألة **الغطاء الموزون الأصغر** (minimum weighted cover) هي إيجاد غطاء بتكلفة صغرى.

لاحظ أنَّ مسألة إيجاد مواءمة مكتملة مع أصغر وزن، يمكن حلّها بوضع كلّ وزن $w_{i,j}$ مع M-$w_{i,j}$ حيث M عدد كبير، ومن ثمّ إيجاد مواءمة موزونة كبرى.

7.2.3. تمهيدية : (مسائل ثنويّة المواءمات الموزونة والأغطية الموزونة) للمواءمة المكتملة M والغطاء الموزون (u,v) في البيان ثنائيّ الفرع الموزون G، يتحقّق أنَّ $c(u,v) \geq w(M)$. وكذلك، $c(u,v) = w(M)$ إذا وفقط إذا تكوّنت M من الأضلاع x_iy_j بحيث $u_i+v_j=w_{i,j}$. في هذه الحالة، تكون M و (u,v) هما المثليين.

الإثبات: بما أنَّ M مشبعة لكلّ رأس، فإنَّ جمع القيود $u_i+v_j \geq w_{i,j}$ التي تظهر من أضلاعها يعطي $c(u,v) \geq w(M)$ لكلّ غطاء (u,v). فضلًا عن ذلك، إذا كان $c(u,v)=w(M)$، فإنَّ المساواة يجب أنْ تتحقّق في كلّ واحدة من المتباينات التي عددها n والتي جمعت. أخيرًا، بما أنَّ $c(u,v) \geq w(M)$ لكلّ مواءمة وغطاء، فإنَّ $c(u,v)=w(M)$ تؤدي إلى عدم وجود مواءمة مع وزن أكبر من $c(u,v)$ وكذلك عدم وجود غطاء مع تكلفة أقلّ من $w(M)$. ■

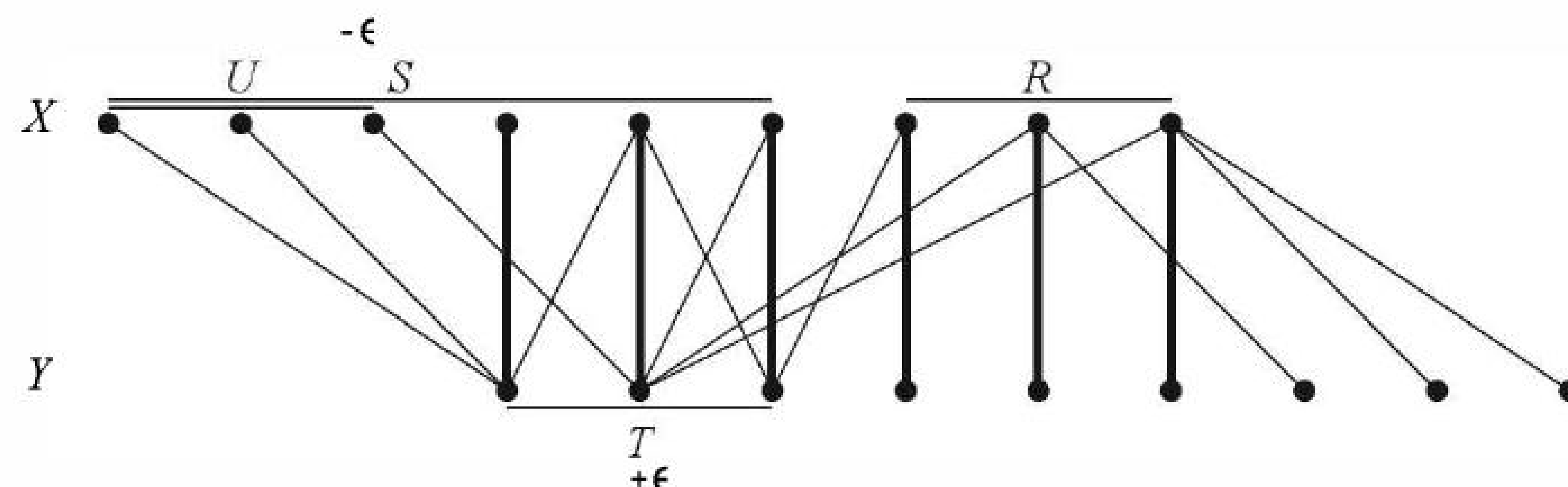
لاحظ أنَّ مواءمة وغطاء لهما القيمة نفسها فقط عندما تكون الأضلاع في المواءمة قد غطيت مع المساواة. وهذا يقودنا إلى خوارزميّة.

8.2.3. تعريف: البيان الجزئيّ للمساواة (equality subgraph) $G_{u,v}$ للغطاء الموزون (u,v) هو البيان الجزئيّ المولّد لـ $K_{n,n}$ الذي تكون أضلاعه هي الأزواج x_iy_j حيث $u_i + v_j = w_{i,j}$. إنّ الزيادة (excess) لـ i، j في الغطاء هي $u_i + v_j - w_{i,j}$.

إذا وُجدت لـ $G_{u,v}$ مواءمة مكتملة فإنَّ وزنه يكون $\sum u_i + \sum v_j$. ومن التمهيدية 7.2.3 نحصل على حلّ أمثل. وبخلاف ذلك، نجد مواءمة M وغطاءً رأسيًّا Q بالحجم نفسه في $G_{u,v}$ (كخوارزميّة المسار الموسّع). ليكن $R = Q \cap X$ و $T = Q \cap Y$. تتكوّن مواءمتنا من الحجم $|Q|$ من $|R|$ ضلعًا من R إلى $Y - T$، و $|T|$ ضلعًا من T إلى $X - R$ كما هو مبين أدناه.

للبحث عن مواءمة أكبر في البيان الجزئيّ للمساواة؛ نغيّر (u,v) لنعرف ضلعًا من $X - R$ إلى $Y - T$، في حين تحفظ المساواة على الأضلاع جميعها في M. لاحظ أنَّ الأضلاع التي تصل $X - R$ و $Y - T$ ليست في $G_{u,v}$، ولها زيادة موجبة. لتكن ϵ الزيادةَ الصغرى على الأضلاع من $X - R$ إلى $Y - T$. إنَّ اختصار u_i بمقدار ϵ لكلّ $x_i \in X - R$ يحفظ شرط الغطاء لهذه الأضلاع، ولكنّه يجلب واحدًا من هذه الأضلاع إلى البيان الجزئيّ للمساواة على الأقلّ. ولنحافظ على شرط الغطاء للأضلاع من $X - R$ إلى T؛ نزيد v_j بمقدار ϵ لكلّ $y_j \in T$.

نعيد الإجراء مع البيان الجزئيّ الجديد للمساواة. وفي النّهاية، سنحصل على غطاء يملك بيانُه الجزئيُّ للمساواة مواءمةً كاملةً. وقد سُمِّيت الخوارزميّةُ الناتجة **الخوارزميّةَ الهنجاريّة** (Hungarian Algorithm) من قِبَلِ كهن ($Kuhn$) عرفانًا لجهود كلّ من كونج وإيجرفاري حيث استندت هذه الخوارزميّة إلى جهودهما.



9.2.3. خوارزميّة : (الخوارزميّة الهنجاريّة – Kuhn- [1955], Munkres [1957]).

المدخلات: مصفوفة الأوزان على الأضلاع لـ $K_{n,n}$ مع التّجزئة الثّنائيّة X,Y.

الفكرة: ضبط الغطاء (u,v) تكراريًّا حتى يملك البيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة.

البداية: ليكن (u,v) غطاءً مثل $u_i = \max_j w_{i,j}$ و $v_j=0$.

مرات الحدوث: جد مواءمة كبرى M في $G_{u,v}$. إذا كانت M مواءمة كاملة، توقف، وقدّم تقريرًا بإنَّ M مواءمةُ وزن كبرى. وبخلاف ذلك، ضع Q ليكن غطاءً رأسيًّا من الحجم $|M|$ في $G_{u,v}$. لتكن $R = X \cap Q$ و $T = Y \cap Q$. وليكن:

$$\epsilon = \min \{u_i + v_j - w_{i,j} : x_i \in X - R,\ y_i \in Y - T\}$$

أنقص ϵ من u_i لكلّ $x_i \in X - R$، وأضف ϵ إلى v_j لكلّ $y_j \in T$. شكّل البيان الجزئيّ الجديد للمساواة، ثمّ كرّر. ■

قدّمنا الخوارزميّة التي تستخدم البيانات الثنائيّة الفرع، إلّا أنّ رسمَ تغيّرات البيان الجزئيّ للمساواة تكراريّا غيرُ ملائم. لذا، نحسب باستخدام المصفوفات. لاحظ أنَّ الأوزان الابتدائية تشكّل مصفوفة A مع $w_{i,j}$ في الموقع i,j. نرفق الرّؤوس والأوسمة (u,v) مع الصفوف والأعمدة التي تخدم مثل X و Y على الترتيب. نطرح $w_{i,j}$ من u_i+v_j لنحصل على **مصفوفة الزيادة** (excess matrix) $c_{i,j} = u_i + v_j - w_{i,j}$: لاحظ أنَّ الأضلاع للبيان الجزئيّ للمساواة تقابل أصفارًا في مصفوفة الزيادة.

10.2.3. مثال: حلّ مسألة الواجب. إنَّ المصفوفة الأولى أدناه هي مصفوفة الأوزان. أمّا باقي المصفوفات فتظهر غطاءً (u,v) ومصفوفة الزيادة المقابلة. نضع خطًّا تحت بعض مدخلات مصفوفة الزيادة لتمييز مواءمة كبرى M في $G_{u,v}$، والتي تظهر في صورة أضلاع سميكة في البيانات الجزئيّة للمساواة التي رسمت لأول مصفوفتي زيادة. (رسم البيانات الجزئيّة للمساواة ليس ضروريًّا). لاحظ أنَّ أي مواءمة في $G_{u,v}$ تقابل مجموعة من الأصفار في مصفوفة الزيادة بحيث لا يكون هناك صفران في أيّ صف أو أيّ عمود؛ هذا هو **المستعرض الجزئي** (partial transversal).

إنَّ المجموعة المغطاة هي مجموعة من الصفوف والأعمدة تغطي الأصفار في مصفوفة الزّيادة؛ و تقابل غطاءً رأسيًّا في $G_{u,v}$. إضافة إلى أنّ أيّ مجموعة غطاء بحجم أقلّ من n تؤدي إلى تقدّمٍ نحو الحلّ، وبما أنَّ تكلفة الغطاء الموزون قليلة، فإنّنا سندرس الأصفار في مجموعة الزّيادة، ونجد مستعرضًا جزئيًّا ومجموعة غطاء بالحجم نفسه. وإذا كانت لدينا مصفوفة صغيرة، فإنّنا نستطيع عمل ذلك بالمعاينة.

نضع خطًّا تحت الأصفار في مستعرض جزئيّ. ونستعمل الحرفين R و T لوسم الصّفوف والأعمدة في مجموعة الغطاء. في كلّ تكرار، نحسب الزّيادة الصغرى على المواقع التي ليست في صفّ أو عمود مغطى (في صفوف X-R وأعمدة Y-T). إنَّ لهذه المواقع غير المغطّاة زيادة موجبة (الأضلاع المقابلة ليست في البيان الجزئيّ للمساواة). لاحظ أنَّ القيمة ϵ والتي عرّفت في الخوارزميّة 9.2.3 هي الأصغر من بين هذه الزّيادات. لذا، نطرح ϵ من الوسم u_i على الصّفوف التي ليست في R ونزيد الوسم v_j بمقدار ϵ على أعمدة T.

في المثال الآتي، لاحظ أنَّ مجموعة الغطاء التي استعملت في التّكرار الأوّل قد خفّضت تكلفة الغطاء، ولكنها لم توسّع المواءمة العظمى في البيان الجزئيّ للمساواة، أمّا التّكرار الثّاني فإنّه ينتج مواءمة كاملة، فضلًا عن أنَّ استخدام الأعمدة الثّلاثة الأخيرة بوصفها مجموعة غطاء في التّكرار الأوّل يوسّع المواءمة مباشرة.

إنَّ المستعرض للأصفار بعد التّكرار الأخير يحدّد مواءمة كاملة وزنها الكلّيّ يساوي تكلفة الغطاء النّهائيّ. لاحظ أنَّ أوزان الأضلاع المقابلة (المرتبطة) يساوي 5 ، 4 ، 6 ، 8 ، 8 وذلك في المعطيات الأصليّة، بالإضافة إلى أنَّ مجموع هذه الأوزان يساوي 31. أمّا الأوسمة (العلامات الدّالّة) 4 ، 5 ، 7 ، 4 ، 6، و0 ، 0 ، 2 ، 2 ، 1 الموجودة

في الغطاء النّهائيّ فتحقّق تمامًا كلّ ضلع، ومجموعها أيضًا يساوي 31. إنَّ قيمةَ الحلّ الأمثل وحيدةٌ، ولكن الحلّ نفسه ليس شرطًا أنْ يكون وحيدًا؛ ويوجد لهذا المثال مواءمات وزن كبرى عديدة، وكذلك غطاءات تكلفة صغرى عديدة، ولكن جميعها لها الوزن الكلّيّ 31. ■

X R

Y T T

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 2 & 5 & \underline{0} & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 7 & 4 & \underline{0} & 1 \\ 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & \underline{0} \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ & & & T & T & \end{array} \; R$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 0 & 3 & \underline{0} & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 4 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & \underline{0} & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & \underline{0} & 1 \end{array}$$

X

Y T T T

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 1 & 4 & \underline{0} & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 6 & 4 & \underline{0} & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 5 & 4 & \underline{0} \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ & & & T & T & T \end{array}$$

11.2.3. نظرية : تجد الخوارزميّة الهنجاريّة مواءمة وزن كبرى وغطاء تكلفة أصغر.

الإثبات: تبدأ الخوارزميّة بغطاء، وتنتهي فقط عندما يكون للبيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة، تضمن قيمة متساوية للمواءمة الحاليّة وللغطاء. افترض أنَّ (u,v)الغطاءُ الحالي، وأنَّه لا توجد للبيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة. ليرمز (u',v') إلى قوائم الأعداد الجديدة التي تعيِّن للرّؤوس. وبما أنَّ ϵ العددُ الأصغرُ لمجموعة منتهية غير خالية من الأعداد الموجبة، فإنَّ $\epsilon > 0$.

نتحقّق أولاً بأنَّ (u',v') غطاءٌ. إنَّ تغيير الأوسمة على رؤوس $R - X$ و T يعطي $u'_i+v'_j = u_i + v_j$ للأضلاع x_iy_j من $X - R$ إلى T، أو من R إلى $Y - T$. إذا كان $x_i \in R$، و $y_j \in T$، فإنَّ $u'_i + v'_j = u_i+ v_j + \epsilon$، ويبقى الوزن مغطى. إذا كان $x_i \in X - R$ و $y_j \in Y - T$، فإنَّ $u'_i+v'_j$ يساوي $u_i + v_j - \epsilon$، وبحسب الاختيار لـ ϵ يكون على الأقلّ $w_{i,j}$.

تنتهي الخوارزميّة فقط عندما يكون للبيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة. لذا، يكفي أنْ نبرهن أنَّ الخوارزميّة تنتهي. افترض أنَّ الأوزانَ $w_{i,j}$ أعدادٌ نسبيةٌ. لذا، فإنَّ ضرب الأوزان في المضاعف المشترك الأصغر لمقاماتها يؤدي إلى مسألة مكافئة مع أوزان صحيحة. والآن، نستطيع افتراض أنّ الأوسمة في الغطاء الحاليّ صحيحة أيضًا. لذلك، فإنَّ كلّ زيادة عددٌ صحيحٌ أيضًا. وعند كلّ تكرار، سنخفّض تكلفة الغطاء بمقدار صحيح. وبما أنَّ التكلفة تبدأ بقيمة ما وهي محدودة من أسفل بوزن مواءمة كاملة، فإنّنا نحصل على المساواة بعد عدد منتهٍ من التّكرارات للأوزان ذات القيم الحقيقية عمومًا، انظر الملاحظة 12.2.3. ■

12.2.3.* ملاحظة : عندما تكون الأوزان أعدادًا حقيقيةً، فإنَّه يمكن للخوارزميّة أنْ تبقى صالحة إذا عملنا بعناية كبيرة للحصول على أغطية رأسيّة في البيان الجزئيّ للمساواة. نستطيع أنْ نبرهن أنَّ الخوارزميّة تنتهي من خلال إجراء n^2 تكرارًا. إنَّ حجم المواءمة الحاليّة لا يمكن أنْ ينقص لأنّ الأضلاع في M تبقى في البيان الجزئيّ للمساواة الجديد. وبما أنَّ حجم المواءمة يمكن أنْ يزداد n مرة على الأكثر، فإنَّه يكفي أنْ نبرهن أنّها سوف تزداد ضمن n تكرارًا.

إذا وجدنا المواءمة العظمى M بتكرار خوارزميّة المسار الموسّع، فإنَّ التّكرار الأخير يقدّم لنا غطاءً رأسيًّا نجده

باستكشاف المسارات المتناوبة للمواءمة M من مجموعة الرّؤوس غير المشبعة من M في X. وبجعل S و T يدلّان على مجموعتي الرّؤوس التي يمكن الوصول إليها في X و T، فإنّنا نحصل على الغطاء الرأسيّ $R \cup T$، حيث $R = X - S$.
إنَّ تطبيق خطوة من الخوارزميّة الهنجاريّة باستخدام الغطاء الرأسيّ $R \cup T$ يحفظ المساواة على M وعلى الأضلاع جميعها في المسارات المتناوبة للمواءمة M من المجموعة U. لا نعير اهتمامًا للأضلاع التي تكون من T إلى R والتي تختفي من البيان الجزئيّ للمساواة لأنّها لا تظهر في المسارات المتناوبة للمواءمة M من المجموعة U. إنَّ وضع ضلع من S إلى Y-T إمّا أنْ يعيّن مسارًا موسّعًا لـ M أو يزيد T، في حين يترك U دون تغيير. وبما أنّ باستطاعتنا زيادة T على الأكثر n مرة، فإنّنا نحصل على مواءمة أكبر في البيان الجزئيّ للمساواة ضمن إجراء n تكرارًا. ■

13.2.3.* ملاحظة : المواءمة العظمى ومسائل الغطاء الرأسيّ في البيانات الثنائيّة الفرع هما حالات خاصة من المسائل الموزونة. ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع. شكّل بيانًا موزونًا مع وزن 1 على الأضلاع في G، والوزن 0 على الأضلاع في $K_{n,n}$. ولاحظ أنَّ الوزن الأكبر لمواءمة هو $\alpha'(G)$.

إذا كانت الأوزان أعدادًا صحيحة فإنَّ الخوارزميّة الهنجاريّة تحافظ دائمًا على أوسمة صحيحة في الغطاء الموزون. لذا، نستطيع تقييد القيم (الوسوم) المستخدمة بالأعداد الصحيحة في مسألة الغطاء الموزون هذه. فضلًا عن ذلك، فإنَّ هذه الأعداد الصحيحة سوف تكون 0 أو 1 دائمًا.

إنَّ الرّؤوس التي تستقبل الوسم 1 يجب أنْ تغطي الوزن على الأضلاع في G. لذا، فهي تشكّل غطاءً رأسيًّا لـ G. بالإضافة إلى أنَّ تصغير مجموع الوسوم تحت قيد الأعداد الصحيحة يكافئ إيجاد أصغر عدد من الرّؤوس في غطاء رأسيّ لـ G. لذلك، فإنَّ جواب مسألة الغطاء الموزون $\beta(G)$. ■

14.2.3.* تطبيق. مسألة كنْس الشّوارع والنقل. إنَّ اتجاه حركة آلة كنس الحاجز الحجريّ للطّريق يجب أنْ تكون في اتجاه حركة المرور. وهذا يعطي بيانًا موجّهًا. إذن، إذا كان الطّريق ذا اتجاهين فإنَّه يولّد ضلعين في اتجاهين متعاكسين. في حين يولّد الطّريق ذو الاتجاه الواحد ضلعين في الاتجاه نفسه. سنأخذ في الحسبان نسخة بسيطة من **مسألة كنْس الشّوارع** (problem street sweeping). وقد نوقشت هذه المسألة بتفصيل أكثر في روبرتس [1978] (Roberts) بالاعتماد على ([1976] Tucker- Bodin).

في مدينة نيويورك، يمنع الاصطفاف على بعض جوانب الطّرق يوميًّا لكنْسها. ولكلّ يوم، فإنَّ هذا يعرّف **بيانًا جزئيًّا للكنس** (*sweep subgraph*) G من البيان الكلّيّ الموجّه H لحواجز الشّوارع الحجرية، حيث يتكوّن G من الحواجز القابلة للكنْس. ولكلّ $e \in E(H)$ **زمن مخفي** (deadheading time) t(e) وهو الزمن الذي نحتاج إليه لاجتياز e دون كنس.

والسؤال هو كيف نكنُس G مع تقليل الزّمن الكلّيّ المخفي الذي لايكون فيه كنس. ويعدّ هذا تعميمًا لنسخة موجّهة من مسألة ساعي البريد الصّينيّ. إذا تساوت درجتا الدخول والخروج عند كلّ رأس في G، فلا حاجة إلى الزّمن المخفي. وبخلاف ذلك، نستخرج نسخة ثانية من أضلاع G، أو نضيف أضلاعًا من H لنحصل على بيان موجّه أويلريّ G' يحوي G.

لتكن X مجموعةَ الرّؤوس مع زيادة في درجة الدخول؛ لكلّ $x \in X$ ضع $\sigma(x) = d_G^-(x) - d_G^+(x)$.
ولتكن Y مجموعةَ الرّؤوس مع زيادة في درجة الخروج؛ لكلّ $y \in Y$ ضع $\partial(y) = d_G^-(y) - d_G^+(y)$. لاحظ

أنَّ $\sum_{x\in X}\sigma(x)=\sum_{y\in Y}\partial(y)$. لنحصل على G' من G؛ يجب إضافة $\sigma(x)$ ضلعًا مع ذيول عند x، و$\partial(y)$ ضلعًا مع مقدمات عند y. بما أنَّ G' يحتاج إلى محصلة درجة خروج 0 عند كلّ رأس، فإنَّ الإضافات تشكّل مسارات من X إلى Y. إنَّ التّكلفة $c(xy)$ لمسار من x إلى y هي المسافة من x إلى y في البيان الموجّه الموزون H، والذي نستطيع إيجاده باستخدام خوارزميّة ديجكسترا (Dijkstra).

وهذا يؤدي إلى **مسألة النّقل** (Transportation Problem). ليكن $\sigma(x)$ هو العرض لـ x، و$\partial(y)$ هو الطّلب لـ y، و $c(xy)$ هي التكلفة لكلّ وحدة مرسلة من x إلى y، و $\sum\sigma(x)=\sum\partial(y)$، ونريد تحقيق الطّلبات بأقل تكلفة كليّة. وقد قدّمت نسخة من هذه المسألة من قبَل كانتوروفيتش (Kantorovich) [1939]؛ وظهر الشّكل في الأعلى (مع حلّ بنائيّ) في هيتشكوك (Hitchcock) [1941] (انظر أيضًا Koopmans [1947].) وقد نوقشت المسألة في فورد – فلكرسون (nosrekluF – droF) [2691, p39-130].

عندما تكون العروض والطّلبات أعدادًا نسبية، فإنّ بالإمكان تطبيق مسألة الوظيفة. أوّلاً عدّل قيم العروض والطّلبات لتحصل على قيم صحيحة، ثمّ عرف مصفوفة على $\sum\sigma(x)$ صفًّا وعمودًا. ولكلّ $x\in X$، عيّن $\sigma(x)$ صفًّا. ولكلّ $y\in Y$، عيّن $\delta(y)$ عمودًا. وعندما يكون الصّفّ i والعمود j يمثّلان x و y، ضع $w_{i,j}=M-c(xy)$، حيث $M=\max_{x,y}c(x,y)$ لاحظ الآن أنّ مواءمة وزن كبرى تؤدي إلى حلّ ذي تكلفة صغرى لمسألة النقل. ويظهر تعميم لمسألة النقل في الجزء 3.4. ■

المواءمات المستقرة (اختياري) (Stable Matching (Optional))

بدلاً من جعل الوزن الكلّيّ لمواءمة مثاليًّا، فلربما نحاول جعله مثاليًّا باستخدام حقّ الأفضلية أو الاختيار. فإذا أُعطينا n رجلاً و n امرأة؛ فإنّنا نريد أنْ نؤسّس n زواجًا "مستقرًّا". إذا وضع الرّجل x والمرأة a في زوجين مختلفين، ولكن x يفضّل a على شريكته الحالية، و a تفضل x على شريكها الحاليّ، فإنّهما يستطيعان ترك شريكيهما الحاليّين وتبديل كلّ منهما مع الآخر. في هذا الوضع، نقول إنَّ الزوجَ غير المتوائم (x,a) **زوجٌ غيرُ مستقرّ** (unstable pair).

15.2.3. تعريف: تكون المواءمةُ الكاملة **مواءمةً مستقرّة** (stable matching) إذا لم تعط أزواجًا غير متوائمة ولا مستقرة.

16.2.3. مثال: إذا أعطيت الرّجال x,y,z,w والنّساء a,b,c,d، وقائمة التفضيل أدناه، فإنَّ المواءمةَ $\{xa, yb, zd, wc\}$ مستقرّةٌ. ■

رجال $\{x,y,z,w\}$	**نساء** $\{a,b,c,d\}$
$x:a>b>c>d$	$a:z>x>y>w$
$y:a>c>b>d$	$b:y>w>x>z$
$z:c>d>a>b$	$c:w>x>y>z$
$w:c>b>a>d$	$d:x>y>z>w$

لقد أثبت كلّ من جيل (Gale) وشابلي (Shapley) في بحثهما "قبولات الكليّة والاستقرار في الزّواج" وجود مواءمة مستقرة دائمًا، ويمكن إيجادها باستخدام خوارزميّة بسيطة نسبيًّا. في هذه الخوارزميّة، لاحظ أنَّ الرّجال والنّساء لا يقومون بدور متماثل؛ سوف نناقش أهمية هذا الفرق لاحقًا. والخوارزميّة أدناه تولّد المواءمة لمثال 16.2.3.

17.2.3. خوارزميّة : (خوارزميّة اقتراح الزّواج لجيل وشابلي)

المدخلات: ترتيب الأولويّة لكلّ رجل من n رجلاً، ولكلّ امرأة من n امرأة.

الفكرة: تقديم مواءمة مستقرّة باستخدام مقترحات الزّواج مع المحافظة على المعلومات حول مَن اقترح مَن؟ ومَن رفض مَن؟

خطوات مرات الحدوث: يقترح كلّ رجل المرأة الأكثر تفضيلاً في قائمته على افتراض أنّها لم ترفضه سابقًا. إذا تسلمت كلّ امرأة طلبًا واحدًا بالضبط للزّواج، توقفْ واستخدم المواءمة الناتجة. بخلاف ذلك، فإنّ كلّ امرأة وصلها أكثر من طلب للزواج ترفض الطّلبات التي وصلتها جميعها ما عدا الطّلب الأكثر تفضيلاً على قائمة أولويّاتها. وكلّ امرأة وصلها طلب زواج تقول "ربما" لأكثر الطّلبات التي تسلّمتها جاذبيّة. ■

18.2.3. نظرية : (Gale- Shapley [1962]) خوارزميّة مقترحات الزّواج تنتج مواءمة مستقرّة.

الإثبات: بما أنّه لا يمكن رفض رجل من النساء جميعهنّ (التمرين 14) فإنّ الخوارزميّة تتوقف فقط بالحصول على مواءمة. ولأنّ كلّ خطوة تكرار تجعل الطّول الكلّيّ للطّلبات المتبقيّة على القائمة يتناقص، فلا بدّ من توقّف الخوارزميّة.

ملاحظ أساسيّة: إنّ متتالية الطّلبات التي قدّمت من كلّ رجل ليست متزايدة في قائمة أولوياته، وأنّ متتالية الرّجال الذين قيل لهم "ربما" من قِبَلِ امرأة غير متناقصة في قائمة أولويّاتها تنتهي بالرّجل المشار إليه. وهذا يتحقّق لأنّ الرّجال يكرّرون الطّلَبَ لامرأة بعينها حتى يتمّ رفضهم، وتقول المرأة "ربما" للرّجل نفسه حتى يصلها عرض أفضل.

إذا كانت النتيجة غير مستقرّة، فيوجد زوج (x,a) غير متوائم ولا مستقرّ؛ حيث x منسجم مع b، أمّا y فمنسجم مع a. ومن الملاحظة الأساسيّة، فإنّ x لم يقترح a خلال الخوارزميّة؛ لأنّ a استقبلت رفيقًا رغبتُها فيه أقلّ من رغبتها في x. وتؤدّي الملاحظة الأساسيّة إلى أنّ x غير راغب في طلب b دون اقتراح مبكر لـ a. وهذا التّناقض يؤكّد استقرار النتيجة. ■

إنّ عدم التّماثل في خوارزميّة الاقتراح يسأل عن أيّ الجنسين أكثر سعادة. وعندما تكون الخيارات الأولى للرّجال جميعها مختلفة، فإنّ الرّجال جميعهم سيحصلون على خيارهم الأول، أمّا النساء فعليهنّ الالتزام بهذا بصرف النّظر عما اقترحنه. وعندما تطبق الخوارزميّة بمقترحات النساء، فإنّ كلّ امرأة تكون على الأقلّ سعيدة بمقدار سعادتها عندما يقوم الرّجال بالاختيار أو الاقتراح، بالإضافة إلى أنّ كلّ رجل على الأقلّ غير سعيد بالمقدار نفسه. وفي المثال 16.2.3، نجد أنّ تطبيق الخوارزميّة بحسب مقترحات النّساء يؤدّي مباشرة إلى المواءمة $\{xd, yb, za, wc\}$ التي تكون فيها النّساء جميعهنّ متوائمات مع الخيارات الأولى لهنّ. في الحقيقة، ومن بين المواءمات المستقرة جميعها، فإنّ كلّ رجل هو الأكثر سعادة في المواءمة الناتجة عن خوارزميّة اقتراح الرّجال، وكلّ امرأة هي الأكثر سعادة في خوارزميّة اقتراح النّساء (التمرين 11). وفي العرْف الاجتماعي تكون الأفضلية لصالح الرّجال.

وهناك استخدام آخر لهذه الخوارزميّة. ففي كلّ عام، نجد أنّ خرّيجي الكلّيّات الطّبّيّة يضعون قائمة أولويات بالمستشفيات التي يفضلون الإقامة فيها. والمستشفيات كذلك لها خياراتها؛ ونحن ننمذج أيّ مستشفى فيه عدة أماكن شاغرة كالعديد من المستشفيات التي لها قائمة الأولويّات نفسها. إنّ الفوضى في توزيع المقيمين قد أجبرت المستشفيات على تنفيذ الخوارزميّة قبل عشر سنوات من تعريف المسألة وحلّها في بحث جيل وشابلي. وكانت النتيجة برنامج مواءمة المقيمين الوطني، ففي العام 1952م أنشئت مؤسسة غير ربحية للتزويد بتواريخ تعيينات موحّدة وإجراءات مواءمة موجودة.

مَنِ الأكثر سعادة بالنتيجة؟ بما أنّ المنظمات الطّبّيّة قامت بتطبيق الخوارزميّة، فمن غير المستهجن

مبدئيا قيامهم بتنفيذ المقترحات؛ لذا فهم الأكثر سعادة. إلّا أنّ الاختلاف أكثر وضوحًا في مكان آخر؛ حيث لدى الطّلبة الذين يتقدّمون لوظائف أولويات، في حين يعدّ أصحاب العمل مقترحات تدعى "عروض الوظيفة". إلّا أنّ عدم الشّعور بالسّعادة مع NRMP كان السّبب في تغيير النّظام في العام 1998م لخوارزميّة مقترح الطالب. ففي العام 1998م تعامل النّظام مع 35,823 طلبًا لـ 22,451 وظيفة. ويمكن إيجاد تفصيلات إضافية لهذا النّظام على موقع الشّبكة العالميّة الواسعة على العنوان الإلكترونيّ: nrmp. aamc.org/ nrmp/ mainguid .

يمكن أنْ توجد مواءمات مستقرّة غير الموجودة في نسختي خوارزميّة المقترحات. وللبحث عن مواءمة مستقرّة "عادلة" فإنّنا نستطيع إعطاء كلّ شخص عددًا من النقاط لتصنيف الأولويّات. فوزن الزّوج xa هو مجموع النّقاط التي يعطيها كلّ من x إلى a و a إلى x. لاحظ أنّ الخوارزميّة الهنجاريّة يمكن أنْ تعطي مواءمة ذات وزن كلّيّ أكبر، ولكن قد لا تكون هذه المواءمة مستقرّة (التمرين 10). وهناك طرق حلّ أخرى تظهر في كتب Knuth [1976] و Gusfield – Irving [1989]، تبحث في حالات زواج مستقرّة ومواضيع متعلقة بها.

مواءمة ثنائيّ الفرع الأسرع (اختياري) (optional) (Faster Bipartite Matching)

نبدأ هذا الجزء بخوارزميّة لإيجاد مواءمات كبرى في البيانات الثنائيّة الفرع. من الممكن تحسين زمن التشغيل بالبحث عن مسارات موسّعة بترتيب فريد؛ وعندما تتوافر مسارات موسّعة قصيرة فلا نحتاج إلى استكشاف الكثير من الأضلاع لإيجاد مسار موسّع. وباستخدام خوارزميّة البحث الأفقيّ أولاً للرّؤوس غير المشبعة جميعها في X، فإنّنا نستطيع إيجاد العديد من المسارات التي لها الطول نفسه، مع فحص واحد لمجموعة الأضلاع. أثبت كلّ من هوبكروفت وكارب [1973] (Hopcroft and Karp) بأنّ الموسّعات اللاحقة يجب أنْ تستخدم مسارات أطول. لذا، فبالإمكان جمع البحوث على حالات لإيجاد مسارات لها الطول نفسه، وقد وحّدا هذه الأفكار ليوضّحا أنّ بعض الحالات تكون ضرورية؛ لكي تساعد في إيجاد المواءمات العظمى في البيانات الثنائيّة الفرع على n من الرّؤوس في زمن $O(n^{2.5})$.

19.2.3. ملاحظة: إذا كانت M مواءمة بحجم r، و M^* مواءمة بحجم s، حيث $s > r$، فيوجد على الأقلّ $s - r$ من مثل هذه المسارات الموسّعة للمواءمة M منفصلة الرّؤوس. ويوجد كذلك على الأقلّ مثل هذا العدد من المسارات في $M \Delta M^*$. ■

تعطي التمهيدية الآتية أنّ المتتالية لأطوال المسارات في تعاقب الموسّعات الأقصر هي متتالية غير تناقصة. وهنا، سنعالج المسارات بوصفها مجموعات أضلاع. في حين يشير العدد الكاردينالىّ (cardinal-ity) إلى عدد الأضلاع.

20.2.3. تمهيدية: إذا كان P المسارَ الأقصرَ الموسّع للمواءمة M، و P' هو الموسّع للمواءمة $M\Delta P$، فإنّ $|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$ (بمعاملة P بوصفها مجموعات أضلاع).

الإثبات: لاحظ أنّ $M \Delta P$ هي المواءمة التي تمّ الحصول عليها باستخدام P لتوسيع M. لتكن N هي المواءمة $(M \Delta P) \Delta P'$ التي حُصل عليها باستخدام P' لتوسيع $M \Delta P$. بما أنّ $|N| = |M| + 2$، فإنّ الملحوظة 19.2.3 تضمن أنّ $M \Delta N$ تحوي P_1 و P_2 بوصفهما مسارين منفصلين موسّعين للمواءمة M. وبما أنّ P هو المسار الأقصر الموسّع للمواءمة M، فإنّ طول كلّ من P_1 و P_2 كطول P على الأقلّ.

وبما أنّ N التي حُصل عليها من M بتبديل الأضلاع في P، ومن ثمّ تبديل الأضلاع في P'، فإنّ ضلعًا ما

يكون منتميًا إلى إحدى المواءمتين M،N إذا وفقط إذا انتمى إلى أحد المسارين P و P'. وعليه، فإنَّ $M \Delta N = P \Delta P'$. وهذا يؤدي إلى أنَّ $|P \Delta P'| \geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P|$. إذن،

$$2|P| \leq |P \Delta P'| = |P| + |P'| - 2|P \cap P'|$$

ونستنتج أنَّ $|P'| \geq |P| + 2\,|P \cap P'|$. ■

21.2.3. تمهيدية : إذا كانت $P_1, P_2, \ldots$ هي قائمة من الموسّعات الأقصر المتعاقبة، فإنَّ الموسّعات التي لها الطول نفسه هي مسارات منفصلة الرّأس.

الإثبات : سنستخدم أسلوب التناقض. لتكن P_l ، P_k حيث $l > k$ هما أقرب زوج في القائمة لهما الحجم نفسه، ولكنهما ليسا منفصلي الرّأس. من تمهيدية 20.2.3، فإنَّ متتالية أطول المسارات الموسّعة الأقصر المتعاقبة هي متتالية غير متناقصة. لذا، فإنَّ الموسّعات $P_k, \ldots\ P_l$ جميعها لها الطول نفسه. وبما أنَّ P_l، P_k هما أقرب زوج متقاطع لهما الطول نفسه ، فإنَّ المسارات $P_{k+1}, \ldots\ P_l$ هي مسارات منفصلة زوجًا زوجًا.

لتكن M' هي المواءمة المعطاة بالموسّعات $P_1, \ldots, P_k$. بما أنَّ $P_{k+1}, \ldots\ P_l$ منفصلة زوجًا زوجًا، فإنَّ P_l مسارٌ موسّع للمواءمة M'. ومن تمهيدية 20.2.3 نجد أنَّ $|P_l| \geq |P_k| + |P_l \cap P_k|$. وبما أنَّ $|P_l| = |P_k|$، فلا وجود لضلع مشترك بينهما.

من جهة أُخرى، يجب أنْ يكون هناك ضلعٌ مشتركٌ، فضلاً عن أنَّ كلّ رأس لـ P_k يكون مشبعًا في M' باستخدام ضلع في P_k، وكلّ رأس للمسار الموسّع للمواءمة M' مشبع في M' (كرأس مشترك لـ P_l و P_k) يجب أنْ يسهم بإشباع ضلع في P_l. إنَّ هذا التناقض يؤدي إلى عدم وجود مثل هذا الزّوج P_k, P_l. ■

22.2.3. نظرية : (هوبكروفت - كارب) (Hopcroft – Karp) [1973] تتحرّك خوارزميّة المواءمة العظمى المنفذة على المراحل الأولى للاتساع ضمن زمن $O(\sqrt{n}m)$ على البيانات الثنائيّة الفرع التي لها n رأسًا و m ضلعًا.

الإثبات : من التمهيديّتين 20.2.3 و 21.2.3، البحث الآنيّ عن أقصر الموسّعات من بين الرّؤوس غير المشبعة لـ X جميعها يؤدّي إلى مسارات منفصلة الرّأس، والتي بعدها تكون المسارات الموسّعة الأخرى كلّها أطول. لذلك، وبفحص واحد لمجموعة الأضلاع يمكن إيجاد الموسّعات بالأطوال جميعها، وضمن زمن $O(m)$. ويكفي لإثبات ذلك أنْ نبيّن أنَّه يوجد $2\lfloor \sqrt{n/2} \rfloor + 2$ حالة على الأكثر.

ضع المسارات الموسّعة في قائمة مرتّبة بحسب الطّول على الشّكل $P_1, \ldots, P_S$، حيث $s = \alpha'(G) \leq n/2$. بما أنَّ المسارات التي لها الطول نفسه منفصلةُ الرّأس، فإنَّ كلّ P_{i+1} مسارٌ موسع لمواءمة M_i مشكّلة باستخدام $P_1, \ldots, P_i$. ويكفي أنْ نبرهن العبارة الأعمّ وهي أنَّه عندما تكون $P_1, \ldots, P_S$ أقصرَ المسارات الموسّعة المتعاقبة التي تبني مواءمة كبرى، فإنَّ عدد الأطوال المختلفة خلال هذه المسارات يكون $2\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 2$ على الأكثر.

ليكن $r = \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$. لأنَّ $|M_r| = r$ وحجم المواءمة العظمى هو s، فإنَّ الملاحظة 19.2.3 تعطي $s - r$ مسارًا موسّعًا على الأقلّ للمواءمة M_r منفصل الرأس. ويستخدم أقصر هذه المسارات $\lfloor r / (s - r) \rfloor$ ضلعًا على الأكثر من M_r. لذا، فإنَّ $|P_{r+1}| \leq 2\ \lfloor r/(s - r) \rfloor + 1$. وبما أنَّ $\lfloor r/(s - r) \rfloor < \lfloor s/\lceil \sqrt{s} \rceil \rfloor \leq \lfloor \sqrt{s} \rfloor$، فإنَّ المسارات التي تصل حتى P_r تعطي التوسيعات جميعها ما عدا آخر $\lceil \sqrt{s} \rceil$ توسيعًا، باستخدام طول يساوي $2\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ على الأكثر. وهناك $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ عددًا صحيحًا فرديًّا مختلفًا حتى هذه القيمة على الأكثر. وحتى لو كان آخر $\lceil \sqrt{s} \rceil$

مسارًا لها أطوال مختلفة، فإنّها تزوّد بـ $1+\lfloor \sqrt{s} \rfloor$ أطوالاً إضافية على الأكثر. لذا، فإنّنا نستخدم $2+\lfloor \sqrt{s} \rfloor 2$ طولاً مختلفًا على الأكثر. ■

لقد وسّع إيفن وتارجان [1975] هذا لحلّ مسألة أكثر عموميّة تحتوي على مواءمة ثنائيّة الفرع كبرى خلال زمن $O(\sqrt{n}m)$.

تمارين (Exercises)

1.2.3. (−) باستعمال أوزان غير سالبة للأضلاع، أنشئ بيانًا موزونًا على أربعة رؤوس بحيث لا تكون المواءمةُ ذات الوزن الأكبر مواءمةً ذات حجم أكبر.

2.2.3. (−) بيّن كيفية استعمال الخوارزميّة الهنجاريّة لفحص إمكانيّة وجود مواءمة كاملة في البيان الثنائيّ الفرع.

3.2.3 (*−) أعطِ مثالاً على مسألة المواءمة المستقرّة يتكوّن من رجلين وامرأتين، بحيث يكون هناك أكثر من مواءمة مستقرّة.

4.2.3. (*−) حدّد المواءمات المستقرّة النّاتجة من خوارزميّة الأولويّات مع مقترحات كلّ من الرجال والنساء المعطاة بحسب قائمة الأولويّات الآتية:

نساء $\{a, b, c, d, e, f\}$	رجال $\{u, v, w, x, y, z\}$
$a: z > x > y > u > v > w$	$u: a > b > d > c > f > e$
$b: y > z > w > x > v > u$	$v: a > b > c > f > e > d$
$c: v > x > w > y > u > z$	$w: c > b > d < a > f > e$
$d: w > y > u > x > z > v$	$x: c > a > d > b > e > f$
$e: u > v > x > w > y > z$	$y: c > d > a > b > f > e$
$f: u > w > x > v > z > y$	$z: d > e > f > c > b > a$

• • • • •

5.2.3. جد مستعرضًا بأكبر مجموع كلّيّ (كَوزن) في المصفوفات الآتية جميعها، وبرهن أنّه لا يوجد مستعرض بوزن أكبر بإعطاء حلّ للمسألة الثّنويّة، وفسّر لماذا يبرهن هذا عدم وجود مستعرض أكبر.

(c)	(b)	(a)
1 2 3 4 5	7 8 9 8 7	4 4 4 3 6
6 7 8 7 2	8 7 6 7 6	1 1 4 3 4
1 3 4 4 5	9 6 5 4 6	1 4 5 3 5
3 6 2 8 7	8 5 7 6 4	5 6 4 7 9
4 1 3 5 4	7 6 5 5 5	5 3 6 8 3

6.2.3. جد مستعرضًا بأقلّ وزن في المصفوفة أدناه، واستخدم الثّنويّة لبرهنة أنّ هذا الحلّ هو الحلّ الأمثل. (مساعدة: استخدم تحويلاً للمسألة).

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

7.2.3. مسألة سائق الحافلة. افترض أنَّ هناك n سائقًا و n مسلكًا صباحيًّا يقضي فيها السائق أوقاتًا $x_1,\ldots,x_n$، و n مسلكًا مسائيًّا يقضي فيها أوقاتًا $y_1,\ldots,y_n$. ويُدفع للسّائق أجر إضافي عندما يتجاوز المسلكين الصباحي والمسائي زمنًا كليًّا t. والهدف هو تعيين شوطين؛ صباحيّ ومسائيّ لكلّ سائق من أجل تخفيض قيمة الأجور الإضافيّة الكلّيّة إلى الحدّ الأدنى. عبّر عن هذه بوصفها مسألة مواءمة موزونة، وبرهن أنَّ إعطاء أطول مسلك صباحيّ رقمه i وأقصر مسلك مسائيّ رقمه i للسّائق نفسه لكلّ i يعطي حلًّا مثاليًّا. (مساعدة: لا تستخدم الخوارزميّة الهنجاريّة؛ خذ التّركيب الخاص للمصفوفة). (R.B. Potts)

8.2.3. لتكن المدخلات في المصفوفة A لها الصورة $w_{i,j} = a_i b_j$، حيث $a_1,\ldots,a_n$ أعداد مرافقة للصّفوف، و $b_1,\ldots,b_n$ أعداد مرافقة للأعمدة. حدّد أكبر وزن لمستعرض للمصفوفة A. ماذا يحدث عندما يكون $w_{i,j} = a_i + b_j$؟ (مساعدة: في كلّ حالة، خمّن النّمط العام بفحص الحلّ عندما $n=2$).

9.2.3. (*) افترض أنَّ قسم رياضيات يقدّم k ندوة في موضوعات مختلفة لطلبته البالغ عددهم n، بحيث يحضر كلّ طالب ندوة واحدة؛ فالندوة رقم i يجب أنْ يكون فيها k_i طالبًا، حيث $\sum k_i = n$. و بحيث يقدم كلّ طالب قائمة أولوية مرتّبة لـ k ندوة. ويكون تعيين الطّلبة للندوات مستقرًّا إذا لم يكن هناك طالبان يستطيع كلّ منهما الحصول على ندوات مفضلة أكثر من خلال تبادل النّدوات المعينة لكلّ منهما. بيّن كيف تجد تعيينًا مستقرًّا مستخدمًا مواءمة ثنائيّة الفرع موزونة. (Isaak)

10.2.3. (*) افترض أنَّ لديك n رجلاً و n امرأة. وقد خصّص كلّ منهم $n - i$ نقطة إلى الشّخص i في قائمة أولويّاته، وليكن الوزن لزوج من الأشخاص هو مجموع النّقاط المخصصة من ذلك الزّوج من الأشخاص. أنشئ مثالاً لا تكون فيه أيّ مواءمة وزن كبرى مواءمةً مستقرّةً.

11.2.3. (*!) أثبت أنّه إذا وُضع رجل x في زوج مع امرأة a في مواءمة مستقرّة، فإنَّ a لم ترفض x في خوارزميّة مقترحات جيل وشابلي. استنتج أنّه من بين المواءمات المستقرّة جميعها، فإنَّ كلّ رجل يكون أكثر سعادةً في المواءمة النّاتجة عن هذه الخوارزميّة. (مساعدة: خذ في الحسبان الحدوث الأول لمثل هذا الرفض).

12.2.3. (*) في مسألة رفقاء الغرف المستقرّة، كلّ شخص من $2n$ شخصًا له ترتيب أولويّات على الـ($2n$-1) شخصًا الآخرين. والمواءمة المستقرة هي مواءمة كاملة لا يوجد فيها زوج غير متوائم يفضل فيه كلّ منهما شخصًا آخر على رفقاء غرفهم الحاليين. أثبت أنّه لا توجد مواءمة مستقرّة عندما تكون الأولويّات على النحو الآتي أدناه. (Gale- Shapley [1962])

$$a: b > c > d \quad b: c > a > d \quad c: a > b > d \quad d: a > b > c$$

13.2.3. (*) في مسألة رفقاء الغرف المستقرّة، افترض أنّ كلّ شخص يصرّح بالقسم العلويّ من قائمة الأولويّات بوصفه جزءًا "مقبول". عرف بيان المقبوليّة على أنّه البيان الذي تكون رؤوسُه الناسَ وأضلاعه هي الأزواج من النّاس الذين افترضوا أنَّ كلًّا منهما مقبول للآخر. أثبت أنّ المجموعات العالية المنزلة في المقبوليّة G كلّها تؤدي إلى مواءمة مستقرّة إذا وفقط إذا كان G ثنائيّ الفرع.

14.2.3. (!) في خوارزميّة المقترحات حيث يقترح الرّجل، أثبت أنّه لا يوجد رجل مرفوض دائمًا من النساء جميعهنّ. (مساعدة: ماذا يحدث بعد أنْ يُرفض x من النّساء جميعهنّ ما عدا امرأة واحدة).

3.3 المواءمات في البيانات العامة (Matching in General Graphs)

عند مناقشة المواءمات الكاملة في البيانات، من الطّبيعيّ أنْ نأخذ في الحسبان البيانات الجزئيّة الأكثر عمومًا.

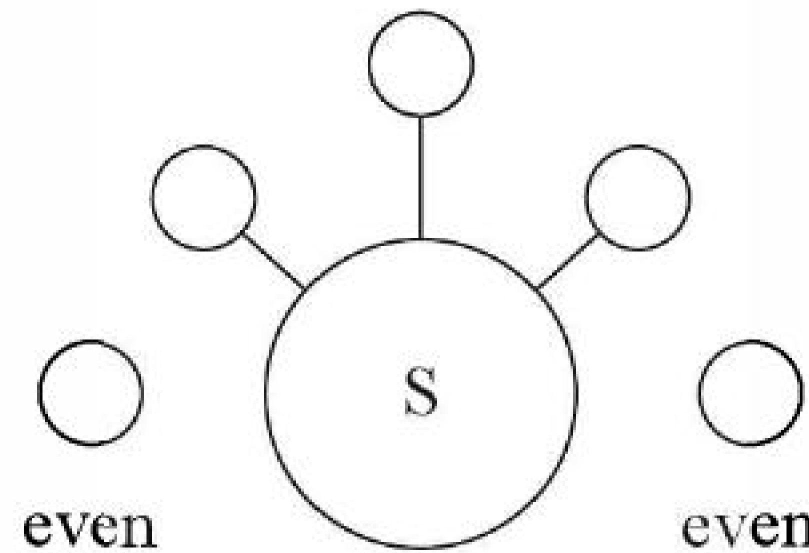
1.3.3. تعريف: المعامل (factor) للبيان G هو بيان جزئيّ مولّد لـ G. **والمعامل من الدّرجة** k (k- factor) هو بيان جزئيّ مولّد منتظم من الدّرجة k. أمّا **المركّبة الفرديّة** (odd component) لبيان ما فهي مركّبة ذات رتبة فرديّة، وعدد المركّبات الفرديّة للبيان H هو $o(H)$.

2.3.3. ملاحظة: المعامل من الدّرجة 1 والمواءمة الكاملة هما الشّيء نفسه تقريبًا. والفرق الدقيق بينهما هو أنَّ "المعامل من الدّرجة 1بيانٌ جزئيّ منتظم من الدّرجة 1 مولّد للبيان G، أمّا "المواءمة الكاملة" فهي مجموعة الأضلاع في هذا البيان الجزئيّ.

إنّ البيان المنتظم من الدّرجة 3 الذي له مواءمة كاملة يتفكّك إلى معاملين من الدّرجتين 1 و 2.

نظرية توت للمعامل من الدرجة 1 (Tutte's 1- Factor Theorem)

وجد توت (Tutte) الشّرط الضّروريّ والكافي للبيان الذي لديه معامل من الدّرجة 1. إذا كان للبيان G معامل من الدّرجة 1، وأخذنا في الحسبان المجموعة $S \subseteq V(G)$، فإنّه يوجد لكلّ مركّبة فرديّة لـ G-S رأسٌ يتواءم مع رأس ما خارجها يوجد في S فقط، وبما أنَّ رؤوس S يجب أنْ تكون مختلفة، فإنَّ $o(G - S) \leq |S|$.



الشّرط " لكلّ $S \subseteq V(G)$ فإنَّ $o(G - S) \leq |S|$" هو شرط توت (Tutte's Condition). وقد أثبت توت أنَّ هذا الشّرطَ الضّروريّ الواضح شرطٌ كافٍ أيضًا (TONCAS). هناك الكثير من البراهين المعروفة

كما في التمرينين 13 و27. وهنا نقدّم إثبات لوفاز (Lov'asz) باستخدام أفكار الفرق التّماثليّ ومبدأ التّطرّفيّة.

3.3.3. نظرية: (توت [1947] Tutte) يوجد للبيان G معامل من الدّرجة 1 إذا وفقط إذا كان $o(G\text{-}S) \leq |S|$ لكلّ $S \subseteq V(G)$.

الإثبات: (لوفاز [1975] Lova'sz). الضّرورة. لاحظ أنَّ المركّبات الفرديّة لـ $G - S$ يجب أنْ تمتلك رؤوسًا متوائمة مع رؤوس مختلفة في S.

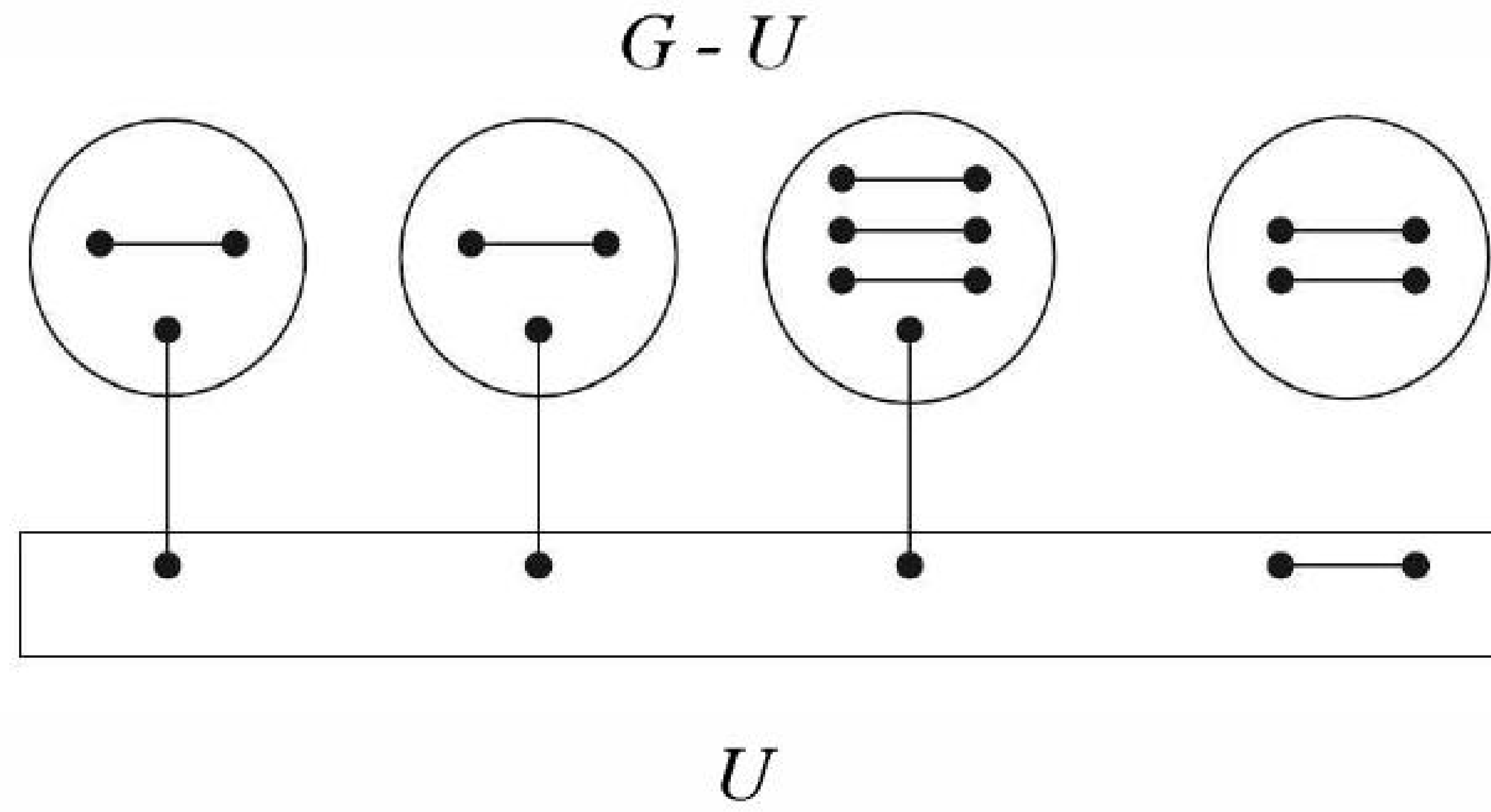
الكفاية. عندما نضيف ضلعًا يصل مركّبتين في $G - S$، فإنَّ عدد المركّبات الفرديّة لا يزداد (مركّبتان؛ الأولى فرديّة والأخرى زوجيّة تصبحان معًا مركّبة فرديّة واحدة. أمّا المركّبتان من النّوع نفسه فتصبحان مركّبة زوجيّة واحدة). لهذا، فإنَّ شرط توت يُحافظ عليه من خلال إضافة أضلاع: إذا كان $G' = G + e$ و $S \subseteq V(G)$، فإنَّ $o(G'\text{-} S) \leq o(G - S) \leq |S|$. وكذلك، إذا كان $G' = G + e$ لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1، فإنَّ G لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1.

بناءً على ذلك، فإنَّ النظرية تتحقّق إلا إذا وُجد بيان بسيط G يحقّق شرط توت، أي أنَّ G لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1. وأنَّ إضافة أيّ ضلع غير موجود لـ G يعطي بيانًا له معامل من الدّرجة 1. وليكن G مثل هذا البيان. سوف نحصل على تناقض بإظهار أنَّ G يحتوي بالفعل على معامل من الدّرجة 1.

لتكن U مجموعة الرّؤوس في G والتي درجتها $n(G)$-1.

الحالة 1: إذا كانت $G - U$ مكوّنة من بيانات تامّة منفصلة، فيمكن وضع الرّؤوس في كلّ مركّبة لـ $G - U$ في صورة أزواج بأيّ طريقة، مع وضع رأس آخر في كلّ مركّبة فرديّة. وبما أنَّ $o(G - U) \leq |U|$، وأنَّ كلّ رأس في U مجاور لرؤوس $G\text{-}U$ جميعها، فباستطاعتنا مواءمة الرّؤوس المتبقيّة مع رؤوس في U.

تكون الرّؤوس المتبقيّة في U كعصبة. ولإكمال المعامل من الدّرجة 1؛ نحتاج إلى أنْ نبيّن أنّه يبقى عدد زوجيّ فقط من الرّؤوس في U. بما أنّنا واءمنا عددًا زوجيًّا من الرّؤوس، فإنه يكفي أنْ نبيّن بأنَّ $n(G)$ عددٌ زوجيّ. وهذا يتبع باستحضار شرط توت مع $S = \emptyset$؛ لأنّ بيانًا درجته فرديّة يجب أنْ يكون له مركبة درجتها فرديّة.



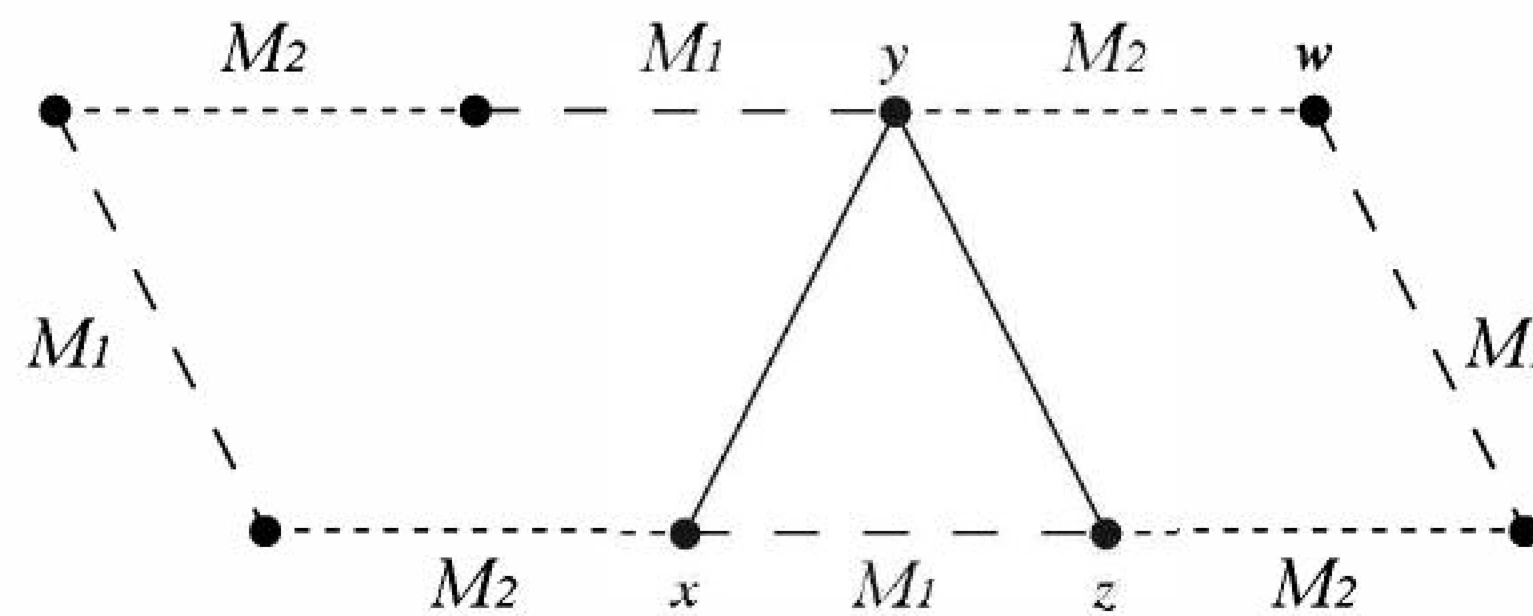
الحالة 2: $G - U$ ليست اتحادًا منفصلاً لعصب. في هذه الحالة، يكون لـ $G - U$ رأسان على مسافة 2، وهما رأسان غير متجاورين x,z ولهما جار مشترك $y \notin U$ (تمرين23.2.1أ). علاوة على ذلك، هناك رأسٌ آخر w لـ $G - U$ غير متجاور مع y؛ لأنّ $y \notin U$. من اختيار G، فإنَّ إضافة ضلع إلى G يعيّن معاملاً من الدّرجة 1؛ ليكن M_1، M_2 معاملين من الدّرجة 1 في $G + xz$ و $G + yw$ على التّرتيب. ويكفي أنْ نبرهن أنّ $M_1 \Delta M_2$ يحتوي على معامل من الدّرجة 1 متجنبًا xz و yw؛ لأنّ هذا سيكون معاملاً من الدّرجة 1 في G.

ضع $F=M_1\Delta M_2$. بما أنَّ $xz \in M_1 - M_2$، و$yw \in M_2\text{-}M_1$، فإنّ كلًّا من xz و yw في F. وبما أنَّ

كلّ رأس للبيان G درجته 1 في كلّ من M_1 و M_2، فإنَّ درجة كلّ رأس في G تساوي 0 أو 2 في F. ولهذا، فإنَّ المركّبات في F هي حلقات زوجيّة ورؤوس معزولة (انظر التمهيدية 9.1.3). لتكن C الحلقةَ في F التي تحوي xz.

إذا لم تكن C تحوي yw، فإنَّ المعامل من الدّرجة 1 الذي نريده يتكون من الأضلاع في M_2 من C، والأضلاع جميعها الموجودة في M_1 وغير موجودة في C.

إذا احتوت الحلقة C كلًّا من yw و xz كما هو مبين أدناه، فنستخدم yx أو yz لتجنبهما. أمّا في جزء C الذي يبدأ من y خلال yw، نستخدم أضلاعًا لـ M_1 لنتجنب استخدام yw. ولكن عندما نصل $\{x,z\}$، فإنَّنا نستخدم zy إذا وصلنا عند z (كما هو معروض). وبخلاف ذلك، نستخدم xy. وفيما يتبقى من C نستخدم الأضلاع في M_2. وهكذا نكون قد أنتجنا معاملاً من الدّرجة 1 لـ $C + \{xy,yz\}$ لا يستخدم xz أو yw. وبضمه مع M_1 أو M_2 خارج $V(C)$، يصبح لدينا معامل من الدّرجة 1 في G. ■

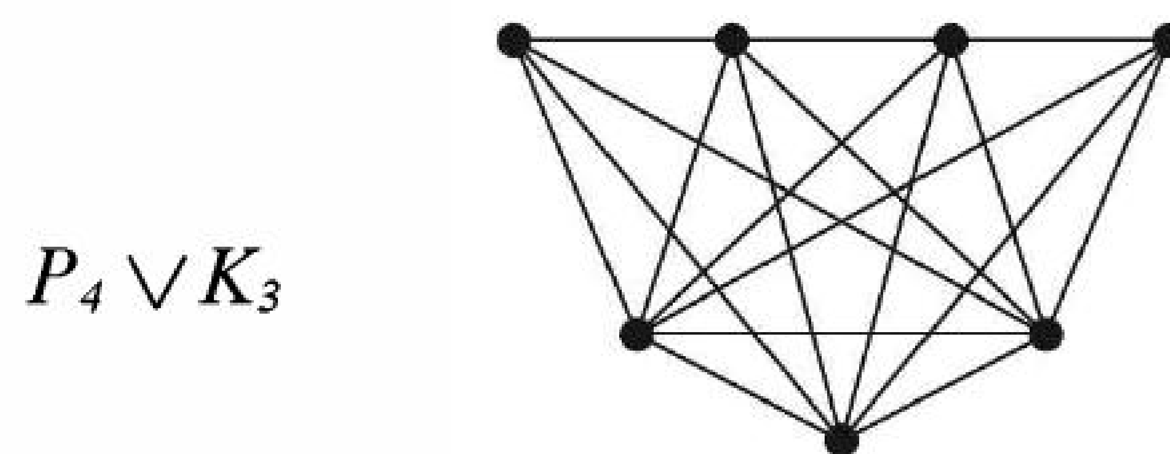


4.3.3. ملاحظة : مثل بقيّة نظريات التوصيف (كالنظريتين 18.2.1 و11.1.3)، فإنَّ النظرية 3.3.3 تؤدّي إلى إثباتات قصيرة في حالتي تحقّق الخاصّيّة وعدم تحقّقها. نبرهن أنَّ G يملك معاملًا من الدّرجة 1 بعرض أحدها. عندما يكون هذا المعامل غير موجود، فإنَّ النظرية 3.3.3 تضمن أنّنا نستطيع إيجاد مجموعة يخلّف حذفها الكثير من المركّبات الفرديّة. ■

5.3.3. ملاحظة : للبيان G، ولأيّ $S \subseteq V(G)$، فإنَّ عدّ الرّؤوس بمقياس 2 يبيّن أنَّ $|S| + o(G - S)$ يمتلك النوعية نفسها مثل $n(G)$. لذا، فإنَّ الفرق $o(G - S) - |S|$ يمتلك النوعية نفسها مثل $n(G)$. نستنتج أنّه إذا كانت $n(G)$ زوجيّة و G لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1، فإنَّه يوجد S بحيث تزيد $o(G - S)$ على $|S|$ بـ 2 على الأقلّ. ■

للبيانات التي لا تكون ثنائيّة الفرع (كالحلقات الفرديّة)، ربما تكون هناك فجوة بين $\alpha'(G)$ و $\beta(G)$ (انظر التمرين 10 أيضًا). وعلى الرّغم من ذلك، فإنَّ مسألة التّصغير الأخرى تعطي علاقة أصغر - أكبر لـ $\alpha'(G)$ في البيانات العامّة. وهذه العلاقة تعمّم الملاحظة 5.3.3. يستخدم الإثبات تحويلًا لبيان؛ حيث يتضمّن هذا التحويل عملية بيان عام.

6.3.3. تعريف : إنّ الرّبط (join) لبيانين بسيطين G و H، يكتب $G \vee H$، هو البيان الناتج عن الاتحاد المنفصل $G+H$ بإضافة الأضلاع $\{xy: x \in V(G), y \in V(H)\}$.

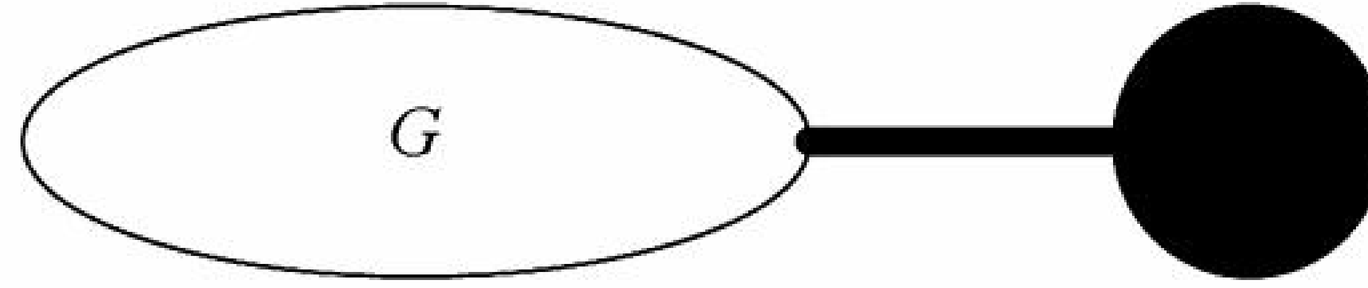


7.3.3. نتيجة : (صيغة بيرج وتوت – [1958]) إنَّ أكبر عدد من الرّؤوس المشبعة من مواءمة في G هو $\min_{S \subseteq V(G)} \{n(G) - d(S)\}$، حيث $d(S) = o(G-S) - |S|$.

الإثبات: لتكن $S \subseteq V(G)$. يوجد $|S|$ ضلعًا على الأكثر يمكن أنْ توائم رؤوسًا في S مع رؤوس في مركّبات فرديّة لـ $G - S$. لذا، فإنَّ كلّ مواءمة تمتلك $o(G - S) - |S|$ رأسًا غير مشبع على الأقلّ. والمطلوب بلوغ هذا الحَدّ.

ضع: $d=\max\{o(G\text{-}S)\text{-}|S|:S\subseteq V(G)\}$ الحالة $S = Ø$ تعطي $d \geq 0$. لتكن $G' = G \vee K_d$. بما أنَّ $d(S)$ له النوعية نفسها مثل $n(G)$ لكلّ S، فإنَّ $n(G')$ زوجيٌّ. وإذا حقّق G' شرط توت فإنَّنا نحصل على مواءمة بالحجم المطلوب في G من المواءمة الكاملة في G'؛ لأنّ حذف الـ d رأسًا المضافة يزيل الأضلاع التي تشبع على الأكثر d رأسًا في G.

الشّرط $o(G'- S') \leq |S'|$ يتحقّق لـ $S'= Ø$؛ لأنّ $n(G')$ زوجيٌّ. إذا كانت S' غير خالية ولكنّها لا تحوي K_d كاملة، فإنَّ $G' - S'$ تمتلك مركّبة واحدة فقط، و $|S'| \geq 1$. أخيرًا، عندما تكون $K_d \subseteq S'$، نضع $S = S'- V(K_d)$. وبما أنَّ $G'- S'=G - S$، فإنَّ $|S'| = |S| + d \geq o(G - S) = o(G' - S')$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنَّ G' يحقّق شرط توت. ■



تضمن النتيجة 7.3.3. أنَّه يوجد إثبات قصير للعبارة: تمتلك المواءمة العظمى حجمًا أكبر بإيجاد مجموعة رؤوس S، حيث يخلّف حذفها عددًا ملائمًا من المركّبات الفرديّة.

تنطوي معظم التّطبيقات على نظرية توت على عرض بعض الشّروط الأخرى التي تعطي شرط توت، ومن ثم تضمن معاملاً من الدّرجة 1. وهناك براهين أخرى متوافرة قبل نظرية توت ولكن بصيغ مختلفة.

8.3.3. نتيجة: (بيترسون [1891]) يمتلك كلّ بيان منتظم من الدّرجة 3 ليس له ضلع قطع معاملاً من الدّرجة 1.

الإثبات: ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة 3 ليس له ضلع قطع. سوف نبرهن أنَّ G يحقق شرط توت. ليكن $S \subseteq V(G)$، نعدّ الأضلاع بين S والمركّبات الفرديّة لـ $G - S$. بما أنَّ G منتظم من الدّرجة 3، فإنَّ كل رأس في S يقع على ثلاثة أضلاع على الأكثر. إذا كانت كلّ مركّبة فرديّة H ـ $G\text{-}S$ تقع على الأقلّ على ثلاثة من مثل هذه الأضلاع، فإنَّ $3o(G - S) \leq 3|S|$ ومن ثمّ $o(G - S) \leq |S|$، كما نريد.

ليكن m عددَ الأضلاع من S إلى H. إذن، فإنّ مجموع درجات الرّؤوس في H هو $3n(H) - m$. وبما أنَّ H بيان، فإنَّ مجموع درجات رؤوسه يجب أنْ يكون زوجيًّا. وبما أنَّ $n(H)$ فرديّ، فإنَّنا نستنتج أنّ m يجب أنْ يكون فرديًّا أيضًا، وبما أنَّ G لا يمتلك ضلع قطع، فإنَّ m لا يمكن أنْ يساوي 1. ونستنتج أنّه يوجد ثلاثة أضلاع على الأقلّ من S إلى H كما نريد. ■

إنّ الإثبات بالتّناقض طبيعيّ هنا أيضًا. فالافتراض أنّ $o(G\text{-}S)>|S|$ يؤدي إلى $o(G - S) \leq |S|$، وهكذا نعيد كتابة الإثبات مباشرة. لاحظ أنَّ النتيجة 8.3.3 هي أفضل ما يمكن؛ وأنَّ بيان بيترسون يحقّق الفرضيّة، ولكنه لا يملك معاملين من الدّرجة 1 منفصلة الضّلع (Petersen [1898]).

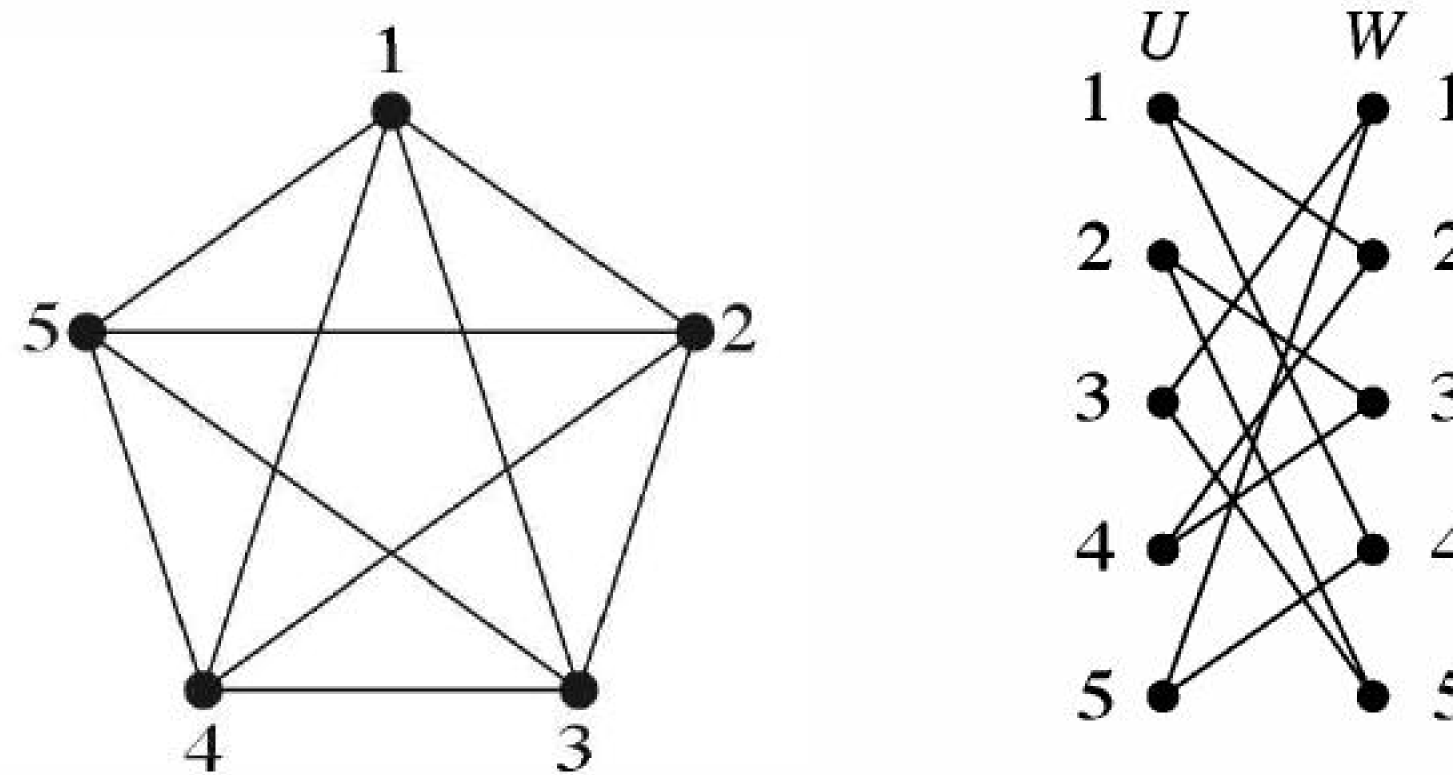
لقد أثبت بيترسون أيضًا شرطًا كافيًا للمعاملات من الدّرجة 2. يكون البيان المترابط الذي درجات رؤوسه زوجيّة أويلريًّا (النظرية 26.2.1) ويتفكّك إلى حلقات منفصلة الضّلع (القضيّة 27.2.1). وللبيانات المنتظمة التي درجاتها زوجيّة، يمكن تجميع الحلقات الناتجة عن تفكيك ما لتشكيل معاملات من الدّرجة 2.

9.3.3. نظرية: (بيترسون [1891]) كلّ بيان منتظم له درجة زوجيّة موجبة يمتلك معاملاً من الدّرجة 2.

الإثبات: ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة $2k$ رؤوسه $v_1, \ldots, v_n$، لاحظ أنَّ كلّ مركّبة لـ G هي مركبة أويلريّة مع حلقة أويلريّة C. ولكلّ مركبة، عرف بيانًا ثنائيّ الفرع H مع الرّؤوس $u_1, \ldots, u_n$ و $w_1, \ldots, w_n$ بوضع $u_i \leftrightarrow w_j$ إذا كان v_j يتبع v_i مباشرة في مكان ما على C. لاحظ أنّ H منتظم من الدّرجة k؛ لأنّ C يدخل ويخرج كل رأس k مرة واحدة. (في الحقيقة، H هو شطر البيان الموجّه الناتج عن توجيه G بانسجام مع C. انظر التعريف 20.4.1.)

بما أنَّ البيان H ثنائيّ الفرع منتظم، فإنَّه يمتلك معاملاً M من الدّرجة 1 (النتيجة 13.1.3). إنَّ الضّلع الذي يقع على w_i في H يقابل الضّلع الذي يدخل v_i في C. أمّا الضّلع الذي يقع على u_i في H فيقابل الضّلع الذي يخرج من v_i. لذا، فإنَّ المعامل من الدّرجة 1 في H يتحول إلى بيان جزئي مولد منتظم من الدّرجة 2 لهذه المركبة في G. إنّ إجراء هذا لكلّ مركبة في G يعطي معاملاً من الدّرجة 2 للبيان G. ■

10.3.3. مثال: إنشاء معامل من الدّرجة 2. خذ في الحسبان الحلقة الأويلرية في $G=K_5$ التي تمر بالتتابع على 1231425435. إنَّ البيان الثنائيّ الفرع H المقابل (المرتبط) بـ C_5 موجود عن اليمين أدناه. وللمعامل من الدّرجة 1 الذي أزواجه من u إلى w هي: 12،43،25،31،54، نجد أنَّ المعامل من الدّرجة 2 الناتج هو الحلقة (1،2،5،4،3). أما الأضلاع المتبقية فإنّها تشكّل معاملاً آخر من الدّرجة 1 يقابل المعامل من الدّرجة 2 (1،4،2،3،5) الباقي في G ■



المعاملات التي درجتها f للبيانات (اختياري) ((f-factors of Graphs (optional))

معامل البيان G هو بيان جزئيّ مولّد له؛ ونسأل عن وجود معاملات بأنواع خاصة. والمعامل من الدّرجة k هو معامل منتظم من الدّرجة k؛ وقد درسنا معاملات من الدّرجتين 1 و 2، نستطيع محاولة تحديد الدّرجة عند كلّ رأس.

11.3.3. تعريف: لتكن $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ دالة. إنَّ **المعامل من الدّرجة f** (f-Factor) للبيان G هو بيان جزئيّ مولد H بحيث إنَّ $d_H(v) = f(v)$ لكلّ $v \in V(G)$.

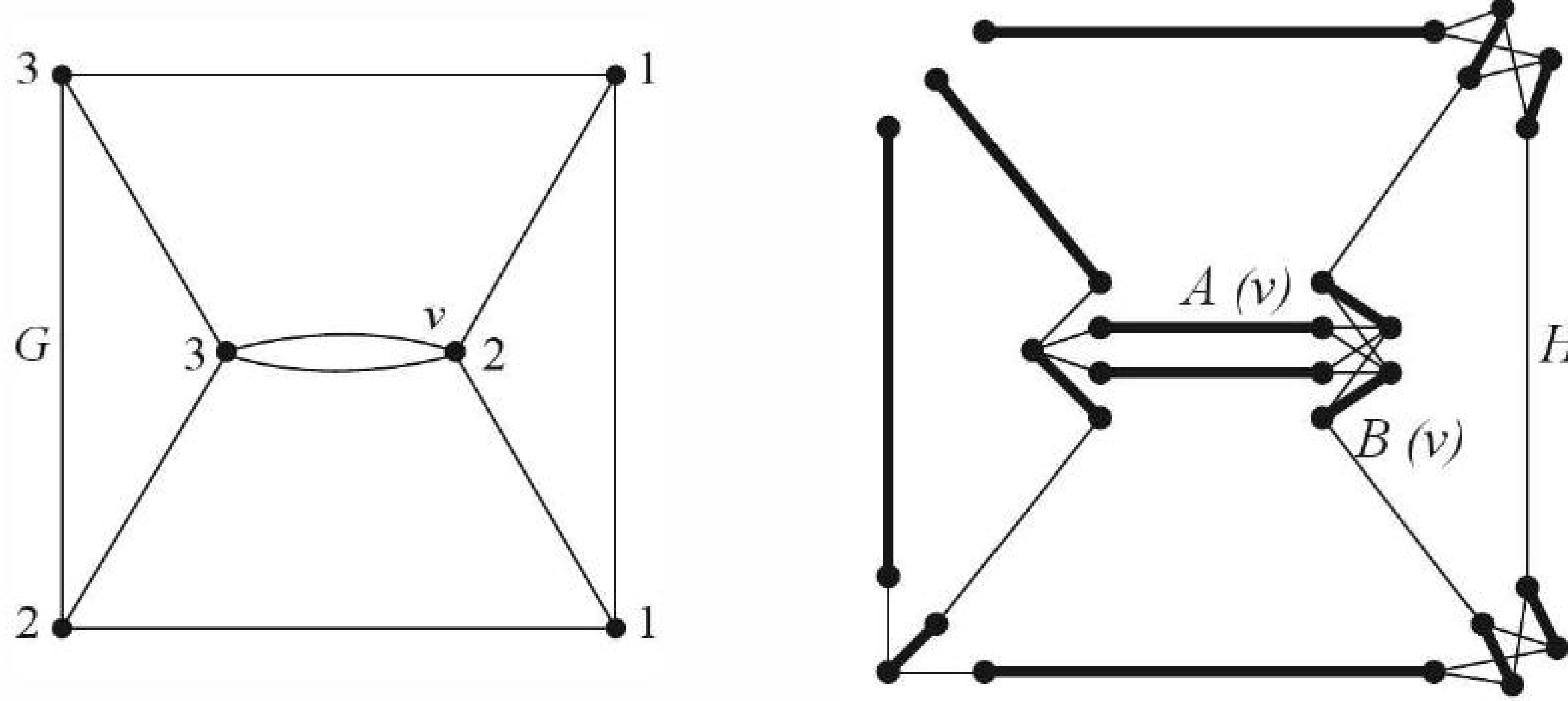
لقد أثبت توت [1952] الشّرط الضّروريّ والكافي ليملك البيان G معاملاً من الدّرجة f (انظر التمرين 29). ولاحقًا، سنختزل المسألة لاختبار وجود معاملات من الدّرجة 1 في البيانات البسيطة ذات العلاقة. وسنصف هذا الاختصار بأنّه مثال جيد لتحويل مسألة بيان إلى مسألة محلولة سابقًا.

12.3.3. مثال: تحويل بيان (توت [1954a]). نفترض أنَّ $f(w) \leq d(w)$ لكلّ w. وخلاف ذلك، فإنَّ G يمتلك عددًا قليلاً جدًّا من الأضلاع عند w ليمتلك معاملاً من الدّرجة f. لذا، ننشئ بيان H يمتلك معاملاً من الدّرجة 1 إذا وفقط إذا كان G يمتلك معاملاً من الدّرجة f. ضع $e(w) = d(w) - f(w)$؛ وهذه هي درجة الزيادة عند w وهي غير سالبة.

لإنشاء H، ضع مكان كلّ رأس v عصبة ثنائيّة $K_{d(v), e(v)}$ مع مجموعات مجزأة $A(v)$ درجتها $d(v)$

و $B(v)$ درجتها $e(v)$. لكلّ $vw \in E(G)$، أضف ضلعًا يصل رأسًا في $A(v)$ إلى رأسٍ في $A(w)$. إنَّ كلّ رأس في $A(v)$ يشترك في ضلع واحد من مثل هذا الضّلع.

يعرض الرسم أدناه بيان G؛ حيث إنَّ أوسمة رؤوسه معطاة من خلال f، والبيان البسيط الناتج H. إنَّ الأضلاع السميكة في G تشكّل معاملاً من الدّرجة 1، والذي يقابل معاملاً من الدّرجة f لـ G. في هذا المثال، لاحظ أنَّ المعامل من الدّرجة f ليس وحيدًا. ■



13.3.3. نظرية: يمتلك البيان G معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان للبيان H الذي أنشئ من G و f في المثال 12.3.3 معامل من الدّرجة 1.

الإثبات: الضرورة. إذا كان G يمتلك معاملاً من الدّرجة f، فإنَّ الأضلاع المقابلة في H تترك $e(v)$ رأسًا من $A(v)$ غير متوائم. وائم هذه الرّؤوس بصورة عشوائية مع الرّؤوس في $B(v)$ لتحصل على معامل من الدّرجة 1 لـ H.

الكفاية. من معامل من الدّرجة 1 لـ H، فإنَّ حذف $B(v)$ والرّؤوس في $A(v)$ التي تتواءم مع $B(v)$ يخلف $f(v)$ رأسًا درجتها 1 وتقابل v. إنَّ عمل هذا لكلّ رأس v، ودمج الرّؤوس $f(v)$ المتبقية من كلّ مجموعة $A(v)$ يعطي بيانا جزئيًّا من G وتكون درجة v فيه هي $f(v)$. ويكون هذا معاملاً من الدّرجة f لـ G. ■

شرط توت لمعامل من الدّرجة 1 في البيان H المستمد من مثال 12.3.3 يتحول إلى شرط ضروري وكاف لمعامل من الدّرجة f في G. يكون الإثبات لتمييز درجة المتتاليات للبيانات البسيطة لايردوز وجالاي (Erdos- Gallai) [1960] في التّطبيقات (تمرين 29).

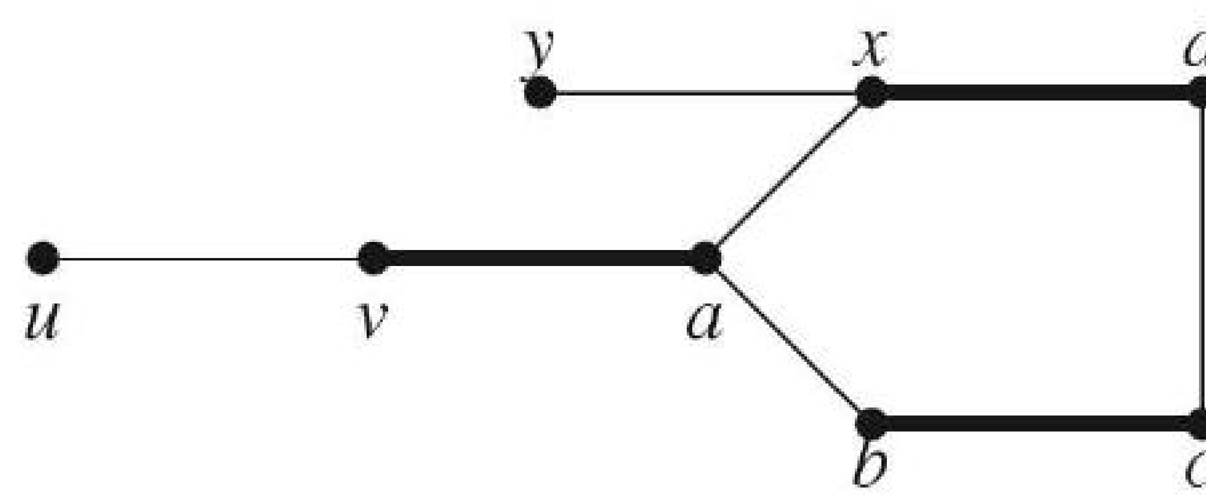
إذا أعطينا خوارزميّة لإيجاد معامل من الدّرجة 1، فإنَّ التشابه في النظرية 13.3.3 يزودنا باختبار وجود معامل من الدّرجة f. عوضًا عن البحث فقط عن معامل من الدّرجة 1 (يعني مواءمة كاملة)، نأخذ في الحسبان لاحقًا المسألة الأعم لإيجاد مواءمة كبرى في بيان ما.

خوارزمية البراعم لادموند (اختياري) ((Edmond's Blossom Algorithm(optional))

تنصّ نظرية بيرج (النظرية 10.1.3) على أنَّ مواءمة M في G لها حجم أكبر إذا وفقط إذا كان G لا يمتلك مسارًا موسّعًا للمواءمة M. لذا، نستطيع إيجاد مواءمة كبرى باستخدام مسارات موسعة متتالية. بما أنَّنا نوسّع $n/2$ مرّة على الأكثر، فإنَّنا نحصل على خوارزميّة ملائمة إذا كان البحث عن مسار موسّع لا يأخذ وقتًا طويلاً. وقد قدم إدموند [1965a] أول خوارزميّة من هذا النوع في بحثه الشهير "مَسارات وأشجار وأزهار" (Paths, trees, and flowers) .

في البيانات الثنائيّة الفرع، نستطيع البحث سريعًا عن المسارات الموسّعة (الخوارزميّة 1.2.3) لأننا نستكشف من كل رأس مسارًا واحدًا على الأكثر. إنَّ المسار المتناوب للمواءمة M من u يمكن أنْ يصل إلى رأس x في المجموعة المجزأة نفسها مثل u فقط من خلال ضلع مشبع. لذا، نستطيع أنْ نصل ونستكشف x فقط مرة واحدة. وهذه الخاصية تفشل في البيانات التي فيها حلقات فردية؛ لأنّ المسارات المتناوبة للمواءمة M من رأس غير مشبع يمكن أنْ تصل x من خلال ضلع مشبع، وكذلك من خلال أضلاعٍ غير مشبعة في الوقت نفسه.

14.3.3. مثال: في البيان أدناه، ومع M المشار إليها بخط سميك، فإنَّ البحث عن المسارات الموسّعة للمواءمة M الأقصر من u تصل x بواسطة الضّلع غير المشبع ax. إذا لم نأخذ في الحسبان مسارًا أطول يصل x بواسطة ضلع مشبع أيضًا، فإنَّنا نحذف المسار الموسّع u,v,a,b,c,d,x,y ■



وفيما يأتي نَصف حلّ إدموند لهذه العقبة. إذا كان استكشاف المسارات المتناوبة للمواءمة M من u تصل الرأس x من خَلال ضلع غير مشبع في مسار، وضلع مشبع في مسار آخر، فإنَّ x ينتمي إلى حلقة فرديّة. لاحظ أنَّ المسارات المتناوبة من u تكون متباعدة فقط عندما يكون الضّلع التالي غير مشبع (تغادر من الرّأس a في المثال 14.3.3)؛ وعندما يكون الضّلع التالي مشبعًا، فهناك خيار واحد فقط لهذا المسار. ومن الرّأس حيث تكون المسارات متباعدة، فإنَّ المسار الذي يصل x على ضلع غير مشبع له طول فرديّ، أمّا المسار الذي يصل x على ضلع مشبع فله طول زوجيّ. ويشكّلان معًا حلقة فرديّة.

15.3.3. تعريف: لتكن M مواءمة في البيان G، وليكن u رأسًا غير مشبع للمواءمة M. نعرِّف **الزّهرة** (flower) على أنَّها اتحاد مسارين متناوبين للمواءمة M من u يصلان الرّأس x على خطوات متعاكسة النّوعية (لم تستخدم سابقًا). أمّا **ساق** (Stem) الزهرة فهو المسار الأعظم الابتدائيّ الشّائع (بطول زوجيّ غير سالب). **وبرعم** (blossom) الزهرة هو الحلقة الفرديّة الناتجة عن حذف السّاق.

في المثال 14.3.3، لاحظ أنَّ الزّهرة هي البيان كلّه ما عدا y. والسّاق هو المسار u,v,a، أمّا البرعم فهو الحلقة التي درجتها 5. يرجّح مصطلح البستنة استخدام مصطلح شجرة للدلالة على التّراكيب المعطاة من قبل معظم الإجراءات البحثية.

إنَّ البراعم لا تعيق بحثنا. لكلّ رأس z في برعم يوجد مسار من u إلى z متناوب للمواءمة M، ويصل z على ضلع مشبع، وقد وجد بالتحرك في الاتجاه المناسب حول البرعم ليصل z من السّاق. لذلك، نستطيع

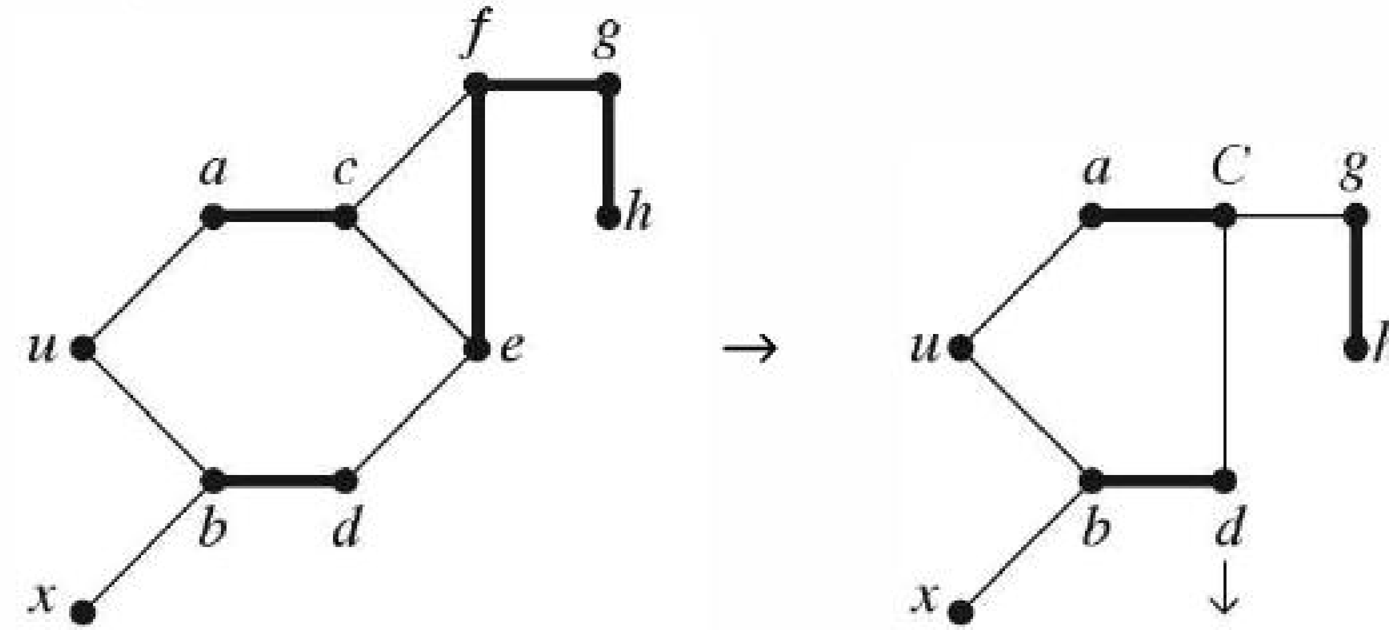
متابعة بحثنا على طول أيّ ضلع غير مشبع من البرعم إلى رأس لم يوصل إليه بعد. يعرض المثال 14.3.3 مثل هذا التوسّع الذي يصل مباشرة إلى رأس غير مشبع، ويكمل مسارًا موسّعًا للمواءمة M.

بما أنّ كلّ رأس في البرعم مشبعٌ بواسطة ضلع على هذه المسارات، فلا وجود لضلع مشبع يخرج من البرعم (باستثناء السّاق). لاحظ أنّ تأثير هاتين الملاحظتين هو أنّنا نستطيع افتراض البرعم برمّته بوصفه رأسًا أعلى أحاديًّا يوصل إليه من خلال الضّلع المشبع عند نهاية السّاق. ونبحث من الرّؤوس جميعها عند الرّأس الأعلى الذي يمثل البرعم على طول الأضلاع غير المشبعة.

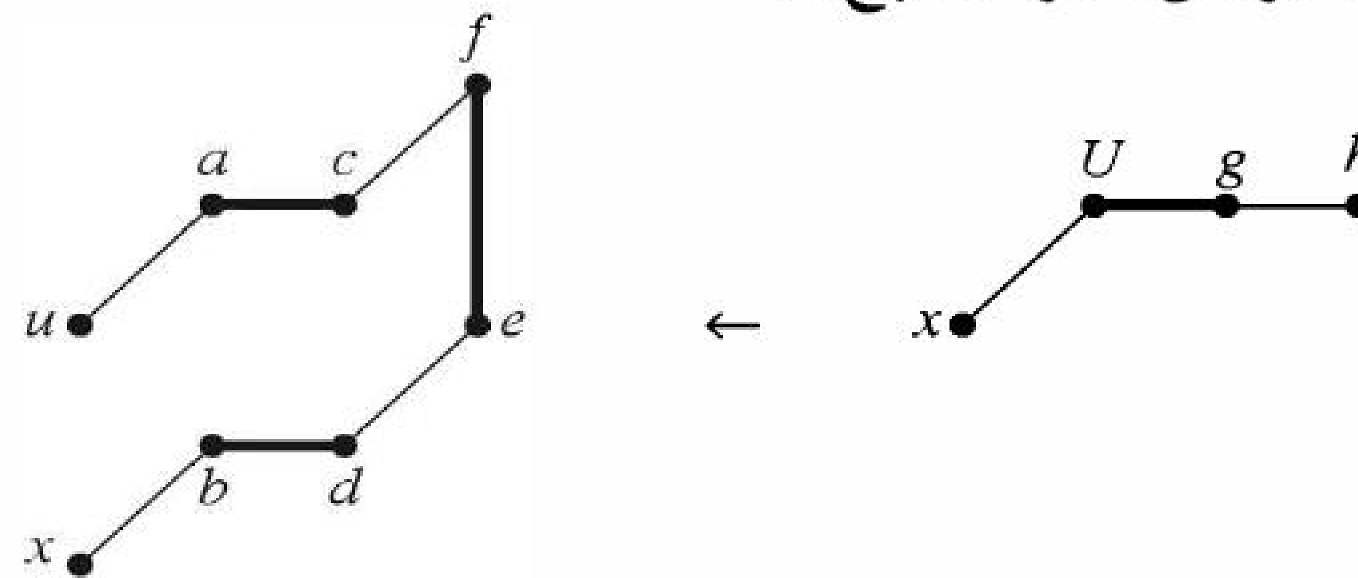
ونضمن هذا الدمج من خلال تقليص أضلاع البرعم B عندما نجده. ويكون الناتجُ رأسًا مشبعًا جديدًا يقع على آخر ضلع (مشبع) في السّاق. أمّا أضلاعه الأخرى التي يقع عليها فهي الأضلاع غير المشبعة التي تربط رؤوس B برؤوس خارج B. نستكشف من b بالطريقة العادية لكي نوسّع بحثنا. وقد نجد لاحقًا برعمًا آخر يحوي b؛ ونقلّصه مرة أخرى. وإذا وجدنا مسارًا متناوبًا للمواءمة M في البيان النهائي من الرّأس u إلى الرّأس غير المشبع x، فإنّنا نستطيع فكّ التّقليصات لنحصل على مسار موسّع للمواءمة M إلى الرّأس x في البيان الأصليّ.

وما عدا معالجة البراعم، فإنّ طريق الحلّ هو الخوارزميّة 1.2.3 لاستكشاف المسارات المتناوبة للمواءمة M. وفي الجهة المقابلة، فإنّ T هي مجموعة الرّؤوس للبيان الحاليّ الموصولة من خلال الأضلاع غير المشبعة، أمّا S فهي مجموعة الرّؤوس من خلال الأضلاع المشبعة. والرّؤوس التي تظهر بسبب تقليص البراعم تنتمي إلى S.

16.3.3. مثال: لتكن M المواءمةَ الموسومة بالخط الغامق في البيان الموجود على اليسار أدناه. نبحث من الرّأس غير المشبع u عن مسار موسّع للمواءمة M. أوّلاً، نستكشف الأضلاع غير المشبعة التي تقع على u، والواصلة من a إلى b. وبما أنّ a و b مشبعان، فإنّنا نوسّع المسارات على طول الأضلاع ac و bd مباشرة. الآن، $S = \{u, c, d\}$. وإذا استكشفنا بعد ذلك من c، فنجد أنّ e و f هما جاراها على طول أضلاع غير مشبعة. بما أنّ $ef \in M$، فنستكشف البرعم الذي تكون مجموعة رؤوسه $\{c, e, f\}$. ونقلّص البرعم لنحصل على الرّأس الجديد C، الذي يغيّر S إلى $\{u,C,d\}$. وهذا يعطي البيان الذي عن اليمين.



لنفترض أنّنا سنستكشف من الرأس $C \in S$. إنّ الأضلاع غير المشبعة ستقودنا إلى كلّ من g و d. وبما أنّ g مشبع من خلال الضّلع gh، فنضع h في S. وبما أنّ d موجود أصلاً في S، فنكون قد وجدنا برعمًا آخر. إنّ المسارات التي تصل d هي: u, b, d و u,a,C,d. الآن، نقلّص البرعم، لنحصل على الرّأس الجديد U والبيان الذي عن اليمين في الأسفل حيث $S=\{U, h\}$، ثمّ نستكشف من h، فلا نجد شيئًا جديدًا (إذا استنفدنا S دون الوصول إلى رأس غير مشبع، فهذا يعني عدم وجود مسار موسّع للمواءمة M من u).
وأخيرًا نستكشف من U لنصل الرّأس غير المشبع x. ■



بتسجيل الضّلع الذي من خلاله وصلنا إلى الرّؤوس جميعها، نستطيع استخلاص مسار من u إلى x موسّع للمواءمة M. لقد وصلنا إلى x من U. لذا، نوسّع البرعم رجوعًا إلى $\{u, a, C, d, b\}$، ونجد أنَّ x وصل إليه من U من خلال bx. إنَّ المسار في البرعم U الذي يصل b على ضلع مشبع ينتهي بـ C,d,b. وبما أنَّ C برعمٌ في البيان الأصليّ، فنوسّع C رجوعًا إلى $\{c, f, e\}$. لاحظ أنَّ d موصول من C بوساطة الضّلع غير المشبع ed. المسار من الأساس "base" لـ C الذي يصل e على طول ضلع مشبع هو c,f,e. أخيرًا، فإنَّ c موصولة من a و a موصولة من u، وهكذا نحصل على مسار موسّع ممتلئ للمواءمة M u, a, c, f, e, d, b, x. ■

نلخّص خطوات الخوارزميّة بشرح مسهب يحتوي على التفاصيل، وخصوصًا معالجة التّقليصات أو الانقباضات.

17.3.3. خوارزميّة : (خوارزميّة برعم إدموند [1965a] (Sketch- Edmond's Blossom Algorithm

المدخلات: بيان G، ومواءمة M في G، ورأس u غير مشبع للمواءمة M.

الفكرة: استكشف المسارات المتناوبة للمواءمة M من u، مسجّلاً لكلّ رأس الرأسَ الذي وصل منه، وقلّص البراعم أينما وجدتها، وحافظ على مجموعات S و T مماثلة لتلك المجموعات في الخوارزميّة 1.2.3، حيث تتكون S من u والرّؤوس التي وصلت من خلال الأضلاع المشبعة. إنّ الوصول إلى رأس غير مشبع يؤدي إلى توسعة.

البداية: $S = \{u\}$ و $T = \varnothing$.

مرات الحدوث: إذا كانت S لا تملك رأسًا غير معلم، فتوقف؛ لأنّه لا يوجد مسار موسّع للمواءمة M من u. وبخلاف ذلك، اختر $v \in S$ غير معلم. لتستكشف من v. خذ في الحسبان $y \in N(v)$ كلّها على التوالي، بحيث إنَّ $y \notin T$.

إذا كان y غير مشبع بواسطة M، فارجع إلى الخلف إلى ما قبل y (ووسّع البراعم كما تحتاج) لتقرر مسارًا موسّعًا للمواءمة M من u إلى y.

إذا كان $y \in S$، فتكون قد وجدنا برعمًا. لذا، أوقف الاستكشاف لـ v، وقلّص البرعم، واستبدل رؤوسها في S و T برأس جديد واحد في S، ثم تابع البحث من هذا الرّأس في البيان الأصغر. وبخلاف ذلك، فإنَّ y متوائمة مع رأس ما في M وليكن w. ضع y في T (موصولة من v)، أمّا w فضعها في S (موصولة من y).

بعد استكشاف الجيران المماثلين لـ v جميعهم، عَلّم v وكرّر العملية. ■

لا تستطيع استكشاف الرّؤوس غير المشبعة جميعها آنيًّا كما في الخوارزميّة 1.2.3؛ لأنّ عضوية الرّؤوس في البراعم تعتمد على اختيار الرّأس غير المشبع الأوليّ. وعلى الرغم من ذلك، فإنْ لم نجد مسارًا موسّعًا للمواءمة M من u، فإنا نستطيع حذف u من البيان ونتجاهله في البحث التّالي للمواءمة العظمى (التمرين 26). ■

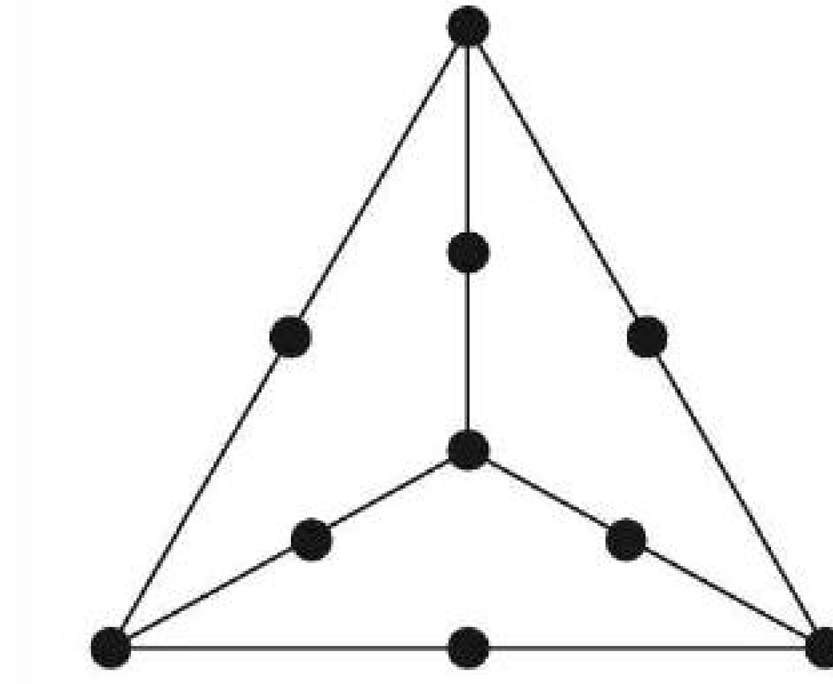
18.3.3. ملاحظة : تحتاج خوارزميّة إدموند الأصلية إلى زمن $O(n^4)$. أما تطبيقها في Ahuja –Mag-nati – orlin [1993, p483- 493] فإنه يحتاج إلى زمن $O(n^3)$. وهذا يتطلب ما يأتي: (1) قواعد بيانات مناسبة لتمثّل البراعم وتعالج التقليصات. (2) تحليلًا دقيقًا لعدد التّقليصات التي يمكن إنجازها، والزمن الذي احتجنا إليه في كلّ من: استكشاف الأضلاع، و التقليصات، وتوسعة البراعم. ■

تعدّ خوارزميّة إيفن وكاريف [1975] (Even – Kariv) أوّلَ خوارزميّة حلّت مسألة المواءمة العظمى في زمن أقلّ من مكعب الزّمن حيث احتاجت إلى $O(n^{5/2})$. فضلًا عن أنَّ أفضل خوارزميّة معروفة الآن تحتاج إلى زمن $O(n^{1/2}m)$ لبيان عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه m (هذا أسرع من $O(n^{5/2})$ للبيانات المتناثرة). تظهر الخوارزميّة بصورة معقدة أكثر في Micali- Vazirani [1980]، مع إثبات كامل في Vazirani [1994].

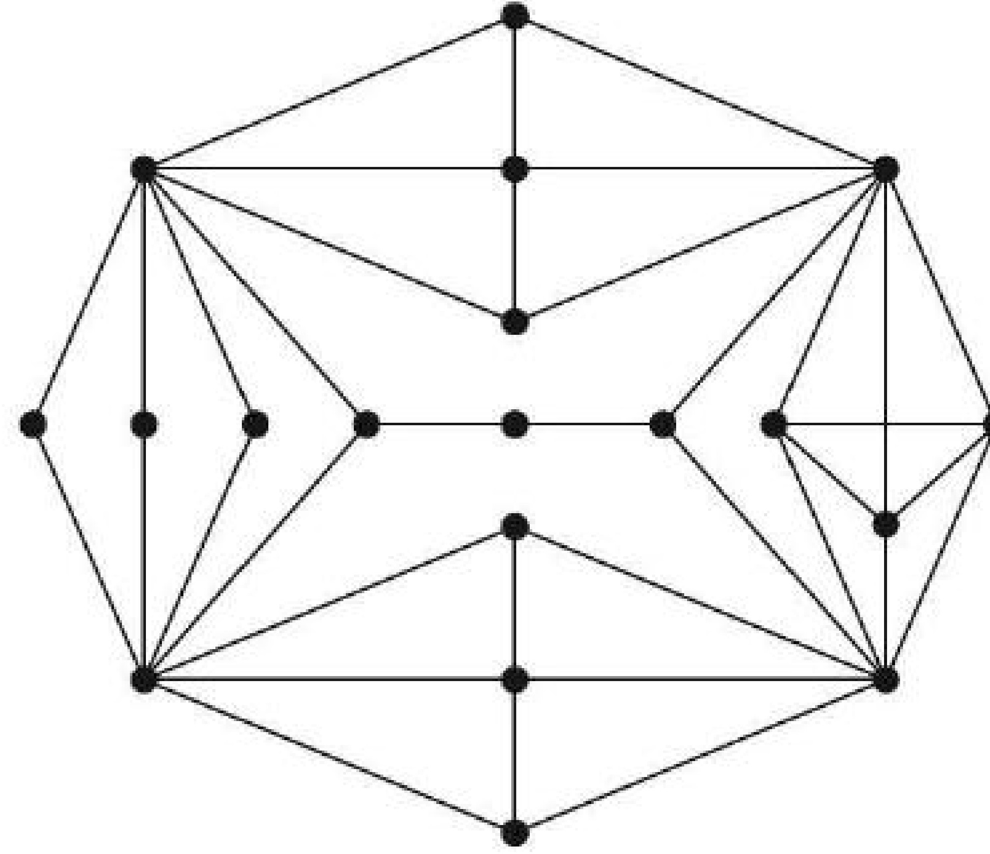
لم نناقش مسألة المواءمات الموزونة للبيانات العامة. وقد وجد إدموند [1965d] خوارزميّة لهذه المسألة تتشارك في زمن $O(n^3)$ مع كلّ من Gabow [1975] و .Lawler [1976] وهناك خوارزميات أسرع تظهر في Gabow [1990] وفي Gabow -Tarjan [1989]. ■

تمــارين (Exercises)

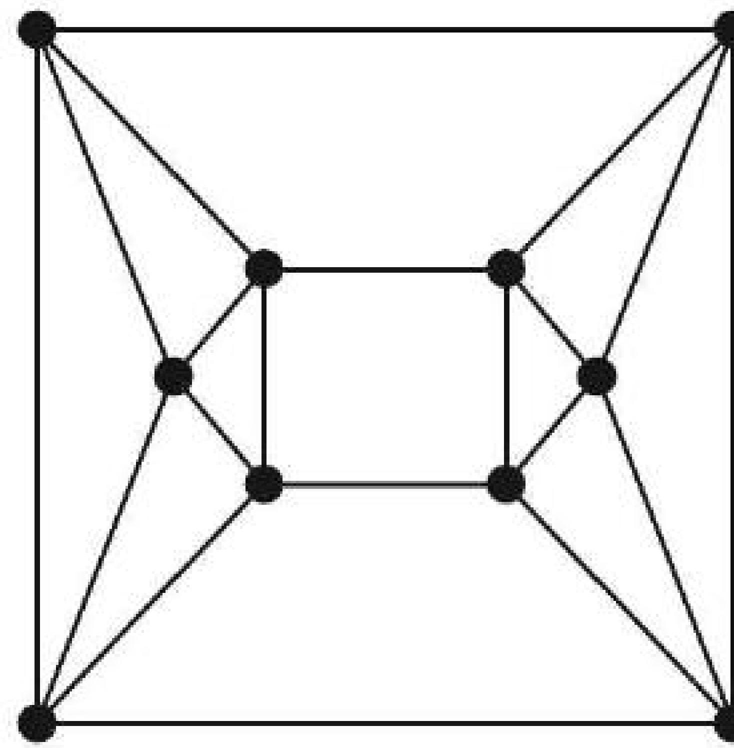
1.3.3. (–) حدّد ما إذا كان البيان أدناه يمتلك معاملاً من الدّرجة 1.



2.3.3. (–) أظهر مواءمة كبرى في البيان أدناه، واستخدم نتيجة في هذا الدرس لإعطاء إثبات قصير على عدم وجود مواءمة أوسع. ■



3.3.3.(–) في البيان أدناه، أظهر معاملاً من الدّرجة k لكلّ k في $\{0،1،2،3،4\}$. ■



4.3.3. (–) ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع منتظمًا من الدّرجة k. أثبت أنّه يمكن تفكيكه إلى معاملات من الدّرجة r إذا وفقط إذا كانت r تقسم k. ■

5.3.3. (–) ليكن G و H بيانين. حدّد عدد المركّبات والدّرجة العظمى لـِ $G \vee H$ بدلالة متغيرات G و H.

• • • • •

6.3.3. (!) أثبت أنَّ الشّجرة T تملك مواءمة كاملة إذا وفقط إذا كان $o(T\text{-}v)=1$ لكلّ $v\in V(T)$ (Chungphaisan).

7.3.3. (!) لكلّ $k>1$، أنشئ بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدّرجة k لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1. ■

8.3.3. أثبت أنَّه إذا كان البيان G يتفكك إلى معاملاتٍ من الدّرجة 1، فإنَّه لا يملك رأس قطع. ثم ارسم بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدّرجة 3 ومترابطًا، ويملك معاملاً من الدّرجة 1، ويملك رأس قطع.

9.3.3. أثبت أنَّ كلّ بيان ليس له رؤوس معزولة يملك مواءمة حجمها $(n(G)/(1 + \Delta(G))$ على الأقلّ. (مساعدة: طبّق الاستقراء على $e(G)$) ([1963] Weinstein)

10.3.3. (!) لكلّ بيان G، أثبت أنَّ $\beta(G) \leq 2\alpha'(G)$. لكلّ $k \in \mathbb{N}$، وأنشئ بيانًا بسيطًا G فيه $\alpha'(G) = k$ و $\beta(G)=2k$.

11.3.3. لتكن T مجموعة رؤوس في بيان G. أثبت أنَّ G يملك مواءمة مشبعة لـ T إذا وفقط إذا كان لكلّ $S \subseteq V(G)$، فإنَّ عدد المركّبات الفرديّة لـِ $G\text{-}S$ المحتواة في $G[T]$ هي $|S|$على الأكثر.

12.3.3. (!) تعميم نظرية كونج وإيجرفاري إلى البيانات العامة. ليكن G بيانًا. ولتكن $S_1,\ldots,S_k$ و T مجموعات جزئية من $V(G)$ بحيث يكون حجم كلّ مجموعة S_i فرديًّا. إنَّ هذه المجموعة تشكّل **غطاء معمّما** (generalized cover)لـ G إذا كان كلّ ضلع في G يملك نقطة طرفيّة في T أو يوجد i بحيث تكون النّقطتان الطّرفيتان للضّلع في S_i. إنَّ وزن (*weight*) الغطاء المُعمّم هو $|T|+\sum\lfloor|S_i|/2\rfloor$. لتكن $\beta^*(G)$ الوزنَ الأصغر لغطاء معمّم. أثبت أنَّ $\alpha'(G)=\beta^*(G)$. (مساعدة: طبّق النتيجة 3.3.7. تعليق: كلّ غطاء رأسيّ هو غطاء معمّم. لذا، فإنَّ $\beta^*(G) \leq \beta(G)$).

13.3.3. (+) نظرية توت من نظرية هال. ليكن G بيانًا، بحيث إنَّ $o(G - S) \leq |S|$ لكلّ $S \subseteq V(G)$. ولتكن T مجموعة رأس أعظميّة جزئيّة بحيث إنَّ $o(G - T)= |T|$:

a) أثبت أنَّ كلّ مركبة لـ $G\text{-}T$ هي فردية، واستنتج أنَّ $T \neq \emptyset$.

b) لتكن C مركبة لـ $G\text{-}T$. أثبت أنَّ شرط توت يتحقّق لكلّ بيان جزئيّ من C ناتج عن حذف رأس واحد. (مساعدة: بما أنَّ $C\text{-}x$ ذو رتبة زوجيّة، فإنَّ الانتهاك يتطلّب تحقّق $o(C - x - S) \geq |S|+2$.

c) ليكن H بيانًا ثنائيّ الفرع مع مجموعات مجزأة T و $\mathbf{C}$، حيث $\mathbf{C}$ هي مجموعة المركّبات لـ $G - T$. لكلّ $t \in T$ و لكلّ $C \in \mathbf{C}$ ضع $tC \in E(H)$ إذا وفقط إذا كان $N_G(t)$ يحتوي على رأس من C. أثبتَ أنَّ H يحقّق شرط هال لمواءمة مشبعة لـ C.

d) استخدم الفروع (a) و (b) و (c)، ونظرية هال أيضًا لتبرهن نظرية توت للمعامل من الدّرجة 1 بالاستقراء على $n(G)$ ([1971] Anderson,[1973] Mader).

14.3.3. (+) لكلّ $k \in \mathbb{N}$، ليكن G بيانًا بسيطًا بحيث إنَّ $\delta(G) \geq k$ و $n(G) \geq 2k$. أثبت أنَّ $\alpha'(G) \geq k$. (مساعدة: طبّق النتيجة 7.3.3.) ([1994] Brandt)

15.3.3. ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة 3 وله ضلعا قطع على الأكثر. أثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة 1. ([1891] Petersen)

16.3.3. (!) ليكن G بيانًا زوجيًّا منتظمًا من الدّرجة k (درجته زوجيّة) بحيث يبقى مترابطًا بعد حذف أيّ $(k - 2)$ ضلعًا. أثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة 1.

17.3.3. ليكن G كما في تمرين 16.3.3، استخدم الملاحظة 5.3.3 لإثبات أنَّ كلّ ضلع فيه ينتمي إلى معامل من الدّرجة 1. (تعليق: هذا يقوي التمرينين 16.3.3) ([1934] Schonberger لـِ $k = 3$, [1973, p162] Berge)

18.3.3. (+) لكلّ عدد فردي k أكبر من 1، أنشئ بيانًا لا يوجد فيه معامل من الدّرجة 1، بمعنى أنْ يكون

منتظمًا من الدّرجة k، ويبقى مترابطًا عند حذف أيّ (k-3) ضلعًا. (تعليق: لهذا فإنّ التمرينين 16.3.3 هو أفضل ما يمكن).

19.3.3. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدّرجة 3 ليس فيه ضلع قطع. أثبت أنَّ G يتفكّك إلى نسخ من P_4. (مساعدة: استخدم النتيجة 9.3.3.).

20.3.3. (!) أثبت أنَّ البيان البسيط المنتظم من الدّرجة 3 يملك معاملاً من الدّرجة 1 إذا وفقط إذا كان يتفكّك إلى نسخ من P_4.

21.3.3. (+) ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة $2m$، ولتكن T شجرة لها m ضلعًا. أثبت أنّه إذا كان القطر لـ T أقلّ من الخصر لـ G، فإنَّ G يتفكك إلى نسخ من T. (مساعدة: استخدم أثبت 9.3.3 لإعطاء إثبات استقرائيّ للنتيجة الأقوَى، وهي أنَّ G له مثل هذا التفكك، ويكون كلّ رأس فيه مستخدمًا مرّة واحدة بوصفه صورة لكل رأس في T (Haggkvist).

22.3.3. (!) ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$، وليكن H هو البيان الناتج عن G بإضافة رأس واحد إلى Y إذا كان n(G) فرديًّا، ثم إضافة أضلاع لجعل Y عصبة:

a) أثبت أنَّ G يملك مواءمة حجمها $|X|$ إذا وفقط إذا امتلك H معاملاً من الدّرجة 1.

b) أثبت أنّه إذا حقّق G شرط هال ($|N(S)| \geq |S|$ لكل $S \subseteq X$)، فإنَّ H يحقّق شرط توت ($o(H\text{-}T) \leq |T|$ لكل $T \subseteq V(H)$).

c) استعن بـ (a) و (b) لتحصل على نظرية هال من نظرية توت.

23.3.3. ليكن G بيانًا مترابطًا خاليًا من المخالب ذا درجة زوجيّة:

a) لتكن T شجرة مُولّدة للبيان G بالبحث الأفقي أولاً (الخوارزميّة 8.3.2). وليكن x و y رأسيّن لهما والد مشترك في T غير الجذر. أثبت أنَّ x و y يجب أنْ يكونا متجاورين.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة 1. (تعليق: دون الاستعانة بفرع (a) يمكن إثبات النتيجة الأقوى، وهي أنَّ الضّلع الأخير في المسار الأطول ينتمي إلى معامل من الدّرجة 1) (Las Vergnas [1975], Sumner [1974a]).

24.3.3. (!) ليكن G بيانًا زوجيًّا بسيطًا درجته n، ويملك مجموعة S حجمها k بحيث إنَّ $o(G - S) > k$. أثبت أنَّ G يملك $\binom{n\text{-}2k\text{-}1}{2} + k(n-k) + \binom{k}{2}$ ضلعًا على الأكثر؛ وهذا الحدّ هو أفضل ما يمكن. استخدم هذا لتحدّد أكبر حجم لبيان بسيط على n من الرّؤوس لا يملك معاملاً من الدّرجة 1. (Erdös – Gallai [1961]).

25.3.3. يعدّ البيانُ G **حرِجَ المعامل** (***factor – critical***) إذا كان كلّ بيان جزئيّ $G - v$ ناتج عن حذف رأس واحد يملك معاملاً من الدّرجة 1. أثبت أنَّ G حرجُ المعامل إذا وفقط إذا كان $n(G)$ فرديًّا و $o(G - S) \leq |S|$ لكلّ مجموعة غير خالية $S \subseteq V(G)$ (Gallai [1963a]).

26.3.3. (!) لتكن M مواءمة في البيان G، وليكن u رأسًا غير مشبع للمواءمة M. أثبت أنّه إذا كان G لا يملك مسارًا موسّعًا للمواءمة M يبدأ عند u، فإنَّ u غير مشبع في مواءمة كبرى ما في G.

27.3.3. (*) افترض أنَّ الخوارزميّة 17.3.3 صحيحة. سنطوّر إثباتًا خوارزميًّا لنظرية توت (النظرية 3.3.3):

a) ليكن G بيانًا لا توجد فيه مواءمة كاملة، ولتكن M مواءمة كبرى في G. ولتكن S و T هما المجموعتين

المولدتين عند تطبيق خوارزميّة 17.3.3 من u. أثبت أنَّ $|T| < |S| \le o(G\text{-}T)$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت النظرية 3.3.3. ■

28.3.3. (*) ليكن$\{0\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup$ ، ولتكن $f: V(G) \to \mathbb{N}_0$، يكون البيان G **قابلاً للذّوبان (Soluble)** من الدّرجة f إذا وجد $w: E(G) \to \mathbb{N}_0$ بحيث $\sum_{uv\in E(G)} w(uv) = f(v)$ لكلّ $v \in V(G)$.

a) أثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان البيان H الناتج عن G بتقسيم جزئيّ لكلّ ضلع مرتين، وتعريف f لتكون 1 على الرّؤوس الجديدة قابلاً للذّوبان من الدّرجة f. (هذا يختزل الاختبار لمعامل من الدّرجة f إلى اختبار قابلية الذّوبان من الدّرجة f). ■

b) إذا أعطيت G و $f: V(G) \to \mathbb{N}_0$ ، أنشئ بيانًا H (مع الإثبات) بحيث يكون G قابلاً للذّوبان من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان H يملك معاملاً من الدّرجة 1 (Tutte [1954a]).

29.3.3. (+*) شرط توت للمعاملات من الدّرجة f والمتتاليات البيانيّة. ليكن $f: V(G) \to \mathbb{N}_0$ ، عرّف $f(s) = \sum_{v\in S} f(v)$ لكلّ $S \subseteq V(G)$. ولكلّ مجموعتين منفصلتين $S، T$ من $V(G)$، اجعل $q(S, T)$ ترمز إلى عدد مركّبات Q في $G - S - T$ بحيث يكون $e(Q, T) + f(V(Q))$ فرديًّا، حيث $e(Q,T)$ هو عدد الأضلاع من Q إلى T. لقد أثبت توت [1952, 1954a] أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا تحقّق أنَّ:

$$q(S,T) + f(T) - \sum_{v\in T} d_{G-S}(v) \le f(S)$$

لاختيارات المجموعات الجزئيّة المنفصلة $S, T \subset V$ جميعها.

تمهيدية النّوعيّة (The Parity Lemma):

(a) ليكن $\delta(S, T) = f(S) - f(T) + \sum_{v\in T} d_{G-S}(v) - q(S, T)$ أثبت أنَّ $\delta(S,T)$ يملك النوعية نفسها مثل $f(V)$ لكلّ مجموعتين منفصلتين $S, T \subseteq V(G)$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $|T|$).

(b) افترض أنَّ $G = K_n$ و $f(v_i) = d_i$، بحيث يكون $\sum d_i$ زوجيًّا و $d_1 \ge \ldots \ge d_n$. استخدم شرط المعامل من الدّرجة f وفرع (a) لتثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان $\sum_{i=1}^{k} d_i \le (n-1-s)k + \sum_{i=n+1-s}^{n} d_i$ لكلّ k,s حيث $k + s \le n$.

(c) استنتج أنَّ $d_1, \ldots, d_n \ge 0$ تكون درجات الرّؤوس لبيان بسيط إذا وفقط إذا كان $\sum d_i$ زوجيًّا و $\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$ لكلّ $1 \le k \le n$ (Erdös – Gallai [1960]).

الفصل الرابع

الترابط والمسارات (Connectivity and Paths)

1.4 القطع والترابط (Cuts and Connectivity)

يعدُّ تعطيل شبكة اتصالات جيدة أمرًا صعبًا. لذا، يُفضَّلُ إيجاد بيان (بيان موجه) يمثِّل النقل أو الإرسال بحيث يبقى هذا البيان (البيان الموجه) مترابطًا حتى في حال فشل (تعطيل) بعض الأضلاع أو الرؤوس. فمثلاً، عندما تكون أدوات الوصل أو الربط للاتصالات مكلفة جدًّا، فإننا نرغب بتحقيق هذه الأهداف بعدد أقل من الأضلاع. وفي هذه الحالة، تكون النشُط غير ذات صلة بعملية الربط، ومن هنا، سنفترض في هذا الفصل أن بياناتنا وبياناتنا الموجهة خالية من النشُط، وخصوصًا عندما نتعامل مع شروط على الدرجات.

الترابط (Connectivity)

ما عدد الرؤوس التي يجب حذفها من بيان معين لكي يصبح بيانًا غير مترابط؟

1.1.4. تعريف: تعرف المجموعة الفاصلة أو قاطعة الرؤوس على أنها مجموعة جزئية S من $S \subseteq V(G)$، حيث تحوي $G - S$ أكثر من مركبة. ونعرف درجة (مقياس) ترابط G الذي نرمز إليه بالرمز $\kappa(G)$ على أنه حجم أصغر مجموعة S من الرؤوس، بحيث يصبح $G\text{-}S$ غير مترابط، أو أن له رأسًا واحدًا فقط. ونقول: إن البيان مترابط من الدرجة k إذا كان $k(G) \geq k$.

لاحظ أنه إذا كان G بيانًا مختلفًا عن البيان التام، فإن درجة ترابط G تساوي k إذا وفقط إذا كان حجم أي مجموعة فاصلة لهذا البيان يساوي k على الأقل. وعندما نقول مترابط من الدرجة k، فإننا نعدّ ذلك شرطًا بنيويًّا (بنائيًّا)، ولكن عندما نقول: إن درجة الترابط تساوي k، فهذا يعني حلًّا لمسألة الأمثلية.

2.1.4. مثال: ترابط K_n و $K_{m,n}$. بما أنه لا توجد مجموعة فاصلة للعصبة (Clique)، فإننا سنحتاج إلى استخدام مصطلح يمثل ترابطها. وهذا يفسر التعبير "أوله رأس واحد فقط" في التعريف. 1.1.4 لاحظ أن $\kappa(K_n)=n\text{-}1$، في حين $\kappa(G) \leq n(G)\ \text{-}2$ عندما لا يكون G بيانًا تامًّا، واستنادًا إلى هذا الاصطلاح، نجد أن النتائج العامة المتعلقة بالترابط تبقى صحيحة على البيانات التامة.

افترض التجزئة X و Y لبيان $K_{m,n}$، لاحظ أنّ كل بيان جزئي يكون مترابطًا إذا كان له رأس في X ورأس آخر في Y. لذا. فإن كل مجموعة فاصلة للبيان $K_{m,n}$ تحوي X أو Y. بما أن X و Y مجموعتان فاصلتان (أو تُبقي رأسًا واحدًا فقط)، فنجد أن $k(K_{m,n}) = min\ \{m,n\}$. لاحظ أن مقياس ترابط $K_{3,3}$ هو $k(K_{3,3}) = 3$. لذا، فإن $K_{3,3}$ مترابط من الدرجات: 1، 2، و3، ولكنه غير مترابط من الدرجة 4. ■

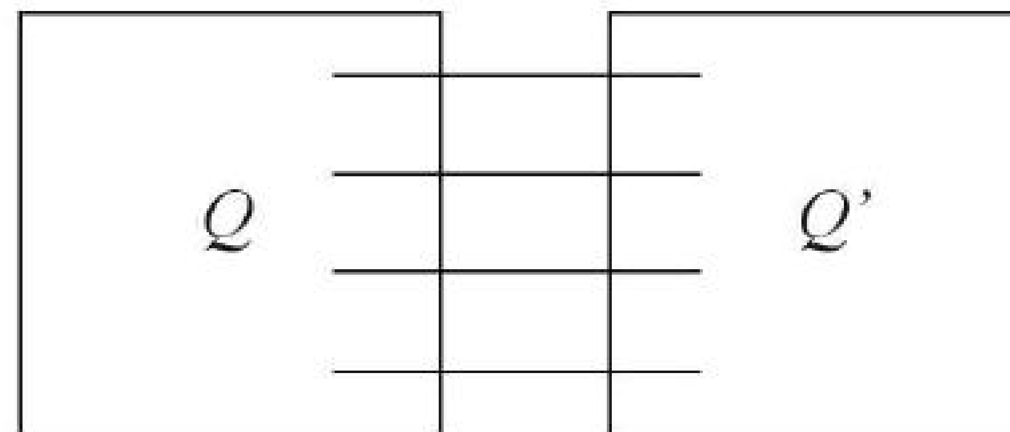
إذا كان G بيانًا له أكثر من رأسين، فإن $k(G)=1$ إذا وفقط إذا كان G مترابطًا، وله رأس فاصل (رأس قطع) ويساوي مقياس ترابط البيان صفرًا إذا وفقط إذا كان غير مترابط. لاحظ أن البيانَ K_1 الذي له رأس واحد مترابطٌ. ومن أجل انسجام النقاش لدرجة الترابط، فإننا نضع $k(K_1) = 0$.

3.1.4. مثال: المكعب الزائدي Q_k. إذا كانت $k \geq 2$، فإن مجموعة جيران أي رأس من رؤوس Q_k تمثل مجموعة فاصلة. لذا، فإن $\kappa\ (Q_k) \leq k$. ولإثبات أن $\kappa\ (Q_k) = k$؛ سنثبت أن حجم كل مجموعة فاصلة لأي رأس عن البيان يساوي k على الأقل عن طريق الاستقراء على k.

الخطوة الأساس: $k \in \{0.1\}$، إذا كانت $k \leq 1$، فإن Q_k يمثل بيانًا تامًّا له $k+1$ من الرؤوس ومقياس ترابطه يساوي k.

خطوة الاستقراء: $k \geq 2$، من فرضية الاستقراء، نعلم أن $k(Q_{k-1}) = k\text{-}1$، خذ في الحسبان أن Q_k يمثل نسختين هما: Q و Q' من Q_{k-1}، بالإضافة إلى الأضلاع التي تربط الرؤوس المتناظرة في Q و Q' . (مثال 8.3.1). افترض أن S تمثل مجموعة فصل لأحد الرؤوس. إذا كان كل من $Q\text{-}S$ و $Q'\text{-}S$ مترابطًا، فإن $Q_k\text{-}S$ يكون أيضًا مترابطًا، إلا إذا احتوت S على نقطة طرفية لكل ضلع من الأضلاع التي تربط الرؤوس المتناظرة، وهذا يتطلب $|S| \geq 2^{k-1}$ لكن $2^{k-1} \geq k$ لكل $k \geq 2$.

لذا، نفترض أن $Q\text{-}S$ غير مترابط، وهذا يعني أن S تحوي $k\text{-}1$ رأسًا على الأقل من Q، وباستخدام فرضيات الاستقراء، لاحظ أنه إذا خلت S من الرؤوس الموجود في Q'، فإن $Q'\text{-}S$ يكون مترابطًا، ويوجد جيران في $Q'\text{-}S$ لكل رأس في $Q\text{-}S$. لذا، فإن $Q_k - S$ مترابط، ويجب أن يحوي S رأسًا من Q'، وهذا يعني أن $|S| \geq k$ وهو المطلوب. ■

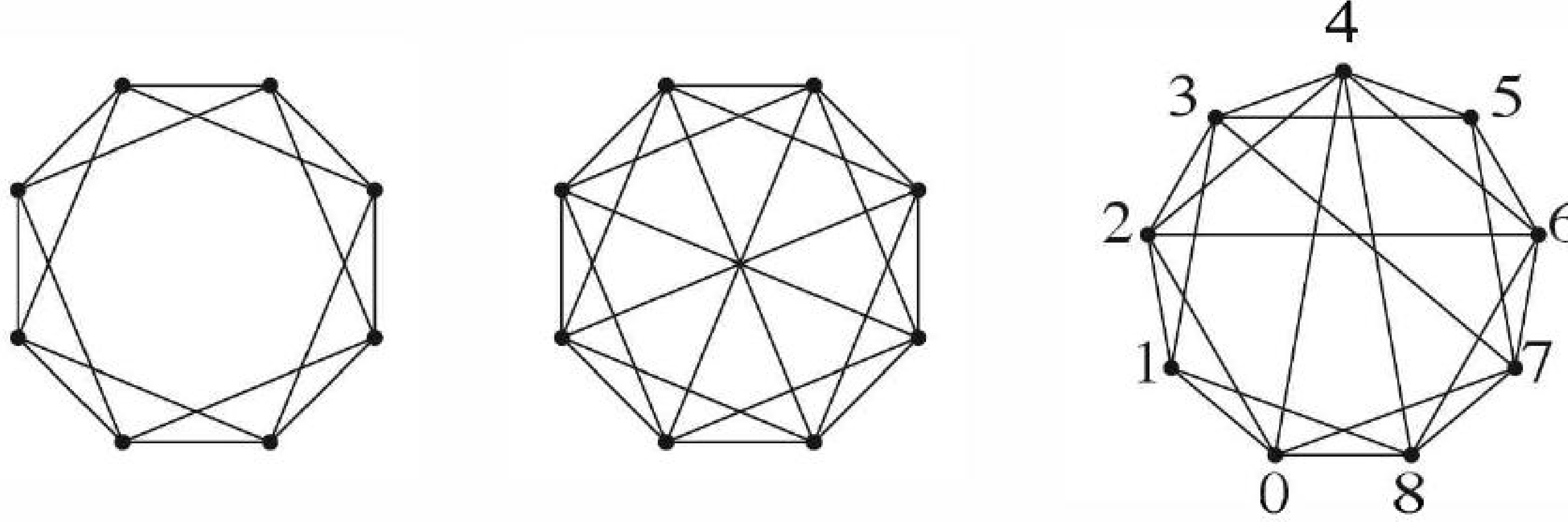


وإذا حذفنا جيران أي رأس، فإننا نحصل على بيان غير مترابط، أو بيان له رأس واحد. لذا، فإن $k(G) \leq \delta\ (G)$، وليس بالضرورة الحصول على المساواة؛ فعلى سبيل المثال، نعلم أن الدرجة الصغرى للبيان 2Km هي m-1 ودرجة ترابطه تساوي صفر.

بما أن مقياس الترابط k يتطلب أن تكون $\delta\ (G) \geq k$، فإنه أيضًا يتطلب أن يكون عدد الأضلاع $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ على الأقل. لاحظ أن Q_k يحقق هذا الحد ما عدا عندما $n=2^k$ ، وهذا الحد هو أفضل ما يمكن الحصول عليه عندما $k < n$، ويتضح هذا من خلال المثال التالي:

4.1.4. مثال: بيانات هراري (*Harary graphs*). إذا علمت أن $2 \leq k \leq n$، فضع n رأسًا على دائرة بمسافات متساوية. إذا كان k زوجيًّا، شكّل $H_{k,n}$ وذلك بجعل كل رأس مجاور لأقرب $k/2$ رأسًا في الاتجاهين على الدائرة. إذا كان k فرديًّا و n زوجيًّا، فشكّل $H_{k,n}$ بجعل كل رأس مجاور لأقرب $(k-1)/2$ رأسًا في الاتجاهين، وكذلك مجاور للرأس المقابل على القطر المار بهذا الرأس. وفي الأحوال جميعها، لاحظ أن $H_{k,n}$ منتظم من الدرجة k.

عندما يكون كلٌّ من k و n فرديًا، ضع دليلاً على الرؤوس باستخدام الأعداد الصحيحة بمقياس n (باقي القسمة على n). ابنِ $H_{k,n}$ من $H_{k-1,n}$ بإضافة الأضلاع $i \leftrightarrow i+(\frac{n-1}{2})$ لكل i حيث $0 \le i \le (n-1)/2$.
في الشكل أدناه تجد البيانات: $H_{4,8}$ ، $H_{5,8}$ ، $H_{5,9}$. ■



5.1.4. نظرية: (Harary [1962a]) $\kappa(H_{k,n})=k$، واستنادًا إلى ذلك، فإن أقل عدد ممكن من الأضلاع لبيان مترابط من الدرجة k على n من الرؤوس هو $\lceil kn/2 \rceil$.

الإثبات: سنثبت الحالة التي يكون فيها k عددًا زوجيًا، ولنقل $k = 2r$، تاركين الحالة التي يكون فيها k عددًا فرديًا إلى تمرين 12. افترض أن $G=H_{k,n}$. بما أن $\delta(G)=k$، فإنه يكفي أن نثبت أن $\kappa(G) \ge k$. افترض أن $S \subseteq V(G)$ حيث $|S| < k$، سنثبت أن $G\text{-}S$ مترابط. خذ u,v في $V(G) - S\in$، يوجد في الترتيبة الدائرية الأصلية مساران من u إلى v؛ أحدهما مع اتجاه عقارب الساعة، والآخر عكس اتجاه عقارب الساعة. افترض أن A و B مجموعتا الرؤوس الداخلية لهذين المسارين. بما أن $|S| < k$، فإن مبدأ صناديق الحمام يضمن لنا أن إحدى المجموعتين $\{A,B\}$ و S تحوي أقل من $k/2$ رأسًا. وبما أن كل رأس في G يرتبط بأضلاع مع الـ $k/2$ رأسًا التالية في أحد الاتجاهين، فإن حذف عدد من الرؤوس المتتابعة أقل من $k/2$ لا يمنع الانتقال في ذلك الاتجاه. لذا، نستطيع إيجاد مسار من u إلى v في $G\text{-}S$ باستخدام إحدى المجموعتين A أو B التي يكون للمجموعة S فيها عدد أقل من $k/2$ من الرؤوس. ■

لاحظ أن البناء بطريقة هراري (Harary) يحدد الشرط على الدرجات الذي يسمح للبيانِ أن يكون مترابطًا من الدرجة k (k-Gnnected). يحدد التمرين (22) شرط الدرجات الذي يجبر بيانًا بسيطًا ليكون مترابطًا من الدرجة k. وبما أن مقياس درجة الترابط يعتمد على حذف الرؤوس، فإنها لا تتأثر بحذف نسخ إضافية من الأضلاع المكررة، لذا نتعامل من شروط الدرجات للترابط من الدرجة k ضمن سياق البيانات البسيطة فقط.

6.1.4. ملاحظة: الإثبات المباشر لـ $\kappa(G) \ge k$. إما أن نأخذ في الحسبان مجموعة قطع رؤوس S ونثبت أن $|S| \ge k$، أو نأخذ في الحسبان مجموعة S عدد رؤوسها أقل من k ونثبت أن $G\text{-}S$ مترابط. أما في الإثبات غير المباشر، فنفترض مجموعة فاصلة أقل من k ونحصل على تناقض. وهنا نذكر أن لكلا الإثباتين ما يميزه؛ فالإثبات غير المباشر يمكن أن نجده بسهولة، أما الإثبات المباشر فربما يكون أوضح.

لاحظ كذلك أنه إذا كانت $k < n(G)$، وكان للبيان G مجموعة فاصلة لرأس معين بحجم أقل من k، فإنه يوجد لـ G مجموعة فصل (قطع) حجمها $k-1$ (أولاً، احذف عناصر مجموعة الفصل، ثم تابع حذف الرؤوس حتى تجد أنه تم حذف k-1 من هذه الرؤوس، مستبقيًا رأسًا في كل مركبتين).

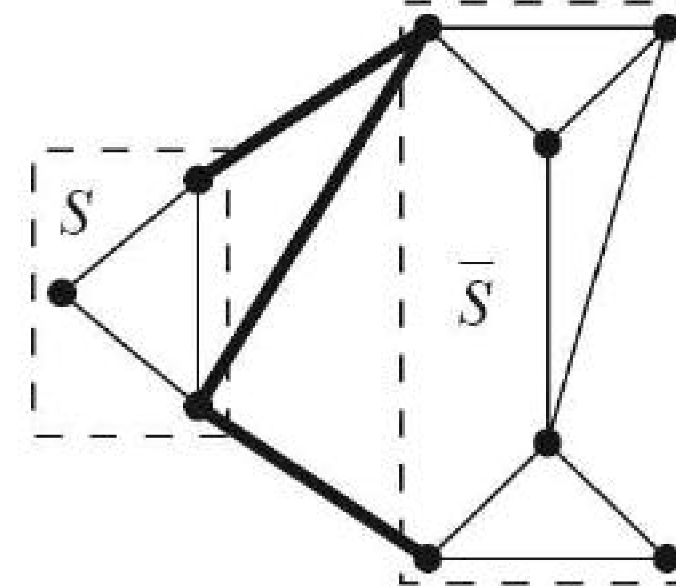
وأخيرًا، فإن إثبات $\kappa(G) = k$ يتطلب إيجاد مجموعة رؤوس فاصلة حجمها k، وهذا هو الجزء الأسهل عادة. ■

درجة ترابط الأضلاع (Edge - Connectivity)

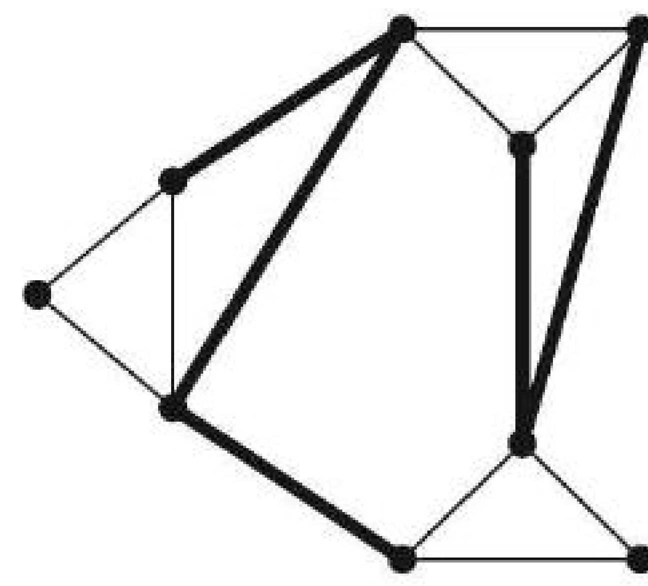
ربما تكون أجهزة النقل التي لدينا آمنة، ولا يمكن أن تتعطل. ولكن يمكن أيضًا أن تكون روابط (أسلاك) الاتصالات خاضعة لبعض الضجيج والأعطال الأخرى، في مثل هذه الحالة، نرغب أن يكون من الصعوبة بمكان فصل البيان الذي لدينا بحذف أضلاع منه.

7.1.4. تعريف: لتكن $F \subseteq E(G)$. نقول: إن F مجموعة أضلاع فاصلة للبيان G إذا كان للبيان $G - F$ أكثر من مركبة. ونقول: إن البيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة k $(k -$ edge - connected$)$ إذا كان عدد عناصر كل مجموعة ضلعية فاصلة مساويًا k على الأقل. نعرف مقياس الترابط الضلعي للبيان G الذي نرمز إليه بالرمز $\kappa'(G)$ على أنه أصغر حجم لمجموعة ضلعية فاصلة لهذا البيان (وهذا كقولنا أكبر عدد k بحيث يكون G مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة k).

إذا أُعطينا $S,T \subseteq V(G)$، فسنكتب $[S,T]$ للتدليل على مجموعة الأضلاع التي أحد نقاطها الطرفية في S والأخرى في T. إذا كانت $\phi \neq SCV(G)$ مجموعة جزئية من $\overline{S}=V(G)$-S، فإن المجموعة $[S,\overline{S}]$ تسمى قاطعة ضلعية (قاطعة أضلاع).



قاطعة خلفية (أضلاع)


مجموعة خلفية فاصلة (قاطعة)

8.1.4. ملاحظة: المجموعات القاطعة وأضلاع القطع. لاحظ أن كل قاطعة ضلعية (edge–cut) تكون مجموعة (ضلعية) قاطعة لأن G-$[S,\overline{S}]$ لا تحوي أي مسار من S إلى $\overline{S}$. إن عكس العبارة السابقة غير صحيح؛ لأن المجموعة القاطعة ربما تحوي عدد أضلاع أكثر من القاطعة الضلعية. وفي الشكل أعلاه، مثلنا المجموعة القاطعة والقاطعة الضلعية بخطوط غامقة، انظر التمرين 13.

وعلى الرغم من ذلك، فإن أي مجموعة قاطعة صغرى (تحوي أقل عدد من الأضلاع) تكون قاطعة ضلعية (عندما $n(G) > 1$)؟ إذا كان لبيان G-F أكثر من مركبة لبعض F المحتواة في $E(G)$. وإذا حذفنا الأضلاع جميعها التي لها نقطة طرفية في مركبة H من مركبات G-F، فإن F تحوي قاطعة ضلعية $[V(H),\overline{V(H)}]$، ولا تكون F مجموعة قاطعة صغرى إلا إذا كانت $F=[V(H),\overline{V(H)}]$. ■

يبقى الرمز المستخدم للتدليل على درجة الترابط الضلعية باستخدام الشرطة منسجمًا مع الرمز الذي استخدمناه للتدليل على درجة الترابط الرأسية، وهذا لا يسبب لنا أيًّا من الإشكالات التي تنجم عن استخدام الرموز المختلفة.

إن حذف نقطة طرفية (أحد رأسي ضلع معين) لكل ضلع في قاطعة ضلعية F يعني حذف كل ضلع في F، وهذا يقودنا إلى اقتراح أن $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. وعلى أي حال، يجب الحذر من حذف الرأس الوحيد لأحد مركبات G-F؛ لأن هذا يبقي لنا بيانًا جزئيًّا مترابطًا في هذه الحالة.

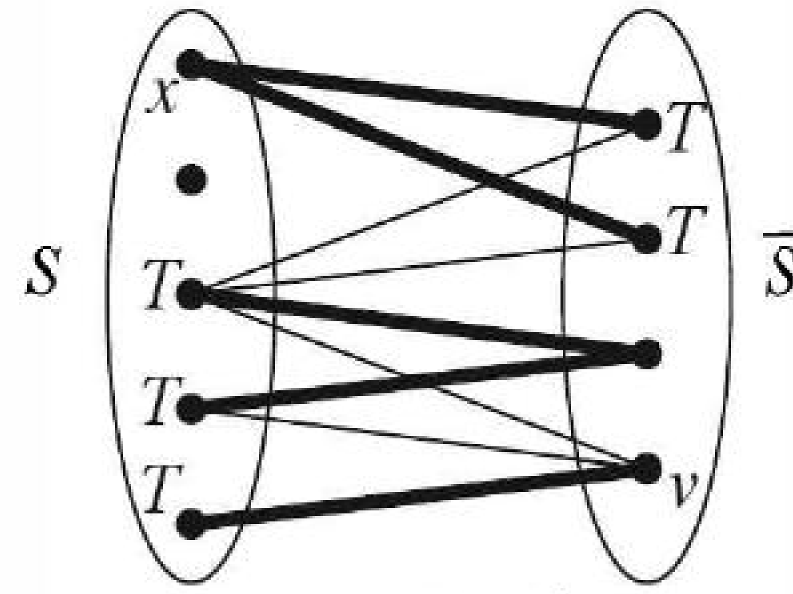
9.1.4. نظرية: (whitney [1932a]). إذا كان G بيانًا بسيطًا فإن:

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

إثبات: تشكّل الأضلاعُ الواقعة على الرأس v (التي تكون v نقطة طرفية لكل منها) ذي الدرجة الصغرى قاطعةً ضلعية. لذا، فإن: $\kappa'(G) \leq \delta(G)$. وبناءً عليه، يبقى أن أثبت أن: $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

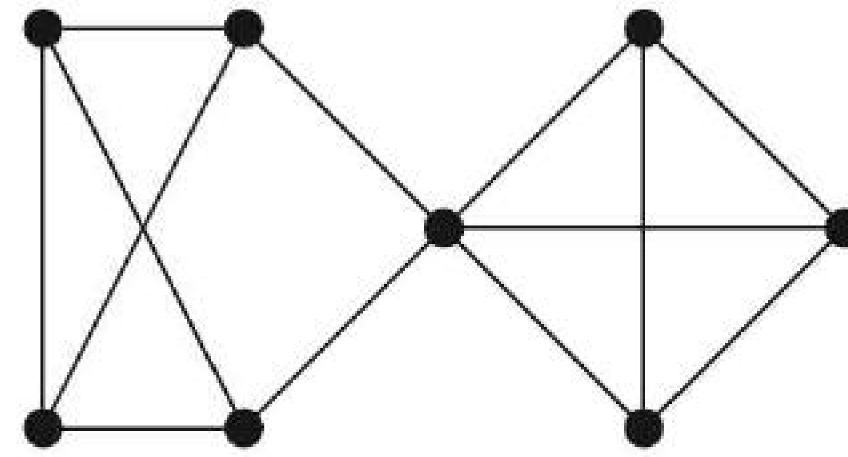
لقد لاحظنا سابقًا أن $\kappa(G) \leq n(G) - 1$ (انظر المثال 2.1.4). خذ في الحسبان أصغر قاطعة ضلعية $[S,\overline{S}]$. إذا كان كل رأس في S يجاور كل رأس في $\overline{S}$ فإن: $|[S,\overline{S}]| = |S|\ |\overline{S}| \geq n(G) - 1 \geq \kappa(G)$. وعليه، نحصل على المتباينة المطلوبة.

وإذا لم يكن الأمر كذلك، فاختر $x \in S$ و $y \in \overline{S}$ بحيث إن $x \nleftrightarrow y$. اجعل T تحوي جيران x الموجودة في $\overline{S}$ جميعها بالإضافة إلى الرؤوس الموجودة في $S - \{x\}$ جميعها ولها جيران في $\overline{S}$. لاحظ أن كل مسار من x إلى y يمر من خلال T. لذا، فإن T مجموعة فاصلة. وبأخذ الأضلاع من x إلى $T\cap\overline{S}$، وأخذ ضلع واحد من كل رأس في $T \cap S$ إلى $\overline{S}$ (ممثلة بالخطوط الغامقة في الشكل أدناه) نحصل على $|T|$ من أضلاع $[S,\overline{S}]$، المختلفة عن بعضها. وبناءً عليه، فإن: $\kappa'(G) = |[S,\overline{S}]| \geq |T| \geq \kappa(G)$، وهذا هو الإثبات. ■



لقد رأينا أن $\kappa(G) = \delta(G)$ عندما يكون G بيانًا تامًّا، أو عصبة ثنائية، أو مكعبًا زائديًّا، أو بيانًا هراريًّا. وباستخدام النظرية 4.1.9. نجد أيضًا أن $\kappa'(G) = \delta(G)$ لهذه البيانات. وعلى الرغم من ذلك، نجد في العديد من البيانات أن مجموعة الأضلاع التي تقع على رأس معين (هذا الرأس يمثل نقطة طرفية في هذه الأضلاع) له درجة صغرى لا تمثل قاطعة ضلعية صغرى. لذا، فإن الحالة السائدة هي $\kappa'(G) < \delta(G)$ وذلك عندما لا تكون هناك قاطعة ضلعين صغرى عازلة لأحد الرؤوس (لرأس معين).

10.1.4. مثال: إمكانية حدوث $\kappa<\kappa'<\delta$. انظر البيان G المرسوم في الشكل أدناه، ولاحظ أن $\kappa(G)=1$، $\kappa'(G)=2$، و$\delta(G)=3$، لاحظ عدم وجود قاطعة ضلعية صغرى عازلة لرأس. يمكن أن تكون كلُّ متباينة هنا ضعيفةً بالقدر الذي نرغب، فمثلاً عندما $G=K_m+K_m$ نجد أن $\kappa(G)=\kappa'(G)=0$، لكن $\delta(G) = m-1$، وعندما تكون G متوائمة من عصبتين على m من الرؤوس يشتركان في رأس واحد فقط، نجد أن $\kappa'(G) = \delta(G) = m-1$، لكن $\kappa(G) = 1$. ■

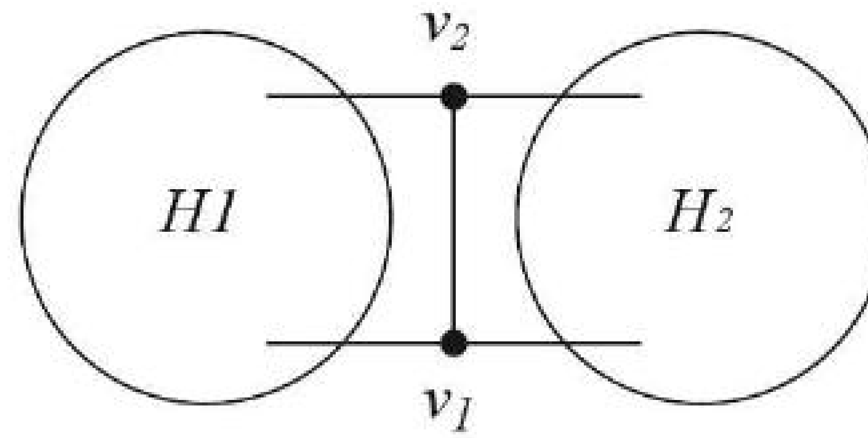


إن الشروط المختلفة تُحدِثُ مساواةً بين الوسطاء (parameters) فعلى سبيل المثال عندما يساوي قطر G 2، فإن $\kappa'(G) = \delta(G)$ (التمرين 25). وكذلك نجد أن البيانات الثلاثية المنتظمة تُحقق أن مقدار (درجة) ترابطها دائمًا مساوٍ لمقدار ترابطها الضلعي.

11.1.4. نظرية: إذا كان G بيانًا ثلاثيًّا منتظمًا فإن $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

الإثبات: افترض أن S قاطعة رؤوس صغرى ($|S| = \kappa(G)$). وبما أن $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ متحققة دائمًا، فإننا نحتاج فقط إلى قاطعة ضلعية حجمها $|S|$. افترض أن H_1 و H_2 مركبتان للبيان $G\text{-}S$، وبما أن S قاطعة رؤوس صغرى، إذن، يوجد لكل v في S جارٌ في H_1 وجارٌ آخر في H_2، وبما أن G بيان ثلاثي منتظم، فلا يمكن أن يوجد لـ v جاران في H_1، وجاران في H_2، إذن، يوجد لـ v جارٌ واحدٌ، إما في H_1، أو في H_2، احذف الضلع الواصل من v إلى المجموعة التي تحوي جارًا واحدًا فقط.

تقوم هذه الـ $\kappa(G)$ من الأضلاع بتبديد شمل المسارات جميعها التي من H_1 إلى H_2 ما عدا الحالة الموضحة في الشكل أدناه، حيث يمكن للمسار أن يدخل S عن طريق v_1، ويخرج عن طريق v_2. وفي هذه الحالة، نحذف الضلع الواصل إلى H_1 من v_1 و v_2 من أجل فصل المسارات جميعها من H_1 إلى H_2 المارة خلال $\{v_1, v_2\}$. ■



عندما تكون $\kappa'(G) < \delta(G)$، فلا يمكن لقاطعة ضلعية صغرى أن تعزل رأسًا. وفي الحقيقة، عندما تكون $|[S,\bar{S}]| < \delta(G)$، فيجب أن تحوي S (وكذلك $\bar{S}$) أكثر من رأس واحد فقط. وهذا يتبع علاقة بسيطة تربط بين حجم القاطعة الضلعية $[S,\bar{S}]$ وحجم البيان الجزئي الذي تولده S.

12.1.4. قضية: إذا كانت S مجموعة رؤوس في بيان G فإن:

$$|[S,\bar{S}]| = [\ \Sigma_{v\in S} d(v)\ ] - 2e(G[S])$$

الإثبات: لاحظ أن الضلع في $G[S]$ يسهم بـ 2 في $\Sigma_{v\in S} d(v)$، أما الضلع من $[S,\bar{S}]$، فيسهم بواحد فقط في هذا المجموع، وبما أن هذا يحسب المساهمات جميعها، فإننا نحصل على:

$\Sigma_{v\in S} d(v) = [S,\bar{S}] + 2e(G[S])$. ■

13.1.4. النتيجة: إذا كان G بيانًا بسيطًا، وكان $|[S,\bar{S}]| > \delta(G)$، حيث S مجموعة جزئية فعلية من $V(G)$، فإن $|S| > \delta(G)$.

الإثبات: من قضية 12.1.4 نجد أن: $\delta(G) > \Sigma_{v\in S} d(v) - 2e(G[S])$ وباستخدام $d(v) \geq \delta(G)$، وأن $2e(G[S]) \leq |S|(|S|-1)$ نجد أن:

$$\delta(G) > |S|\,\delta(G) - |S|(|S| - 1)$$

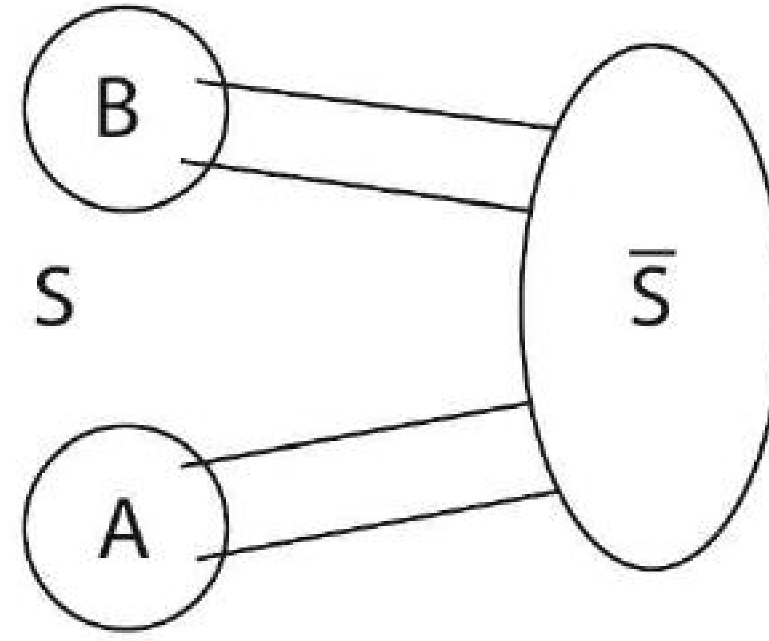
وتتطلب هذه المتباينة أن يكون $|S| > 1$. لذا، نستطيع ربط الحدود التي يظهر فيها $\delta(G)$. وباختصار $|S| - 1$ نجد أن $|S| > \delta(G)$ ■

بما أن القاطعةَ الضلعية مجموعةٌ من الأضلاع، فيمكن أن تحوي داخلها قاطعة ضلعية أُخرى. فعلى سبيل المثال، يوجد للبيان $K_{1,2}$ ثلاث قواطع ضلعية، ولكن إحداها تحوي الأخريين. إن للقاطعة الضلعية الصغرى غير الخالية لبيان معين بعضَ الخصائص البنيوية (البنائية) المفيدة.

14.1.4. تعريف: نعرف الرابطة (bond) على أنها قاطعة ضلعية صغرى غير خالية. ونعني بصغرى أنه لا يوجد لها مجموعة جزئية فعلاً، بحيث إن هذه المجموعة الجزئية تشكل أيضًا قاطعة ضلعية. نعطي فيما يأتي توصيفًا يميز الروابط في البيانات المترابطة.

15.1.4. قضية: إذا كان G بيانًا مترابطًا، فإن القاطعة الضلعية F تكون رابطة إذا وفقط إذا كان للبيان $G-F$ مركبتان فقط.

الإثبات. افترض أن $F = [S, \overline{S}]$ قاطعةٌ ضلعيةٌ، وافترض أيضًا أن لـ $G - F$ مركبتين فقط، وافترض كذلك أن F' مجموعة جزئية فعلاً من F. إن البيان $G - F'$ يحوي مركبتين $G - F$ بالإضافة إلى ضلع واحد على الأقل يربط بينهما لجعل $G - F'$ مترابطًا. لذا، فإن F تمثل قاطعة ضلعية صغرى. إذن، فهي رابطة. وبالنسبة إلى العكس، افترض وجود أكثر من مركبتين للبيان G-F. بما أن G-F هي الاتحاد المنفصل (*disjoint union*) لكل من $G[S]$ و $G[\overline{S}]$ فإن هناك مركبتين لأحد هذين البيانين الجزئيين على الأقل. افترض (من التماثل) أن هذا البيان هو $G[S]$. لذا، نستطيع كتابة S على الصورة $S = A \cup B$ حيث لا يوجد أضلاع تربط بين A و B. ولهذا، فإن القواطع الضلعية $[A, \overline{A}]$ و $[B, \overline{B}]$ هي مجموعات جزئية فعلاً من F. وعليه، فإن F ليست رابطة؛ وهذا التناقض ينهي الإثبات. ■

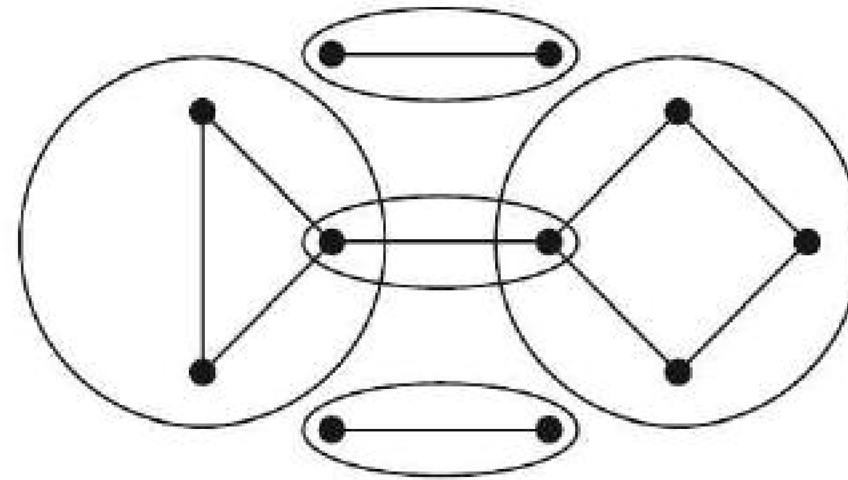


القوالب (Blocks)

ليس من الضروري أن يكون البيان المترابط الذي ليس له رأس فاصل مترابطًا من الدرجة 2، لأنه قد يكون K_1 أو K_2. وتزودنا البيانات الجزئية المترابطة التي ليس لها رؤوس فاصلة بتحليل (تفكيك) مفيد للبيان.

16.1.4. تعريف: نعرِّف القالب لبيان G (أو في بيان G) على أنه أكبر بيان جزئي مترابط محتوًى في G؛ بحيث لا يوجد له رأس فاصل. وإذا كان G نفسه مترابطًا وليس له رأس فاصل، فإن G يكون قالبًا.

17.1.4. مثال: القوالب. إذا كان H قالبًا في G، فإن H بوصفه بيانًا لا يحوي رأسًا فاصلاً، ولكنه قد يحوي رؤوسًا تمثل رؤوسًا فاصلة لـ G. فعلى سبيل المثال، يوجد للبيان المرسوم في الشكل أدناه خمسة قوالب هي: ثلاث نسخ من K_2، ونسخة من K_3، وبيان جزئي آخر ليس حلقةً وليس بيانًا تامًّا. ■



18.1.4. ملاحظة: خواصّ القوالب. إن أي ضلع في حلقة لا يمكن أن يكون قالبًا؛ لأن هذا الضلع يكون محتوًى في بيان جزئي أكبر ليس له رأس قطع. لذا، فإن أي ضلع يكون قالبًا إذا وفقط إذا كان هذا الضلع ضلعًا فاصلًا (قاطعًا) (cut – edge)، إن أضلاع أي شجرة هي قوالبها. وإذا كان في القالب أكثر من رأسين، فإنه يكون مترابطًا من الدرجة 2. إن قوالب البيان الخالي من النشَط هي: رؤوسه المعزولة، وأضلاعه الفاصلة، وبياناته الجزئية العظمى التي تكون مترابطة من الدرجة 2. ■

19.1.4. قضية : يشترك أيّ قالبين في بيان برأس واحد على الأكثر.

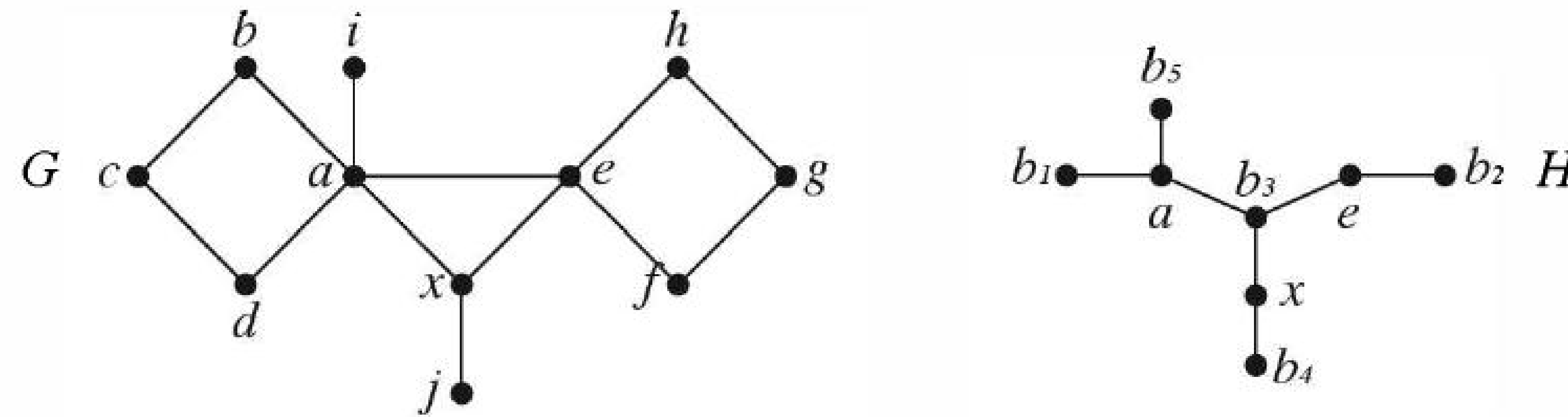
الإثبات: باستخدام التناقض، افترض أن B_1 و B_2 قالبان يشتركان في رأسين على الأقل. سنثبت أن $B_1 \cup B_2$ بيان جزئي مترابط ليس له رأس فاصل، وهذا يناقض كون كل من B_1 و B_2 بيانات جزئية عظمى مترابطة. ■

عندما نحذف رأسًا واحدًا من B_i، فإن ما يتبقى يكون مترابطًا. لذا، نحصل على مسار في B_i من كل رأس باق إلى كل رأس باقٍ في $V(B_1) \cap V(B_2)$، وبما أن للقالبين رأسين مشتركين، فإن حذف رأس واحد يُبْقي رأسًا آخر في التقاطع. ومن هنا نحصل على مسارات من الرؤوس جميعها إلى هذا الرأس. لذا، لا يمكن أن يكون $B_1 \cup B_2$ غير مترابط بحذف رأس واحد فقط. ■

يمثل كل ضلع بيانًا جزئيًّا ليس له رأس فاصل. لذا، فإن كل ضلع يكون موجودًا في قالب، ومن هنا نستنتج أن قوالب البيان تُفكِّك (decompose) البيانَ. إن سلوك القوالب في البيان يشبه إلى حد ما سلوك المركبات القوية للبيانات الموجهة (التعريف 12.4.1)، لكن لا يوجد رؤوس مشتركة للمركبات القوية (التمرين 13a.1.4). وعلى الرغم من أن القوالب تفكك مجموعة الأضلاع في البيان، فإن المركبات القوية للبيان الموجه تجزِّئ مجموعة الرؤوس وعادةً ما تحذف الأضلاع.

عندما يشترك قالبان في G برأس، فإنه يجب أن يكون هذا الرأس فاصلاً، إن التفاعل بين القوالب والرؤوس الفاصلة (القاطعة) يوصَف من خلال بيان خاص.

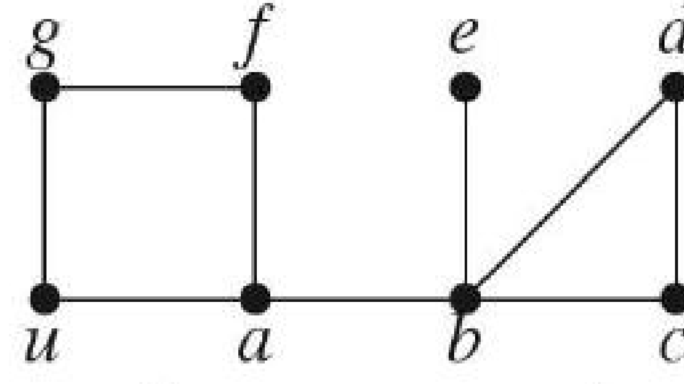
20.1.4. تعريف: يعرف بيان قالب النقطة الفاصلة للبيان G على أنه بيان ثنائي الفرع H؛ حيث تتألف إحدى مجموعتي رؤوسه من الرؤوس الفاصلة لـ G، في حين تحوي رأس المجموعة الثانية b_i لكل قالب B_i في G، علمًا بأن vb_i يكون ضلعًا في H إذا وفقط إذا كان $v \in B_i$.



إذا كان G مترابطًا فإن بيان قالب النقطة (النقاط) الفاصلة لـ G يكون شجرةً (التمرين 34)، حيث إن أوراقه هي قوالب G. وبناءً عليه، فإنَّ البيانَ G على افتراض أن G ليس قالبًا واحد فقط له قالبان (قوالب ورق) على الأقل، وكل منهما يحوي رأسًا قاطعًا واحدًا من رؤوس G.

يمكن إيجاد القوالب باستخدام طريقة تقنية للبحث عن البيانات. فمثلاً، بطريقة البحث بعمق (العمودي) أولاً (Depth – First Search) والذي نرمز إليه بالرمز (DFS)، نبدأ البحث دائمًا من أحدث رأس مكتشف والذي له أضلاع غير متحرًّى عنها بعد (غير مسبورة) (ويسمى هذا الطريق استرجاع الأثر أيضًا (back tracking). وبالمقارنة بخوارزمية 8.3.2. المتعلقة بطريقة البحث الأفقي (بالعرض) أولاً (Breadth – First search) (BFS)؛ حيث يبدأ فيها التحري من الرأس الأقدم. لذا، فإن الفرق بين DFS وBFS يتلخص في أننا نحافظ في الأولى على قائمة من الرؤوس التي تبحث على أساس أن العنصر الذي يدخل أخيرًا يخرج أولاً بدلاً من وضعها في طابور أو صف.

21.1.4. *مثال: في البيان أدناه عند تطبيق الـ (DFS) مرة واحدة بدءًا من u، نجد أن الرؤوس مرتبة على الصورة .u،a،b،c،d،e،f،g. ولكل من الـ BFS والـ DFS، يعتمد ترتيب اكتشاف العناصر على ترتيب التحري من خلال الأضلاع بدءًا من رأس معين. ■



لاحظ أن كلًا من طريقتي البحث الأفقية أولاً، أو العمودية أولاً بدءًا من u، تولد شجرة جذرها (قاعدتها) عند u. فكلما بدأنا البحث عند رأس x، نجد رأسًا آخر v، وعليه نضمن الضلع xv في بياننا، وهذا ينمو إلى شجرة تولد مركبة للبيان تحوي u. وتعتمد تطبيقات البحث العمودي أولاً على خاصية أساسية للشجرة المولدة الناتجة.

22.1.4. تمهيدية*. إذا كانت T شجرة مولدة لبيان مترابط G نامية من DFS بدءًا من u، فإن كل ضلع في $G-T$ يتكون من رأسين هما: w ،v، بحيث يقع v على المسار من u إلى w في T.

الإثبات: افترض أن vw ضلع في G، حيث نصادف v قبل w خلال استخدام طريقة البحث بعمق أولاً. وبما أن vw ضلع في G، فلا نستطيع إنهاء v قبل إضافة w إلى T. لذا، فإن w يظهر في مكان ما في الشجرة الجزئية المشكلة قبل إنهاء v. وكذلك، فإن المسار من w إلى u يحوي v. ■

23.1.4. *خوارزمية. (حساب القوالب لبيان)

المدخلات (input): بيان مترابط G (إن قوالب البيان هي قوالب مركبات يمكن إيجادها من خلال آلية البحث (DFS) لذا، نفترض أن G مترابط).

الفكرة (الخطة). استخدم الـ DFS لإيجاد الشجرة T للبيان G، وبحذف بعض الأجزاء من T عند تحديد القوالب، حافظ على رأس واحد يُدعى نشطًا .(Active)

البداية: إختر جذرًا x في .$V(H)$واجعل x نشطًا، وضع $T = \{x\}$.

التكرار: افترض أنَّ v الرأسُ النشطُ الحاليُّ.

1) إذا وقع على v ضلع غير مسبور (غير متحرى عنه) مثل vw، فإنه:

1A) إذا كان w لا ينتمي إلى $V(T)$، فأضف vw إلى T، علِّم vw على أنه تمّ التحرّي عنه، ثم اجعل w نشطًا.

1B) إذا كان w ينتمي إلى $V(T)$، فإن w يكون سلفًا (ancestor) لـ v. ضع علامة تشير إلى أنه تمّ التحرّي عن vw.

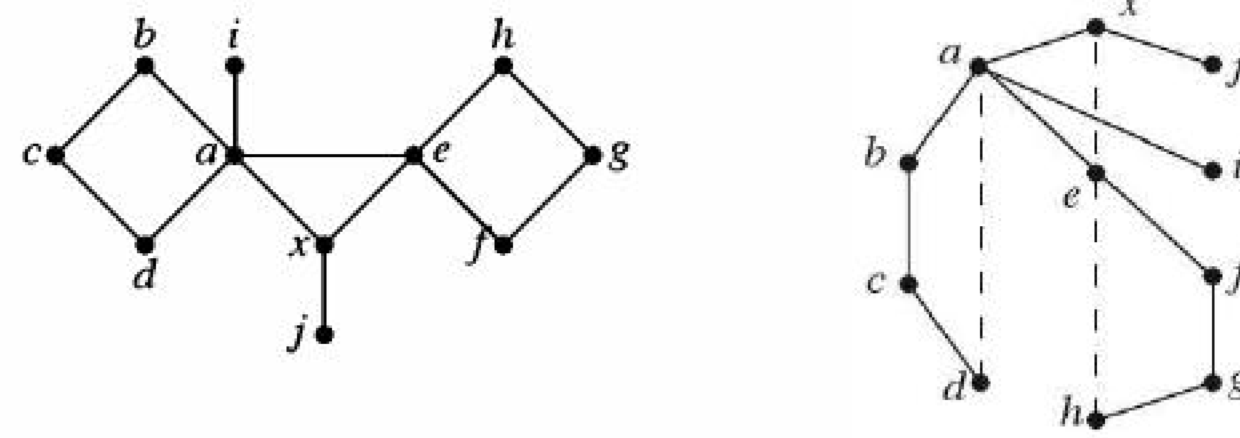
2) إذا كانت الأضلاع التي تقع على v مسبورة (تمّ التحري عنها)، فإن:

2A) إذا كان $v \neq x$، وأنَّ w والدُ v، اجعل w نشطًا. إذا لم يوجد أيُّ رأس في الشجرة الجزئية الحالية T' التي جذرها v بحيث يكون لهذا الرأس ضلع تمّ التحري عنه سابقًا في سلف فوق w، فإن $V(T') \cup \{w\}$ تمثل مجموعة رؤوس لقالب، سجِّل هذه المعلومات واحذف $V(T')$ من T.

2B) إذا كانت $v = x$، فقد انتهى الحلّ. ■

24.1.4. مثال: (**إيجاد القوالب**). في البيان أدناه، إذا كان العبور لرؤوس البيان من x عموديًّا مرة واحدة يمر بالرؤوس الأخرى بحسب الترتيب: a،b،c،d،e،f،g،h،i،j، نجد القوالب بحسب الترتيب: $\{a,b,c,d\}$, $\{e,f,g,h\}$, $\{a, i\}$, $\{x,a,e\}$, $\{x,j\}$ وبعد إيجاد هذه القوالب، نحذف الرؤوس المختلفة عن

الرأس الأعلى. (التمرين 36 يتطلب إثبات صحة العملية السابقة). ■



تمـــارين (Exercises)

1.1.4. (-) أثبت أو انقض كلًّا من العبارات الآتية:

a) إذا كان مقياس ترابط بيان معين يساوي 4، فإن هذا البيان يكون مترابطًا من الدرجة 2.
b) إذا كان البيان مترابطًا من الدرجة 3، فإن مقياس ترابطه يساوي 3.
c) إذا كانت درجة ترابط بيان تساوي k، فإن درجة ترابطه الضلعية تساوي k.
d) إذا كان البيان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة k، فإنه يكون مترابطًا من الدرجة k.

2.1.4. أعطِ مثالًا ناقضًا للعبارة الآتية، وأضف فرضيات لتصحيحها، ثم أثبت صحة العبارة المصححة: إذا كان e ضلعًا فاصلًا (cut-edge) لـ G، فإن أحد طرفيه على الأقل يكون رأسًا فاصلًا لـ G.

3.1.4. (-) افترض أن G بيان له أكثر من k من الرؤوس، وبحيث إن G ليس بيانًا تامًا. أثبت أنه إذا لم يكن G مترابطًا من الدرجة k، فإن هناك مجموعة فاصلة حجمها k-1 لهذا البيان.

4.1.4. (-) أثبت أن البيان G مترابط من الدرجة k إذا وفقط إذا كان $G \vee K_r$ (التعريف 6.3.3) مترابطًا من الدرجة $k + r$.

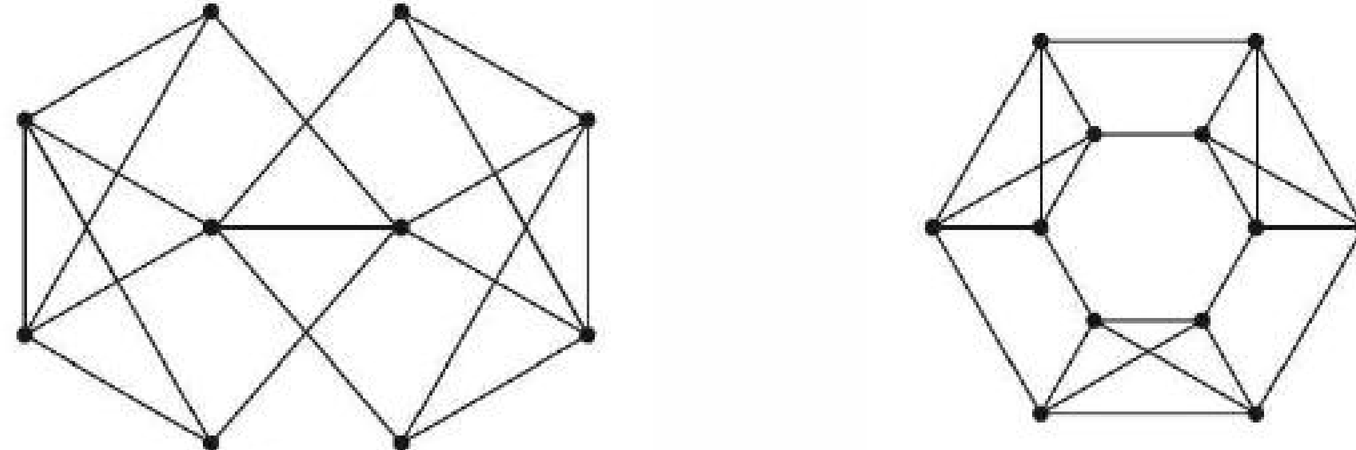
5.1.4. (-) افترض أن G بيان مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل، كوّن G' من G بإضافة الضلع xy عندما $d_G(x, y) = 2$، أثبت أن G' مترابط من الدرجة 2.

6.1.4. (-) افترض أن G بيان مترابط له قوالب $B_1, \ldots, B_r$. أثبت أنه يوجد للبيان G - $k + 1$ $\sum_{i=1}^{k} n(B_i)$ رأسًا بالضبط. أو (أثبت أن عدد رؤوس G يساوي $\left(\sum_{i=1}^{k} n(B_i) \right) - k + 1$).

7.1.4. (-) جد صيغة تعطي عدد الأشجار المولدة لبيان مترابط بدلالة الأشجار المولدة لقوالبه.

• • • • •

8.1.4. جد $\kappa(G),\ \kappa'(G),\ \delta(G)$ لكل من البيانين المرسومين أدناه (مساعدة: للبيان الموجود على اليسار، استخدم القضية 12.1.4 لتحديد مقدار ترابطه الضلعي).



9.1.4. لكلِّ خيارات الأعداد الصحيحة k، l،m، حيث $0<k\leq l\leq m$، ابنِ بيانًا بسيطًا G له $\kappa(G) = k$, $\kappa'(G)=l$ و$\delta(G)=m$ (chartrand – Harary [1968]).

10.1.4. (!) جد أصغر بيان بسيط منتظم من الدرجة الثالثة بحيث يكون مقدار ترابطه يساوي 1، وأثبت ذلك.

11.1.4. أثبت أن $\kappa(G) = \kappa'(G)$ عندما يكون G بيانًا بسيطًا له $\Delta(G)\leq 3$.

12.1.4. افترض أن k،n أعداد صحيحة موجبة، بحيث n عدد زوجي، و k عدد فردي، و$n > k > 1$. افترض أن G هو البيان البسيط المنتظم من الدرجة k المشكل بوضع n من الرؤوس على دائرة، وبجعل كل رأس يجاور (يرتبط بضلع) الرأس المضاد له على الدائرة بالإضافة إلى مجاورته لأقرب $(k-1)/2$ رأسًا في كلا الاتجاهين

على الدائرة، أثبت أن $\kappa(G) = k$ (Harary [1962a]).

13.1.4. في البيان $K_{m,n}$، اجعل S تتكون من a رأسًا من إحدى مجموعتي الرؤوس، و b رأسًا من المجموعة الثانية:

a) احسب $|[S,\overline{S}]|$ بدلالة a,b,m,n.

b) استخدم فرع a لإثبات أن: $\kappa'(K_{m,n}) = min\{m,n\}$ حسابيًا.

c) أثبت أن كل مجموعة تحوي سبعة أضلاع من $K_{3,3}$ تكون مجموعة فاصلة، ولكن لا توجد قاطعة ضلعية (edge cut) مؤلفة من سبعة أضلاع.

14.1.4. (!) ليكن G بيانًا مترابطا، بحيث توجد لكل ضلع e حلقتان هما: C_1 و C_2 تحتويان على e، وبحيث إن e الضلع الوحيد المشترك بينهما. أثبت أن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3، استخدم هذه النتيجة لإثبات أن بيان بيترسون مترابط ضلعيًّا من الدرجة الثالثة.

15.1.4. (!) استخدم القضية 12.1.4 والنظرية 11.1.4 لإثبات أن بيان بيترسون مترابط من الدرجة 3.

16.1.4. استخدم القضية 12.1.4 لإثبات وجود قاطعة ضلعية لبيان بيترسون حجمها m إذا وفقط إذا كان $3 \le m \le 12$. (مساعدة: افترض $|[S,\overline{S}]|$ حيث $(1 \le |S| \le 5)$.

17.1.4. أثبت أن حذف قاطعة ضلعية حجمها 3 من بيان بيترسون يعزل رأسًا.

18.1.4. افترض أن G بيان بسيط خال من المثلثات، حيث تساوي درجته الصغرى (أصغر درجة رأس من رؤوس G) 3 على الأقل. أثبت أنه إذا كانت $n(G) \le 11$، فإن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3. وأثبت كذلك أن هذه المتباينة حادة (sharp) بإيجاد بيان ثنائيّ الفرع منتظم من الدرجة الثالثة له 12 رأسًا بحيث لا يكون مترابطا ضلعيًّا من الدرجة 3. (Galvin).

19.1.4. أثبت أنه إذا كان G بيانًا بسيطًا بحيث $\delta(G) \ge n(G)$-2، فإن $k(G) = \delta(G)$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن لكل $n \ge 4$ وذلك ببناء بيان بسيط على n من الرؤوس، حيث درجته الصغرى n-3، ومقدار ترابطه أقل من n-3.

20.1.4. (!) افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، بحيث إن $n/2\text{-}1 \le \delta(G) \le n\text{-}2$، أثبت أن G مترابط من الدرجة k لكل k حيث $k \le 2\delta(G)+2\text{-}n$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن لكل $\delta \ge n/2\text{-}1$ وذلك من خلال بناء بيان بسيط على n من الرؤوس، درجته الصغرى δ بحيث لا يكون مترابطا من الدرجة k عندما $k = 2\delta+3\text{-}n$. (تعليق: القضية 15.3.1 حالة خاصة من هذا التمرين عندما $\delta(G) = (n\text{-}1)/2$.

21.1.4. (+) افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، حيث $n \ge k+1$ و $\delta(G) \ge \frac{n+L(k-2)}{L+1}$. أثبت أنه إذا كان G-S يحوي l مركبة، فإن $|S| \ge k$. أثبت أن الفرض على $\delta(G)$ هو أفضل ما يمكن عندما $n \ge k+l$، وذلك بإيجاد بيان مناسب على n من الرؤوس درجته الصغرى $\left\lfloor\frac{n+l(k-2)-1}{l+1}\right\rfloor$.. (تعليق: هذا تعميم لتمرين 20.1.4).

22.1.4. (!) الشروط الكافية لضمان بيان مترابط من الدرجة $k+1$. (Bondy [1969]):

a) افترض أن G بيان بسيط على n من الرؤوس، بحيث إن درجات رؤوسه هي $d_1 \le \ldots \le d_n$. أثبت أنه إذا كانت $d_j \ge j+k$ عندما $j \le n\text{-}1\text{-}d_{n-k}$، فإن G مترابط من الدرجة $k+1$. (تعليق: تمرين 64.3.1 هو الحالة الخاصة عندما $k=0$).

b) افترض أن $0 \le j + k \le n$. جد بيانًا G له n من الرؤوس، بحيث إن $\kappa(G) \le k$ وبحيث يكون لـ G j رأسًا درجة كلّ منها $j+k$-1، و n-j-k رأسًا درجة كلّ منها n-j-1، و k رأسًا درجة كلّ منها n - 1. بأيّ جانب يمكن افتراض هذا إثباتًا على أن النتيجة في فرع a هي أفضل ما يمكن؟

23.1.4. (!) افترض أن G بيان زوجي الرتبة مترابط من الدرجة r، بحيث إنَّ $K_{1,r+1}$ بيانٌ جزئي من G. أثبت أن لـ G معامل 1 (1-facter). (Summer [1974b])

24.1.4. (!) (شروط الدرجات لتكون $\kappa' = \delta$).

افترض أن G بيان بسيط على n من الرؤوس، استخدم النتيجة 13.1.4 أثبت العبارات الآتية:

a) إذا كانت $\delta(G) \ge \lfloor n/2 \rfloor$، فإن $\kappa'(G) = \delta(G)$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن بإيجاد بيان بسيط (لكل $n \ge 3$) على n من الرؤوس يحقق أن $\delta(G) = \lfloor 2/n \rfloor$-1 و $\kappa'(G) < \delta(G)$.

b) إذا كان $d(x) + d(y) \geq n\text{-}1$ عندما $x \nleftrightarrow y$، فإن $\kappa'(G)=\delta(G)$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن بإيجاد بيان G (لكل $n \geq 4$ ولكل $\delta(G)=m \leq n/2\text{-}1$) على n من الرؤوس بحيث إن $\kappa'(G) < \delta(G)=m$، وبحيث إن $d(x)+d(y) \geq n\text{-}2$ عندما $x \nleftrightarrow y$.

.25.1.4 (!) ($\kappa'(G) = \delta(G)$) عندما يساوي القطر 2).

افترض أن G بيان بسيط قطره 2، وأن $[S,\overline{S}]$، أصغر قاطعة ضلعية بحيث إن $|S| \leq |\overline{S}|$:

a) أثبت أن لكل رأس في S جوارًا في $\overline{S}$.

b) استخدم فرع (a) والنتيجة 13.1.4 لإثبات أن $\kappa'(G)=\delta(G)$. (Plesnik [1975])

.26.1.4(!) افترض أن F مجموعة جزئية من الأضلاع في بيان G. أثبت أن F قاطعة ضلعية إذا وفقط إذا كانت تحوي عددًا زوجيًّا من أضلاع كل حلقة في G. فعلى سبيل المثال، عندما $G = C_n$، فإن كل مجموعة زوجية من الأضلاع تشكل قاطعة ضلعية، ولا توجد أي مجموعة فردية تمثل قاطعة ضلعية (مساعدة: لإثبات الشرط الكافي؛ علينا أن نثبت أنه يمكن وضع مركبات F في مجموعتين، بحيث إن لكل ضلع في F نقطة طرفية في كلٍّ من المجموعتين).

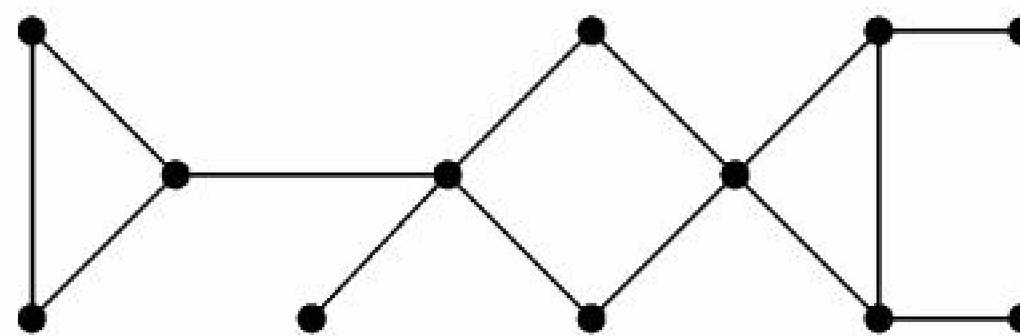
.27.1.4 (!) افترض أن $[S,\overline{S}]$، قاطعة ضلعية، أثبت على وجود مجموعة روابط منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا، بحيث إن اتحادها (بوصفها مجموعة أضلاع) يساوي $[S,\overline{S}]$، (لاحظ أن هذا بديهي عندما تكون $[S,\overline{S}]$، نفسها رابطة.

.28.1.4 (!) أثبت أن الفرق التماثلي لقاطعتين ضلعيتين يعطي قاطعة ضلعية. (مساعدة: ارسم صورة توضح قاطعتين ضلعيتين واستخدمها كدليل لإثبات).

.29.1.4 (!) إذا كان H بيانًا جزئيًّا مولدًا لبيان مترابط G، فأثبت أن H يمثل شجرة مولدة للبيان G إذا وفقط إذا كان $H^* = G - E(H)$ لا يحوي أي رابطة من G، وإضافة أي ضلع لـ H يُحدِث بيانًا جزئيًّا من G يحوي رابطة من G.

.30.1.4 (-) افترض أن G بيان بسيط، رؤوسه؛ $\{1,2,\ldots,11\}$ حيث $i \leftrightarrow j$ إذا وفقط إذا كان لـ i و j عامل مشترك أكبر من 1. حدد قوالب G.

.31.1.4 نعرف الصّبار أو الصّبيرة (cactus) على أنه بيان مترابط، كل قالب فيه هو ضلع أو حلقة (موضح أدناه). أثبت أن أكبر عدد ممكن من الأضلاع لصبّار على n من الرؤوس هو $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ (مساعدة: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$).



.32.1.4 أثبت أن درجة كل رأس من رؤوس بيان تكون زوجية إذا وفقط إذا كان كلّ قالب فيه أويلريًا.

.33.1.4 افترض أن G بيان مترابط، أثبت أنه مترابط ضلعيًّا من الدرجة k إذا وفقط إذا كان كلّ قالب فيه مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة k.

.34.1.4 (!) بيان قالب النقطة الفاصلة (انظر التعريف 20.1.4). افترض أن H بيان قالب النقطة الفاصلة لبيان G الذي له رأس فاصل ((Harary – prins [1966]):

a) أثبت أن H غابة.

b) أثبت أنه يوجد لـ G قالبان على الأقل، كل منهما يحوي رأسًا فاصلًا واحدًا له.

c) أثبت أنه إذا كان للبيان G k مركبة، فإن G يحوي $k + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1)$ حيث $b(v)$ عدد القوالب التي تحوي v.

d) أثبت أن عدد الرؤوس القاطعة لبيان معين أقل من عدد القوالب لهذا البيان.

.35.1.4 افترض أن H و H' بيانان جزئيان من البيان G، بحيث إنهما كبيران مترابطان من الدرجة k. أثبت أنهما يشتركان في k-1 رأسًا على الأكثر. ((Harary – Kodama . [1964])

36.1.4. أثبت أن الخوارزمية 23.1.4 تحسب بدقة عدد قوالب أي بيان.

37.1.4. طوِّرْ خوارزمية لحساب المركبات القوية لبيان موجه، وأثبت أن خوارزميتك تعمل. (مساعدة: اعمل نموذجًا لهذه الخوارزمية معتمدًا على الخوارزمية .23.1.4).

2.4. البيانات المترابطة من الدرجة k (k-connected Graphs)

تعدُّ شبكةُ الاتصالات قادرةً على تحمّل الأعطال إذا وُجد لها مسارات بديلة بين الرؤوس، وكلما زاد عدد المسارات المنفصلة، كانت الشبكة أفضل. وفي هذا الجزء من الفصل، سنثبت أن هذا القياس البديل للترابط هو مفهوم الترابط من الدرجة k نفسه.

عندما $k = 1$، فإن التعريف يقول: إن البيان G مترابط من الدرجة 1 إذا وفقط إذا كان كلّ زوج من الرؤوس يرتبط من خلال مسار. وكلما زادت قيمة k، كان هذا التكافؤ دقيقًا أكثر.

البيانات المترابطة من الدرجة 2 (2-connected Graphs)

سنبدأ بتوصيف البيانات المترابطة من الدرجة 2.

1.2.4. تعريف: كلُّ مسارين من u إلى v **منفصلان داخليًا** إذا لم يوجد رأس داخلي مشترك بينهما.

2.2.4. نظرية: .(Whitney [1932a])

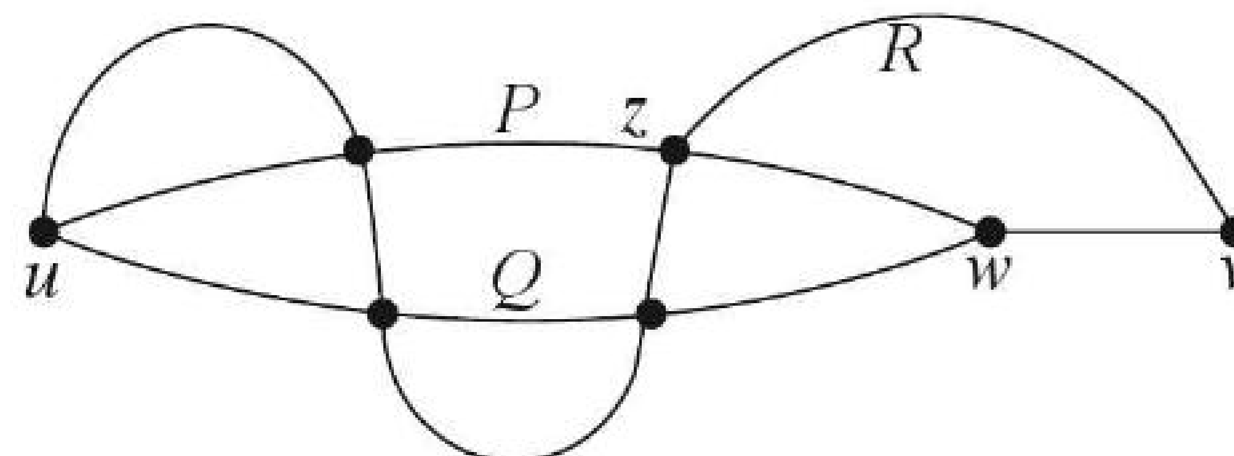
افترض أن G بيان له ثلاثة رؤوس على الأقل. أثبت أن G مترابط من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجد لكل رأسين u،v من رؤوسه مسارات داخلية منفصلة تربط بين هذين الرأسين.

الإثبات: الكفاية: افترض وجود مسارات منفصلة داخليًا تربط بين أي رأسين u،v من رؤوس البيان G. لذا، فإن حذف أي رأس لا يفصل u عن v، وبما أن هذا الشرط متحقق لكل رأسين من رؤوس G، فإن حذف رأس من رؤوس G لا يؤثر في وصولنا من أي رأس إلى أي رأس آخر، لذا نستنتج أن G مترابط من الدرجة 2.

الضرورة: افترض أن G مترابط من الدرجة 2، سنثبت بالاستقراء على $d(u,v)$ بأن G تحوي مسارات منفصلة داخليًا من u إلى v.

الخطوة الأساس: $(d(u,v)=1)$. عندما $d(u,v)=1$، فإن البيان $G\text{-}uv$ مترابط. وبما أن $\kappa'(G) \geq \kappa(G) \geq 2$، فإن مسارًا من u إلى v في $G - uv$ يكون منفصلاً داخليًا عن المسار من u إلى v المشكل من الضلع uv نفسه.

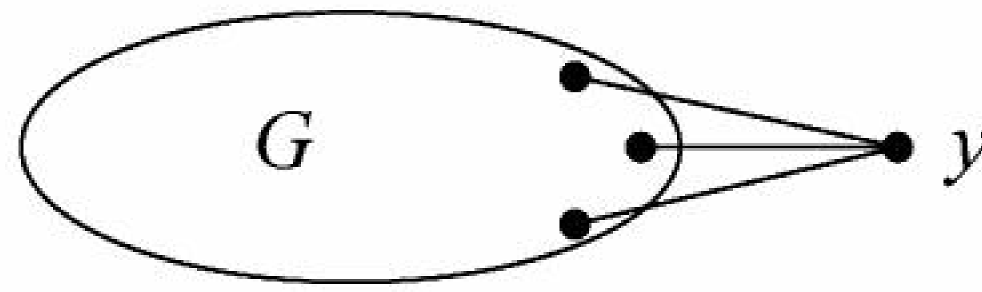
خطوة الاستقراء: $(d(u,v) > 1)$. افترض أن $k = d(u,v)$، وافترض كذلك أنّ w الرأسُ الذي يأتي قبل v مباشرة في أقصر مسار من u إلى v. لذا، فإن $d(u, w) = k - 1$. وباستخدام فرضيات الاستقراء، يوجد مساران P و Q منفصلان داخليًا من u إلى w. إذا كان $v \in V(P) \cup V(Q)$ فإننا نجد المسار المطلوب في الحلقة $P \cup Q$. لذا، افترض أن $v \notin V(P) \cup V(G)$. بما أن درجة ترابط G تساوي 2، فإن $G\text{-}w$ مترابط، ويحوي مسارًا R من u إلى v. إذا كان $R \cup P = \phi$ أو $R \cap Q = \phi$ ، فإننا نحصل على المطلوب. ولكن يمكن للمسار R أن يشترك برؤوس داخلية مع كل من P و Q. افترض أن z هو آخر رأس في R قبل v بحيث إن $z \in P \cup Q$ ، ومن التماثل، يمكننا أن نفترض أن $z \in P$. اربط المسار الجزئي u،z من P مع المسار الجزئي z،v من R لتحصل على مسار من u إلى v منفصل داخليًا عن $Q \cup wv$. ■



3.2.4. تمهيدية. (تمهيدية توسيع (تمدّد)).

إذا كان G بيانًا مترابطًا من الدرجة k، وتمّ الحصول على G' من G بإضافة رأس جديد y له على الأقل k جارًا في G، فإن G' يكون مترابطًا من الدرجة k.

الإثبات: سنثبت أنه إذا كانت S مجموعة فاصلة لـ G' ، فإن حجم S يساوي k على الأقل. وإذا كانت $y \in S$، فإن $S - \{y\}$ تفصل G. لذا، فإن $|S| \geq k + 1$. إذا كان $y \notin S$، وكان $N(y) \subseteq S$ فإن $|S| \geq k$. وبعكس ذلك، فإن كلًّا من y و $N(y) - S$ تقع في مركبة واحدة لـ $G' - S$. لذا، فإن S يجب أن تفصل G، وأن $|S| \geq k$. ■



4.2.4. نظرية: إذا كان G بيانًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، فإن الشروط الآتية متكافئة: (وتعطي وصفًا تمييزيًّا للبيانات المترابطة من الدرجة 2)

A) G مترابط ولا يحوي رأسًا قاطعًا.

B) لكل $x, y \in V(G)$ توجد مسارات منفصلة داخلية تربط بين x،y.

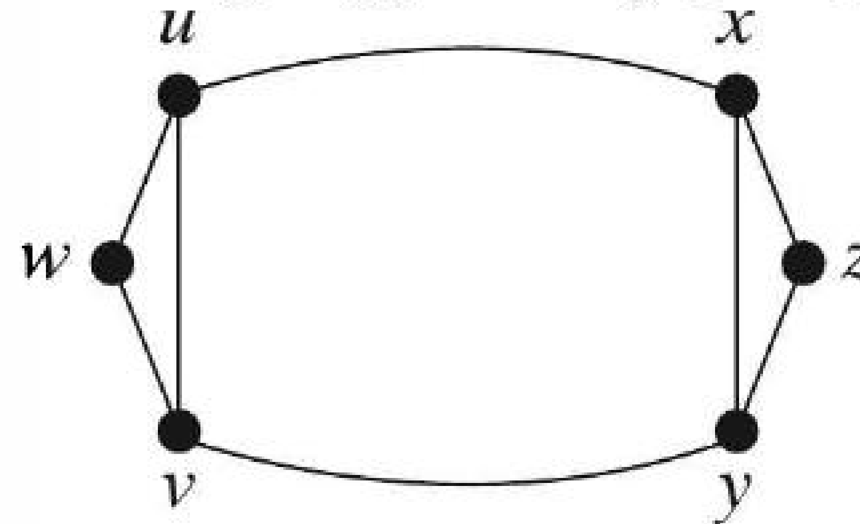
C) لكل $x, y \in V(G)$، توجد حلقة تمر بـ x و y.

D) $\delta(G) \geq 1$، وكل زوج من أضلاع G يقع في حلقة واحدة.

الإثبات: تعطي النظرية 4.2.2 التكافؤ $A \longleftrightarrow B$ ، $B \longleftrightarrow C$، لاحظ أن الحلقات التي تحوي x و y ترتبط بأزواج منفصلة داخليًّا من المسارات بين x،y.

$D \Rightarrow C$: الشرط $\delta(G) \geq 1$ يضمن أن الرأسين x و y غير معزولين. وبهذا، نطبق الجزء الأخير من D على الأضلاع التي تقع على الرأسين x و y. إذا وُجد ضلع واحد فقط من هذا النوع، فسنستخدمه بالإضافة إلى أي ضلع آخر يرتبط برأس ثالث.

لإتمام الإثبات؛ نفترض أن G يحقق الشرطين المتكافئين A و C، ثم نحصل على D. وبما أن G مترابط، فإن $\delta(G) \geq 1$. الآن، خذ في الحسبان الضلعين uv و xy، أضف إلى G الرأسين w و z حيث $\{u,v\}$ جوار لـ w، و $\{x,y\}$ جوار لـ z. وبما أن G مترابط من الدرجة 2، فإن تمهيدية التوسيع (3.2.4) تضمن أن البيان الناتج عن الإضافة G' مترابط من الدرجة 2. لذا، فإن الشرط C يتحقق في G'. وبناءً عليه، فإن z و w يقعان في حلقة C في G'. وبما أن درجة كل من z و w تساوي 2، فإن C تحوي المسارات u,w,v و x,z,y ولا يحوي الضلعين uv أو xy. استبدل بالمسارات u,w,v و x, z,y في C الضلعين uv و xy للحصول على الحلقة المطلوبة التي تمر بـ uv و xy في G. ■



5.2.4. تعريف: إذا كان uv ضلعًا في بيان G، فإن عملية استبدال الضلع uv تسمى المسار u,w,v (w رأس جديد) بقسمة (تقسيم) الضلع uv.



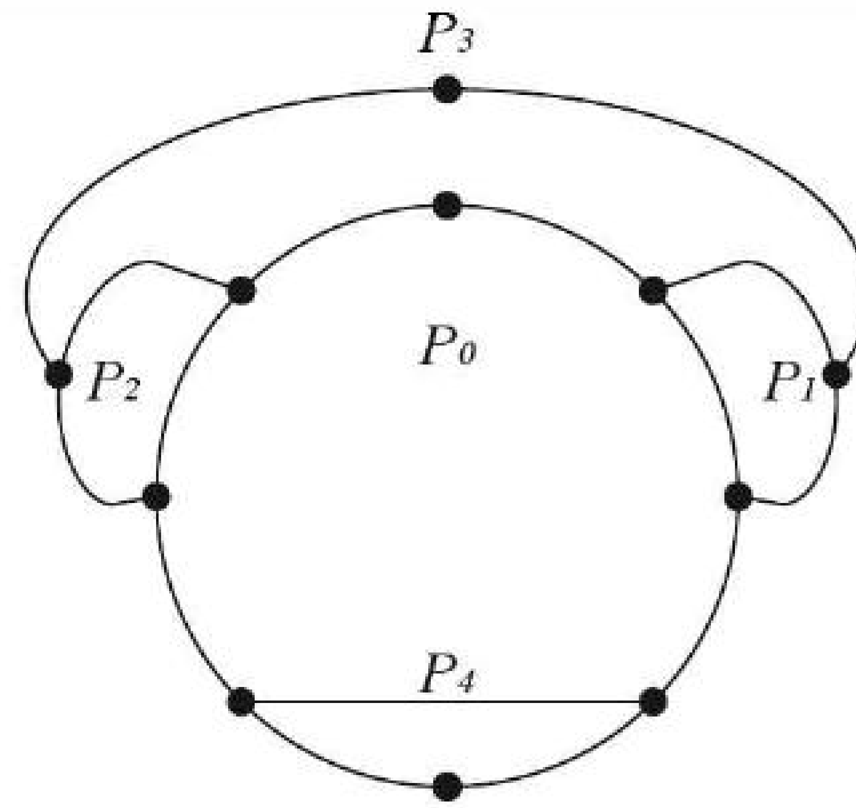
6.2.4. النتيجة: إذا كان G مترابطًا من الدرجة 2، فإن البيان G' الناتج عن قسمة أحد أضلاع G يكون مترابطًا من الدرجة 2.

الإثبات: افترض أننا حصلنا على G' من G بإضافة الرأس w لقسمة الضلع uv. لإثبات أن G' مترابط من الدرجة 2؛ يكفي أن نجد حلقة تمر بضلعين اختياريين e،f. من G' (النظرية 4D.2.4).

بما أن G مترابط من الدرجة 2، فإن أي ضلعين من G يقعان في حلقة مشتركة (النظرية 4D.2.4). عندما يقع الضلعان e،f من أضلاع G' في G، فإن الحلقة التي يقعان فيها تكون حلقة في G' أيضًا، إلا إذا كان الضلع uv ضلعًا في هذه الحلقة؛ ففي هذه الحالة، نعدّل الحلقة بأن يحل محل الضلع uv مسار من u إلى v طوله 2 يمرّ من خلال w. عندما $e \in E(G)$ و $f \in \{uw,wv\}$، فإننا نعدل الحلقة التي تمرُّ خلال e وuv في G، وعندما $\{e,f\}=\{uw,wv\}$، فإننا نعدل حلقة تمرُّ خلال uv. ■

تتمتع البيانات المترابطة من الدرجة 2 بصفة مميزة تعبِّر عن بناء كلٍّ من هذه البيانات من حلقة ومسارات.

7.2.4. تعريف: نعرِّف أُذن (أو مقبض) (ear) البيان G على أنه مسار في G محتوى في حلقة، بحيث يكون أكبر ما يمكن من حيث عدد الرؤوس الداخلية التي درجتها 2 في G. ونقصد بالتفكيك المقبضي للبيان G، على أنه تَفكيك على الشكل P_k،...،P_0، حيث P_0 حلقة، وP_i $(i \geq 1)$ مِقبض أو أُذن لـ $P_o \cup \ldots \cup P_i$.



8.2.4. نظرية (Whitney [1932a])

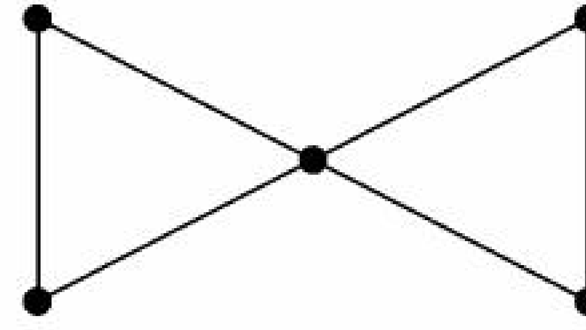
يكون البيان مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجِدَ له تفكيك مقبضي. بالإضافة إلى ذلك، فإن كلَّ حلقة في بيان مترابط من الدرجة 2 تمثّل أول حلقة (حلقة البدء) لتحليل (تفكيك) مقبضي.

الإثبات: الكفاية: بما أنّ أيّ حلقة هي بيان مترابط من الدرجة 2، فيكفي أثبت أن إضافة مقبض تحافظ على الترابط من الدرجة 2. افترض أنّ u،v النقطتان الطرفيتان للمقبض P الذي سيضاف إلى بيان G مترابط من الدرجة 2. لاحظ أن إضافة ضلع لا تنقص مقدار الترابط. لذا، فإن $G+uv$ يبقى مترابطًا من الدرجة 2. إن إجراء عمليات قسمة ضلع يحول $G + uv$ إلى البيان $G \cup P$ حيث P مقبض (أذن). لذا، وباستخدام النتيجة 6.2.4، فإن كلّ قسمة ضلع تحافظ على الترابط من الدرجة 2.

الضرورة: إذا أُعطينا بيان G مترابطًا من الدرجة 2، فإننا نبني (نجد) له تحليلاً مقبضيًّا من حلقة C في G. افترض أن $G_0=C$، اجعل G_i يمثّل البيان الجزئي الذي تحصل عليه بإضافة i من المقابض بالتتابع. إذا كان $G_i \neq G$، فنختار ضلع $uv \in G\text{-}E(G_i)$ وضلع xy في $E(G_i)$ وبما أن G مترابط من الدرجة 2، إذن توجد حلقة C' تحوي كلًّا من uv و xy.

افترض أنَّ P المسارُ في C' الذي يحوي uv، ويحوي رأسين فقط من G_i؛ واحد عند كل طرف من طرفي P. الآن، نستطيع إضافة P إلى G_i للحصول على بيان جزئي أكبر G_{i+1} والذي يمثل P فيه مقبضًا، وتنتهي هذه العملية فقط عندما نحصل على G كله. ■

نعلم أن كل بيان مترابط من الدرجة 2 يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2، ونعلم كذلك أن عكس هذه العبارة غير صحيح. تذكر أن شكل الفراشة (فراشي الشكل) (bowtie) هو البيان الذي يتألف من مثلثين مشتركين في رأس واحد فقط. إن هذا البيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، ولكنه غير مترابط من الدرجة 2. وبما أن الكثير من البيانات تكون مترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2، فإن تحليل هذا النوع من البيانات يحتاج إلى عملية أعمّ من السابق. إن إثبات هذا يشبه إثبات النظرية 8.2.4



9.2.4. تعريف: نُعرِّف المقبض (الأذن المغلقة) المغلق في بيان G على أنه حلقة C، بحيث إن الرؤوس في C جميعها ما عدا واحدًا تكون ثنائية الدرجة. ويعرِّف تحليل المقابض المغلقة لبيان G على أنه تحليل على الشكل $P_k,...,P_0$، حيث P_o حلقة، و P_i $(i > 1)$ إما مقبض (مفتوح) أو مقبض مغلق في $P_o \cup \ ... \ \cup P_i$

10.2.4. نظرية: يكون البيان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجِدَ له تحليل مقبضي مغلق. وكل حلقة في البيان المترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 تكون أول حلقة (حلقة البداية) لتحليل من هذا النوع.

الإثبات: الكفاية: تذكر (النظرية 1.2.14) أنَّ الأضلاعَ الفاصلة أضلاعٌ غير موجودة في حلقات. لذا، فإن البيان المترابط يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا كان كل ضلع من أضلاعه يقع في حلقة. وأن حلقة البداية مترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2. عندما نضيف مقبضًا مغلقًا، فإن أضلاعه تشكل حلقة. وعندما نضيف مقبضًا مفتوحًا P لبيان مترابط G، فإن مسارًا في G يربط بين أطراف P يكمل (يتم) حلقة تحوي أضلاع P كلّها. وفي الحالات جميعها فإن البيان الناتج يكون مترابطًا. لذا، فإن إضافة مقبض مفتوح أو مغلق تحافظ على الترابط الضلعي من الدرجة 2.

الضرورة: إذا أُعطينا بيان G مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2. افترض أن P_o حلقة في G، اجعل $P_o, \ldots, P_i$ تحليلًا مقبضيًّا مغلقًا لبيان جزئي G_i من G. إذا كانت $G_i \neq G$، فباستطاعتنا إضافة مقبض لـ G_i. وبما أن G مترابط، إذن يوجد ضلع $uv \in E(G) - E(G_i)$ حيث $u \in V(G_i)$. وبما أن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، فإن uv يقع في حلقة C. تتبع C حتى تعود إلى $V(G_i)$. وبهذا نكون قد شكّلنا لغاية الآن إما مسارًا أو حلقة P. وبإضافة P إلى G_i، فإننا نحصل على بيان جزئي G_{i+1} أكبر من G_i يشكّل فيه P مقبضًا مفتوحًا أو مغلقًا. ولا بدّ لهذه العملية أن تنتهي بحصولنا على G كله. ∎

ترابط البيانات الموجهة (Connectivity of Digraphs)

تنطبق النتائج التي حصلنا عليها والمتعلقة بالبيانات المترابطة والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة k على البيانات الموجهة المترابطة والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة k، حيث نستخدم مصطلحات مشابهة أو مماثلة للتي استُخدمت في حال البيانات.

11.2.4. تعريف: تعرّف المجموعة الفاصلة أو قاطعة الرؤوس لبيان موجه D على أنها مجموعة جزئية S من $V(D)$، بحيث إن $D\text{-}S$ غير مترابط بقوة. ويعرّف مقدار الترابط $\kappa(D)$ على أنه أصغر حجم لمجموعة رؤوس S، بحيث إن $D\text{-}S$ غير قوي أو له رأس واحد فقط. ونقول: إن البيان الموجه D مترابط من الدرجة k إذا كان مقدار ترابطه يساوي k على الأقل.

إذا كانت كلٌّ من S و T مجموعتي رؤوس في بيان موجه D، فاجعل $[S,T]$ تمثل مجموعة الأضلاع التي ذيل كلّ منها في S، ورأس كلّ منها في T. نقصد بالقاطعة الضلعية المجموعة $[S,\bar{S}]$، حيث $S \neq \phi$ و $S \subset V(D)$. ونقول: إن البيان الموجه D مترابط ضلعيًّا من الدرجة k إذا وُجد k من الأضلاع في كل قاطعة ضلعية على الأقل. يُسمّى أقلّ حجم لقاطعة ضلعية مقدارَ الترابط الضلعي ويُرمز إليه بالرمز $\kappa'(D)$.

12.2.4. ملاحظة : بما أن $|[S,\bar{S}]|$، عددُ الأضلاع الخارجة (المغادرة) من S، فإننا نستطيع إعادة تعريف الترابط الضلعي على الصورة الآتية:

نقول: إن البيان أو البيان الموجه G مترابط ضلعيًّا من الدرجة k إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: لكل مجموعة جزئية فعلاً S من $V(G)$ يوجد على الأقل k من أضلاع G المغادرة لـ S (الخارجة من S).

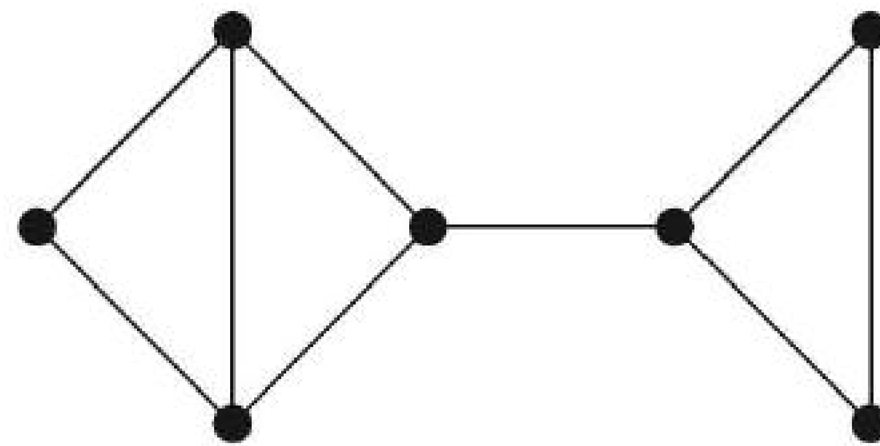
لاحظ أن $[S,T]$ هي مجموعة الأضلاع من S إلى T. يعتمد معنى هذا الرمز على G من حيث إنّه بيان أو بيان موجّه؛ ففي حالة البيان، يكون الحديث عن الأضلاع التي نقاطها الطرفية في كلتا المجموعتين. أما في حال البيان الموجه فيكون الحديث عن الأضلاع التي رؤوسها في S وذيولها في T. ■

تنويه: تشبه البياناتُ الموجهةُ القويةُ البياناتِ المترابطةَ ضلعيًّا من الدرجة 2.

13.2.4. قضية : إن إضافة مقبض (موجه) إلى بيان موجّه قوي (مترابط بقوة) تعطي بيانًا موجهًا أكبر.

الإثبات : نعلم من الملاحظة 12.2.4 أن البيان الموجّه يكون قويًّا إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: يوجد ضلع مغادر لكل مجموعة جزئية فعلاً من الرؤوس. إذا أضفنا مقبضًا مفتوحًا (مغلقًا) P إلى بيان موجّه قوي D، فإنه يوجد لكل مجموعة S حيث $\phi \subset S \subset V(D)$ ضلعًا من S إلى $V(D)$-S. لذا، يجب علينا فقط معالجة المجموعات التي لا تتقاطع مع $V(D)$ والمجموعات التي تحوي $V(D)$ كلها، ولكنها لا تحوي $V(P)$ كلها. يوجد ضلع لكلّ مجموعة من هذه المجموعات يغادرها من خلال P. ■

السؤال المطروح الآن: متى نستطيع عمل شبكةٍ من الطرق بحيث تكون جميعها في اتجاه واحد، وبحيث يمكن الوصول من أي مكان إلى أي مكان آخر؟ وبكلمات أخرى: متى يكون للبيان الموجه توجيهٌ قويٌّ؟ لاحظ أنه لا يوجد توجيه قوي للبيان أدناه. ولاحظ أيضًا أن الشروط الضرورية هي نفسها كافية للإجابة عن سؤالنا.



14.2.4. نظرية : (Robbins [1939]).

يوجد للبيان توجيه قوي إذا وفقط إذا كان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2.

الإثبات : الضرورة: إذا كان البيان G غير مترابط، فهناك بعض الرؤوس التي لا يمكن الوصول إليها من رؤوس أخرى مهما كان التوجيه المستخدم.

إذا وُجد للبيان G ضلع فاصل (قاطع) xy موجه من x إلى y ضمن توجيه D، فإنه لا يمكن الوصول إلى x من y ضمن D. لذا، يجب أن يكون G مترابطًا، وليس له ضلع قاطع.

الكفاية: عندما يكون G مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2، فيوجد له تفكيك مقبضي مغلق. لذا، نعطي توجيهًا متناسقًا لأول حلقة للحصول على بيان موجه قوي. وكلما أضفنا مقبضًا جديدًا، فإننا نوجهه بتناسق. لذا، فإن القضية 13.2.4 تضمن استمرارية حصولنا على بيان موجه قوي. ■

يمكن تعميم نظرية روبن Robbin لأي k. عندما يكون لـ G توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة k، فإن الملاحظة 12.2.4 تضمن أن G يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $2k$. لقد أثبت العالمان ناش وولياماز في العام 1960م أن الشرط الضروري كاف أيضًا. يكون للبيان توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة k إذا وفقط إذا كان البيان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $2k$. ويعدّ هذا سهلاً عندما يكون G بيانًا أويلريًّا (التمرين 21)، ولكن الحالة العامة صعبة (التمارين 36-38). توجد مناقشة شاملة لهذه المسألة بالإضافة إلى بعض مسائل التوجيهات الأخرى في كتاب (Frank [1993]).

البيانات المترابطة من الدرجة k والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة k (K-connected and k-edge-Connected Graphs)

لقد قدمنا مقياسين للربط الجيد، هما: المناعة ضد الحذف، وتكرار المسارات البديلة. وبتعميم (تمديد) نظرية وتني (whitney›s)؛ سنثبت أن هاتين الميزتين هما الشيء نفسه بالنسبة إلى حذف كلٍّ من الرؤوس والأضلاع، ويشترك في ذلك البيانات والبيانات الموجهة أيضًا.

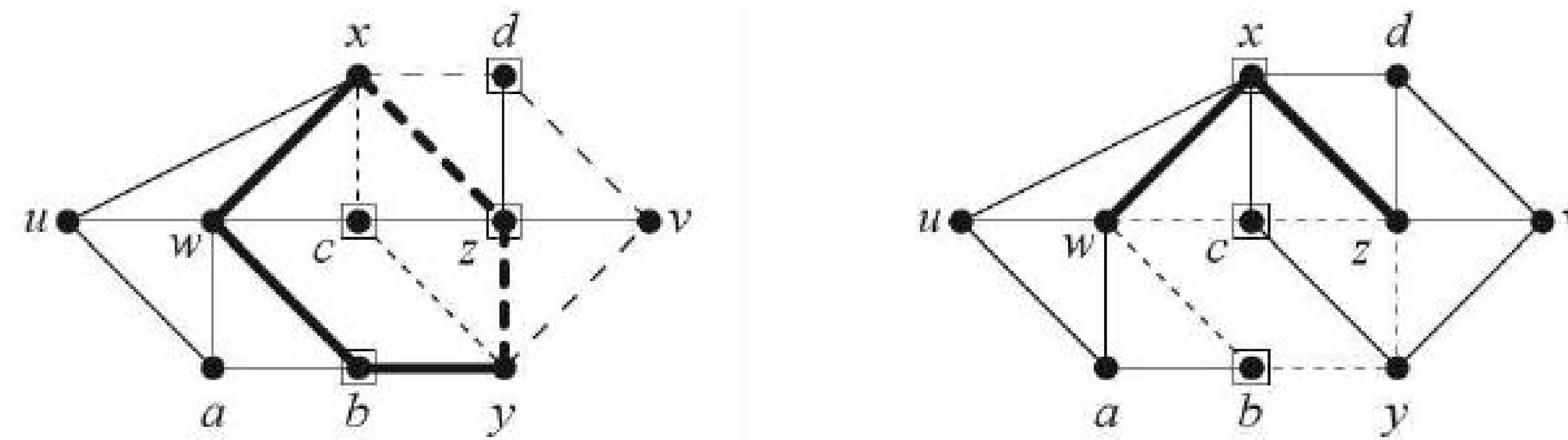
أولاً، سيناقش (موضعيًّا) مسألة المسارات من x إلى y لزوج ثابت x و y في $V(G)$. إن هذه التعريفات صحيحة لكلٍّ من البيانات والبيانات الموجهة.

15.2.4. تعريف: لتكن $x,y \in V(G)$ نقول: إن المجموعة S المحتواة في $V(G)-\{x,y\}$ فاصل للمسار x,y، أو قاطع للمسار x,y إذا كان $G\text{-}S$ يخلو من المسارات من x إلى y. اجعل $\kappa(x,y)$ تمثل أصغر حجم لقواطع المسار x,y. واجعل $\lambda(x,y)$ تمثل أكبر حجم لمجموعة منفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا من المسارات من x إلى y. لتكن $X.Y \subseteq V(G)$. نقصد بالمسار X,Y المسار الذي رأسه الأول في X، ورأسه الأخير في Y، وليس له أيّ رؤوس أخرى في $X \cup Y$.

بما أن أي قاطع للمسار x,y يحوي رأسًا داخليًّا لكل مسار من x إلى y، ولا يوجد أي رأس يستطيع فصل أي مسارين منفصلين داخليًّا من x إلى y، فإن $\kappa(x,y) \geq \lambda(x,y)$ دائمًا.

لذا، فإن مسألة إيجاد أصغر قاطع، ومسألة إيجاد أكبر مجموعة مسارات هي مسائل ثنوية (ازدواجية) (dual problems). مثل الثنوية (الازدواجية) بين المواءمة(matching) والتغطية(*Covering*) في الفصل الثالث.

16.2.4. مثال: في البيان G المرسوم أدناه، لاحظ أن المجموعة $S=\{b,c,z,d\}$ عبارة عن قاطع للمسار x,y حجمه 4. لذا، فإن $\kappa(x,y) \leq 4$. وكما يظهر من الشكل على اليسار، يوجد للبيان G أربعة مسارات منفصلة داخليًّا من x إلى y. لذا، فإن $\lambda(x,y) \geq 4$. وبما أن $\kappa(x,y) \geq \lambda(x,y)$ دائمًا، فإن $\kappa(x,y) = \lambda(x,y) = 4$.



افترض الزوج w,z، كما يظهر عن اليمين، $k(w,z) = \lambda(w,z) = 3$، لاحظ أن $\{b,c,x\}$ تمثل قاطعًا أصغر للمسار w، z. إن البيان G مترابط من الدرجة 3. لذا، فلكل زوج $u,v \in V(G)$، نستطيع إيجاد ثلاثة مسارات منفصلة داخليًّا من u إلى v.

ومن المساواة للمسارات المنفصلة داخليًّا، نستطيع الحصول على مساواة للمسارات المنفصلة ضلعيًّا. لاحظ أنه على الرغم من أن $\kappa(w,z)=3$ أعلاه، إلا أنه يلزمنا أربعة أضلاع لفصل المسارات من w جميعها إلى z، وكذلك يوجد 4 مسارات من w إلى z منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. ■

تفيد نظرية منجر (Menger's Theorem) أن المساواة $\kappa(x,y) = \lambda(x,y)$ تتحقق موضعيًا دائمًا. إن المسألة الكلية المتعلقة بمقدار الترابط والنتائج المماثلة المتعلقة بمقدار الترابط الضلعي والمتعلقة بالبيانات الموجهة قد نوقشت من قبل آخرين، ولكن هذه النقاشات والنظريات جميعها كانت دائمًا صورة من صور نظرية منجر؛ حيث ظهر أكثر من خمسة عشر إثباتًا لهذه النظرية؛ بعضها أعطى نتائج أقوى، في حين كان بعضها الآخر غير صحيح. (لقد عالج (كونج) könig الفجوة الموجودة في النظرية الأصلية لمنجر).

17.2.4. نظرية منجر. (Menger [1927]) إذا كان x ،y رأسين من رؤوس البيان G، بحيث إن $xy \notin E(G)$ فإن أصغر حجم لقاطع من قواطع المسار x, y يساوي أكبر عدد من المسارات من x إلى y بحيث تكون هذه المسارات منفصلة داخليًا زوجًا زوجًا.

الإثبات: يجب أن يحوي أي قاطع للمسارات x, y رأسًا داخليًا من كل مسار من مجموعة المسارات x, y المنفصلة داخليًا زوجًا زوجًا، ويجب أن تكون هذه الرؤوس مختلفة. لذا، فإن $\kappa(x,y) \geq \lambda(x,y)$.

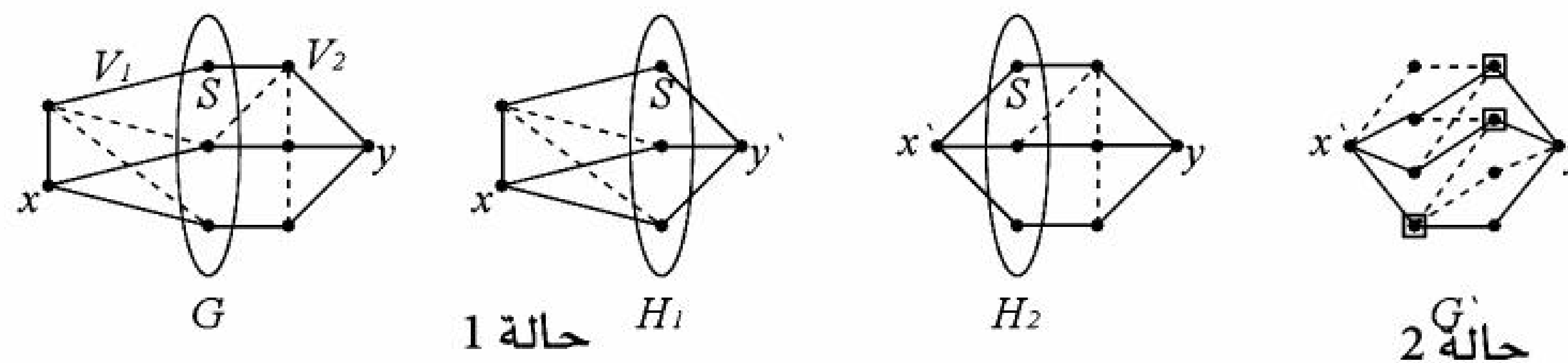
لإثبات المساواة؛ نستخدم الاستقراء على $n(G)$. الخطوة الأساس: $n(G)=2$ هنا $xy \notin E(G)$ تعطي $\kappa(x,y)=\lambda(x,y)=0$.

خطوة الاستقراء: $n(G) > 2$. افترض أن $k = \kappa_G(x,y)$. سنبني k مسارًا من x إلى y بحيث تكون هذه المسارات منفصلة داخليًا زوجًا زوجًا. وبما أن $N(x)$ و $N(y)$ تمثل قواطع للمسارات x،y، فلا يوجد قاطع أصغر يحوي $N(x)$, $N(y)$ بوصفها مجموعات جزئية فعلية.

الحالة الأولى: يوجد للمسارات x،y في G قاطع أصغر S مختلف عن $N(x)$ و $N(y)$. وللحصول على k مسارًا المطلوبة؛ نضم المسارات x،S إلى المسارات S،y التي نحصل عليهما من فرضية الاستقراء (الخطوط المتصلة في الشكل أدناه). افترض أنَّ V_1 الرؤوسُ الموجودةُ على المسارات x،S، و V_2 هي الرؤوس الموجودة على المسارات S،y. الآن، ندعي أن $S=V_1 \cap V_2$. وبما أن S قاطع أصغر للمسارات x،y، فإن كل رأس في S يقع على مسار من x إلى y. لذا، فإن $S \subseteq V_1 \cap V_2$. إذا كانت $v\in(V_1 \cap V_2)$ - S، فتتبع الجزء x،v من أحد المسارين x،S، ومن ثم تتبع الجزء v،y لأحد المسارين S،y لتحصل على مسار من x،y لا يتقاطع مع القاطع S للمسارين x،y. إن هذا مستحيل. لذا، فإن $S=V_1 \cap V_2$. وبطريقة التعليل نفسها، نجد أن V_1 تحذف $N(y)$-S، أما V_2 فتحذف $N(x)$-S.

كوِّنْ H_1 بإضافة رأس y' للبيان $G[V_1]$ وأضلاعًا تنطلق من S، ثم كوِّنْ H_2 بإضافة رأس x' للبيان $G[V_2]$ وأضلاعًا تنطلق من x' إلى S. لاحظ أن كل مسار x،y في G يبدأ بمسار x،S (محتوى في H_1). لذا، فإن كل قاطع x،y' في H_1 يكون قاطعًا لـ x،y في G. ولذلك، نجد أن $\kappa_{H_1}=(x,y')$. وبالمثل نجد أن $\kappa_{H_2}=(x',y)$.

وبما أن V_1 تحذف $N(y)$-S، و V_2 تحذف $N(x)$-S، فإن كلًّا من H_1 و H_2 أصغر من G. ومن هنا، فإن فرضية الاستقراء تعطي أن $\lambda_{H_1}(x,y')=k=\lambda_{H_2}(x',y)$. وبما أن $S=V_1 \cap V_2$، فإن حذف y' من k مسارًا في H_1 و x' من الـ k مسارًا في H_2 يعطي المسارات x،S و S،y في G اللازمين لتشكيل k من المسارات المنفصلة داخليًا، والتي تربط بين x و y في G.



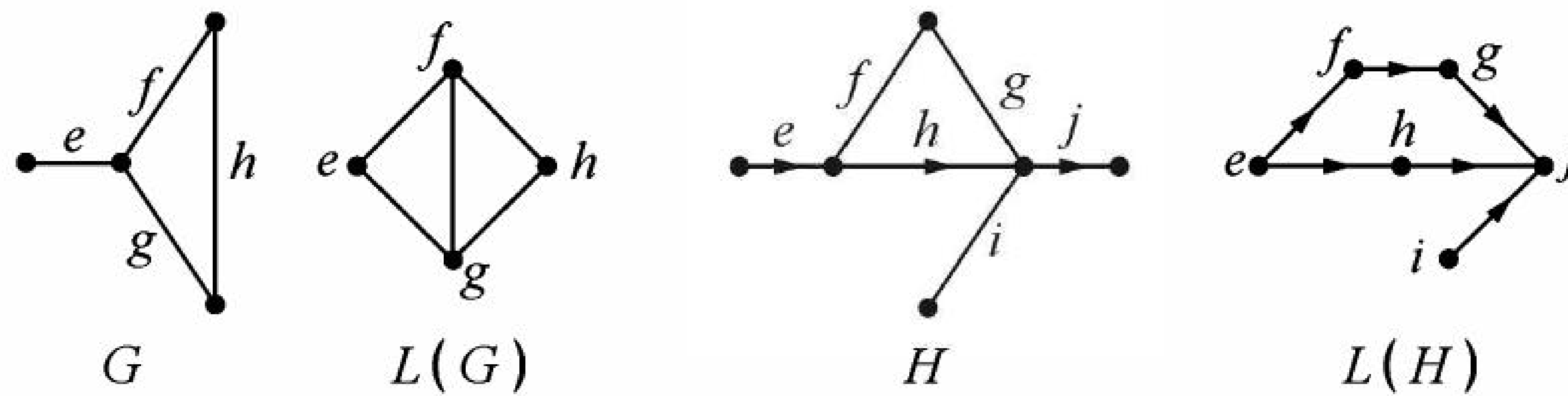
الحالة الثانية: كل قاطع أصغر للمسارات x،y إما أن يكون $N(x)$ أو $N(y)$. ثانية سنقوم ببناء k مسارًا

المطلوبة. في هذه الحالة، كل رأس خارج $\{x \cup N(x) \cup N(y) \cup y\}$ لا يقع في قاطع أصغر للمسارات x،y. إذا وُجد لـ G رأس v مثل هذا الرأس، فإن $k_{G-v}(x,y)=k$، وبتطبيق فرضية الاستقراء على $G-v$، نحصل على المسار x،y المطلوب في G. وكذلك إذا وُجد u في $N(x)\cap N(y)$، فإن u يظهر في كل قاطع للمسارات x،y، ويكون $k_{G-u}(x,y)=k-1$. الآن، وبعد تطبيق فرضية الاستقراء على $G-v$، فإننا سنحصل على $k-1$ مسارًا نضمها للمسارات x،u،y. لذا، يمكن افتراض أنَّ كلًّا من $N(x)$ و $N(y)$ تجزئة للمجموعة $V(G)-\{x,y\}$. افترض أنَّ G' البيانُ الثنائيُّ الفرع الذي مجموعتا رؤوسه $N(x)$ و $N(y)$ ومجموعة أضلاعه $[N(x),N(y)]$. لاحظ أن كل مسار x،y في G يستخدم ضلعًا من $N(x)$ إلى $N(y)$. لذا، فإن قواطع المسارات x,y في G هي رؤوس تغطية G'، إذن، $\beta(G')=k$. وباستخدام نظرية Köning – Egervāry، فإنه يوجد للبيان G' مواءمة (matching) حجمها k. إن هذه الـ k ضلعًا تعطي k من المسارات x،y المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا طول كل منهما يساوي 3. ■

لاحظ أننا نحتاج إلى الحالة الثانية في الإثبات؛ لأنه في الحالة التي يكون فيها $S=N(x)$ لا نستطيع استخدام فرضية الاستقراء للحصول على المسارات S،y. إن منطوق النظرية 17.2.4 يبقى صحيحًا للبيانات الموجهة، والإثبات نفسه يعطي النتيجة نفسها بعد أن تحل $N^+(x)$ و $N^-(y)$ محل $N(x)$ و $N(y)$ أينما وجدتا.

سنطوّر فيما يأتي نظرية مماثلة للنظرية 17.2.4 لتطبيقها على المسارات المنفصلة ضلعيًّا (لا يوجد بينها أضلاع مشتركة) والتي سنثبتها باستخدام النظرية 17.2.4 مطبقة على بيان محول لبيان آخر (transformed graph) من خلال عملية تحويل معينة، علمًا بأننا سنستخدم هذه العملية مرة ثانية في الفصل السابع.

18.2.4. تعريف: نعرف البيان الخطاني للبيان G.$L(G)$ (line graph) على أنه البيان الذي رؤوسه هي أضلاع G؛ حيث $ef \in E(L(G))$ عندما $e = uv$ و $f = vw$ في G. وبوضع كلمة بيان موجه بدلاً من بيان في العبارة السابقة، فإننا نحصل على تعريف البيان الموجه الخطاني. وفي حالة البيانات، لاحظ أن e و f يشتركان في رأس، وفي البيانات الموجهة، يكون رأس e ذيلاً لـ f.



عند فصل x عن y بحذف الأضلاع، نستخدم رموزًا مشابهة للرموز التي استخدمت في التعريف 15.2.4. فمثلاً، الرمز $\lambda'(x,y)$ يشير إلى حجم أكبر مجموعة من المسارات x،y المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. في حين يشير الرمز $\kappa'(x,y)$ إلى أقل عدد من الأضلاع يلزم حذفه بحيث لا يمكن الوصول إلى y من x. في العام 1956م، أثبت كلٌّ من Elias-Feinstein-shanon وFord – Fulkerson أن $\lambda'(x,y)=\kappa'(x,y)$ دائمًا (باستخدام طرق موجودة في الجزء 3.4).

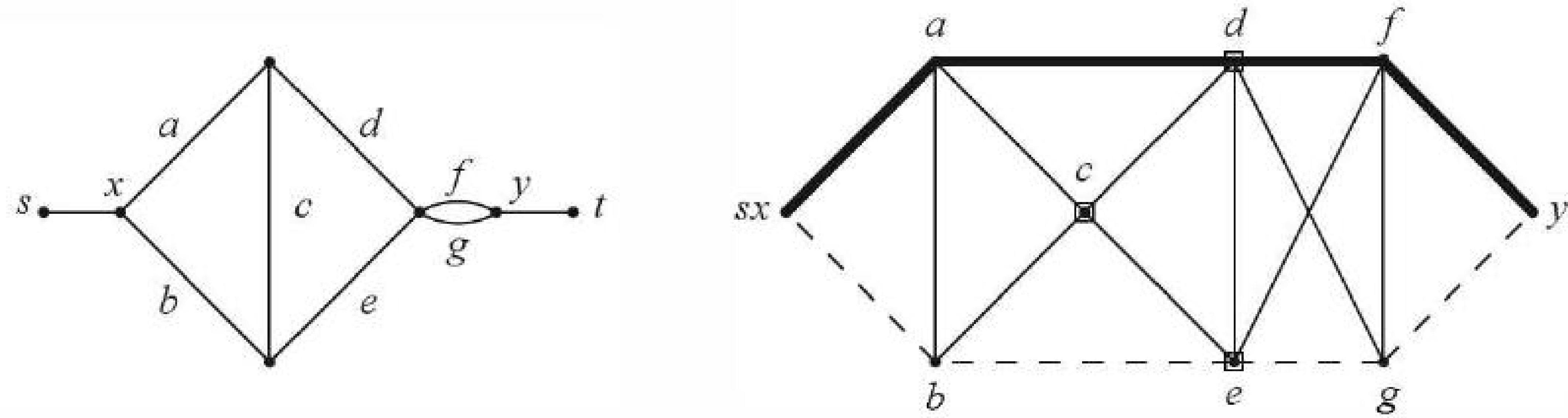
تنويه: لاحظ هنا أننا نسمح بوجود الأضلاع المكررة، كما نسمح بأن يكون $xy\in E(G)$.

19.2.4. نظرية: إذا كان كلٌّ من x و y رأسين مختلفين لبيان أو لبيان موجه G، فإن أصغر حجم لمجموعة أضلاع تفصل x عن y يساوي أكبر عدد من المسارات من x إلى y المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا.

الإثبات: عدِّل G إلى G' بإضافة رأسين جديدين، هما: s،t، وضلعين جديدين هما: sx،yt. إن هذا

لا يغير $\kappa'(x,y)$ ولا يغير $\lambda'(x,y)$ أيضًا. وكذلك يمكننا أن نفكر أن كل مسار يبدأ من الضلع sx وينتهي بالضلع yt. إن مجموعة من الأضلاع في G تفصل y عن x إذا وفقط إذا كانت مجموعة الرؤوس في $L(G')$ المرتبطة بهذه الأضلاع تشكل قاطعة sx,yt. وبالمثل، فإن المسارات x,y المنفصلة ضلعيًّا في G تصبح مسارات sx,yt منفصلة داخليًّا في $L(G')$ والعكس صحيح. وبما أن $x\neq y$، فلا يوجد ضلع من sx إلى ty في $L(G')$. وبتطبيق النظرية 17.2.4 على $L(G')$ يكون:

$$\kappa'_G(x,y) = \kappa_{L(G')}(sx,yt) = \lambda_{L(G')}(sx,yt) = \lambda'_G(x,y).$$ ■



لوحظت النسخة الشاملة للبيانات المترابطة من الدرجة k من قبَل whitney عام [1932م]، والتي من الشائع تسميتها نظرية منجر. أما النسخة الشاملة للأضلاع والبيانات الموجهة فقد ظهرت في العام 1956م في مقالة Ford-Fullkerson.

20.2.4. تمهيدية. إن حذف ضلع من بيان معين ينقص مقدار الترابط بمقدار واحد على الأكثر.

الإثبات: سنثبت هذه التمهيدية في حال البيانات تاركين حالة البيانات الموجهة إلى التمرين 7. بما أن كل مجموعة فاصلة لـ G هي مجموعة فاصلة لـ $G\text{-}xy$، فإن $\kappa(G\text{-}xy) \leq \kappa(G)$، لاحظ أن المساواة تتحقق إلا إذا وُجد لـ $G\text{-}xy$ مجموعة فاصلة حجمها أقل من $\kappa(G)$، وعليه لا تكون مجموعة فاصلة لـ G. وبما أن $G\text{-}s$ مترابط، فإن هناك مركبتين للبيان $G\text{-}xy\text{-}s$ هما: $G[X]$ و $G[Y]$، حيث $x \in X$ و $y \in Y$. في $G\text{-}S$، لاحظ أن الضلع الفريد الذي يربط X و Y هو xy.

إذا كان $|X| \geq 2$، فإن $S \cup \{x\}$ مجموعة فاصلة لـ G، وأن $\kappa(G) \leq \kappa(G - xy) + 1$، وإذا كان $|Y| \geq 2$، فإن المتباينة تكون متحققة. أما في الحالة المتبقية $|S| = n(G) - 2$، وبما أننا افترضنا أن $|S| < \kappa(G)$ و $|S| = n(G) -2$ ، سنجد أن $\kappa(G) \geq n(G) -1$، والتي تتحقق فقط للبيانات التامة.

إذن، $\kappa(G - xy) = n(G) - 2 = \kappa(G) - 1$ وهو المطلوب. ■

21.2.4. نظرية: إن مقدار ترابط G يساوي أكبر عدد k حيث $\lambda\ (x,y) \geq k$ لكل $x,y \in V(G)$، في حين يساوي مقدارُ الترابط الضلعي للبيان G أكبرَ عدد k حيث $\lambda'\ (x,y) \geq k$ لكل $x,y \in V(G)$. لاحظ أن النتائج صحيحة لكلٍ من البيانات والبيانات الموجهة.

الإثبات: بما أن $\kappa'\ (G)=min_{x,y\in V(G)}\ \kappa'\ (x,y)$، فإن النظرية 19.2.4 تعطي النتيجة في حالة الترابط الضلعي. لحالة الترابط، نعلم أن $\kappa(x,y)=\lambda(x,y)$ حيث $xy \notin E(G)$، ونعلم أيضًا أن $\kappa(G)$ هي أصغر قيمة من هذه القيم. لذا، نحتاج فقط إلى إثبات أن $\lambda(x,y)$ لا يمكن أن تكون أقل من $\kappa(G)$ عندما $xy \in E(G)$. وبالتأكيد، إن حذف xy ينقص $\lambda(x,y)$ بمقدار 1. وبما أن xy نفسه يمثل مسارًا من x إلى y، ولا يمكن أن يقع في أي مسار آخر من x إلى y. وباستخدام النظرية 17.2.4 والتمهيدية 20.2.4 فإن:

$$\lambda_G(x,y) = 1 + \lambda_{G\text{-}xy}(x,y) = 1 + \kappa_{G\text{-}xy}\ (x, y) \geq 1+ \kappa(G - xy) \geq \kappa\ (G)$$ ■

تطبيقات على نظرية منجر (Applications of Menger's Theorem)

لقد عمَّمَ Dirac نظرية منجر لعائلات أخرى من المسارات.

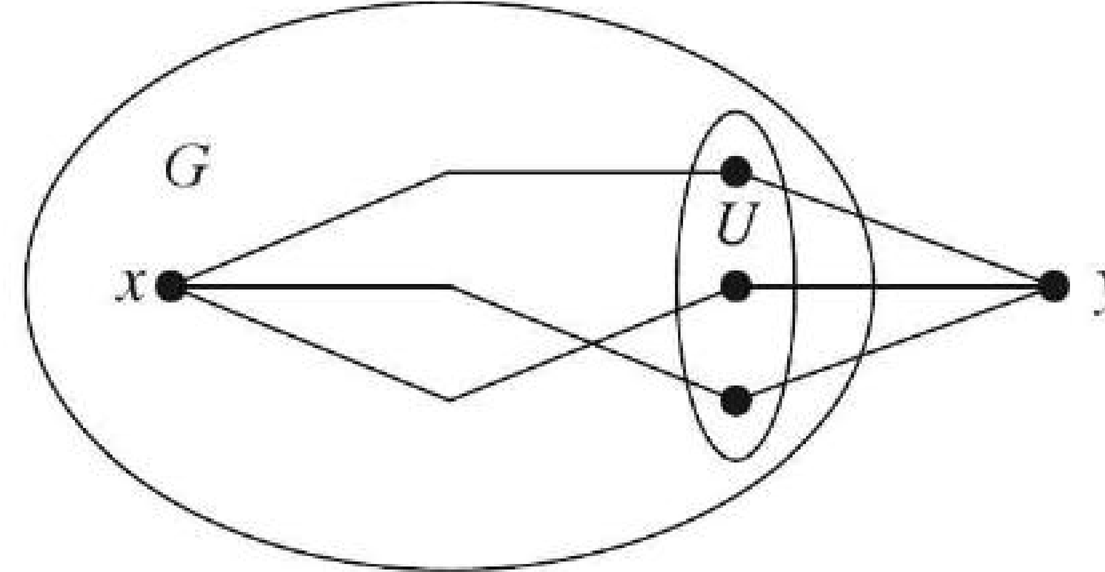
4.2.22. تعريف: ليكن x رأسًا، و U مجموعة من الرؤوس، نعرف المروحة x, U على أنها مجموعة المسارات من x إلى U حيث يشترك أي مسارين من هذه المسارات في الرأس فقط.

4.2.23. نظرية: (**Fan lemma, Dirac [1960]**).

يكون البيان مترابطًا من الدرجة k إذا وفقط إذا كان له $k + 1$ رأسًا، ولكل خيار لـ x و U حيث $|U| \geq k$، يوجد للبيان مروحة x, U من الحجم k.

الإثبات: الضرورة: ليكن G بيانًا مترابطًا من الدرجة k، جد G' من G بإضافة رأس جديد y يجاور كل رأس في U، وباستخدام تمهيدية التمديد أو التوسيع (التمهيدية 4.2.3) نجد أن G' أيضًا مترابط من الدرجة k. الآن، وبتطبيق نظرية منجر، يمكن الحصول على k من المسارات x, y في G' بحيث تكون هذه المسارات منفصلة داخليًّا، وبحذف y من هذه المسارات نحصل على مروحة x, U حجمها k في G.

الكفاية: افترض أن G يحقق شرط المروحة، لكل $v \in V(G)$، ولكل $U = V(G) - \{vI\}$ توجد مروحة v, U حجمها k. لذا، فإن $\delta(G) \geq k$. الآن، افترض أن $w, z \in V(G)$، وأن $U = N(z)$، بما أن $|U| \geq k$، فسيصبح لدينا مروحة w, U حجمها k، وسِّع (مدِّد) كل مسار بإضافة ضلع إلى z، وبهذا نحصل على k من المسارات w, z المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا. لذا، فإن $\lambda(w, z) \geq k$، وهذا يتحقق لكل $w, z \in V(G)$. لذلك، فإن G مترابط من الدرجة k. ■



يمكن تعميم تمهيدية المراوح كالآتي: عندما تكون X و Y مجموعتين منفصلتين من رؤوس بيان G، حيث إن هذا البيان مترابط من الدرجة k، وعندما نحدّد أعدادًا صحيحةً عند الرؤوس في كل من X و Y بحيث يكون مجموع هذه الأعداد مساويًا k لكل مجموعة، فإن هناك k من المسارات X, Y المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا. حيث ينتهي العدد المحدد عند كل نقطة (التمرين 28). وكذلك، فإن تمهيدية المروحة تعطي النتيجة الآتية:

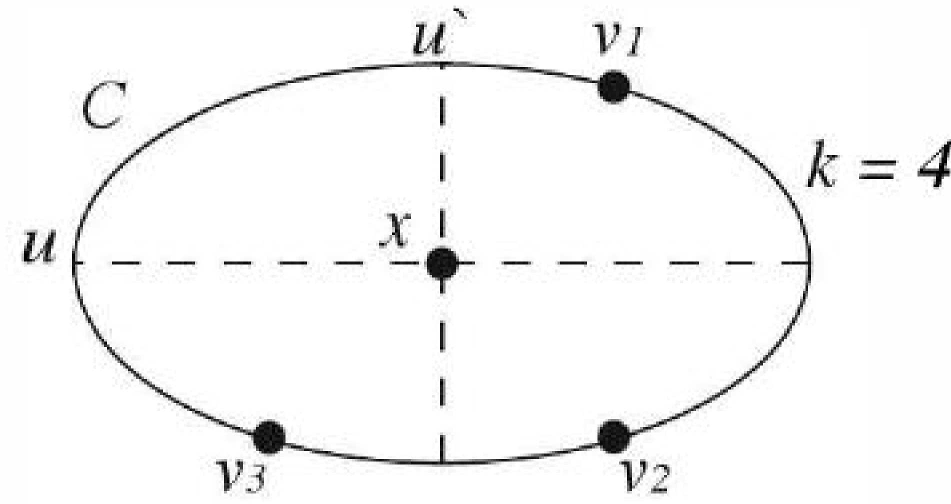
4.2.24. نظرية* (Dirac [1960]). إذا كان G بيانًا مترابطًا من الدرجة k‏($k \geq 2$)، وكانت S مجموعة تحوي k رأسًا من رؤوس G، فإن هذا يُوجِدُ حلقة في G تحوي S ضمن مجموعة رؤوسها.

الإثبات: بالاستقراء على k. الخطوة الأساس ($k = 2$): تضمن النظرية 4.2.2 (أو النظرية 4.2.21) أن كل رأسين يرتبطان بمسارين منفصلين داخليًّا. وهذا يضمن وجود حلقة تحويها.

خطوة الاستقراء ($k > 2$): اختر $x \in S$. بما أن G مترابط أيضًا من الدرجة k - 1، فإن فرضية الاستقراء تضمن أن $S - \{x\}$ جميعها تقع على حلقة C. افترض أن $n(C) = k - 1$. بما أن G مترابط من الدرجة k - 1، فلدينا مروحة $x, V(C)$ حجمها $k - 1$، ومسارات المروحة إلى رأسين متتابعين في C يوسِّع الحلقة لتشمل x. لذا،

نستطيع افتراض أن $n(C) \geq k$. وبما أن G مترابط من الدرجة k، فيوجد في G مروحة $x, V(C)$ حجمها k. الآن ندعي ثانية وجود مسارين في المروحة يشكلان التفافًا (انعطافًا) عن C يشمل x، في حين يبقى $S - \{x\}$. افترض أن $v_1, \dots, v_{k-1}$ هي ترتيب الرؤوس $S - \{x\}$ على C. واجعل V_i تمثل الجزء من $V(C)$ من v_i إلى v_{i+1}، ولكن لا تشمل v_{i+1} (هنا $v_k = v_1$).

تعمل المجموعات $V_1, \dots, V_{k-1}$ تجزئة لـ $V(C)$ إلى $k - 1$ مجموعة منفصلة. وبما أن المروحة $x, V(C)$ تحوي k مسارًا، فإن مسارين من هذه المسارات يدخلان $V(C)$ في واحدة من هذه المجموعات باستخدام مبدأ صناديق الحمام. افترض أن u و u' الرأسان اللذان تصل عندهما هذه المسارات إلى C. استبدل بالجزء u, u' من C مسار x, u ومسار x, u' في المروحة لتحصل على حلقة جديدة تحوي x و $S - \{x\}$ كلها. ■



يعتمد العديد من تطبيقات نظرية منجر على إيجاد نموذج للمسألة بحيث ترتبط الأشياء المراد إيجادها بالمسارات في بيان أو بيان موجه، وغالبًا ما نستند إلى تعليل يعتمد على تحويل لبيان معين. فعلى سبيل المثال، إذا أعطينا المجموعات $A = A_1, \dots, A_m$ التي اتحادها X، فإن مجموعة العناصر المختلفة $x_1, \dots, x_m$ حيث $x_i \in A_i$ تسمى **نظام تمثيل بواسطة العناصر المختلفة (System of distinct representatives)** ويرمز إليه بالرمز **(SDR)**. إن الشروط الضرورية واللازمة لوجود SDR هو أن $|\bigcup_{i \in J} A_i| \geq |I|$ لكل $I \quad [m]$. ولإثبات ذلك؛ نستخدم نظرية هال (Hall) بإيجاد نموذج يمثل A بوصفه بيانًا ثنائي الفرع (التمرين 19.1.3). في الحقيقة، أثبتت نظرية هال (Hall) باستخدام لغة SDRs ، وهي تكافئ نظرية منجر (التمرين 23).

لقد قام كلٌّ من Ford و Fulkerson بحل مسألة أصعب. خذ عائلتين $\mathbf{A} = A_1, \dots, A_m$، و $\mathbf{B} = B_1, \dots, B_m$ من المجموعات. والسؤال: هل يوجد لهاتين العائلتين **نظام تمثيل مشترك بواسطة العناصر المختلفة (CSDR)**؟ ونعني بذلك: هل يوجد m من العناصر تشكل SDR للعائلة **A** و SDR للعائلة **B**؟ لقد وجدا الشروط الضرورية والكافية لذلك.

25.2.4. نظرية* (Ford – Fulkerson [1958])

يوجد للعائلتين $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ و $\mathbf{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ نظام تمثيل مشترك بواسطة العناصر المختلفة (CSDR) إذا وفقط إذا تحقق أن $\left|\left(\bigcup_{i \in I} A_I\right) \cap \left(\bigcup_{j \in i} B_j\right)\right| \geq |I| + |J| - m$ لكل زوج $I, J \subseteq [m]$.

الإثبات: سنجد بيانًا موجهًا G رؤوسه هي: $a_1, \dots, a_m$ و $b_1, \dots, b_m$ بالإضافة إلى رأس لكل عنصر في المجموعات، ورأسين خاصين هما: s, t. إن الأضلاع هي:

$$\{sa_i: A_i \in \mathbf{A}\} \; \{a_i x: x \in A_i\}$$

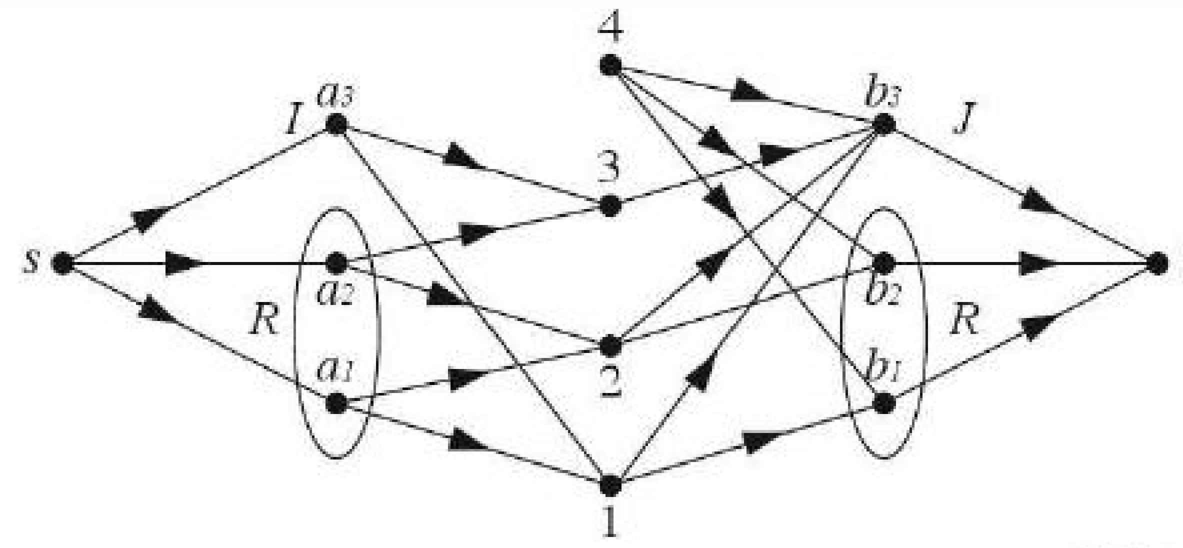
$$\{b_j t: B_j \in \mathbf{B}\} \; \{x b_j: x \in B_j\}$$

يختار كلُّ مسار s,t عنصرًا من تقاطع A_i مع B_j. ويوجد CSDR إذا وفقط إذا وُجِدَت مجموعة مؤلفة

من m من المسارات $s،t$ المنفصلة داخليًا. وباستخدام نظرية منجر، يكفي إثبات أن هذا الشرط يكافئ وجود قاطع للمسارات $s،t$ حجمه أقل من m. إذا أعطيت المجموعة R بحيث إن $R \subseteq V(G) - \{s, t\}$،افترض أن $I=\{a_i\} - R: a_i \notin R$ و $J=\{b_j\}- R: b_j \notin R$. لاحظ أن R قاطع s, t إذا وفقط إذا كان $(\bigcup_{i\in I} Ai) \cap (\bigcup_{j\in J} Bj) \subseteq R$، لذا، فللقاطع R للمسارات s, t

نجد أن: $|R| \geq |(\bigcup Ai) \cap (\bigcup Bj) + (m - |I|) + (m - |J|)$.

إن هذا الحد الأدنى يساوي m على الأقل لكل قاطع للمسارات s, t إذا وفقط إذا تحقق الشرط المنصوص عليه. (يشمل هذا التكافؤ ملاحظة وجود قاطع لـ J و I جميعهما؛ حيث يتكون من خلف (توابع) s التي دليلها ليس I، ومن سلف (سوابق) t التي دليلها ليس J، وعناصر في المجموعة $(\bigcup_{i\in I} Ai) \cap (\bigcup_{j\in J} Bj)$ في الوسط. ■



26.2.4. مثال : بيان موجه لـ CSDR.

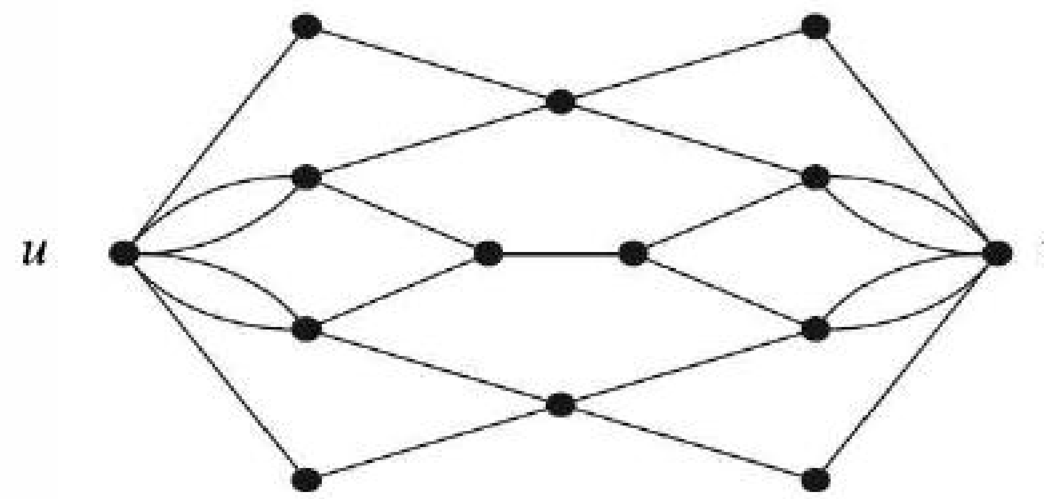
في المثال أعلاه، العناصر هي: $\{1.2.3.4\}$ ، $A= \{12.23.31\}$

و $B= \{14.24.1334\}$. افترض أن $R \cap \{a_i\} = \{a_1, a_2\}$، وأن $R \cap \{b_j\} = \{b_1, b_2\}$. في التعليل، اجعل $I = \{a_3\}$ و $J = \{b_3\}$، ولاحظ أن R يمثل قاطع s, t إذا وفقط إذا احتوى على $\{1،3\}$ التي تساوي

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$$ ■

تمـــارين (Exercises)

1.2.4. (-): جد $\kappa(u, v)$ و $\kappa'(u, v)$ للبيان الموجود في الشكل أدناه (مساعدة: استخدم المسائل الثنوية أو الازدواجية (dual problems) لإعطاء براهين قصيرة للأمثلية).



2.2.4. (-): أثبت أنه إذا كان G مترابطًا ضلعيًا من الدرجة 2، وإذا حصلنا على G' من G بقسمة أحد أضلاع G، فإن G' مترابط ضلعيًا من الدرجة 2. استخدم هذا لإثبات أنه إذا كان للبيان تحليل مقبضي مغلق، فإن البيان يكون مترابطًا ضلعيًا من الدرجة 2 (تعليق: هذا إثبات بديل للكفاية في النظرية 10.2.4).

3.2.4. (-) افترض أن G بيان موجه حيث [12] تمثل مجموعة رؤوسه، وحيث إن $i \to j$ إذا وفقط إذا كانت i تقسم j. جد κ (1 و 12) و κ' (1 ، 12).

4.2.4. (-) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كان P مسارًا من u إلى v في بيان G مترابط من الدرجة 2. فإنه يوجد مسار Q من u إلى v بحيث إن Q منفصل داخليًا عن P.

5.2.4. (-) افترض أن G بيان بسيط، واجعل $H(G)$ تمثل البيان الذي رؤوسه $V(G)$ بحيث إن $uv \in E(H)$

إذا وفقط إذا ظهر كل من u و v في الحلقة نفسها التي في G. أعطِ توصيفًا للبيانات G بحيث يكون H بيانًا تامًّا.

6.2.4. (-) استخدم النتائج الموجودة في هذا الدرس لإثبات أن البيان البسيط G يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا أمكن الحصول على G من C_3 بعمل مجموعة من عمليات إضافة الأضلاع وقسمتهما.

• • • • •

7.2.4. إذا كان xy ضلعًا في البيان الموجه G، فأثبت أن $\kappa(G - xy) \geq \kappa(G) - 1$.

8.2.4. أثبت أن البيان البسيط G يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: لكل ثلاثية مرتبة (x, y, z) من الرؤوس المختلفة، يوجد مسار من x إلى z يمر من خلال y (chein [1968]).

9.2.4. افترض أن G بيان له أربعة رؤوس على الأقل. أثبت أن G يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: لكل زوج X و Y حيث X و Y مجموعتان جزئيتان من رؤوس G وبحيث إن $|X|,|Y| \geq 2$، يوجد مساران منفصلان تمامًا هما: P_1 و P_2 في G بحيث يوجد لكل منهما نقطة طرفية في X، ونقطة طرفية أخرى في Y، دون وجود رؤوس داخلية لأي منهما لا في X ولا في Y.

10.2.4. (+) نعرِّف **التحليل المقبضي الجشع** لبيان مترابط من الدرجة 2 على أنه تحليل مقبضي يبدأ بأطول حلقة، ثم يكرر إضافة أطول مقبض ممكن. استخدم تحليلاً مقبضيًّا جشعًا لإثبات أن كل بيان G مترابط من الدرجة 2 خالٍ من المخالب يحوي $\lfloor n(G)/3 \rfloor$ نسخة من P_3، بحيث إن هذه النسخ منفصلة زوجًا زوجًا. (kaneko –kelmans-Nishimura [2000]).

11.2.4. (!) افترض أن G بيان مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل. أثبت أن العبارات الآتية متكافئة (يمكن استخدام نظرية منجر):

a) G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2.

b) كل ضلع في G يظهر في حلقة.

c) يوجد في G مسرب مغلق لا يكرر أضلاعًا (closed trail)، ويحوي أي ضلعين محددين.

d) يوجد في G مسرب مغلق لا يكرر أضلاعًا، ويحوي أي رأسين محددين.

12.2.4. (!) استخدم نظرية منجر لإثبات أنه إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة 3، فإن $\kappa(G) = \kappa'(G)$ (النظرية 11.1.4).

13.2.4. افترض أن G بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، عرف علاقة R على $E(G)$ على الصورة الآتية: $(e, f) \in R$ إذا كان $e = f$، أو إذا كان $G - e - f$ غير مترابط (Lovász [1979, p277]):

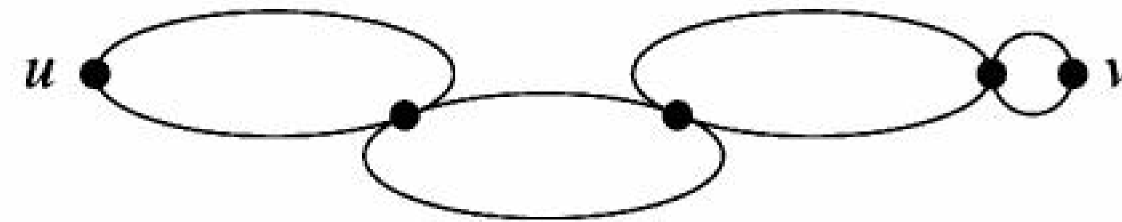
a) أثبت أن $(e, f) \in R$ إذا وفقط إذا انتمى كلّ من e و f إلى الحلقة نفسها.

b) أثبت أن R علاقة تكافؤ على $E(G)$.

c) لكل صف تكافؤ F، أثبت أن F محتوى في حلقة.

d) لكل صف تكافؤ F، أثبت عدم وجود قاطعة ضلعية لـ $G - F$.

14.2.4. (!) نعرف القلادة من u إلى v على أنها مجموعة حلقات $C_1, \ldots, C_k$ حيث $u \in C_1$ و $v \in C_k$، بحيث تشترك الحلقات المتتابعة في رأس واحد فقط، في حين تكون الحلقاتُ غير المتتابعة منفصلةً. استخدم الاستقراء على $d(u, v)$ لإثبات أن البيان G يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجِدَت قلادة u, v في G لكل زوج u, v من $V(G)$.



15.2.4. (+) افترض أن v رأس في بيان G المترابط من الدرجة 2، أثبت أنه يوجد لـ u جوار v، بحيث إن $G - u - v$ مترابط (chartrand –Lesniak [1986,p51]).

16.2.4. (+) افترض أن G بيان مترابط من الدرجة 2. أثبت أنه إذا كانت كلٌّ من T_1 و T_2 شجرتين مولدتين للبيان G فيمكن تحويل T_1 إلى T_2 بإجراء عدة عمليات يتم من خلالها إزالة ورقة (leaf) وإعادة تثبيتها باستخدام ضلع آخر للبيان G.

17.2.4. جد أصغر بيان مقدار ترابطه 3، بحيث يكون له رأسان غير متجاورين ومنفصلان معًا بواسطة أربعة مسارات منفصلة داخليًا زوجًا زوجًا.

18.2.4. افترض عدم وجود رؤوس معزولة للبيان G. أثبت أنه إذا خلا هذا البيان من الحلقات الزوجية، فإن كل قالب فيه يكون إما ضلعًا أو حلقة فردية.

19.2.4. (!) العضوية في الحلقات المشتركة:

a) أثبت أن ضلعين مختلفين ينتميان إلى القالب نفسه في بيان G إذا وفقط إذا كانا ينتميان إلى الحلقة نفسها.

b) افترض أن $e, f, g \in E(G)$، وافترض أيضًا وجود حلقة في G تمر خلال e و g، وحلقة أخرى تمر خلال f و g. أثبت أنه توجد حلقة في G تمر في e و g. (تعليق: لاحظ أن هذه المسألة تضمن أن علاقة "المساواة أو الانتماء إلى الحلقة" نفسها هي علاقة تكافؤ على أضلاع البيانات التي ليس لها أضلاع فاصلة أو قاطعة، وأن صفوف التكافؤ لهذه العلاقة هي مجموعات أضلاع قوالب البيان).

20.2.4. أثبت أن المكعب الزائدي مترابط من الدرجة Q_k بإيجاد k من المسارات x, y المنفصلة داخليًا زوجًا زوجًا وذلك لكل زوج رؤوس $x, y \in V(Q_k)$.

21.2.4. (!) افترض أن G بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k$ بحيث إن له على الأكثر رأسين درجتهما فردية، أثبت أنه يوجد لهذا البيان توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة k. ([Nash - Williams [1960]).

22.2.4. (!) افترض أن $\kappa(G) = k$، وأن (قطر G) $diam\ G = d$. أثبت أن $n(G) \geq k(d - 1) + 2$ وأن $a(G) \geq [(1 + d)/ 2]$. لكل $k \geq 1$ ولكل $d \geq 2$. جد بيانًا مقدار ترابطه k، وقطره d، بحيث تتحقق في هذا البيان المساواة في الحدين أعلاه.

23.2.4. (!) إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع، فاستخدم نظرية منجر ($\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$) عندما $xy \notin E(G)$ لإثبات نظرية König –Egerváry ($\alpha'(G) = \beta(G)$).

24.2.4. (!) افترض أن G بيان مترابط من الدرجة k، وافترض أيضًا أن S و T مجموعتان جزئيتان غير متقاطعتين من $V(G)$ حجم كل منهما يساوي k على الأقل، أثبت أنه يوجد للبيان G، k من المسارات S ، T المنفصلة (غير المتقاطعة) زوجًا زوجًا.

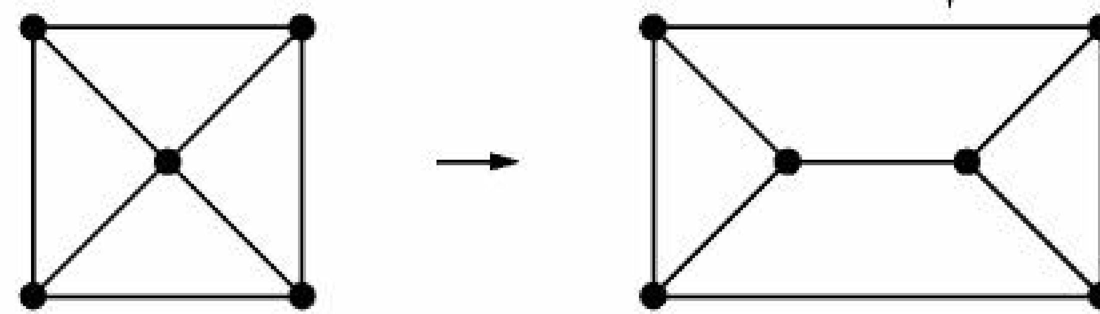
25.2.4.(*) أثبت أن النظرية 24.2.4 هي أفضل ما يمكن، وذلك بإيجاد بيان مترابط من الدرجة k لكل k بحيث يوجد لهذا البيان $k + 1$ رأسًا غير واقعة على حلقة.

26.2.4. إذا كانت $k \geq 2$، فأثبت أن البيان G الذي له $k + 1$ رأسًا على الأقل يكون مترابطًا من الدرجة k إذا وفقط إذا تحقق ما يلي: عندما $T \subseteq S \subseteq V(G)$ حيث $|S| = k$ و $|T| = 2$، فإنه توجد حلقة في G تحوي T، ولا تحوي أيًّا من عناصر $S - T$ (Lick [1973]).

27.2.4. يعرف شطر الرأس من الدرجة k (vertex k-split) لبيان G على أنه بيان H نحصل عليه من G بأن يحل محل رأس $x \in V(G)$ رأسان متجاوران x_1 و x_2، حيث $d_H(x_i) \geq k$ و: $N_H(x_1) \cup N_H(x_2) = N_G(x) \cup \{x_1, x_2\}$.

a) أثبت أن كل شطر رأس من الدرجة k لبيان مترابط من الدرجة k يكون مترابطًا من الدرجة k.

b) استنتج أن أي بيان G يمكن الحصول عليه من العجلة $W_n = K_1 \vee C_{n-1}$ (التعريف 6.3.3) بإجراء عدة عملياتٍ من إضافة الأضلاع وعمليات شطر الرؤوس من الدرجة 3 على الرؤوس التي درجتها 4 على الأقل يكون مترابطًا من الدرجة 3. (تعليق: لقد أثبت Tutte [1961] أن كل بيان مترابط من الدرجة 3 يظهر بهذه الطريقة. إن هذا التوصيف المميز لا يُعمَّم على الحالة $k > 3$).



28.2.4. (!) افترض أن X و Y مجموعتان منفصلتان (غير متقاطعتين) من الرؤوس لبيان G، حيث G مترابط من الدرجة k، افترض أن $u(x)$ $(x \in X)$ و $w(y)$ $(y \in Y)$ عبارة عن أعداد صحيحة غير سالبة بحيث إن

$\sum_{x\in X} u(x) = \sum_{y\in Y} w(y) = k$، أثبت أنه يوجد في G k من المسارات x, y المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا، بحيث إن $u(x)$ منها تبدأ عند x و $w(y)$ منها تنتهي عند y، علمًا بأن $x \in X$ و $u \in Y$.

29.2.4. افترض أن G بيان، إجعل D هي البيان الموجه الذي نحصل عليه من G باستبدال كل ضلع في G بضلعين متضادين في الاتجاه يبدآن بالنقاط الطرفية نفسها وينتهيان بها (لذا فإن D هي البيان الموجه المتماثل الذي بيانه G).

افترض أن $\kappa_D(x, y) = \lambda_D(x, y)$ لكل $x, y \in V(D)$، وأن $\kappa'_D(x, y) = \lambda'_D(x, y)$ علمًا بأن الشرط الثاني يتحقق فقط عندما $x \nleftrightarrow y$. استخدم الافتراض لإثبات أن $\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y)$، وأن $\kappa'_G(x, y) = \lambda'_G(x, y)$ علمًا بأن الثانية تخص $x \nleftrightarrow y$.

30.2.4. (!) أثبت بتطبيق عملية التمديد الموجود في المثال 1.3.26 على أن البيان المترابط من الدرجة 3 يعطينا بيانًا مترابطًا من الدرجة 3. ثم احصل على بيان بيترسون بإجراء تمديد (توسيع) على K_4. (تعليق: لقد أثبت Tutte [1966] أن البيان المنتظم من الدرجة 3 يكون مترابطًا من الدرجة 3 إذا وفقط إذا أمكن الحصول عليه من K_4 بإجراء عدد من عمليات التوسع (التمدد)).

31.2.4. افترض أن G بيان بسيط مترابط من الدرجة k:

a) افترض أن C و D حلقتان في G طولهما أكبر ما يمكن، إذا كانت $k = 2$ أو $k = 3$، فأثبت أن C و D تشتركان في k من الرؤوس على الأقل، (مساعدة: إذا لم تشتركا فاحصل على حلقة أطول).

b) لكل $k \geq 2$، جد بيانًا مترابطًا من الدرجة k له حلقات مختلفة، طولها أكبر ما يمكن وتشترك في k من الرؤوس فقط (مساعدة: اعتبر $k_{2.4}$ عندما $k = 2$).

32.2.4. وصل البيانات (Graph Splices)

افترض أن G_1 و G_2 بيانان منفصلان ومترابطان من الدرجة k حيث $k \geq 2$. إختر $v_1 \in V(G_1)$ و $v_2 \in V(G_x)$. افترض أن B هو البيان الثنائي الفرع الذي مجموعتا رؤوسه هما: $N_{G1}(v_1)$ و $N_{G2}(v_2)$ حيث لا يوجد لـ B رأس معزول، وله مواءمة حجمها k على الأقل. أثبت أن $(G_1 - v_1) \cup (G_2 - v_2) \cup B$ مترابط من الدرجة k.

33.2.4. (*) أثبت نظرية Hall بالاعتماد على النظرية 25.2.4.

34.2.4. افترض أن G بيان مترابط من الدرجة k. نقول: إن G مترابط من الدرجة k بحده الأدنى (minimally - k- connected) إذا كان $G - e$ غير مترابط من الدرجة k لكل $e \in E(G)$. لقد أثبت Hallin في العام 1969م أن $\delta(G) = k$ عندما يكون G بيانًا مترابطًا بحده الأدنى. استخدم التحليل المقبضي لإثبات هذه النتيجة عندما $k = 2$. استنتج أنه إذا كان G بيانًا مترابطًا من الدرجة 2 بحده الأدنى، وكان له أربعة رؤوس على الأقل، فإن له $2n(G) - 4$ ضلعًا على الأكثر، وأن المساواة تتحقق فقط للبيان $K_{2,n-2}$ (Dirac [1967]).

35.2.4. أثبت أنه إذا كان G مترابطًا من الدرجة 2، فإن $G - xy$ يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وقع كل من x و y على حلقة في $G - xy$. ثم استنتج أن البيان المترابط من الدرجة 2 يكون مترابطًا من الدرجة 2 بحده الأدنى إذا وفقط إذا كانت كل حلقة بيانًا جزئيًّا مستحدثا (induced subgraph) (Dirac [1967], Plummer [1968]).

36.2.4 (!) لتكن $S \in V(G)$، إجعل $d(S) = |[S, \overline{S}]|$، افترض أن X و Y مجموعتان جزئيتان فعلاً وغير خاليتين من رؤوس G، أثبت أن $d(X \cap Y) + d(X \cup Y) \leq d(X)\ d(Y)$، (مساعدة: ارسم رسمة، وخذ في الحسبان المساهمات من أنواع الأضلاع جميعها).

37.2.4 (+) افترض أن G بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة k. نقول: إن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة k بحده الأدنى إذا كان البيان $G - e$ غير مترابط ضلعيًّا من الدرجة k لكل $e \in E(G)$. أثبت أن $\delta(G) = k$ عندما يكون G مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة K بحده الأدنى، (مساعدة: خذ في الحسبان مجموعة صغرى S، بحيث إن $|[S,\overline{S}]| = k$، إذا كانت $|S| \neq 1$، فاستخدم $G - e$ لبعض e الموجود في $E(G[S])$ وذلك للحصول على مجموعة ثانية T تحقق أن $|[\overline{T},T]| = k$ بحيث إن S، T تعارض التمرين 36.2.4

(انظر: Mader [1971] و Lovász [1979,p285]).

38.2.4. لقد أثبت Mader [1978] ما يأتي:

«إذا كان z رأسًا لبيان G، بحيث إن $d_G(z) \notin \{0,1,3\}$ ، وكان z غير واقع على ضلع قاطع (cut- edge)، فإن له جارين هما: x و y، بحيث إن $\kappa_{G-xz-yz+xy}(u,v) = \kappa_G(u,v)$ لكل u,v الموجودة في $V(G)-\{z\}$» . استخدم نظرية Mader والتمرين 37.2.4 لإثبات نظرية التوجيه لـ Nash – Williams التي تنص على وجود توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة k لكل بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k$. (تعليق: توجد صيغة (نسخة) أضعف من نظرية Mader في مقالة Lovász العام [1979، ص 286 - 288]، والتي تعطي بدورها أيضًا وبالطريقة نفسها نظرية Nash-Williams).

3.4 مسائل تدفق الشبكات (Network Flow Problems)

افترض أن لدينا شبكة من الأنابيب حيث تسمح الصمامات بالجريان في إتجاه واحد فقط. وافترض أن لكل أنبوب سعة لكل وحدة زمن. نعمل نموذجًا بيانيًّا لذلك من خلال تمثيل كل نقطة اتصال (مربط) برأس، وكل أنبوب بضلع (موجة) موزون بالسعة. وكذلك نفترض أن التدفق لا يتراكم عند مربط. الآن، نطرح السؤال الآتي: إذا أعطينا الموقعين s و t في الشبكة، فما مقدار أكبر تدفق (لكل وحدة زمن) من s إلى t؟

لاحظ أن هذا السؤال يظهر من خلال عدة سياقات. فمثلاً، يمكن أن تمثّل الشبكةُ شبكةَ طرق، وكذلك مدى قدرتها على استيعاب حركة السير. أو يمكن أن تمثل شبكة حواسيب قادرة على بث المعلومات أو نقلها، أو شبكة كهرباء وقدرتها على تحمل تمرير التيار الكهربائي. هناك الكثير من التطبيقات في الصناعة، وفي حل مسائل القيم القصوى (الصغرى والعظمى). وهنا لا بدّ لنا من الإشارة إلى كتاب أساسي في الموضوع وهو كتاب Ford – Fulkerson الذي ظهر في العام 1962م، هذا بالإضافة إلى كتاب أحدث ظهر في العام 1993م وهو الكتاب الذي ألّفه كلٌّ من Ahuja – Management – Orlin حيث يغطي هذا الكتاب بصورة شاملة مسائل التدفق عبر الشبكات.

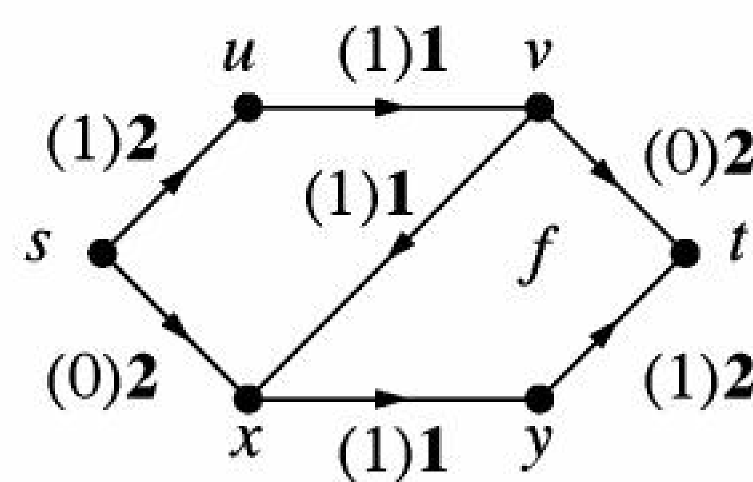
1.3.4. تعريف: نعرِّف الشبكةَ على أنها بيان موجه، بحيث توجد لكل ضلع e في هذا البيان سعة معينة هي $c(e)$، حيث إن $c(e) \geq 0$ ، وله رأس مصدر (منبع) (source S vertex) ورأس مصب t (sink vertex)، وكذلك تسمى الرؤوس نقاط التقاء (Nodes) . إن التدفق (الجريان) f يحدد قيمة $f(e)$ لكل ضلع e. وسنستخدم الرمز $f^+(v)$ للتدليل على التدفق الكلي على الأضلاع المغادرة إلى الرأس v و $f^-(v)$ للإشارة إلى التدفق الكلي على الأضلاع الداخلة إلى الرأس v (الموجه في اتجاه v) . ونقول إن التدفق عملي أو (ملائم) إذا حقق القيود على السعة وهي: $0 \geq f(e) \geq c(e)$ وذلك لكل ضلع e، وكذلك إذا حقق قيود المحافظة على التدفق وهي: $f^+(v) = f^-(v)$ لكل نقطة التقاء v، حيث $v \notin \{s,\ t\}$.

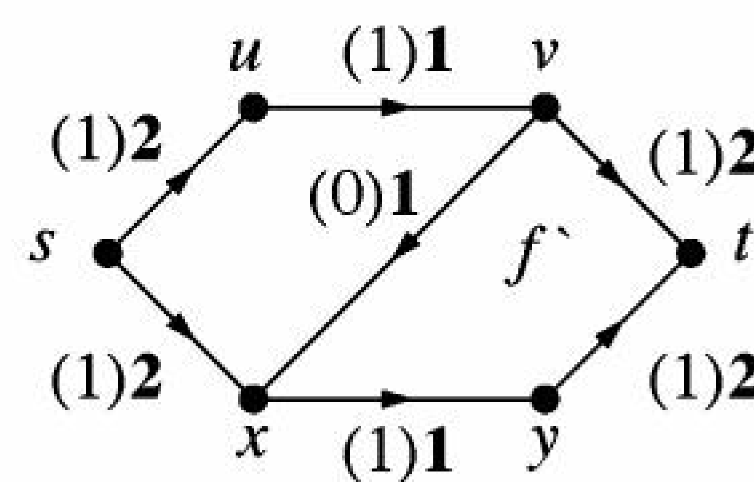
أكبر تدفق للشبكة (Maximum Network flow)

أولاً: سنأخذ في الحسبان مسألة إيجاد أكبر قيمة للتدفق إلى مصب.

2.3.4. تعريف: تعرَّف القيمة $val(f)$ للتدفق على أنها محصلة التدفق من خلال المصبِّ التي تساوي $f^-(t) - f^+(t)$. ونعرِّف أكبر تدفق على أنه تدفق ملائم (عملي) له أكبر قيمة.

3.3.4. مثال: التدفق الصفري (zero flow) يحدد تدفق صفر لكل ضلع، وهو تدفق ملائم. وفي الشبكة أدناه، نوضح تدفقًا ملائمًا غير صفري، حيث تُمثِّل السعةُ بالخط الغامق، وتظهر قيم التدفق بين





الأقواس لاحظ أن التدفق f الموجود لدينا يعيِّن القيم: $f(sx) = f(vt) = 0$ و $f(e) = 1$ لكل ضلع e من الأضلاع المتبقية، وهذا تدفق ملائم قيمته تساوي 1.

إن المسار من المنبع إلى المصبِّ الذي له سعة زائدة يسمح لنا بزيادة التدفق. في هذا المثال، لا يوجد مسار تبقى له سعة زائدة، ولكن التدفق f' حيث $f'(vx) = 0$ و $f'(e) = 1$ لكل $e \neq vx$ له قيمة 2، لاحظ أن التدفق f له قيمة عظمى حيث لا يوجد تدفق آخر ملائم من خلال زيادة التدفق على بعض الأضلاع، ولكن f لا يمثل أكبر تدفق. لذا، نحتاج إلى طريقة أعمّ لزيادة التدفق؛ حيث سنسير رجوعًا إلى الخلف (بعكس الأسهم) على الأضلاع التي يكون التدفق عليها مختلفًا عن الصفر، هذا بالإضافة إلى السير نحو الأمام على الأضلاع التي تتمتع بسعة زائدة. ففي مثالنا هذا، نستطيع السير من s إلى x إلى v إلى t.

إن زيادة التدفق بمقدار 1 على كل من sx و vt وإنقاصه بمقدار 1 على vx يحوِّلُ f إلى f'. ■

4.3.4. تعريف: افترض أن f تدفق ملائم (مناسب)، في شبكة N. إن المسار (المزيد) الموسّع الخاص بـ f هو مسار p من المنبع إلى المصبّ في البيان G المتضمن بالشبكة؛ بحيث إنه لكل $e \in E(p)$ يتحقق ما يأتي:

a) إذا سار المسار p مع الضلع e في اتجاه الأمام، فإن $f(e) < c(e)$.

b) إذا سار المسار P مع الضلع e في عكس اتجاه السهم (في اتجاه الخلف)، فإن $f(e) > 0$.

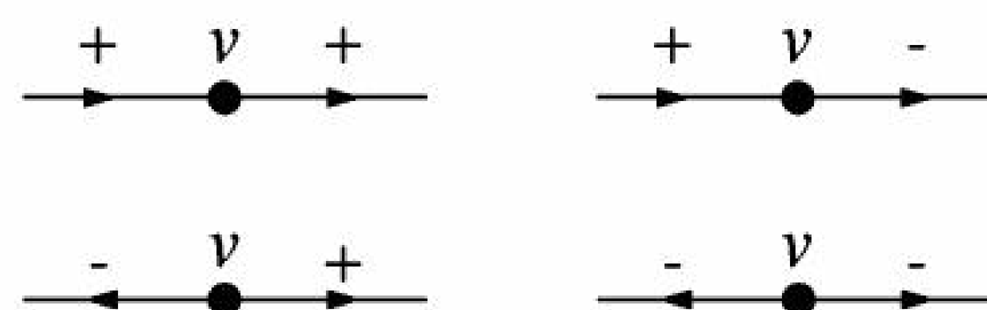
افترض أن $\epsilon(e) = c(e) - f(e)$ عندما يسير P إلى الأمام على e، وافترض أن $\epsilon(e) = f(e)$ عندما يسير P إلى الخلف على e. نعرّف مقدار تحمل P (tolerance of P) على أنه $\min_{e \in E(p)} \epsilon(e)$.

كما في المثال 3.3.4، يؤدي المسار الموسع لـ f إلى تدفق قيمته أكبر. ويضمن لنا الموسع الخاص بـ f أن مقدار التحمل يكون موجبًا، وهذه الكمية تساوي الزيادة في قيمة التدفق.

5.3.4. تمهيدية. افترض أن P مسار موسع خاص بـ f له تحمل يساوي z، إن تغيير z بـ $+z$ على الأضلاع التي يسير عليها p إلى الأمام وبـ $-z$ على الأضلاع التي يسير عليها P إلى الخلف يُنْتِجُ تدفقًا ملائمًا f' يحقق أن $val(f') = val(f) + z$.

الإثبات: إن تعريف مقدار التحمل يضمن لنا أن $0 \leq f'(e) \leq c(e)$ وذلك لكل ضلع e، لذا، فإن القيد على السعة يتحقق. أما بالنسبة إلى قيود المحافظة (الإبقاء) على التدفق، فإننا نحتاج إلى اختبار رؤوس P؛ لأن التدفق لا يتغير في الأماكن الأخرى.

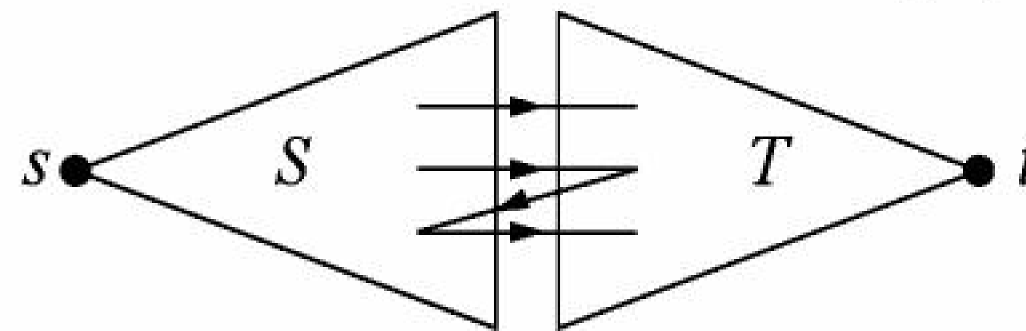
إن أضلاع P التي تقع على رأس داخلي v للمسار P تحدثُ في إحدى الحالات الأربع الموضحة في الشكل أدناه. وفي كل حالة، فإن التغير في التدفق الخارج من v يساوي التغير في التدفق الداخل إلى v. لذا، فإن محصلة التدفق الخارج من v تبقى صفرًا في f'. وأخيرًا، لاحظ أن محصلة التدفق عبر المصب t تزداد بمقدار z. ■



إن التدفق من خلال الأضلاع التي يتم السير عليها في اتجاه الخلف لا يختفي، وإنما أُعيد توجيهه. وأن التوسعة في المثال 3.3.4 تقطع مسار التدفق، وتمدد كل جزء ليصبح مسارَ تدفقٍ جديدًا. وسنقوم بعد قليل بعرض خوارزمية لإيجاد المسارات الموسعة.

في هذه الأثناء، نرغب أن نجد طريقًا سريعة لمعرفة ما إذا كان التدفق الموجود لدينا أكبر ما يمكن. وفي المثال 3.3.4، ظهر لنا أن الأضلاع المركزية (central edges) تمثل عنق الزجاجة «bottleneck"، حيث إننا حصلنا على سعة 2 فقط عندما سرنا من نصف الشبكة عن اليسار إلى نصفها عن اليمين. وستعطينا هذه الملاحظة إثباتًا على أن قيمة التدفق لا يمكن أن تكون أكبر.

6.3.4. تعريف: نعرف القاطع للمنبع/ المصبّ على أنه المجموعة $[S, T]$ التي تتألف من الأضلاع الصادرة من مجموعة المنبع S إلى مجموعة المصبّ T حيث تقوم كل من S و T على تجزئة مجموعة نقاط الاتصال (الرؤوس) حيث $s \in S$، و $t \in T$. تُعرَّف سعة القاطع $[S, T]$ على أنها المجموع الكلي للسعات على أضلاع $[S, T]$ ويرمز إليها بالرمز $\text{Cap}(S, T)$.



تذكر أن $[S, T]$ في البيان الموجه تمثل مجموعة الأضلاع التي رؤوسها في T وذيولها في S. لذا، فإن $Cap\ [S, T]$ لا تتأثر إطلاقًا بالأضلاع من T إلى S.

إذا كان $[S, T]$ قاطعًا معطًى، فإن كل مسار من s إلى t يستخدم ضلعًا من $[S, T]$ على الأقل. لذا، فإن الحدس يقتضي أن يكون التدفق محصورًا بـ $Cap\ (S, T)$، ولجعل هذا الكلام دقيقًا، فإننا نعمِّم (نمدِّد أو نوسِّع) مفهوم محصلة التدفق (net flow) لمجموعات من نقاط الاتصال (الرؤوس). اجعل $f^{+}(U)$ ترمز إلى التدفق الكلي على الأضلاع المغادرة إلى U، في حين ترمز $f^{-}(U)$ إلى التدفق الكلي على الأضلاع التي تدخل U، واستنادًا إلى ذلك، فإن محصلة التدفق الخارج من U هي: $f^{+}(U) - f^{-}(U)$.

7.3.4. تمهيدية. إذا كانت U مجموعة نقاط اتصال في شبكة، فإن محصلة التدفق الخارج منها تساوي مجموع محصلة التدفق الخارج من الرؤوس الموجودة فيها، وعلى وجه الخصوص إذا كان f تدفقًا ملائمًا، وكان $[S, T]$ قاطع منبع / مصبّ، فإن محصلة التدفق الخارج من S، ومحصلة التدفق الداخل إلى T تساوي $val\ (f)$.

الإثبات: لاحظ أننا نريد إثبات أن:

$$f^{+}(U) - f^{-}(U) = \sum_{v \in U}[f^{+}(v) - f^{-}(v)]$$

خذ بالحسبان مساهمة التدفق $f(x\,y)$ على الضلع $x\,y$ في كل طرف من طرفي المعادلة (1) أعلاه. إذا كان كلّ من x, y في U، فإن $f(x\,y)$ لا تسهم بأي شيء في الطرف الأيسر، ولكنها تسهم بمقدار موجب (بواسطة $f^{+}(x)$) وبمقدار سالب (بواسطة $f^{-}(y)$) على الطرف الأيمن. إذا كان $x, y \notin U$، فإن $f(x\,y)$ لا تسهم بأي من الطرفين، أما إذا كان $x\,y \in [U, \overline{U}]$ فإنها تسهم بمقدار موجب لكل مجموع. ولكن إذا كان $xy \in [\overline{U}, U]$ فإنها تسهم بمقدار سالب لكل مجموع. وبالجمع على الأضلاع جميعها نحصل على المساواة.

لاحظ أنه عندما يكون $[S, T]$ قاطع منبع/ مصبّ، و f تدفقًا ملائمًا، فإن محصلة التدفق من الرؤوس في S تعطي المجموع $f^{+}(s) - f^{-}(s)$، في حين تعطي محصلة التدفق من الرؤوس في T المجموع $f^{+}(t) - f^{-}(t)$ التي تساوي $-val\ (f)$. لذا، فإن محصلة التدفق عبر أي قاطع منبع/ مصبّ تساوي كلًا من محصلة التدفقين الخارج من S والداخل إلى t. ■

8.3.4. النتيجة: (ازدواجية ضعيفة): (weak duality)

إذا كان f تدفقًا ملائمًا، وكان $[S, T]$ قاطع منبع / مصبّ، فإن $val\ (f) \geq Cap\ (S, T)$.

الإثبات: من التمهيدية، نعلم أن قيمة f تساوي محصلة التدفق الخارج من S. لذا فإن:

$val\ (f) = f^+(S) - f^-(S) \leq f^+(S)$؛ لأن التدفق إلى s لا يقل عن صفر. وبما أن قيد السعة يتطلب أن يكون $f^+(S) \leq cap\ (S, T)$، فإننا نحصل على $val\ (f) \leq cap\ (S, T)$.

إن قاطعًا من بين القواطع منبع/ مصبّ ذا سعة صغرى يعطي أفضل حدٍّ على قيمة التّدفّق. وهذا يعرف مسألة أصغر قاطع (القاطع الذي يعطي قيمة صغرى للتدفق). وتعدّ المسائل المتعلقة بأكبر تدفق وأقل قاطع في شبكة معينة مسائل أفضلية (أمثلية) ازدواجية (ثنوية).

لاحظ[1] أنه إذا كان لدينا تدفق قيمته α، وقاطع قيمته α، فإن متباينة الازدواجية في النتيجة 8.3.4 تثبت أن القاطع هو قاطع أصغر، وأن التدفق هو تدفق أكبر.

إذا وُجد حلول لكل مرحلة من المراحل لها القيم نفسها لكل من مسائل القيم العظمى والقيم الصغرى (ازدواجية قوية) فيوجد دائمًا إثبات قصير لمسائل الأمثلية، علمًا بأن هذا لا ينطبق على المسائل ذات الصبغة الازدواجية جميعها (تذكر مسائل المواءمة والتغطية للبيانات)، إلا أنها تتحقق للمسائل المتعلقة بأكبر تدفق وأصغر قاطع.

إن خوارزمية Ford − Fulkerson تبحث عن مسار موسع من أجل زيادة قيمة التدفق، وإذا لم تجد مثل هذا المسار، فإنها تجد قاطعًا له القيمة نفسها (السعة) كهذا التدفق، ومن النتيجة 8.3.4 نعلم أن كلًّا منهما هو الأمثل. إذا لم توجد متتالية توسيعات ممكنة، فإن إعادة العمليات وتكرارها تحقق المساواة بين قيمة أكبر تدفق وسعة أصغر قاطع.

9.3.4. خوارزمية (Ford − Fulkerson) لوضع العلامات (التسميات). المدخلات (input) : تدفق ملائم في شبكة. المخرجات (النتائج) (output): مسار موسع لـ f ، أو قاطع سعته $val\ (f)$.

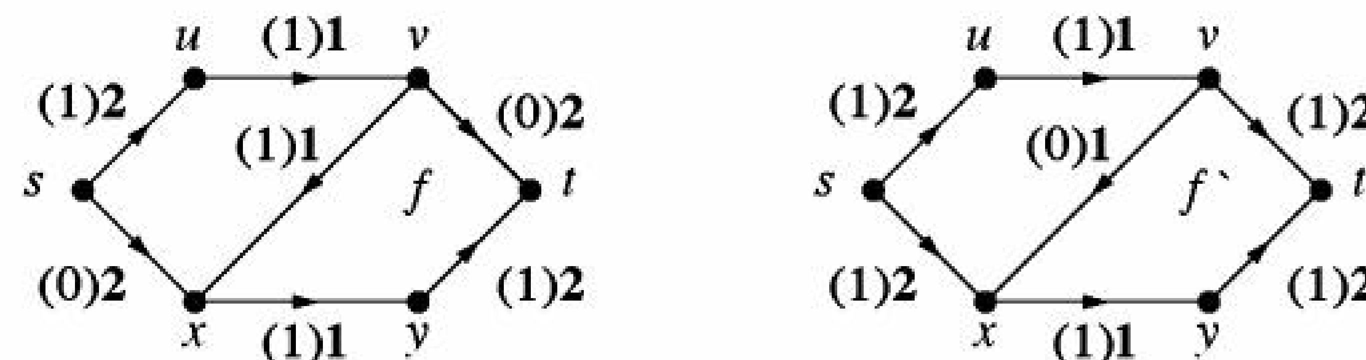
الفكرة :(*idea*) أوجد نقاط الاتصال (الرؤوس أو العقد) التي يمكن الوصول إليها من s بمسارات لها قدرة احتمال (استيعاب) موجبة. إن الوصول إلى t يكمل المسار الموسع لـ f. خلال البحث، اجعل R تمثل مجموعة الرؤوس التي أعطيت علامة الوصول (*Reached*) أو وصلت، في حين تمثل S مجموعة جزئية من R أعطيت علامة (*searched*) بُحثت. البداية : (initiliazation) $R = \{s\}$، $S = \emptyset$

خطوات العمل (interaction): اختر v في $R - S$

لكل ضلع vw حيث إن $(f(vw) < c(vw))$ ، و أن $w \notin R$، أضف w إلى R لكل ضلع داخل uv حيث $f(uv) > 0$ و $u \notin R$، أضف u إلى R. أعط العلامة وصل (reached) لكل رأس أضيف إلى R، وسجِّل v على أنه الرأس الذي تم الوصول من خلاله، وبعد اختبار الأضلاع جميعها عند v، أضف v إلى S.

في هذه المرحلة، إذا تمّ الوصول إلى المصبّ t (ضعها في R)، ثم تتبع المسار الذي يصل إلى t، فإنّ هذا يعطي المسار الموسع المنشود لـ f . وقف عند هذا الحد. إذا كانت $R = S$، فعُدْ إلى القاطع $[S, \bar{S}]$ ثم توقف، وبعكس ذلك، أعِد الخطوات السابقة نفسها.

10.3.4. مثال: في الشكل أدناه عن اليسار، تجد الشبكة الموجودة في المثال 3.3.4 التي تدفقها f استعن بالخوارزمية السابقة (9.3.4) أولًا، نبحث من s حيث نجد سعة زائدة لكل من u و x. لذا، سنعطيهما العلامة وصلت. الآن، لدينا r, x في $R - S$. لاحظ وجود سعة زائدة على كل من uv و xy. لذا، فإن البحث من u لا يوصل إلى شيء، إذن، فالبحث من x لا يصل إلى y. على أي حال، يوجد تدفق غير صفري على vx. وهنا، نضع علامة v من x. الآن، v هو1العنصر الفريد في $R - S$، وبالبحث من v نصل إلى t . لاحظ أننا علمنا t من v في حين علّمنا v من x، أما x، فعلّمناه من s. لذا، فإننا وجدنا المسار s, x, v, t .



(1) تأتي مسائل الازدواجية من البرمجة الخطية. ولأغراضنا، فإن هذه المسائل تتعلق بمسائل كل من القيم العظمى والصغرى، حيث إن $b \geq a$ عندما تكون a و b حلولًا ملائمة (مناسبة) لمسائل كل من القيم العظمى والصغرى على الترتيب. ولمزيد من المعلومات؛ انظر الجزء 1.8.

إن قدرة التحمل على هذا المسار هي 1. إذن، فهذه التوسعة تزيد التدفق بمقدار 1. في التدفق الجديد f' الموجود عن يمين الشكل، لاحظ أن كل ضلع له تدفق يساوي 1 (unit flow) ما عدا. $f'(vx) = 0$ لذا، وعند استخدام خوارزمية العلامات مرة ثانية، فإننا نحصل على سعة زائدة على كل من su و sx. إذن، نستطيع تعليم (وضع علامة) $\{u, x\}$، ولكننا لا نستطيع وضع علامات على أي رؤوس أخرى من هذه الرؤوس. لذلك، نقف مع $R= S = \{ s, u, x\}$. إن سعة القاطع الناتج $[S,\bar{S}]$ هي 2، وهي تساوي val(f')، وتثبت أن f' تدفق أكبر (ذو قيمة عظمى). ■

لاحظ أن الاستخدام المتكرر لخوارزمية وضع العلامات يسمح لنا بحل مسائل القيم العظمى للتدفق، كما أنها تثبت العلاقة الازدواجية القوية.

11.3.4. نظرية: (نظرية أكبر تدفق - أصغر قاطع - Ford و[1956] Fulkerson) في كل شبكة، إن أكبر قيمة لتدفق ملائم تساوي أصغر سعة لقاطع منبع/ مصبّ.

الإثبات: في مسألة القيم العظمى للتدفق، يكون التدفق الصفري ($f(e) = 0$ لكل e) تدفقًا ملائمًا دائمًا، ويعطينا مكانًا نبدأ منه. إذا كان لدينا تدفق ملائم، فإننا نطبق خوارزمية وضع العلامات التي تقوم بإضافة رؤوس إلى S. (كل رأس مرة واحدة على الأكثر) وتقف عند $t \in R$ (يعدّ هذا تقدمًا) "breakthrough". أو تقف عندما $S = R$. في حالة إحراز التقدم، نحصل على مسار موسع لـ f، وزيادة في قيمة التدفق. بعد ذلك، نعيد خوارزمية وضع العلامات. عندما تكون السعات أعدادًا نسبية، نجد أن كل توسعة تزيد التدفق بمقدار من مضاعفات $1/a$ حيث a هي المضاعف المشترك الأصغر للمقامات. لذا، وبعد إجراء عدد محدود من عمليات التوسعة، فإنه يتم الوصول إلى سعة أحد القواطع. وعندها تقف خوارزمية وضع العلامات، وتكون $S = R$.

عندما تنتهي الخوارزمية بهذه الطريقة، ندعي أن $[S, T]$ هو قاطع منبع / مصبّ سعته $val(f)$، حيث $T = \bar{S}$، و f التدفقُ الحالي. وهو يعدّ قاطعًا؛ لأن $s \in S$ و $t \notin R = S$.

بما أن تطبيق خوارزمية وضع العلامات على التدفق f لا يدخل أيًّا من نقاط الاتصال الموجودة في T إلى R، فهذا يعني عدم وجود أي ضلع من S إلى T له سعة زائدة، ولا يوجد أي ضلع من T إلى S تدفقه غير صفري. لذا، فإن $f^+(S) = cap(S, T)$ و $f^-(S) = 0$. وبما أن محصلة التدفق الخارج من أي مجموعة تحوي المنبع ولا تحوي المصبّ تساوي $val(f)$، فإننا نكون قد أثبتنا أن:

$$.val(f) = f^+(S) - f^-(S) = f^+(S) = cap(S, T) \quad ■$$

يتطلب هذا الإثبات للنظرية 11.3.4 أن تكون السمات أعدادًا نسبية، وبعكس ذلك، فإن الخوارزمية 9.3.4 تعطي عددًا لا نهائي من المسارات الموسعة! لقد أعطى كلّ من Ford و Fulkerson مثالًا على هذه الحالة على عشرة رؤوس فقط. (انظر [Papadimitriou – Steigletz, [1982, P126 – 128)

في حين عدّل كلّ من Edmonds و Karp في العام [1972] خوارزمية وضع العلامات لاستعمال $(n^3 - n)/4$ توسعة على الأكثر، وذلك لشبكة لها n من الرؤوس بحيث تعمل هذه الخوارزمية للسعات الحقيقية جميعها (السعة عدد حقيقي). كما في مسألة المواءمة في البيانات الثنائية الفرع (النظرية 3. 2. 22) فإنه يمكن دائمًا عمل هذا من خلال البحث عن أقصر المسارات الموسعة. الآن، توجد خوارزميات أسرع. ومن أجل الاطلاع على معالجة هذا الموضوع بصورة أشمل يمكن الرجوع إلى ([1993] Ahuja – Mananti – orlin).

التدفقات الصحيحة (المتامة) (Integral flows)

نقصد بالتدفقات الصحيحة (المتامة) التدفقات التي يكون فيها التدفق على كل ضلع عددًا صحيحًا. في التطبيقات التوافقية (التركيبية) (combinatorial)، تكون السعات أعدادًا صحيحة عادة. ونرغب في إيجاد حلٍّ يكون فيه التدفق على كل ضلع عددًا صحيحًا.

12.3.4. النتيجة: (نظرية التتام) (**Integrality Theorem**).

إذا كانت السعاتُ في شبكة معينة أعدادًا صحيحةً جميعَها ، فإن تدفقًا ذا قيمة عظمى (أكبر) يحدِّد تدفقًا صحيحًا (متامًّا) لكل ضلع. وبالإضافة إلى ذلك، يوجد تدفق أعظم (أكبر) يمكن تجزئته إلى تدفقات قيمة كلّ منها واحد على مسارات من المنبع إلى المصبّ.

الإثبات: في خوارزمية وضع العلامات لكلٍّ من Ford وFulkerson ، إن التغيُّر في قيمة التدفق - عندما نجد مسارًا موسّعًا – يكون مساويًا لقيمة التدفق دائمًا، أو مساويًا للفرق بين قيمة التدفق والسعة، وعندما تكون هذه القيم أعدادًا صحيحة، فإن الفرق يبقى عددًا صحيحًا. وبالبدء من تدفق صفري، نلاحظ عدم وجود مرة أولى لظهور تدفق غير صحيح. لذا، فإن الخوارزمية تنتج تدفقًا أكبر (ذا قيمة عظمى) له تدفق صحيح على كل ضلع. وعند كل رأس داخلي، نعمل مواءمة بين وحدات التدفق الداخل من جهة مع وحدات التدفق الخارج من جهة أخرى، حيث يشكل هذا مسارات من s إلى t، وربّما يشكل حلقات. إذا ظهرت حلقة، فإننا ننقص التدفق على أضلاعها بمقدار 1. وبهذا نحذفها دون أن تؤثر في قيمة التدفق. وهذا يُبقي $val\ (f)$ من المسارات من s إلى t، كل منها يرتبط بوحدة من التدفق. ■



إن نظرية التتام تعطي مسارات تدفقها فقط. وعند التطبيق، نبني شبكات بحيث يكون هناك معنى لوحدات التدفق هذه.

إن الملاحظتين التاليتين تظهران أن نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع للشبكات ذات السعات الصحيحة (سعتها عدد صحيح) هي تقريبًا نظرية منجر نفسها المتعلقة بالمسارات المنفصلة ضلعيًّا في البيانات الموجهة.

13.3.4. ملاحظة: نظرية منجر من أكبر تدفق وأصغر قاطع.

افترض أن x و y رأسان في بيان موجّه D، اعتبر أن D شبكة منبعها x ومصبها y، وبسعة 1 لكل ضلع، لاحظ أن السعة 1 تؤكد أن وحدات التدفق من x إلى y ترتبط بمسارات من x إلى y في D منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. لذا، فإن التدفق الذي قيمته k يعطي مجموعة مؤلفة من k من هذه المسارات.

وبالمثل، فإن كل تجزئة S، T لمنبع / مصب تعطي مجموعة من الأضلاع، بحيث إن حذف هذه الأضلاع يجعل y غير قابل للوصول منّ x . هذه المجموعة هي $[S,\ T]$. وبما أن كل سعة تساوي 1، فإن حجم هذه المجموعة يساوي $cap\ (S,\ T)$.

من المحتمل ألا تكون المسارات والقاطعة الضلعية التي حصلنا عليها هي الأمثل، إلا أن نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع تعطينا:

$$\lambda'_D\ (x,\ y) \geq max\ val\ (f) = min\ cap\ (S, T) \geq \kappa'_D\ (x,\ y)$$

وبما أن $\kappa'(x,\ y) \geq \lambda'(x\ ,\ y)$ دائمًا، فإن المساواة تتحقق. ■

14.3.4. ملاحظة: أكبر تدفق وأصغر قاطع من نظرية منجر. لتبيان أن نظرية منجر تعطينا نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع حيث تكون السعات أعدادًا نسبية؛ خذ أي شبكة وحولها إلى بيان موجه من أجل تطبيق نظرية منجر. لاحظ أننا نستطيع افتراض أن السعات أعداد صحيحة من خلال ضرب مقامات السعات في المضاعف المشترك الأصغر لهذه المقامات.

افترض أن N شبكة بسعات صحيحة، شكل البيان الموجه D من خلال شطر الضلع الذي سعته j إلى j من الأضلاع لكل منها النقاط الطرفية نفسها، لاحظ أن مبدأ الازدواجية (للشبكة N) يعطي: $max\ val(f) \leq min\ cap(S,\ T)$. والآن، نستخدم نظرية منجر على D للحصول على معكوس المتباينة. لذا، وبالمقارنة بالملاحظة 13.3.4 فإن ما نرغب في الوصول إليه هو:

$$max\ val(f) \geq \lambda'_D\ (s,\ t) = \kappa'_D\ (s,\ t) \geq min\ cap\ (S\ ,\ T)$$

إن مجموعة $\lambda'\ (s,\ t)$ من المسارات من s إلى t المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا والموجودة في D تنهار إلى تدفق قيمته $\lambda'\ (s,\ t)$ في N، وبما أن عدد النسخ من كل ضلع في D يساوي سعة كل ضلع في N، فإن $max\ val(f) \geq \lambda'\ (s,\ t)$

الآن، اجعل F مجموعة فيها $\kappa'(s,\ t)$ ضلعًا تفصل t عن s في D. إذا كان $e \in F$، فإن صِغَرَ F (mimimality of F) يعطينا وجود مسار P من S إلى t في $(F - e)$-D وذلك من خلال e. وإذا وُجِدَت نسخة ثانية e' من الضلع $e = uv$ بحيث إن $e' \notin F$، فيمكن إعادة السير على P من خلال e' للحصول على مسار من s إلى t في $D - F$. لذا، فإن F تحوي النسخ جميعها، أو أنها لا تحوي أيًّا من النسخ لأي ضلع مكرر في D: وبناءً عليه، فإن $\kappa'(s,\ t)$ تساوي مجموع السعات على مجموعة من الأضلاع تفصل t عن s في N. وبافتراض أنَّ S مجموعةُ الرؤوس التي يمكن الوصول إليها من S في $D - F$، فإننا نحصل على: $cap\ (S,\ T) = \kappa'(s,\ t)$.

إن أصغر قاطع له هذه السعة على الأكثر. إذن، $min\ cap\ (S,\ T) \leq \kappa'(s,\ t)$. وبذلك نكون قد أثبتنا المتباينات المطلوبة أعلاه جميعها. ■

لاحظ أنه في حالة التطبيقات التركيبية (الحسابية) (Combinatorial) نجد أن نظرية منجر تعطي براهين أبسط من نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع (مثال ذلك النظرية 25.2.4). وعلى الرغم من ذلك، فإن الإثبات الذي قدمناه في الجزء 2.4 لنظرية منجر يُعَدُّ غير ملائم (خطيرًا) لتنفيذه خوارزميًّا. لذا، من الأنسب استخدام تدفق الشبكات وخوارزمية وضع العلامات لـ ford و Fulkerson عند إجراء الحسابات الكبيرة والكثيرة. وفي الحقيقة، إن معظم الخوارزميات التي تحسب مقدار الترابط في البيانات والبيانات الموجهة تستخدم طرقَ تدفق الشبكات. إن (stoer – wager [1994]) يعالج المسألة بشكل مختلف.

سنعرض نماذج أخرى من الشبكات لحلِّ المسائل التركيبية. فعلى سبيل المثال، يمكن الحصول على النسخ الموضعية الأخرى لنظرية منجر مباشرة.

15.3.4. ملاحظة: تحويلات أُخرى.

لكل نسخة من نظرية منجر، نحوّل مسألة المسار من خلال استعمال تدفق الشبكات التي سعة أضلاعها أعداد صحيحة؛ للحصول على نموذج شبكي لمسألة المسارات المنفصلة داخليًّا في بيان موجه D، ويجب أن نمنع وحدتين من التدفق من خلال أحد الرؤوس. يمكن عمل ذلك من خلال استبدال كل رأس v برأسين v^-, v^+ يرثان من v الأضلاع الداخلة إلى v والخارجة منها. وبإضافة ضلع سعته وحدة من v^- إلىً v^+ نستطيع حصر التدفق من خلال v بوحدة واحدة. لاحظ أنه بوَضْع سعات كبيرة (جوهريًّا ما لا نهاية) على الأضلاع التي كانت في D، نستطيع التأكيد على أن أصغر قاطع سيَحسبَ الأضْلاع من الشكل $v^-\ v^+$ فقط.

وللحصول على نموذج شبكي لمسألة المسارات المنفصلة ضلعيًّا في بيان G، يجب أن نسمح للتدفق بالمرور بأي من الطريقين على كل ضلع، ويمكن ذلك من خلال استبدال كل ضلع uv بضلعين موجهين uv و vu. وعندما

ترسل الشبكةُ وحدةَ تدفق في الاتجاهين على ضلع معين، فإن تأثير ذلك يعني عدم استخدام هذا الضلع إطلاقًا.

في كل حالة، يزودنا التدفق في الشبكة بمجموعة من المسارات، وأن أصغر قاطع يعطينا مجموعة فاصلة من الرؤوس أو الأضلاع. وكما في الملاحظة 13.3.4، فإن مبدأ الازدواجية يعطينا المساواة المنشودة في نظرية منجر. لاحظ أنه لإيجاد نموذج لمسألة المسارات المنفصلة داخليًّا في بيان معين، فإننا نحتاج إلى التحويلين. في التمارين 5 - 7 نطلب تفصيلات لهذه البراهين. ■



16.3.4. تطبيق: مسألة حذف فرق كرة القاعدة (Schwartz [1996])

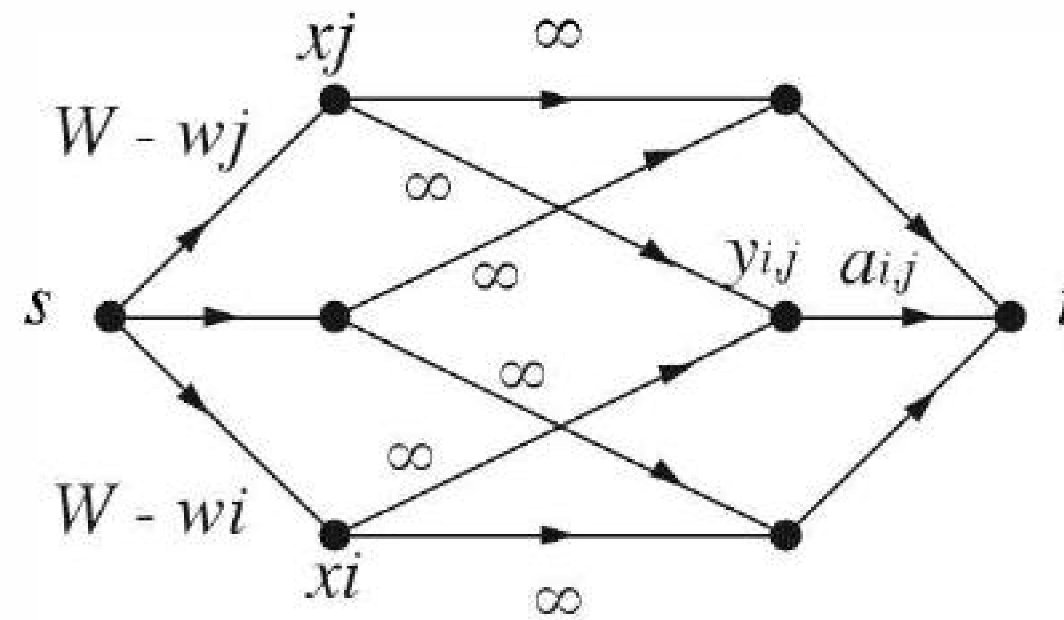
أحيانًا، وخلال موسم المباريات، ربما نتساءل حول إمكانية أن يبقى فريق معين X قادرًا على إحراز البطولة أم لا. وبكلمات أخرى، هل يمكن تحديد الرابحين للمباريات المتبقية بحيث لا يكون هناك فريق عدد مرات فوزه أكثر من عدد مرات فوز الفريق X؟ إذا كان الأمر كذلك، فإن مثل هذا التحديد يكون موجودًا بحيث يربح X المباريات المتبقية جميعها، حاصلاً على W فوزًا.

وهنا نرغب في معرفة ما إذا كان بإمكاننا اختيار الرابحين للمباريات الأُخرى، بحيث لا يوجد أيٌّ فريق عدد مرات فوزه أكثر من W. ولاختبار هذا الأمر، نجد شبكة ترتبط فيها وحدات التدفق بالمباريات المتبقية.

افترض أن الفرق الأخرى هي: $X_1, \dots X_n$، واجعل $x_1, \dots, x_n$ تمثل الرؤوس (نقاط الاتصال) التي تمثل الفرق. و $y_{i,j}$ تمثل $\binom{n}{2}$ زوجًا من الفرق، واجعل s تمثل المنبعَ، و t تمثل المصبَّ ارسم ضلعًا من s إلى كل رأس x_i يمثل فريقًا، وضلعًا من كل رأس يمثل زوجًا إلى t، لاحظ أنه يمكن الدخول إلى كل رأس (نقطة اتصال) $y_{i,j}$ بواسطة أضلاع من xi إلى x_j.

إن السعات تعطي نموذجًا للقيود. افترض أن سعة الضلع $y_{i,j}\,t$ هي $a_{i,j}$ التي تمثل عدد المباريات الحقيقية المتبقية بين الفريقين X_i و X_j. إذا علمت أن الفريق X_i قد ربح w_i مباراة لغاية الآن، فإن السعة على الضلع $s\,x_i$ هي $W - wi$ من أجل إبقاء x ضمن المنافسة.

وكذلك، فإن السعة على الأضلاع $xi\,y_{i,j}$ و $xj\,y_{i,j}$ هي ∞ (لاحظ أنَّ عددَ المباريات التي يربحها x_i من x_j مقيدٌ بالسعة على الضلع $y_{i,j}\,t$).



من نظرية التتام، نجد أن التدفق الأكبر ينقسم إلى وحدات تدفق ترتبط كل وحدة فيها بمباراة واحدة فقط، حيث يحددُ الضلعُ الأول الفريقَ الرابح، أما الضلعُ الأخير فيحددُ زوجَ الفرق المتبارية. إن قيمة التدفق للشبكة تكون مساوية للمجموع $\sum_{i,j} a_{i,j}$ إذا وفقط إذا أمكن لعب المباريات المتبقية جميعها على ألا يتجاوز عدد مرات فوز أي فريق W؛ وهذا هو الشرط اللازم لإبقاء X في المنافسة.

من نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع، هناك تدفق قيمته $\sum a_{i,j}$ على الأقل. افترض أن S,T قاطع له سعة منتهية، وافترض أن $Z = \{i : x_i \in T\}$. بما أن $c(x_i, y_{i,j}) = \infty$، فلا يمكن أن تكون $x_i \in S$ و $y_{i,j} \in T$. لذا،

فإن SS $y_{i,j} \in S$ عندما $i, j \notin Z$. ولتصغير السعة؛ نضع $y_{i,j} \in T$ عندما $\{i, j\} \subseteq Z$. الآن:

$$\mathrm{cap}(S,T) = \sum_{i \in Z} (W - wi) + \sum_{\{i,j\} \notin Z} a_{i,j}$$

إن الشرط اللازم لتكون سعة كل قطع $\sum a_{i,j}$ على الأقل يصبح ما يأتي:

$$\sum_{i \in Z} (W - wi) \geq \sum_{\{i,j\} \subseteq Z} a_{i,j} \quad \text{لكل } Z \subseteq [n]$$

لاحظ أن هذا الشرط ضروري؛ لأنه يشير إلى أننا نحتاج إلى تفاوت كاف في عدد مرات الفوز الكلي بين الفرق التي دليلها Z، وذلك من أجل تجهيز (تثبيت) الفرق الفائزة في المباريات جميعها من بين هذه الفرق. وبذا، نكون قد أثبتنا TONCAS. ■

إن التطبيقات التركيبية لتدفق الشبكات عادة ما تتضمن وجود شكل معين (هـ) إذا وفقط إذا وُجِدَ للشبكة المرتبطة بذلك تدفقٌ كبيرٌ كاف. وكما في التطبيق 16.3.4، فإن نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع تعطي شروطًا ضرورية وكافية لوجود هذه الشبكة. وهناك أمثلة أخرى موجودة في التمارين 5 – 7، وتمرين 13، والنظريتين 17.3.4 و 18.3.4.

العرض والطلب (اختياري) ((Supplies and Demand (Optional))

نعتمد فيما يأتي نموذجًا أعمّ للشبكات، حيث نسمح بوجود مصادر (ينابيع) متعددة وكذلك وجود مَصابّ متعددة، وسنربط بكل منبع x_i عرض $\sigma(x_i)$، وبكلّ مصبّ y_j دالة طلب $\partial(y_j)$. بالإضافة إلى قيود السعة على الأضلاع وقيود المحافظة على الرؤوس (نقاط الالتقاء) الداخلية نضيف قيود الانتقال إلى المنابع والمصاب.

$$f^+(x_i) - f^-(x_i) \geq \sigma(x_i) \quad \text{لكل منبع } x_i$$

$$f^-(y_j) - f^+(y_j) \geq \partial(y_j) \quad \text{لكل مصب } y_i$$

إن الشكل الناتج هو شبكة تنقل. لاحظ أنه إذا كانت قيمُ دالة الطلب موجبةً فإن التدفقَ الصفري غير ملائم. نحن نبحث عن تدفق ملائم يحقق هذه القيود الإضافية، وهذا ما نجده في مصطلح العرض والطلب الذي يقترح هذه القيود، حيث يجب أن نحقق الطلبات عند المصابّ دون أن نتخطى العرض المتوافر عند أي منبع. ويناسب هذا النموذج الشركات التي لها مراكز توزيع متعددة (منابع) ومخارج جزئية (مَصابّ).

افترض أن X و Y ترمزان إلى مجموعتي المنابع والمصابّ على الترتيب. وافترض أن $\sigma(A) = \sum_{v \in A} \sigma(v)$ و $\partial(B) = \sum_{v \in B} \partial(v)$ ترمزان إلى المعروض الكلي أو الطلب الكلي على مجموعة $A \subseteq X$ أو مجموعة $B \subseteq Y$. إذا كانت F مجموعة من الأضلاع، فاجعل $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$. إذا أعطينا مجموعة T من الرؤوس، فإن محصلة الطلب $\partial(Y \cap T) - \sigma(X \cap T)$ يجب أن تتحقق من التدفق من الرؤوس المتبقية. لذا، يجب أن تكون $c\ [\overline{T}, T]$ على الأقل بهذا المقدار، وتحقيق ذلك لكل مجموعة T يكون كافيًا للحصول على تدفق ملائم (TONCAS) .

17.3.4. نظرية : (Gale [1957]).

إذا كانت N شبكة تنقل منابعها X ومَصابُّها Y، فإن تدفقًا ملائمًا يتمّ إذا وفقط إذا تحقق أن $c([S, T]) \geq \partial(Y \cap T) - \sigma(X \cap T)$ لكل تجزئة لرؤوس N إلى المجموعتين S و T.

الإثبات: لقد سبق لنا أن لاحظنا ضرورة الشرط الموجود، ولإثبات كفاية هذا الشرط؛ سنبني شبكة جديدة N' بإضافة منبع كبير s (*super source*) ومصبٍّ كبير t، وبسعة $\sigma(x_i)$ لكل ضلع من s إلى كل x_i في X وبسعة $\partial(y_j)$ من كل ضلع $y_j \in Y$ إلى t. في هذه الحالة، يكون لشبكة النقل N تدفق ملائم إذا وفقط إذا وُجِدَ لـ N' تدفقٌ يشبع كل ضلع إلى t (تدفق قيمته $\partial(Y)$).

ومن نظرية فورد و فولكرسون نعلم أن لـ N' تدفقًا يساوي $\partial(Y)$ إذا وفقط إذا كان $\{(S \cup s, T \cup t) \geq \partial(Y)$ CAP لكل تجزئة S و T لرؤوس $\acute{N}$ $(V(N))$. إن القطع $[S \cup s, T \cup t]$ في N' يتألف من $[S, T]$ من N إضافة إلى الأضلاع من s إلى T، ومن S إلى t في N'. لذا، فإن:

$$.cap(S \cap s,\ T \cup t) = c(S,T) + \sigma(T \cap X) + \partial(S \cap Y)$$

وبناء عليه فإن $\text{cap}(S \cup s,\ T \cup t) \geq \partial(Y)$ إذا وفقط إذا كان

$$.c(S,\ T) + \sigma(X \cap T) \geq \partial(Y) - \partial(Y \cap S) = \partial(Y \cap T)$$

وهذا هو الشرط المفروض. ■

للأمثلة والشواهد المحددة، يعدّ بناءُ N ‹ النقطةَ المفتاحية (الأساسية)؛ لأنه يمكن إنتاج تدفق ملائم في N (عندما يكون موجودًا) من خلال تطبيق خوارزمية فورد وفولكرسون على الشبكة N'.

عندما نربط التكلفة (لكل وحدة تدفق) بالأضلاع، نحصل على مسألة تدفق لأقل تكلفة، والتي تعمم مسألة النقل في التطبيق 3. 2. 14. لقد ظهرت الخوارزميات التي تعطي حلولاً لمسائل التدفق لأقل تكلفة في المرجعين Ford –Fulkerson [1962]، و Ahuja- Managent- Orlin [1993] .

وسنناقش عدة تطبيقات لشرط Gale. لتكن $p= (p_1, \ldots, p_m)$ و $q = (q_1, \ldots, q_n)$ قائمتين من الأعداد الصحيحة، ويكون الزوجُ (p, q) بيانًا ثنائيًّا (التمرين 1. 4. 31) إذا وُجد بيانٌ ثنائي بسيط X, Y بحيث إن درجات رؤوس X هي: $P_1, \ldots, P_m$، ودرجات رؤوس Y هي: $q_1, \ldots, q_n$ ، من الواضح أن $\sum p_i = \sum q_j$ شرط ضروري، ولكنه غير كاف. لاختبار ما إذا كان الزوج (p, q) يمثل بيانًا ثنائيًا؛ جِدْ شبكةً ترتبط فيها وحدات التدفق بأضلاع البيان المنشود، حيث يكون الناتج نظيرًا للبيان ثنائي الفرع الذي نَحصل عليه من خلال شرط إيردوز وجالاي (Erdos – Gallai) المتعلق بمتتالية البيان (التمرين 28. 3. 3).

18.3.4. نظرية : (Gale [1957], Ryser [1957]) إذا كانت كلّ من p و q قائمتين من الأعداد الصحيحة غير السالبة، ولنقل إن:

$P = (p_1, \ldots, p_m)$ و $q = (q_1, \ldots, q_n)$ حيث $p_1 \geq \ldots \geq p_m$ و $q_1 \geq \ldots \geq q_n$ وإذا تحقق أن $\sum p_i = \sum q_j$، فإن الزوج (p, q) يُمَثِّلُ بيانًا ثنائيًّا إذا وفقط إذا تحقق أن $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} q_j$ ، حيث $1 \leq k \leq n$.

الإثبات: الضرورة: افترض أن G بيان بسيط ثنائي، رأساه X و Y يحقق الزوج (p, q) . خذ في الحسبان الأضلاعَ الواقعة على k من الرؤوس الموجودة في Y. بما أن G بيان بسيط، فإن $x_i \in X$ جميعها تقع على k من هذه الأضلاع على الأكثر. وكذلك، فإن x_i يقع على p_i من هذه الأضلاع على الأكثر. لذا، فإن $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\}$ يمثل حدًّا أعلى على الأضلاع الواقعة على أي k من رؤوس Y، وذلك مثل الرؤوس التي درجاتها $q_1, \ldots, q_k$

الكفاية: لديك الزوج (p, q)، جد الشبكة N، حيث أن سعة كل ضلع من x_i إلى y_j تساوي 1 لكل i, j. وافترض أن $\sigma(x_i) = p_i$ وإن $\partial(y_i) = q_j$. تمنح وحدة السعة الاضلاع المتعددة ، ويصبح الزوج (p, q) إذا وفقط إذا كان تدفق N ممكنًا.

الآن، يكفي أن نثبت أن الشرط المنصوص عليه في p و q يتضمن الشرط الموجود في النظرية 17.3.4. إذا كانت $S \subseteq V(N)$. اجعل $I(S) = \{i : x_i \in S\}$ و $J(S) = \{j : y_j \in S\}$.

الآن، لكل تجزئة S، T للمجموعة $V(N)$ نعلم أن $\sigma(X \cap T) = \sum_{i \in I(T)} p_i$ و $\partial(Y \cap T) = \sum_{j \in J(T)} q_j$. لذا، نحصل على أن: $c([S, T]) = |I(S)| \cdot |J(T)|$، وبجعل $K = |J(T)|$ ، فإن الكمية الأخيرة تصبح

$$c([S,T]) = |I(S)|k = \sum_{i\in I(s)} k \ge \sum_{i\in I(s)} \min\{p_i, k\}$$

وكذلك $\sum_{i\in I(T)} P_i \ge \sum_{i\in I(T)} \min\{p_i ,k\}$ و $\sum_{j\in J(T)} q_j \le \sum_{j=1}^{k} qj$ وبربط هذه المتباينات، فإن الشرط يعطي أن $c([S,T]) \ge \partial(Y \cap T) - \sigma(X \cap T)$. وبما أن هذا يتحقق لكل تجزئة S و T، إذن، يوجد تدفق ملائم للشبكة يعطي بدوره البيانَ ثنائي الفرع المنشود. ■

يمكن تعميم مسألة أكبر تدفق بافتراض حد أدنى غير سالب للتدفق المسموح في كل ضلع. إن قيود السعة تبقى حدًّا أعلى. لذا، نطلب أن يحقق التدفق $f(e)$ المتباينة: $L(e) \le f(e) \le u(e)$. علمًا بأننا ما زلنا نفترض شروط المحافظة على الرؤوس (نقاط الالتقاء) الداخلية. إذا وُجِدَ لدينا تدفقٌ ملائم، فإن تعديلاً بسيطًا لخوارزمية Ford و Fulkerson الخاصة بوضع العلامات يسمح لنا بإيجاد أكبر (أو أصغر) تدفق ملائم (تمرين 4). إن الصعوبة تكمن في إيجاد تدفق ابتدائي ملائم. وسنعرض التطبيق الآتي:

19.3.4. تطبيق: تدوير المصفوفات (Bacharach[1996])

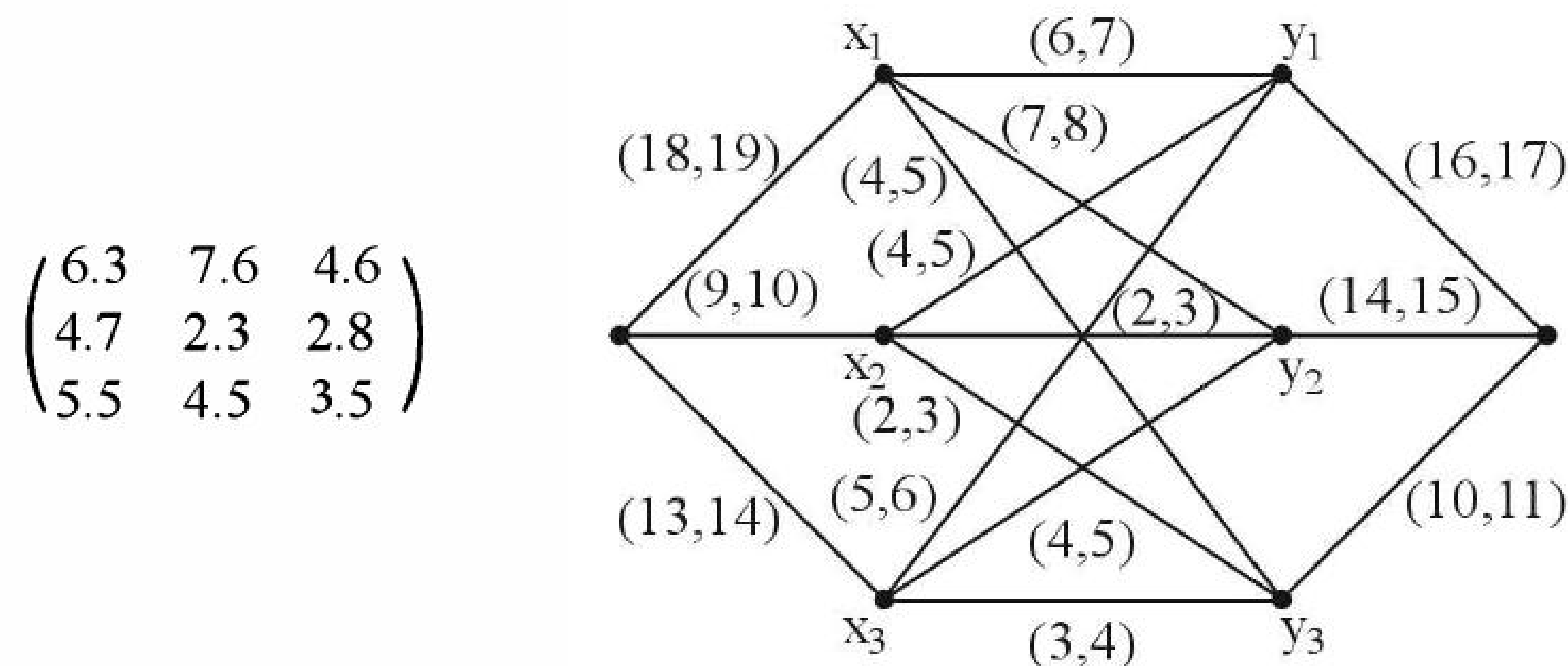
في بعض الأحيان، نرغب في تدوير مدخلات مصفوفة معينة لأقرب عدد صحيح أكبر من المدخلة أو أصغر منها. وكذلك نرغب في أن يكون مجموع عناصر الصّفّ أو العمود عددًا صحيحًا. إن مجموع كل صفّ أو عمود مدور يجب أن يكون تدويرًا لحاصل الجمع الأصلي لمدخلات هذا الصّفّ أو العمود. وتُسمى مصفوفةُ الأعداد الصحيحة الناتجة (إن وجدت) تدويرًا منسجمًا.

يمكن تمثيل مسألة التدوير المنسجم بوصفها مسألة تدفق ملائم. اجعل الرؤوس $x_1, \ldots, x_n$ تمثِّلُ الصفوفَ، في حين تمثل الرؤوسُ $y_1, \ldots, y_n$ أعمدةَ المصفوفة، أضف منبعًا s، ومصبًّا t، أضف الأضلاع sx_i و x_iy_i و y_it لقيم i و j جميعها. إذا كانت $a_{i,j}$ هي مدخلات المصفوفة، و $r_1, \ldots, r_n$ هي حاصل جمع مدخلات الصفوف، و $s_1, \ldots, s_n$ تمثل حاصل جمع مدخلات الأعمدة، اجعل:

$$l(sx_i) = \lfloor r_i \rfloor, l(x_i, y_i) = \lfloor a_{i,j} \rfloor, l(y_i t) = \lfloor c_j \rfloor$$

$$u(sx_i) = \lceil r_i \rceil, u(x_i y_i) = \lceil a_{i,j} \rceil, u(y_i t) = \lceil c_j \rceil$$

نجري اختبار التدفق الملائم من خلال تحويل المسألة إلى مسألة عادية عن أكبر تدفق . ومن خلال هذا التحويل، يمكننا استخدام شبكة تدفق لاختبار وجود تدوير منسجم. ■



20.3.4. الحل. الدوران والتدفق اللذان لهما حدود دنيا (سفلى).

في مسألة أكبر تدفق ذات الحدود العليا والحدود الدنيا على السعة على الأضلاع، يكون التدفق الصفري غير ملائم. لذا، فإن خوارزمية فورد وفولكرسون لوضع العلامات لا تجد مكانًا للبدء. حيث يجب الحصول على تدفق ملائم أولاً. وبعد ذلك، نستطيع تطبيق خوارزمية وضع العلامات من خلال إجراء تعديل بسيط على هذه الخوارزمية (التمرين 4).

في الخطوة الأولى، نضيف ضلعًا (سعته ما لانهاية) من المصبِّ إلى المنبع. يكون للشبكة الناتجة تدفقٌ ملائم يتَّسِمُ بالمحافظة عند كل (نقطة التقاء) رأس (تسمى دورانًا) إذا وفقط إذا كان للشبكة الأصلية تدفقٌ ملائم. في مسألة الدوران، لا يوجد منبعٌ ولا مصبٌّ. بعد ذلك، نحوِّل مسألة الدوران الملائم C إلى مسألة أكبر تدفقًا N من خلال استحداث عروض وطلبات عند الرؤوس (نقاط الالتقاء) ومن خلال إضافة منبع ومصبّ من أجل تحقيق فرضيات مسألة العرض والطلب. تحت قيد التدفق: $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ افترض أن $c(e) = u(e) - l(e)$ لكل ضلع e، وأن $l^-(v) = \sum_{e\in[V(C)-v,v]} l(e)$ و $l^+(v) = \sum_{e\in[v,V(C)-v]} l(e)$ و $b(v) = l^-(v) - l^+(v)$ لكل رأس v.

بما أن $l(uv)$ تسهم في $l^+(u)$ وفي $l^-(v)$، فإن $\sum b(v) = 0$. لاحظ أن الدوران الملائم f يجب أن يحقق قيود التدفق على كل ضلع، وكذلك يحقق أن: $f^+(v) - f^-(v) = 0$ عند كل رأس (نقطة التقاء). وبجعل $f'(e) = f(e) - l(e)$، نجد أن f تمثل دورانًا ملائمًا C إذا وفقط إذا كانت f' تحقق $0 \leq f'(e) \leq c(e)$ على كل ضلع، وأن $f'^+(v) - f'^-(v) = b(v)$ عند كل رأس.

لاحظ أن هذا ينقل مسألة الدوران الملائم إلى مسألة تدفق بعروض وطلبات. إذا كانت $b(v) \geq 0$، فإن v يزود الشبكة بتدفق مقداره $|b(v)|$، وبغير ذلك، فإن v يطلب تدفقًا بمقدار $|b(v)|$. لتجديد قيود المحافظة، نضيف منبعًا s تكون فيه سعة الضلع مساوية $b(v)$ لكل رأس v حيث $b(v) > 0$، وكذلك نضيف مصبًّا t تكون فيها سعة الضلع مساوية $-b(v)$ من كل رأس v حيث $b(v) < 0$، وهذا يكمل بناء الشبكة N.

افترض أن α تمثل السعة الكلية على الأضلاع المغادرة للمنبع s، بما أن $\sum b(v) = 0$، فإن السعة الكلية للأضلاع الداخلة إلى المصبِّ t تساوي α. الآن، يوجد لـ C دوران ملائم f إذا وفقط إذا كان لـ N تدفقٌ قيمته α (مشبع بالأضلاع جميعها الخارجة من s أو الداخلة إلى t). ■

21.3.4. النتيجة: افترض أن D شبكة لها قيود محافظة عند كل رأس (نقطة التقاء). يكون لهذه الشبكة دوران ملائم إذا وفقط إذا تحقق أن: $\sum_{e\in[S,\bar{S}]} l(e) \leq \sum_{e\in[\bar{S},S]} u(e)$ لكل $S \subseteq V(D)$.

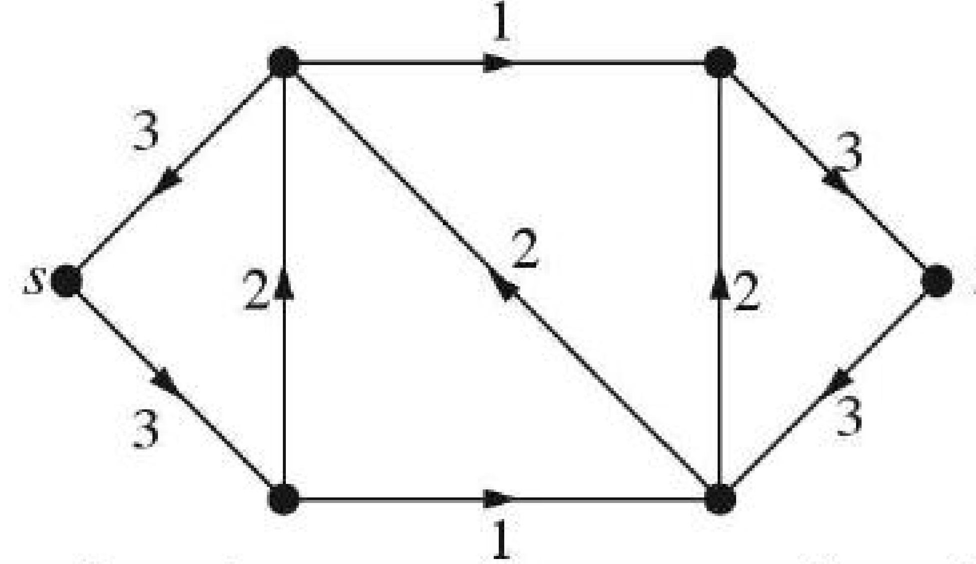
الإثبات: يمكننا الوقوف قبل الخطوة الأخيرة في نقاشنا للحل 20.3.4. وتوضيح مسألتنا بوصفها مسألة عرض وطلب في نموذج النظرية 17.3.4. بما أن $\sum b(v) = 0$، فإن الطريقة الفريدة لتلبية الطلبات جميعها هي استخدام المعروض كله. لذا، يوجد دوران إذا وفقط إذا وجد لمسألة العرض والطلب التي عروضها $\sigma(v) = b(v)$ لكل $\{v \in V(D) : b(v) \geq 0\}$ وطلباتها $\partial(v) = -b(v)$ لكل $\{v \in V(D) : b(v) < 0\}$.

لاحظ أن النظرية 17.3.4 تعطي توصيفًا للحالة التي يوجد فيها حلّ لهذه المسألة. وبإرجاع المسألة إلى الحدود العليا والدنيا على التدفق في المسألة الأصلية (التمرين 22)، فإن المعيار الموجود في النظرية 17.3.4 يصبح:

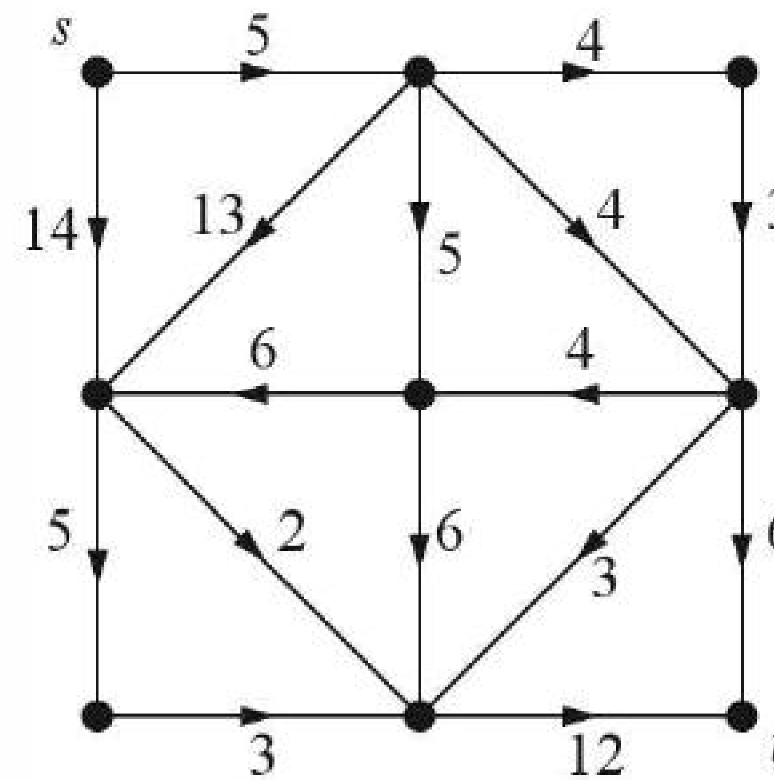
$\sum_{e\in[S,\bar{S}]} l(e) \leq \sum_{e\in[\bar{S},S]} u(e)$ لكل $S \subseteq V(D)$. ■

تمارين (Exercises)

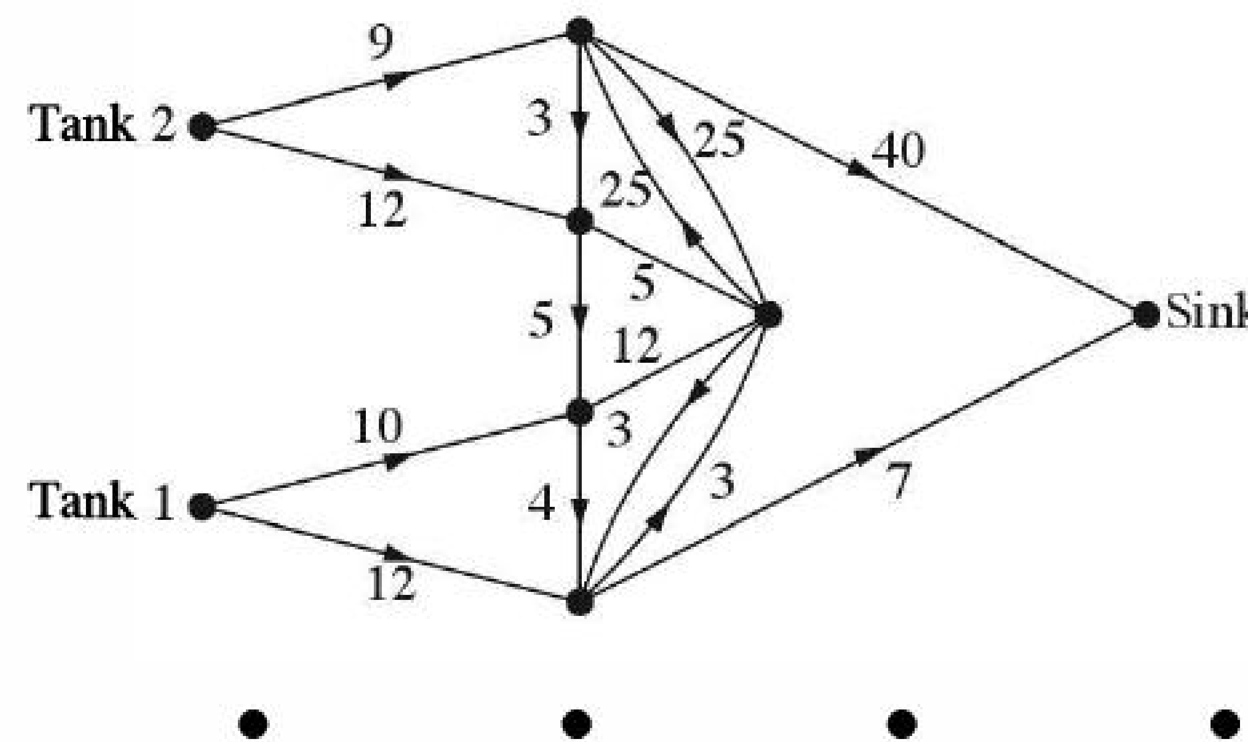
1.3.4. (-) في الشبكة المبينة أدناه. جد قائمة بالتدفقات الملائمة التي قيمها أعداد صحيحة، واختر تدفقًا ذا قيمة قصوى (عظمى). (يوضح هذا فائدة مبدأ الثنوية على البحث الشامل). أثبت أن هذا التدفق هو أكبر تدفق عن طريق إيجاد قطع له القيمة نفسها. حدد عدد القواطع من المنبع إلى المصبّ (تعليق: يوجد تدفق غير صفري قيمته صفر).



2.3.4. (-) في الشبكة الموضحة أدناه، أوجد أكبر تدفق من s إلى t. أثبت أن جوابك هو الأمثل عن طريق استخدام المسألة المرافقة التي تحصل عليها من مبدأ الثنوية (الازدواجية)، ووضح لماذا يعطينا هذا إثباتًا للأمثلية؟



3.3.4. (-) افترض أن مجلى مطبخ يسحب الماء من خزانين بحسب شبكة الأنابيب ذات السعات (لكل وحدة زمن) الموضحة في الرسم أدناه. جد أكبر تدفق. أثبت أن جوابك هو الأمثل عن طريق استخدام المسألة المرافقة التي تحصل عليها من مبدأ الثنوية (الازدواجية)، ووضّح لماذا يعطينا هذا إثباتًا للأمثلية.؟



• • • • •

4.3.4. افترض أن N شبكة لأضلاعها سعات معينة، ولنقاط الاتصال قيود محافظة بالإضافة إلى حدود دنيا $L(e)$ على التدفق عبر الأضلاع، بمعنى أننا نشترط أن $f(e) \geq L(e)$. إذا كان التدفق الملائم الابتدائي معطى، فبين كيف يمكن تعديل خوارزمية فورد وفولكرسون لوضع العلامات من أجل البحث عن أكبر تدفق ملائم عبر هذه الشبكة.

5.3.4. (!) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية منجر المتعلقة بالمسارات المنفصلة داخليًّا للبيانات الموجهة: $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$ عندما لا يكون xy ضلعًا. (مساعدة: استخدم التحويل الأول المقترح في الملاحظة 15.3.4).

6.3.4.(!) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية منجر المتعلقة بالمسارات المنفصلة ضلعيًّا للبيانات:

$k'(x,y) = \lambda'(x,y)$ (مساعدة: استخدم التحويل الثاني المقترح في الملاحظة 15.3.4).

7.3.4. (1) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية منجر المتعلقة بالرؤوس غير المتجاورة في البيانات: $k(x,y) = \lambda(x,y)$. (مساعدة: استخدم التحويلين المقترحين في الملاحظة 15.3.4).

8.3.4. افترض أن G بيان موجّه فيه $x, y \in V(G)$. وافترض أيضًا أن السعات قد حُدِّدَتْ على الرؤوس المختلفة عن x و y بدلاً من تحديدها على الأضلاع، وافترض وجود حدٍّ ثابت للتدفق الكلي عبر كل رأس، ولا يوجد أيُّ حصر على التدفق عبر الأضلاع، وضِّح كيف يمكن استخدام نظرية تدفق الشبكات العادية لتحديد أكبر قيمة لتدفق ملائم من x إلى y في البيان G الذي حُدِّدَتْ سعات رؤوسه.

9.3.4. استخدم تدفق الشبكات لإثبات أن البيان G يكون مترابطًا إذا وفقط إذا وُجِدَ لكل تجزئة لـ $V(G)$ لمجموعتين غير خاليتين S و T ضلعٌ له نقطة طرفية في S، وأخرى في T. (تعليق: يوجد إثبات مباشر لهذه المسألة في الفصل الأول. لذا، فهذا مثال على استخدام مطرقة ضخمة لقتل بعوضة أو ذبابة).

10.3.4. (!) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية كونج وإيجرفاري (König-Egervary) ($\alpha'(G) = \beta(G)$) إذا كان البيان G ثنائي الفرع).

11.3.4. أثبت أن خوارزمية المسار الموسّع للبيانات الثنائية الفرع (الخوارزمية 1.2.3) تمثل حالة خاصة من خوارزمية فورد وفولكرسون لوضع العلامات.

12.3.4 . افترض أن $[S, \overline{S}]$ و $[T, \overline{T}]$ قطعان من المنبع إلى المصبِّ في شبكة N:

a) أثبت أن $\text{cap}(S \cup T, \overline{S \cup T}) + \text{cap}(S \cap T, \overline{S \cap T}) \le \text{cap}[S, \bar{S}] + \text{cap}[T, \bar{T}]$
(مساعدة: ارسم رسمة، وخذ في الحسبان المساهمات من مختلف أنواع الأضلاع).

b) افترض أن $[S, \overline{S}]$ و $[S, \overline{T}]$ قطعان أصغران، استنتج من فرع a أن $[S \cup T, \overline{S \cup T}]$ و $[S \cap T, \overline{S \cap T}]$ هما أيضًا قطعان أصغران، واستنتج كذلك عدم وجود ضلع بين $S - T$ و $T - S$ له سعة موجبة.

13.3.4. (!) افترض أن عدة شركات أرسلت ممثلين عنها إلى أحد المؤتمرات؛ حيث تقوم الشركة i بإرسال m_i ممثلاً لها. يعقد منظمو المؤتمر عدة ورش عمل في الوقت نفسه عن طريق تقسيم المشاركين إلى عدة مجموعات، فالمجموعة رقم j تستطيع أن تستوعب n_j مشاركًا. وافترض أن منظمي المؤتمر يرغبون في توزيع المشاركين جميعهم على مجموعات العمل بحيث لا تضم المجموعة أكثر من ممثل واحد لكل شركة مشاركة، وافترض كذلك أن اكتمال المجموعات ليس ضروريًّا:

a) وضِّحْ كيف يمكن استخدام تدفق الشبكات لاختبار ما إذا أمكن تحقيق الشروط المفروضة أعلاه أم لا.

b) إذا كان عدد الشركات يساوي p، وعدد مجموعات العمل يساوي q، وافترض أنه وُضِعَ دليل على هذه المجموعات بحيث يحقق:

$m_1 \ge \cdots \ge m_p$ و $n_1 \le \cdots \le n_q$. أثبت أنه يمكن توزيع المشاركين على مجموعات العمل على أن تتحقق الشروط المفروضة جميعها إذا وفقط إذا تحقق أن $\sum_{i=1}^{k} m_i \le \sum_{j=1}^{l} n_j + k(q-l)$ لكل $0 \le k \le p$ و $0 \le l \le q$.

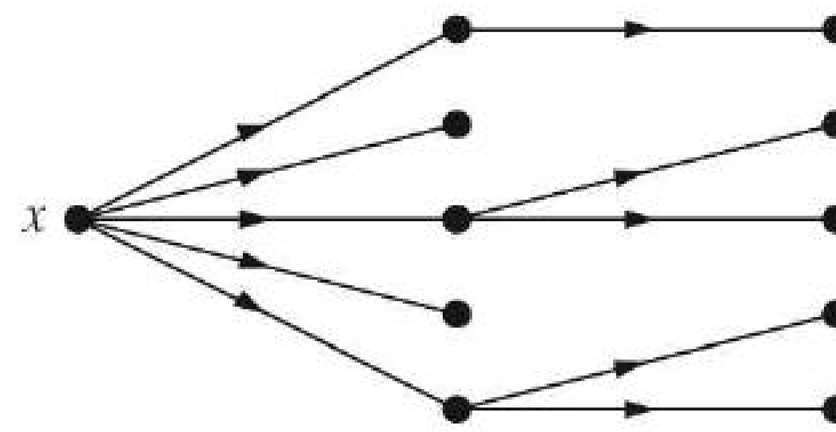
14.3.4. افترض أنه يوجد k من الأقسام الأكاديمية في إحدى الجامعات الكبيرة. وافترض أيضًا أننا نرغب في تعيين لجنة مهمة تختار أستاذًا من كل قسم، علمًا بأن بعض الأساتذة معينين تعيينًا مشتركًا بين قسمين أو أكثر، وافترض كذلك أنه لا يمكن تعيين أي شخص ليكون ممثلاً لأكثر من قسم، وافترض أيضًا أن عدد الأساتذة المساعدين يساوي عدد الأساتذة المشاركين ويساوي عدد الأساتذة في هذه اللجنة (افرض أن k تقبل القسمة على 3). بَيِّنْ كيف يمكن إيجاد مثل هذه اللجنة. (مساعدة: جد شبكة بحيث ترتبط وحدات التدفق بالأساتذة الذين تم اختيارهم لهذه اللجنة، وأن السعات تمثل القيود المختلفة، ثمّ وضّح كيفية استخدام هذه الشبكة لاختبار ما إذا

وُجدت مثل هذه اللجنة، وأوجدها إن وُجدت). ([1956] Hall).

15.3.4. افترض أن G بيان موزون. وافترض أيضًا أن قيمة الشجرة المولودة هي أصغر وزن على أضلاعها، وأن cap (السعة) من قطع أضلاع $[S, \overline{S}]$ هي أكبر وزن على أضلاع هذا القطع. أثبت أن أكبر قيمة لشجرة مولدة للبيان G تساوي أصغر cap (سعة) لقطع أضلاع في G. (Ahuja – Magnanti- orlin [1993,p538]).

16.3.4. (+) افترض أنَّ x رأسٌ، درجته الخارجية أكبر ما يمكن في دوري T. أثبت أنه يوجد لـ T شجرة مولدة موجهة جذرها x بحيث يكون بُعْدُ كل رأس عن x يساوي 2 على الأكثر، وبحيث تساوي الدرجة الخارجة لأي رأسٍ مختلف عن x 2 على الأكثر.

(مساعدة: جد شبكة بوصفها نموذجًا للمسارات المنشودة للرؤوس التي لا تكون خَلَفًا لـ x، وأثبت أن لكل قطع سعة كافية. تعليق: هذا يقوي القضية 30.4.1 عن الملوك في دوريات الألعاب: لا يوجد أي رأس بحاجة إلى أن يكون رأسًا متوسطًا لأكثر من رأسين آخرين [1996] Lu).



17.3.4. (- *) استخدم نظرية Gale و Ryser (نظرية 18.3.4) لتحديد ما إذا وُجدَ بيانٌ بسيط ثنائي الفرع تكون درجات رؤوس إحدى مجموعتي رؤوسه هي: (5،4،4،2،1) وكذلك درجات رؤوس المجموعة الثانية من رؤوسه هي: (5،4،4،2،1) أيضًا.

18.3.4 (- *) افترض أن $r=(r_1, \ldots, r_n)$ و $s=(s_1, \ldots, s_n)$. جد الشروط الضرورية والكافية للحصول على بيان موجه D رؤوسه $v_1, \ldots v_n$ بحيث يظهر كلُّ زوج مرتب مرة واحدة على الأكثر بوصفه ضلعًا، وبحيث إن $d^-(v_i) = s_i$ و $d^+(v_i) = r_i$ لكل i أيضًا.

19.3.4. (- *) جد تدويرًا منسجمًا للمعطيات الموجودة في المصفوفة أدناه. هل هذا التدوير فريد؟ (يجب أن تكون كلُّ مدخلةٍ صفرًا أو واحدًا).

$$\begin{pmatrix} .55 & .6 & .6 \\ .55 & .65 & .7 \\ .6 & .65 & .7 \end{pmatrix}$$

20.3.4. (*) أثبت أن كل مصفوفة حجمها 2×2 يمكن تدويرها تدويرًا منسجمًا.

21.3.4 . (*) افترض أن كل مدخلة من مدخلات المصفوفة التي حجمها $n \times n$ تقع بين $\frac{1}{n}$ و ($\frac{1}{n-1}$). صِفِ التدويرات المنسجمة لهذا المصفوفة جميعها.

22.3.4. (*) أكمل تفاصيل إثبات النتيجة 21.3.4، وذلك بإثبات الشروط الضرورية والكافية لوجود دوران في شبكة لها حدود دنيا وعليا.

23.3.4. (*!) يقال للبيان المنتظم من الدرجة $k + l$ بأنه قابل للتوجيه (k, l) إذا أمكن توجيهه بحيث تكون الدرجة الداخلة لكل رأس إما k أو l :

a) أثبت أن البيان G قابل للتوجيه (k, l) إذا وفقط إذا وُجدت تجزئة X, Y لرؤوسه $V(G)$ بحيث يتحقق لكل $S \subseteq V(G)$ ما يلي: $(k - l)(|X \cap S| - |Y \cap S|) \leq |[S,\overline{S}]|$ (مساعدة: استخدم النظرية 17.3.4).

b) استنتج: إذا كان G قابلاً للتوجيه (k, l)، وكانت $k > l$، فإن G يكون أيضًا قابلاً للتوجيه $(k-1, l+1)$ (Bondy – Murty [1976, p.210- 211].

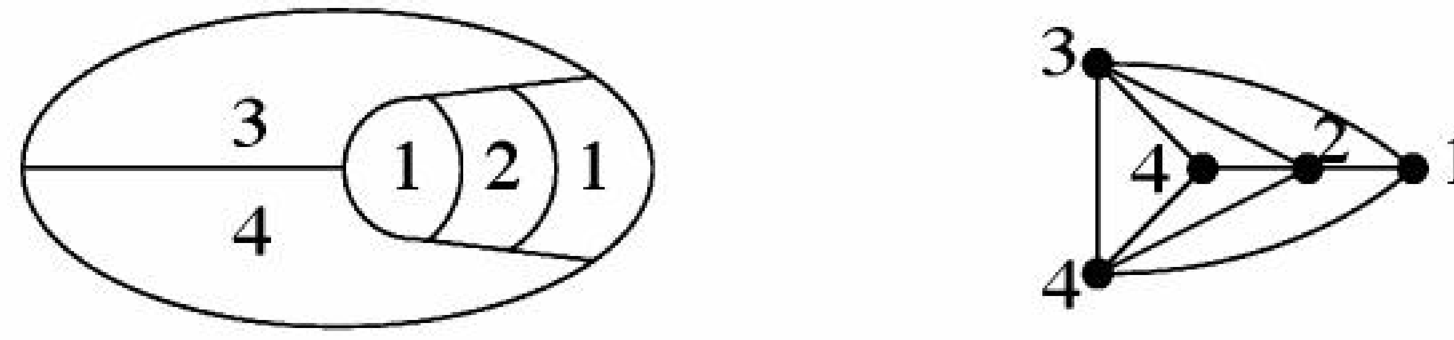
الفصل الخامس

تلوين البيانات (Coloring of Graphs)

1.5. تلوين الرؤوس والحدود العليا (Vertex Coloring and Upper Bounds)

استخدمنا تلوين البيانات في مثال تحديد مواعيد اجتماعات اللجان (المثال 11.1.1) من أجل إيجاد نموذج لهذه الاجتماعات، بحيث لا يكون لأي عضو لجنة اجتماعان في الوقت نفسه. وفي الجامعة مثلاً، فإننا نرغب بتحديد مواعيد الاختبارات النهائية بحيث لا يجتمع اختباران في الوقت نفسه لأي طالب. إن عدد المواعيد اللازمة هو العدد اللوني للبيان الذي يتجاور فيه مقرران إذا وُجِدَ طالب قد سجّل في هذين المقررين معًا.

إن تلوين مناطق خريطة معينة بحيث تكون ألوان المناطق المتجاورة مختلفة يعد مثالاً آخر. وسنعود إلى هذا المثال في الفصل 6. يوجد للخريطة التي عن يسار الشكل أدناه خمسُ مناطق، ويكفي أربعة ألوان لتلوينها. يعطي البيانان الموجودان عن يمين الشكل أدناه نموذجًا لعلاقة "الحدود المشتركة" والألوان المرتبطة بذلك. وتعدّ تسمية (أو وضع علامات دالة على) الرؤوس مرجعًا لمسائل التلوين.



تعريفات وأمثلة (Definitions and Examples)

إن اسم تلوين البيانات مأخوذ من تطبيق تلوين الخرائط، ونحدّد عادة بتحديد علامات دالة (تسميات) للرؤوس. وفي الحالة التي لا تكون فيها أهمية للقيمة العددية للعلامة الدالة، فإننا نسمي هذه العلامات «ألوانًا»؛ حتى نبين أن هذه العلامات يمكن أن تكون عناصر لأي مجموعة.

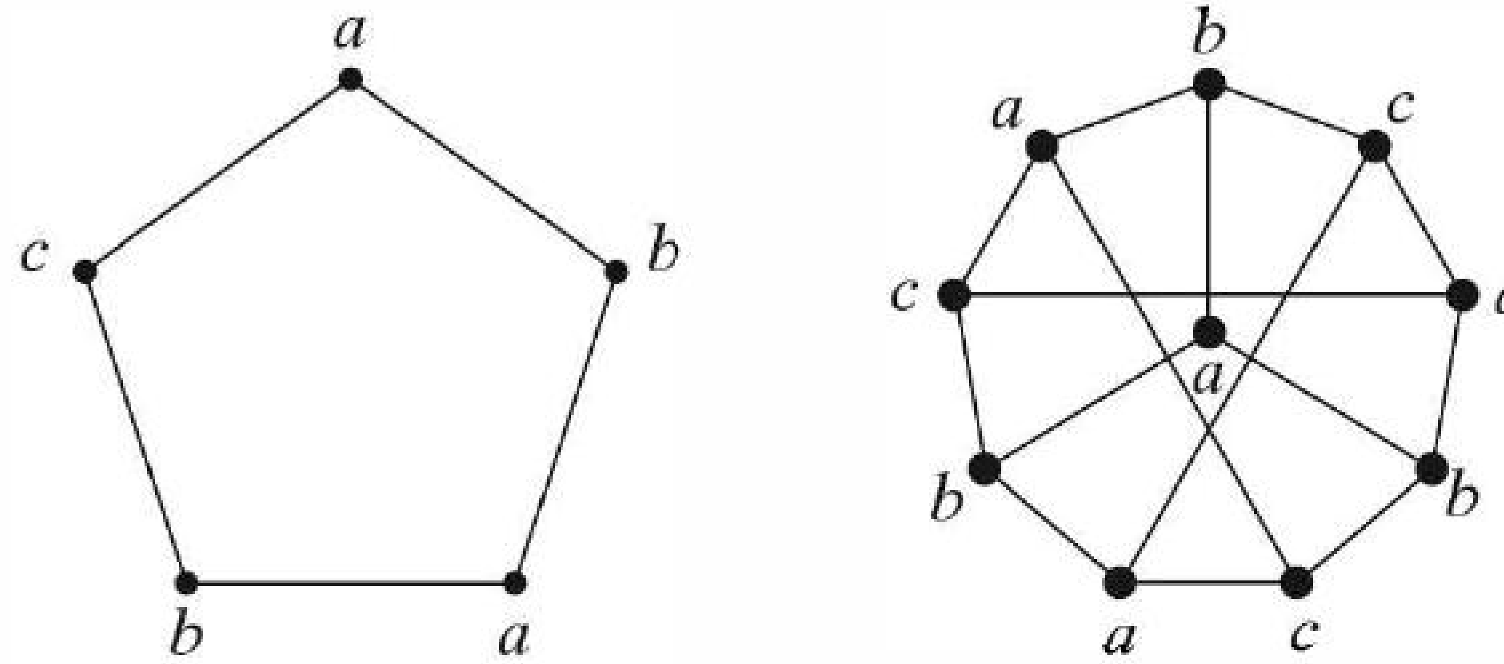
1.1.5. تعريف: إن التلوين من الدرجة k لبيان G هو تسمية $f:v(G)\rightarrow S$، حيث $|S| = k$ (غالبًا نستخدم $S = [k]$). العلامات الدالة (التسميات) هي الألوان، ونطلق اسم صف اللون (لوني) على مجموعة الرؤوس التي لها اللون نفسه. ونقول: التلوين من الدرجة k تلوين مناسب (فعلي) إذا وُجدت ألوان مختلفة للرؤوس المتجاورة. ونقول: البيان قابل للتلوين من الدرجة k إذا وُجد له تلوين فعلي (مناسب) من الدرجة k؛ أي إذا أمكن تلوينه فعليًا بـ k من الألوان.

يُعرَّف العدد اللوني $\chi(G)$ على أنه أصغر عدد k، بحيث يكون البيان G قابلاً للتلوين بـ k من الألوان.

2.1.5. ملحوظة: التلوين الفعلي لبيان G يُقسم مجموعة الرؤوس إلى صفوف لونية، وكل صف لون يكون مجموعة مستقلة. لذا، يكون البيان قابلاً للتلوين بـ k من الألوان إذا وفقط إذا كانت $V(G)$ اتحادًا لـ k من المجموعات المستقلة. لهذا، فمصطلح قابل للتلوين بـ k من الألوان، ومصطلح مجزأ إلى k من الأجزاء (أو مجزأ من الدرجة k) كذلك لهما المعنى نفسه. (المصطلحان يختلفان في الاستعمال؛ فغالبًا، نستخدم مجزأ إلى k من الأجزاء بوصفه فرضًا بنيويًّا، أما قابل للتلوين من الدرجة k فهو نتيجة لحل مسألة أمثلية معينة).

إن البيانات ذات النشط غير قابلة للتلوين؛ لأنه لا يمكن إعطاء الرأس لونين مختلفين. لذا، فإننا سنتعامل في هذا الفصل مع البيانات الخالية النشط فقط. وكذلك، فإن الأضلاع المكررة غير ذات صلة بهذا الموضوع؛ لأن النسخ الإضافية من الأضلاع لا تؤثر في التلوين. لذا، سيكون في ذهننا البيانات البسيطة فقط عند الحديث عن التلوين، وسنقوم بتسمية الأضلاع بدلالة نقاطها الطرفية. إن معظم العبارات التي تكتب دون شرط وجود بيان بسيط تبقى صحيحة في حالة السماح بوجود أضلاع مكررة. ■

3.1.5. مثال: بما أن أي بيان يكون قابلاً للتلوين بلونين إذا وفقط إذا كان بيانًا ثنائي الفرع، فإن العدد اللوني لكل من البيان C_5، بيان بيترسون يساوي 3 على الأقل. وبما أنه يمكن تلوين كل منهما بثلاثة ألوان، فإن العدد اللوني لكل منهما يساوي 3 بالضبط (انظر الشكل أدناه). ■



4.1.5. تعريف: نقول: البيان G لوني من الدرجة k (k – chromatic) إذا كان $\chi(G)=k$. ونُعرِّف التلوين الأمثل لبيان لوني من الدرجة k على أنه تلوين فعلي للبيان بـ k من الألوان. إذا كان $\chi(H) < \chi(G) = k$ لكل بيان جزئي فعلي من البيان G، فنقول: إن البيان G حرج (حاسم) لونيًّا، أو حرج من الدرجة k.

5.1.5. مثال: البيانات الحرجة من الدرجة k لقيم k الصغيرة. إن التلوين الفعلي للبيان يحتاج إلى لونين على الأقل إذا وفقط إذا وُجِدَ للبيان ضلع. ولهذا، فإن K_2 هي البيان الفريد الحرج من الدرجة 2 (وبالمثل، فإن K_1 هي البيان الفريد الحرج من الدرجة1). وبما أن البيان ثنائي اللون (2–Colorable) هو نفسه ثنائي الفرع، فإن التوصيف المميز للبيانات الثنائية الفرع يبين لنا أن البيانات الحرجة من الدرجة 3 هي الحلقات الفردية.

نستطيع اختبار ثنائية اللون لبيان G عن طريق إيجاد بعد رؤوس البيان عن رأس معين x (في كل مركبة). اجعل $X = \{u \in V(G): d(u, x)\} =$ {عددًا زوجيًّا}، وعددًا فرديًّا $Y = \{u \in v(G): d(u,x) =$. إن البيان G يكون بيانًا ثنائي الفرع إذا وفقط إذا كانت كلّ من X و Y تجزئة ثنائية لرؤوس G. بمعنى، إذا كانتا مجموعتين مستقلتين. لا يوجد توصيف جيد للبيانات الحرجة من الدرجة 4، فضلًا عن أنّه لا يوجد اختبار معروف لاختبار البيانات القابلة للتلوين من الدرجة 3. ملحق B يناقش بعض التشعبات الحسابية (computational ramifications) ■

6.1.5. تعريف: نعرف عدد العصبة (**clique number**) لبيان G الذي نرمز إليه بالرمز $\omega(G)$ على أنه أكبر حجم لمجموعة من الرؤوس المتجاور زوجًا زوجًا (عصبة) في G.

استخدمنا $\alpha(G)$ لترمز إلى عدد استقلال البيان G، واستعمال $\omega(G)$ مماثل لذلك، حيث يمثل الحرفان α و ω

أول حرف من الحروف الهجائية اليونانية وآخر حرف منها، واستخدام هذين الحرفين منسجم مع رؤية أن المجموعات المستقلة والعصب تمثل بداية تطور البيان ونهايته (انظر الدرس 5.8). ■

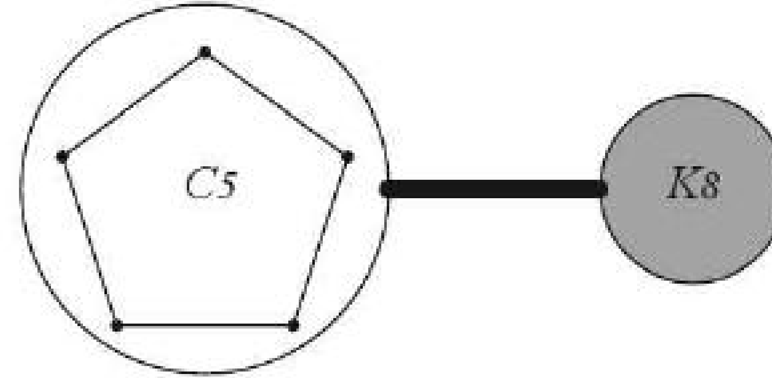
7.1.5. فرضية: لكل بيان G يتحقق أن $\omega(G)$ ، $\chi(G) \geq (G)$, وأن $\chi(G) \geq \frac{n(G)}{a(g)}$.

الإثبات: الحد الأول يتحقق؛ لأن رؤوس أي عصبة تتطلب ألوانًا مختلفة، أما الحد الثاني فيتحقق؛ لأن كل صف لوني هو مجموعة مستقلة. لذا، فإن هذا الصف يحوي $a(G)$ رأسًا على الأكثر.

{إن الحدين في الفرضية 7.1.5. محكمان عندما يكون G بيانًا تامًّا}

8.1.5. مثال: من الممكن أن يكون $\chi\ (G)\ \geq\ \omega(G)$. إذا كانت $r\ \geq\ 2$، فاجعل $G{=}C_{2r+1} \vee K_s$ (ربط أو ضم C_{2r+1} مع K_S – انظر التعريف 6.3.3). بما أنه لا توجد مثلثات في C_{2r+1}، فإن $\omega\ (G) = s + 2$.

التلوين الفعلي للحلقة المستحدثة يتطلب ثلاثة ألوان على الأقل. فضلًا عن أنّ العصبة التي عدد عناصرها s، تحتاج إلى s من الألوان، وبما أن كل رأس في الحلقة يجاور كل رأس في العصبة، فإن الـ s لونًا يجب أن تكون مختلفة عن الألوان الثلاثة الأولى. لذا، فإن $\chi(G) \geq s + 3$. ومن هذا نستنتج أن $\chi(G) \geq \omega(G)$. ■



تناقش التمارين 23 - 30 العدد اللوني لبعض العائلات الخاصة من البيانات. وكذلك نستطيع أن نسأل عن العدد اللوني للبيانات الناتجة عن إجراء بعض العمليات على هذه البيانات فمثلاً:

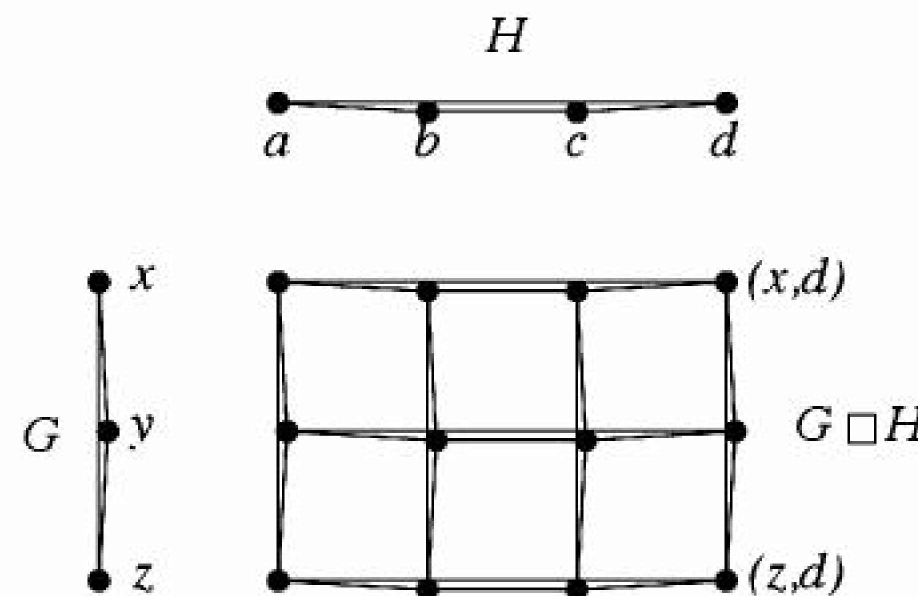
$\chi(G + H) = \max\{\chi(G),\chi(H)\}$ و $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$.

ستعرض فيما يأتي، سنعرض لعملية أخرى على البيانات.

9.1.5. تعريف: نُعرِّف الضرب الكارتيزي للبيانين G و H على أنه البيان الذي نرمز إليه بالرمز $G \square H$، والذي مجموعة رؤوسه هي: $V(G) \times V(H)$، ويكون فيه الرأس (u, v) مجاورًا للرأس (u', v') إذا وفقط إذا تحقق أن (1) $u = u'$ و $vv' \in E(H)$. أو (2) $v = v'$ و $uu' \in E(G)$.

10.1.5. مثال: عملية الضرب الكارتيزي متماثلة، أي أن $G \square H \cong H \square G$. في الشكل أدناه، تجد بيان $C_3 \square C_4$ إن المكعب الزائدي أيضًا هو مثال على هذا الضرب؛ لأن $Q_k = Q_{k-1} \square K_2$ عندما $k \geq 1$. بالإضافة إلى أنّ الشبكة المتسامتة (شبكة، أبعادها الأفقية والعمودية متساوية) من الحجم m في $(m - by - n)$ تمثل الضرب الكارتيزي $P_m \square P_n$.

وعمومًا، يتفكك البيان $G \square H$ إلى نسخ من H لكل رأس من G، ونسخ من G لكل رأس من H أيضًا (التمرين 10). ونستخدم الرمز □ بدلاً من × لتجنب الخلط مع أنواع الضرب الأخرى، إضافة إلى أننا نحتفظ بالرمز × لحاصل الضرب الكارتيزي بين مجموعات الرؤوس، لقد أدخل الرمز □ واستعمل من قبل نسترل (Nešetřil)، وهذا الرمز يستحضر (evokes) المتطابقة $K_2 \square K_2 = C_4$. ■



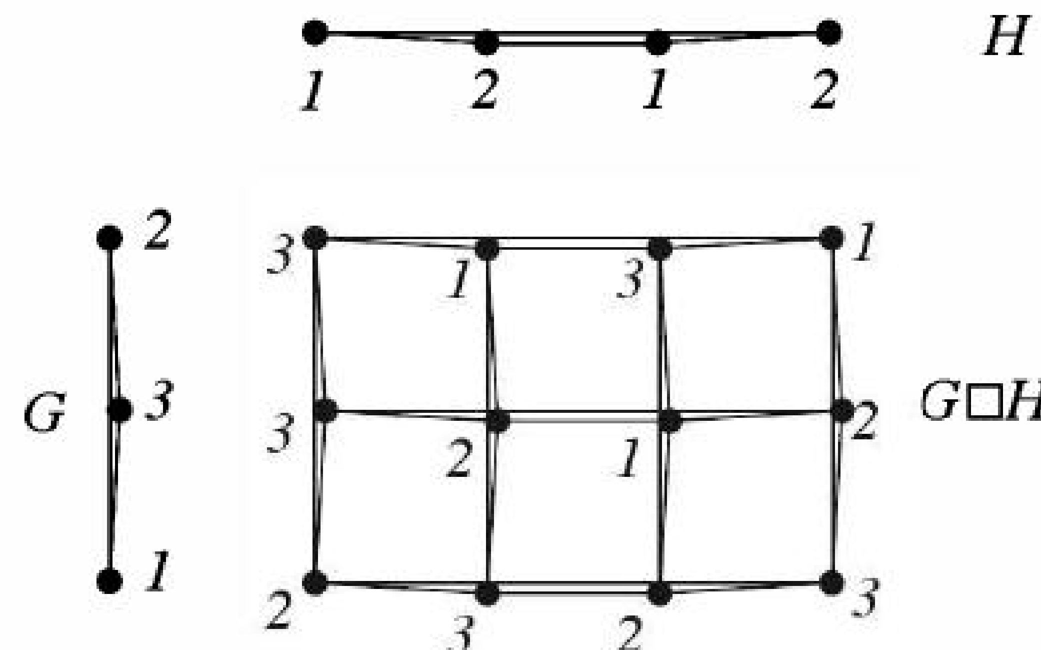
11.1.5. فرضية : (vizing [1963]، Aberth [1964]).

$x(G \square H) = \max \{\chi(G), \chi(H)\}$.

الإثبات: إن الضرب الكارتيزي $G \square H$ يحوي نسخًا من G و H بوصفه بيانات جزئية. لذا، فإن $X(G \square H) \geq \max \{\chi(G), \chi(H)\}$.

افترض أن $k = \max \{\chi(G), \chi(H)\}$. لبرهان الحد الأعلى؛ سنجد تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان $G \square H$ باستخدام تلوين أمثل لكل من G وH. افترض أن g تلوين فعلي من الدرجة $\chi(G)$ للبيان G، و أن H تلوين فعلي من الدرجة $\chi(H)$ للبيان H. عرِّف تلوينًا f للبيان $G \square H$ وذلك من خلال تعريف $f(u,v)$ على أنها صف التكافؤ الذي يمثل باقي قسمة $g(u) + h(v)$ على k. لذا، فإن $f(u,v)$ تُحدد ألوانًا للمجموعة $V(G \square H)$ من مجموعة ألوان عددها k.

ندعي أن f تلون $G \square H$ تلوينًا فعليًّا. إذا كان الرأس (u,v) يجاور الرأس (u',v') في $G \square H$، فإن $g(u) + h(v)$ و $g(u') + h(v')$ يتفقان في أحد المجموعين، ويكون الفرق بينهما عددًا بين 1 و k أخيرًا. وبما أن الفرق بين المجموعين يقع بين 1 و k، فإنهما يقعان في صفوف تكافؤ مختلفة عند القسمة على k. ■



يسمح لنا الضرب الكارتيزي بحساب الأعداد اللونية عن طريق حساب أعداد الاستقلال؛ لأن البيان G يكون قابلاً للتلوين من الدرجة k إذا وفقط إذا وجد للبيان $G \square k_m$ مجموعة مستقلة عدد عناصرها يساوي $n(G)$ (التمرين 31).

الحدود العليا (Upper Bounds)

معظم الحدود العليا على الأعداد اللونية تأتي من خوارزميات تستخدم في إيجاد تلوين لبيان معين. فعلى سبيل المثال، نجد أن $\chi(G) \leq n(G)$ من خلال تحديد ألوان رؤوس G. إن هذا الحد هو أفضل ما يمكن لبعض البيانات مثل البيان التام K_n الذي عدده اللوني يساوي n. لاحظ أنه باستطاعتنا تحسين أفضل حد ممكن عن طريق إيجاد حد مواصفاته على الأقل كمواصفات أفضل حد. فمثلاً، الحد $\chi(G) \leq n(G)$ لا يستخدم أي شيء يتعلق ببنية G، ويمكن أن نعمل أفضل من هذا بواسطة تلوين الرؤوس بترتيب معين باستخدام اللون "الأقل توافرًا" ودائمًا.

12.1.5. خوارزمية. (التلوين الجشع). نحصل على التلوين الجشع بالنسبة إلى الترتيب $v_1, \ldots, v_n$ لعناصر $V(G)$ عن طريق تلوين هذه الرؤوس بحسب الترتيب $v_1, \ldots, v_n$ وذلك من خلال تلوين الرأس: v_i باللون الذي دليله أقل ما يمكن، والذي لم يستخدم سابقًا كلون على جيران v_i ذات الدليل السفلي الأصغر. ■

13.1.5. فرضية : $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

الإثبات: في أي ترتيب للرؤوس، يوجد لكل رأس $\Delta(G)$ جارًا (سابقًا في الترتيب) على الأكثر. لذا، فإن التلوين الجشع لا يستخدم أكثر من $\Delta(G)+1$ لونًا. وهذا يعطي برهانًا استنتاجيًّا للعلاقة $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$. ■

إن الحد $\Delta(G)+1$ هو أسوأ حد أعلى ينتج عن التلوين الجشع (على الرغم من أنه أفضل ما يمكن للبيانات التامة وللحلقات الفردية). إن اختيار ترتيب الأضلاع بحرص يقود إلى تحسينات على الحد الأعلى،

إذ يمكننا تجنب المشاكل الناتجة عن الرؤوس التي درجتها عالية بوضعها في بداية الترتيب؛ حيث لا يكون لها جيران كُثر تسبق في الترتيب (انظر التمرين 36 من أجل ترتيبٍ أفضل).

14.1.5. فرضية: (welsh − Powell [1967]) إذا كانت $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ هي متتالية درجات بيان G، فإن $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}$.

الإثبات: طبق التلوين الجشع على رؤوس G بعد ترتيبها ترتيبًا غير متزايد بحسب درجاتها. عندما نلون الرأس v_i، نلاحظ أنه يوجد على الأكثر $\min\{d_i, i-1\}$ جارًا سابقًا لـ v_i، لذا يظهر على الأكثر هذا العدد من الألوان على جيران v_i التي تسبقها في الترتيب. إذن، فإن رقم اللون الذي نعيّنه للرأس v_i يساوي على الأكثر $1 + \min\{di, i-1\}$.

إن هذا يتحقق لكل رأس. لذا، نجد القيمة العظمى على i للحصول على حد أعلى لأكبر عدد مستخدم من الألوان. ■

إن الحد الأعلى الموجود في الفرضية 14.1.5 يكون دائمًا أقل من $\Delta(G) + 1$ أو يساويه. لذا، فإن هذا الحد لا يقل جودة عما هو موجود في الفرضية 13.1.5. حيث إنها تعطي حدًّا أعلى أمثل في المثال 8.1.5. في حين نستخدم التلوين الجشع استنادًا إلى ترتيب جيد نختاره. وفي الحقيقة، يوجد ترتيب لرؤوس كل بيان بحيث إن الخوارزمية الجشعة تستخدم $\chi(G)$ لونًا فقط (التمرين 33). ويكون من الصعب إيجاد مثل هذا الترتيب عادة.

نفترض في المثال الآتي لصف من البيانات التي يسهل فيها إيجاد مثل هذا الترتيب الذي ينتج تلوينًا يحقق المساواة في الحد $\chi(G) \geq w(G)$.

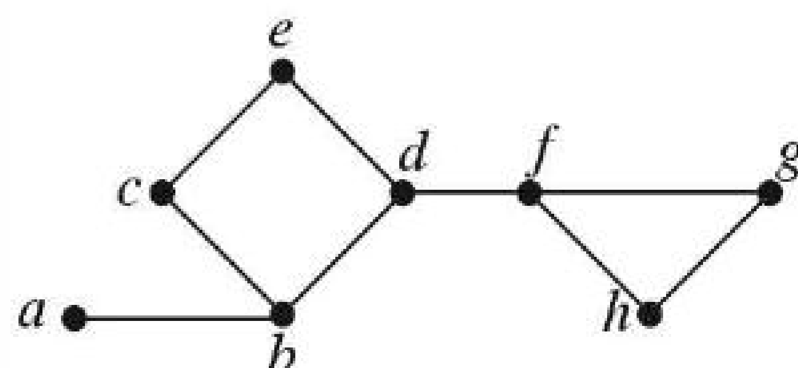
15.1.5. مثال: تحديد مواقع السجلات وبيانات الفترات. يخزّن برنامج حاسوب قيم المتغيرات في مواقع تسمّى سجلات يسهل الوصول إليها. إن السجلات مكلفة وغير رخيصة. لذا، فإننا نرغب باستخدامها بفاعلية.

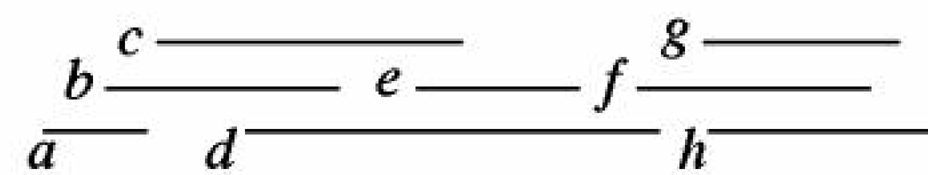
إذا وُجد متغيران لا يُستخدمان في الوقت نفسه، فيمكن وضعهما في السجل نفسه. لكل متغير، نرصد أول وآخر وقت استخدم فيه المتغير. ويكون المتغير نشطًا خلال الفترة بين هذين الوقتين.

نعرف بيانًا رؤوسه هذه المتغيرات، ويكون أيّ رأسين متجاورين إذا كانا نشطين على زمن مشترك. إن عدد السجلات اللازمة هي العدد اللوني لهذا البيان. وأن الوقت الذي يكون فيه المتغير نشطًا هو فترة. لذا، فإننا نحصل على نوع خاص من التمثيل للبيان.

تمثيل البيان بواسطة الفترات يعني تحديد عائلة من الفترات لرؤوس هذا البيان، بحيث يكون أي رأسين متجاورين إذا كانت الفترات الممثلة لهما متقاطعة، ويسمى البيان الذي له مثل هذا التمثيل بيانَ فترة.

إذا كانت h, g, f, e, d, c, b, a ترتيبًا لرؤوس بيان الفترة الموضع أدناه، فإن التلوين الجشع يحدد الألوان 1، 2، 1، 3، 2، 1، 2، 3 على الترتيب، وهذا مثالي. لاحظ أن التلوين الجشع يحدد أربعة ألوان للترتيب a، d،..... ■





16.1.5. فرضية: إذا كان G بيان فترة، فإن $\chi(G) = w(G)$.

الإثبات: رتّب رؤوس G بحسب الطرف الأيسر للفترات في تمثيل للبيان G بواسطة الفترات. عيّن تلوينًا جشعًا لرؤوس G، وافترض أن الرأس x يأخذ اللون k الذي هو أكبر لون تم تحديده، وبما أن x لا تأخذ لونًا أقل، فإن الطرف الأيسر a لفترة الرأس x ينتمي إلى الفترات التي لونت سابقًا بالألوان من 1 إلى $K-1$. تشترك هذه الفترات في النقطة a، لذا، لدينا عصبة من الدرجة k تتألف من x، ومن جيران x التي لونت بالألوان من 1 إلى $k-1$. لذا، فإن $w(G) \geq k \geq \chi(G)$. وبما أن $\chi(G) \geq w(G)$ دائمًا، فإن هذا التلوين هو الأمثل. وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة. ■

17.1.5. ملحوظة: إن عمل خوارزمية التلوين الجشع سريع، وهي دائمًا جاهزة للاستخدام، بمعنى أنها تعطي تلوينًا فعليًّا حتى في الحالة التي ترى فيها رأسًا واحدًا فقط في كل خطوة، ويجب أن يلوّن هذا الرأس مع عدم وجود خيار لتغيير الألوان السابقة (المستخدمة سابقًا).

إذا رُتبت الرؤوس عشوائيًّا في بيان عشوائي (انظر الدرس 5.8)، فإن التلوين الجشع يستخدم في أغلب الأحيان ضعف عدد الألوان المستخدمة في حدها الأدنى تقريبًا، على الرغم من أنه يستخدم العديد من الألوان لتلوين شجرة في حال الترتيب السيئ (التمرين 34). ■

لقد بدأنا بالتلوين الجشع للتأكيد على الوجه البنيوي لحدود العدد اللوني العليا. تتبع بعض الحدود الأخرى خواص البيانات الحرجة من الدرجة k، ولكنها لا تنتج تلوينًا فعليًّا: فكل بيان لوني من الدرجة k يحوي بيانًا جزئيًّا حرجًا من الدرجة k، ولكن لا توجد خوارزمية جيدة لإيجاد مثل هذا البيان الجزئي. سنشتق الحد التالي عن طريق استخدام البيانات الجزئية الحرجة i، ويمكن كذلك برهان هذا الحد عن طريق التلوين الجشع (التمرين 36).

18.1.5. بديهية: إذا كان H بيانًا حرجًا من الدرجة K، فإن $\delta(H) \geq k-1$.

الإثبات: افترض أن x رأس من رؤوس H. بما أن H حرج من الدرجة K، فإن $H-x$ قابل للتلوين بـ $k-1$ من الألوان. وإذا كانت $d_H(x) < k-1$، فإن الـ $k-1$ لونًا المستخدمة في تلوين $H-x$ لا تظهر جميعها على $N(x)$. لذا، نعطي x لونًا لم يستخدم على $N(x)$ للحصول على تلوين من الدرجة $k-1$ للبيان H. وهذا يعارض الفرض $\chi(H)=k$. إذن، نستنتج أن $d_H(x) \geq k-1$ (لكل $x \in v(H)$). ■

19.1.5. نظرية: ([Szekeres–Wilf [1968]). إذا كان G بيانًا، فإن $\chi(G) \leq 1+\max_{H\subseteq G}\delta(H)$. ■

الإثبات: افترض أن $k=\chi(G)$ و H' بيان جزئي (من G) حرج من الدرجة k. من البديهية 18.1.5، نستنتج أن: $\chi(G)-1=\chi(H')-1\leq\delta(H')\leq \max_{H\subseteq G}\delta(H)$. ■

إن الحد الذي نحصل عليه فيما يأتي يتضمن استخدام توجيه للبيان (انظر التمارين 43 –45).

20.1.5. مثال: إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع، فإن توجيه G الذي يوجه كل ضلع من أحد مجموعتي التجزئة إلى المجموعة الأخرى لا يحوي مسارًا (موجهًا) طوله أكثر من 1. لذا، فإن النظرية الآتية تضمن أن $\chi(G)\leq 2$.

كل توجيه لحلقة فردية يجب أن يحوي في مكان ما ضلعين متتابعين في الاتجاه نفسه. لذا، فإن كل توجيه يحوي مسارًا طوله 2 على الأقل. وتؤكد النظرية على أن كل حلقة فردية تكون ثلاثية اللون. ■

21.1.5. نظرية: نظرية جالاي، وروي، وفيتافر ([Vitaver [1962]، Roy [1967]، Gallai [1968])، إذا كان D توجيهًا للبيان G بحيث يساوي طول أطول مسار فيه $L(D)$، فإن $\chi(G) \leq 1+l(D)$. بالإضافة إلى ذلك، فإن المساواة تتحقق في بعض توجيهات G.

الإثبات: افترض أن D توجيه للبيان G، وافترض أن D' أكبر بيان جزئي موجه من D لا يحوي أي حلقة

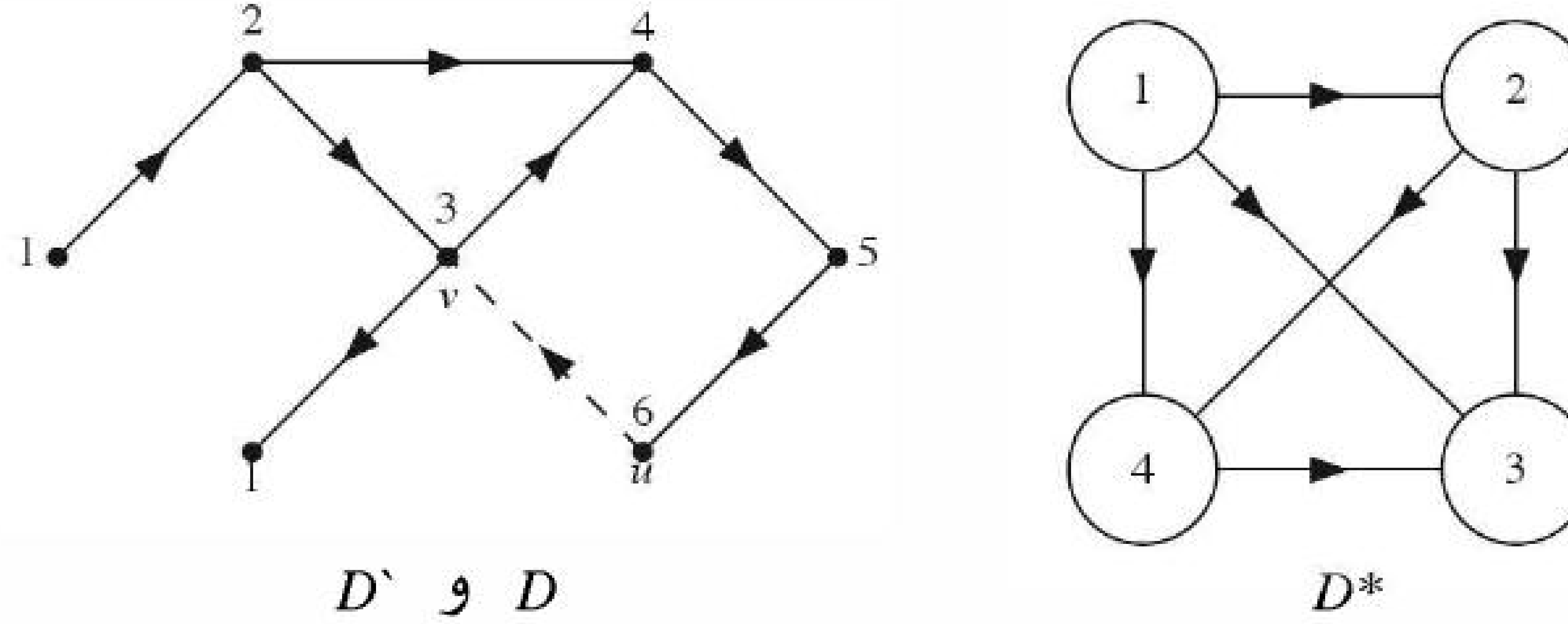
(في المثال أدناه، uv الضلع الفريد الموجود في D وغير الموجود في D'). لاحظ أن D' تحوي رؤوس G جميعها. لون $V(G)$ بجعل $f(v)$ تساوي 1 زائد طول أطول مسار في D' ينتهي عند v.

افترض أن P مسار في D'، وافترض كذلك أن u أول رأس من رؤوس P. وبما أن D' لاحلقي، فإن كل مسار في D' ينتهي عند u (بما في ذلك أطول مسار من هذه المسارات) قابل للإطالة مع P، وهذا يضمن أن f دالة متزايدة على كل مسار في D'.

التلوين f يستخدم الألوان من 1 إلى $l(D) + 1$ على $V(D')$ (وهي $V(G)$ أيضًا). ندعي أن f تلوين فعلي للبيان G. لاحظ أنه يوجد لكل ضلع $uv \in E(D)$ مسار في D' بين طرفيه (لأن uv ضلع في D'، أو أن إضافته إلى D'، تنتج حلقة (هذا يضمن أن $f(u) \neq f(v)$)؛ لأن f متزايد على المسارات في D'.

لبرهان العبارة الثانية؛ سنجد توجيه D^* بحيث إن $l(D^*) \leq \chi(G) - 1$. افترض أن f تلوين أمثل لـ G. لكل ضلع uv في G، أعطِ توجيهًا من u إلى v في D^* إذا وفقط إذا تحقق أن $f(u) < f(v)$. وبما أن f تلوين فعلي، فإن هذا يعرِّف توَجيهًا.

الآن، بما أن العلامات الدالة التي تضعها f تتزايد عبر كل مسار في D^*، وبما أنه يوجد $\chi(G)$ علامة دالة فقط في f، إذن، $l(D^*) \leq \chi(G)-1$. ■



D و $D`$ D^*

نظرية بروكس (BROOKS' THEOREM)

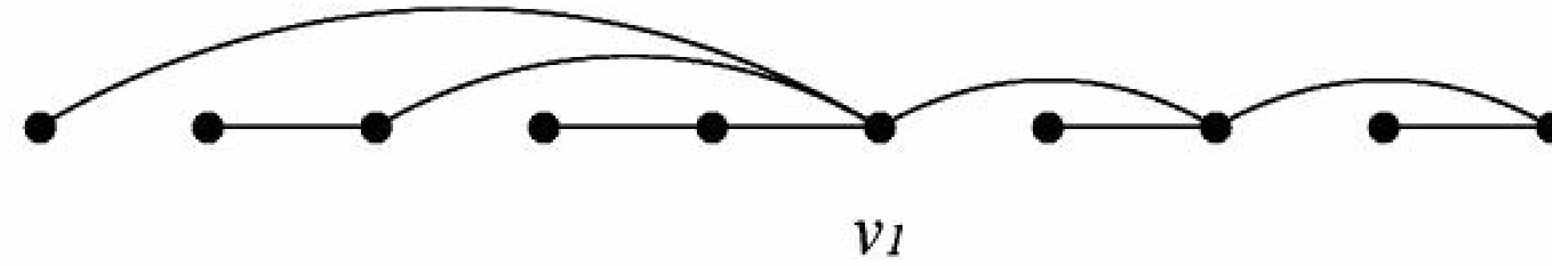
إن الحد $\chi(G) \leq 1+ \Delta(G)$ يتحقق بالمساواة للبيانات التامة والحلقات الفردية، وباختيارنا لترتيب الرؤوس بحذر شديد، نستطيع إثبات أن هذه هي البيانات الفريدة التي تتحقق فيها المساواة. وهذا يعطينا على سبيل المثال أن بيان بيترسون ثلاثي اللون دون أن نجد هذا التلوين صراحةً. ولتجنب التعقيدات غير المهمة، فنصوغ النظرية للبيانات المترابطة فقط، ويمكن تعميمها على البيانات جميعها؛ لأن العدد اللوني للبيان يساوي أكبر عدد لوني لمركباته، توجد عدة براهين معروفة لهذه النظرية، ولكننا سنعتمد برهان لوفاز (Lovász [1975]) مع إجراء بعض التعديل.

22.1.5. نظرية. (Brooks [1941]) إذا كان G بيانًا مترابطًا بحيث إنه ليس بيانًا تامًّا وليس حلقةً فرديةً، فإن $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

الإثبات: افترض أن G بيان مترابط، وافترض كذلك أن $k = \Delta(G)$. لاحظ أننا نستطيع افتراض أن $k \geq 3$؛ لأن G يكون بيانًا تامًّا عندما $k \leq 1$، ويكون حلقةً فرديةً أو بيانًا ثنائي الفرع عندما $k = 2$، ويتحقق الحد في هذه الحالات جميعها.

هدفنا هو ترتيب الرؤوس، بحيث يوجد على الأكثر $k - 1$ جارًا بدليل أقل (أصغر) لكل رأس من هذه الرؤوس؛ حيث إن التلوين الجشع لمثل هذا الترتيب يعطينا الحد المنشود.

في الحالة التي لا يكون فيها G منتظمًا من الدرجة k، فنستطيع اختيار رأس درجته أقل من k ليكون v_n. وبما أن G مترابط، فبإمكاننا إثبات شجرة مولدة من v_n حيث نحدد الدليل بترتيب متناقص حال وصولنا إلى الرؤوس. يوجد لكل رأس مختلف عن v_n في الترتيب الناتج $v_1, \ldots, v_n$ جار دليله أعلى وذلك على المسار إلى v_n في هذه الشجرة. لذا، يوجد لكل رأس $k-1$ جارًا على الأكثر دليلي كل منها أقل من دليل ذلك الرأس، والتلوين الجشع يستخدم k لونًا على الأكثر.

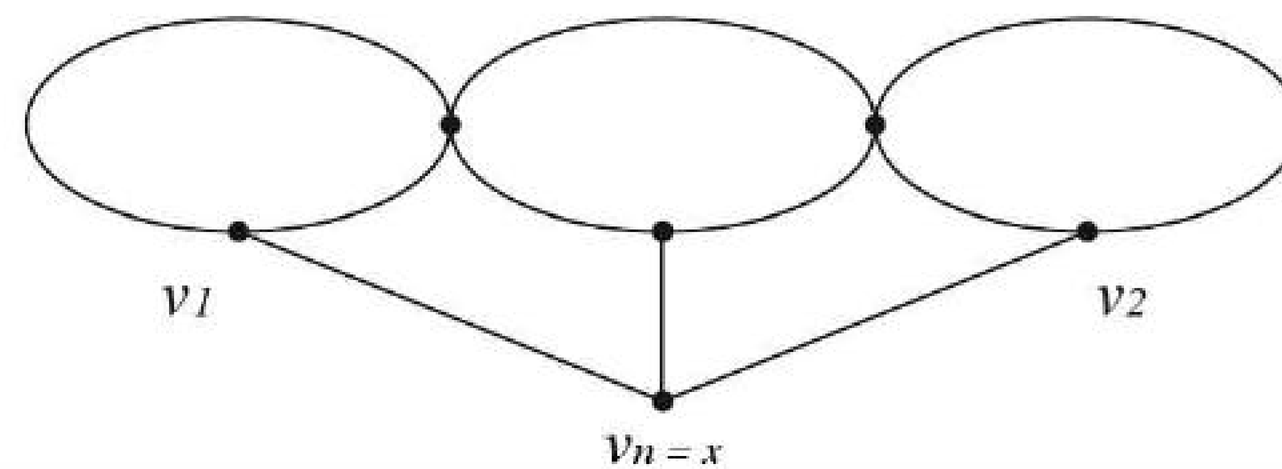


في الحالة المتبقية، افترض أن G منتظم من الدرجة k، وافترض كذلك أولاً أنه يوجد لـ G رأس قطع x، وافترض أيضًا أن G' بيان جزئي من G مؤلف من مركبة من مركبات $G-x$ بالإضافة إلى أضلاع هذه المركبة جميعها إلى x.

إن درجة x في G' تقل عن k. لذا، فإن الطريق السابق أعلاه يعطينا تلوينًا فعليًّا من الدرجة k لـ G'. وبتبديل أسماء الألوان في البيانات الجزئية بهذه الطريقة من مركبات $G-x$، نستطيع دائمًا أن نعطي لـ x اللون نفسه من أجل الحصول على تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G. لذا، نستطيع افتراض أن G مترابط من الدرجة 2. لاحظ أنه في أي ترتيب للرؤوس يوجد k جارًا سابقًا للرأس الأخير، فكرة التلوين الجشع يمكن أن تنجح إذا استطعنا ترتيب الأمر بحيث يأخذ جارًا v_n اللون نفسه.

وعلى وجه الخصوص، افترض أن جاري الرأس v_n هما: v_1, v_2 وأن $v_1 \not\leftrightarrow v_2$ وأن $G - \{v_1, v_2\}$ مترابط. في هذه الحالة، نضع دليلاً على رؤوس شجرة مولدة للبيان $G - \{v_1, v_2\}$ مستخدمين الأعداد $3, \ldots, n$ بحيث تتزايد هذه العلامات الدالة عبر المسارات إلى الجذر v_n. كما في السابق، يوجد لكل رأس قبل v_n، $k-1$ جارًا على الأكثر، دليل كل منها أقل من دليل v_n. ويستخدم التلوين الجشع $k-1$ لونًا على الأكثر على هذه الجيران؛ لأن v_1 وv_2 لهما اللون نفسه. لذا، يكفي أن نثبت وجود ثلاثية: v_1، v_2، v_n لكل بيان منتظم من الدرجة k ومترابط من الدرجة 2 بحيث إن $k \geq 3$. اختر رأسًا x، إذا كان $\kappa(G-x) \geq 2$، فافترض أن v_1 هي x، وأن v_2 هي رأس بعده عن x يساوي 2. إن مثل هذا الرأس v_2 يكون موجودًا؛ لأن G منتظم وليس بيانًا تامًّا. الآن، افترض أن v_n هي جار مشترك لكل من v_1 وv_2.

إذا كان $\kappa(G-x) = 1$، فاجعل $v_n = x$. بما أنه لا يوجد لـ G رأس قطع، فإن لـ x جارًا في كل قالب أوراق لـ $G-x$. إن جاري x؛ v_1 وv_2 الموجودين في قالبين من هذه القوالب غير متجاورين. وكذلك فإن $G - \{x, v_1, v_2\}$ مترابط؛ بسبب عدم وجود رؤوس متقاطعة للقوالب. وبما أن $k \geq 3$، فإن هناك جارًا آخر لـ x، ويكون $G - \{v_1, v_2\}$ مترابطًا. ■



23.1.5. ملحوظة*. إذا لم يوجد للبيان G عصبة كبيرة، فيمكن تحسين الحد $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (التمرين 50).
تضمن نظرية بروكس أن البيانات التامة والحلقات الفردية هي فقط البيانات المنتظمة من الدرجة $k-1$، والحرجة

من الدرجة k (التمرين 47). لقد قام جالاي بتقوية هذه النتيجة من خلال برهان ما يأتي: في البيان الجزئي لبيان حرج من الدرجة k والذي تولده الرؤوس التي درجتها $k-1$، يكون كل قالب عبارة عن عصبة أو حلقة فردية.

تنص نظرية بروكس على أن $\chi(G) \le \Delta(G)$ عندما $3 \le w(G) \le \Delta(G)$.

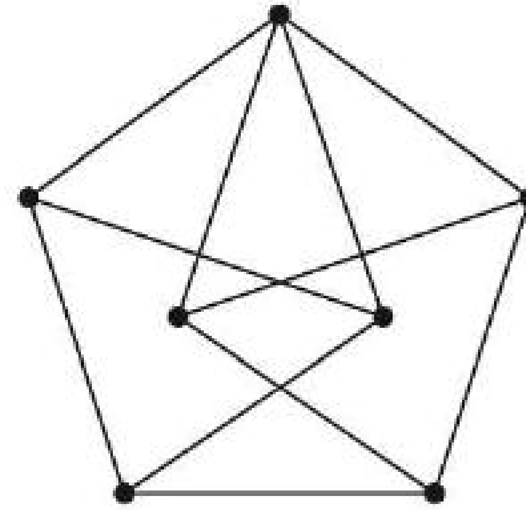
لقد قدم كل من برودن (Brodin) وكوستاكا (Kostochka) في العام 1977م المخمنة الآتية: إذا كانت $w(G) < \Delta(G)$، فإن $\chi(G) < \Delta(G)$.

(هناك أمثلة تدل على أننا بحاجة إلى الشرط $\Delta(G) \ge 9$) لقد أثبت ريد (Reed) في العام 1999م أن $\Delta(G) \ge 9$ صحيحة عندما $\Delta(G) \ge 10^{14}$، وقدم أيضًا في العام 1998م المخمنة الآتية: إن العدد اللوني محدود من الأعلى بمعدل ذي حدين بديهيين هما: الأسفل والأعلى. أي أن $\chi(G) \le \left\lceil \frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2} \right\rceil$ ■

بما أن فكرة التجزئة (التقسيم) لتحقيق بعض القيود أو الشروط فكرة أساسية، وهناك العديد من الانحرافات والتعميمات الخاصة بتلوين البيانات، فسنعرض في الفصل السابع تلوين الأضلاع بدلاً من الرؤوس. وبإبقاء الحديث عن الرؤوس، نستطيع السماح للصفوف اللونية بإحداث بيانات جزئية مختلفة عن المجموعات المستقلة ("التلوين المعمم" – التمارين 49 – 53). وباستطاعتنا كذلك حصر الألوان المسموح باستعمالها على كل رأس ("قائمة تلوين" – الدرس 4.8). علاوة على أنه بإمكاننا السؤال عن القيم الحسابية لهذه الألوان (التمرين 54). لقد لامسنا رأس الجبل الجليدي لمسائل التلوين فقط.

تمـــارين (Exercises)

1.1.5. (−) احسب عدد العصبة، وعدد الاستقلال، والعدد اللوني للبيان المرسوم أدناه. بيّن هل يثبت أي من الحدين الموجودين في الفرضية 7.1.5. الأمثلية لتلوين فعلي؟ وهل البيان حرج لونيًّا؟



2.1.5. (−) أثبت أن العدد اللوني لبيان يساوي أكبر عدد لوني لمركباته.

3.1.5. (−) افترض أن G_1، . . . ، G_k هي قوالب G، أثبت أن: $\chi(G) = \max_i \chi(G_i)$

4.1.5. (−) جد بيانًا G له رأس v، بحيث إن $\chi(G-v) < \chi(G)$ وأن $\chi(\overline{G}-v) < \chi(\overline{G})$.

5.1.5. (−) ليكن البيانان G و H معطيين، أثبت أن:

$\chi(G+H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ وأن $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$.

6.1.5. (−) افترض أن $\chi(G)=w(G)+1$، كما في المثال 8.1.5. افترض أن $H_1 = G$ وأن $H_k = H_{k-1} \vee G$ لكل $k > 1$، أثبت أن $\chi(H_k) = w(H)_k + k$.

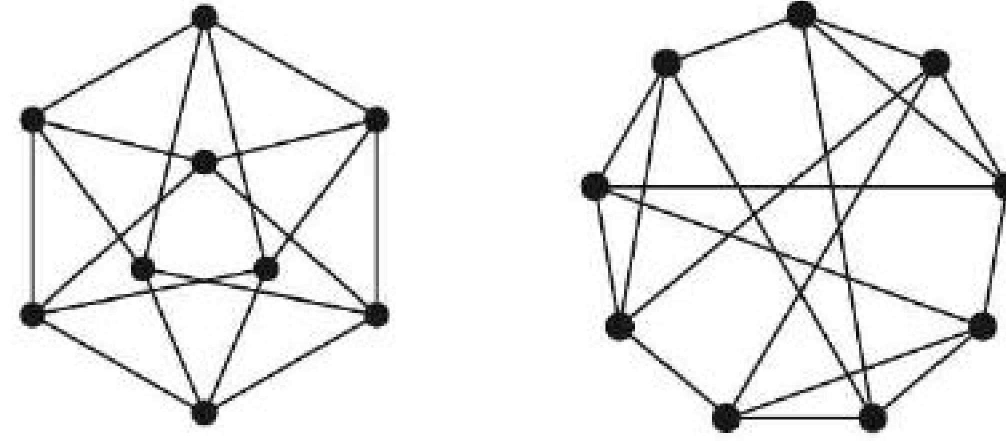
7.1.5. (−) جد بيانًا G بحيث إن G ليس بيانًا تامًّا ولا حلقة فردية، ولكن يوجد ترتيب لرؤوس هذا البيان؛ بحيث يستخدم التلوين الجشع لهذه الرؤوس بالنسبة إلى هذا الترتيب $\Delta(G)+1$ لونًا.

8.1.5. (−) أثبت أن $\max_{H \subseteq G} \delta(H) \le \Delta(G)$.

9.1.5. (−) ارسم البيان $K_{1,3} \square P_3$، وأعط تلوينًا أمثل لهذا البيان. ارسم البيان $C_5 \square C_5$، وجد له تلوينًا ثلاثيًا فعليًّا، بحيث إن حجم صفوفه اللونية هو: 8، 8، 9.

10.1.5. (−) أثبت أن $G \square H$ يتفكك إلى $n(G)$ نسخة من H و $n(H)$ نسخة من G.

11.1.5. (-) أثبت أن كلًّا من البيانين المرسومين أدناه يشاكل $C_3 \square C_3$.



12.1.5. (-) أثبت أو انقض: يوجد لكل بيان G لوني من الدرجة k تلوين بـ k من الألوان بحيث يحوي أحد صفوفه اللونية $\alpha(G)$ رأسًا.

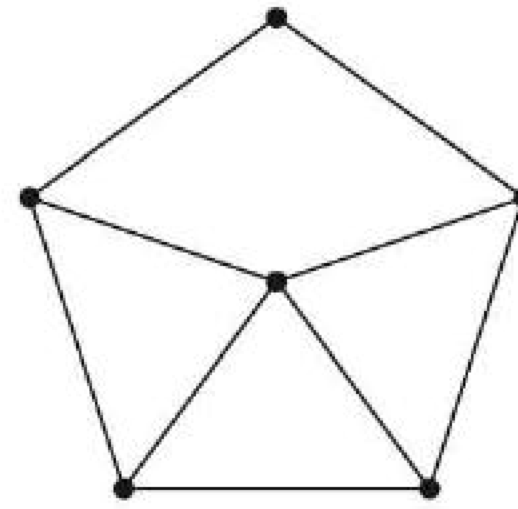
13.1.5. (-) أثبت أو انقض: إذا كان $G = F \cup H$، فإن: $\chi(G) \le \chi(F)+\chi(H)$.

14.1.5. (-) أثبت أو انقض: لكل بيان G يتحقق أن $\chi(G) \le n(G) - \alpha(G) + 1$.

15.1.5. (-) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا مترابطًا، فإن $\chi(G) \le 1+a(G)$، حيث $a(G)$ هي معدل درجة الرؤوس في G.

16.1.5. (-) استخدم النظرية 21.1.5 لإثبات وجود مسار مولد لكل دوري. ([Re´dei [1934]).

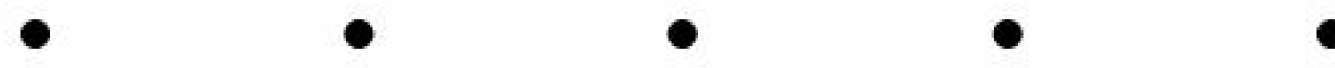
17.1.5. (-) استخدم البديهية 18.1.5 لبرهان أن $\chi(G) \le 4$ للبيان G المرسوم أدناه:



18.1.5. (-) حدد عدد الألوان اللازم لوضع علامات دالة على $V(K_n)$ بحيث إن كل صف لوني يولد بيانًا جزئيًّا درجته القصوى أقل من k أو يساويها.

19.1.5. (-) جد الخطأ في التعليل الموجود أدناه لنظرية بروكس (النظرية 22.1.5).

"نستخدم الاستقراء على $n(G)$. إذا كان $n(G)=1$، فإن العبارة تتحقق. ولخطوة الاستقراء، افترض أن G ليس بيانًا تامًّا ولا حلقة فردية. بما أن $\kappa(G) \le \delta(G)$، فإن للبيان G مجموعة فاصلة S حجمها يساوي $\Delta(G)$ على الأكثر. افترض أن $G_1, \ldots, G_m$ هي مركبات $G - S$، وافترض أن $H_i = G[V(G_i) \cup S]$. من فرضية الاستقراء، نجد أن H_i قابل للتلوين بـ $\Delta(G)$ من الألوان. بدل أسماء هذه الألوان على هذه البيانات الجزئية لتصبح جميعها متفقة على S. إن هذا يعطي تلوينًا فعليًّا من الدرجة $\Delta(G)$ للبيان G".

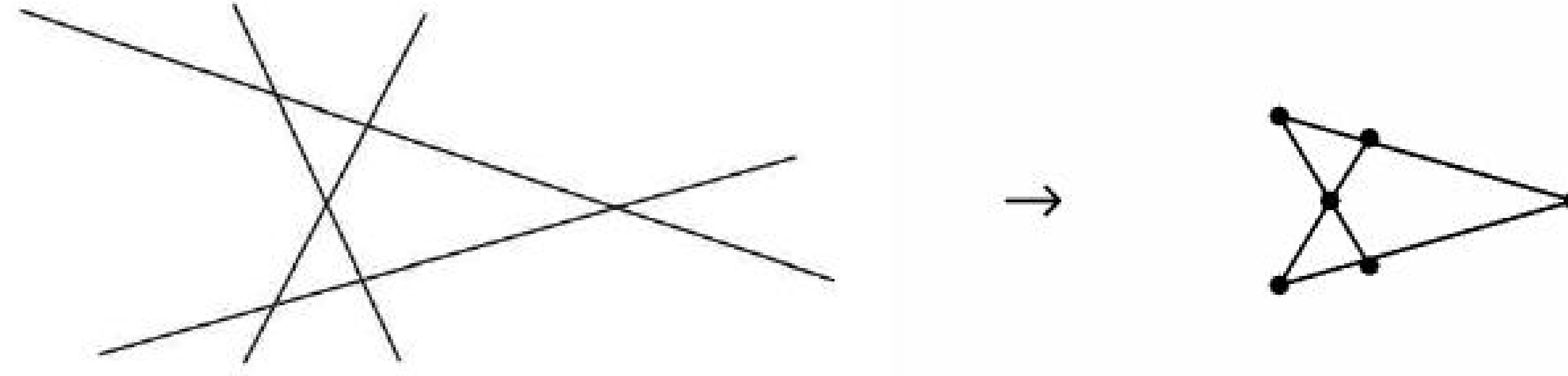


20.1.5. (!) افترض أن G بيان تتقاطع حلقاته الفردية زوجًا زوجًا؛ بمعنى أنه يوجد رأس مشترك بين أي حلقتين فرديتين في G. أثبت أن $\chi(G) \le 5$.

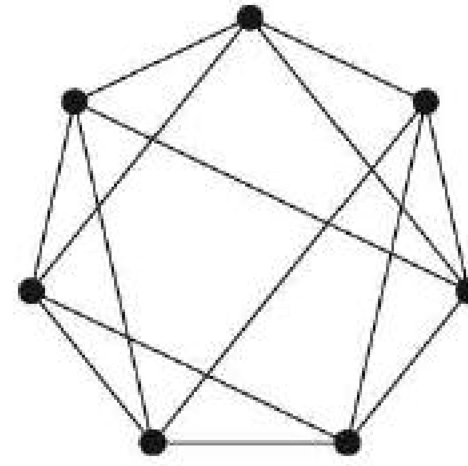
21.1.5. افترض أن كل ضلع لبيان G يظهر في حلقة واحدة على الأكثر. أثبت أن كل قالب في G ضلعًا، أو حلقة، أو رأسًا معزولًا. استخدم هذا في الإثبات أن $\chi(G) \le 3$.

22.1.5. (!) افترض أن لديك مجموعة من الخطوط في مستوى معين بحيث لا توجد نقطة مشتركة بين أي ثلاثة من هذه الخطوط. كوّن البيان G الذي رؤوسه تقاطعات هذه الخطوط، بحيث يتجاور أي رأسين إذا ظهرا بالتتابع على أحد هذه الخطوط. أثبت أن $\chi(G) \le 3$. (مساعدة: يمكن حل هذه المسألة باستخدام نظرية سزكرز وولف (Szekeres - Wilf) أو باستخدام تلوين جشع بالاعتماد على ترتيب

مناسب للرؤوس. تعليق: يمكن أن تفشل النتيجة إذا كان هناك نقطة مشتركة بين ثلاثة من هذه الخطوط). (H. Sachs).



23.1.5. (!) ضع n من النقاط على دائرة، حيث $n \geq k(k+1)$. افترض أن $G_{n,k}$ هي البيان المنتظم من الدرجة $2k$ الذي تحصل عليه عن طريق ربط كل نقطة مع الـ k نقطة الأقرب في الاتجاهين على الدائرة. فعلى سبيل المثال، $G_{n,1} = C_n$، والبيان أدناه يُظهر $G_{7,2}$. أثبت أن $\chi(G_{n,k}) = k+1$ إذا كانت $k+1$ تقسم n، وأن $\chi(G_{n,k}) = k+2$ إذا كانت $k+1$ لا تقسم n. أثبت أنه لا يمكن إضعاف الحد الأدنى على n من خلال برهان أن: $\chi(G_{k(k+1)-1,k}) > k+2$ إذا كانت $k \geq 2$.



24.1.5. (+) افترض أن G بيان منتظم من الدرجة 20، له 360 رأسًا، وقد تم تكوينه بالطريقة الآتية: وُضعَت الرؤوس على دائرة بأبعاد متساوية بينهما. تكون الرؤوس المفصولة بدرجة أو بدرجتين غير متجاورة، أماَ الرؤوس المفصولة بثلاث، أو أربع، أو خمس، أو ست درجات فتكون متجاورة. لا توجد أي معلومات عن التجاورات الأخرى (ما عدا أن البيان منتظم من الدرجة 20). أثبت أن $\chi(G) \leq 19$. (مساعدة: لون الرؤوس المتتابعة بترتيب معين حول الدائرة). (Pritikin).

25.1.5. (+) افترض أن G هي بيان مسافة الفصل في المستوى في هذا البيان $V(G) = \mathbb{R}^2$، وتكون النقطتان متجاورتين إذا وفقط إذا كانت المسافة التقليدية بينهما تساوي 1 (هذا بيان غير منتهٍ). أثبت أن $4 \leq \chi(G) \leq 7$. (مساعدة: لبرهان الحد الأعلى، قدّم تلوينًا صريحًا للمناطق آخذًا بالحسبان حدود كل منطقة).

(هادوايجر، موزر – موزر) (**Hadwiger [1945, 1961], Moser – Moser [1961]**)

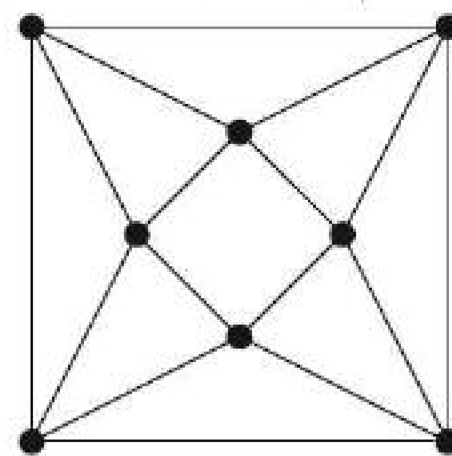
26.1.5. افترض أن $S_1, \ldots, S_m$ مجموعات منتهية، وأن $U = S_1 \times \ldots \times S_m$.

عرّف بيانًا G رؤوسه عناصر U، حيث $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا اختلف u عن v في كل إحداثي، جد $\chi(G)$.

27.1.5. افترض أن H هي متممة البيان الموجود في التمرين 26.1.5 جد $\chi(H)$.

28.1.5. افترض أن لديك إشارة ضوئية يتم التحكم فيها عن طريق مفتاحين كهربائيين، بحيث إن كلًّا منهما يمكن أن يوضع بـ n من المواقع، ولكل موقع من هذه المواقع للمفتاح يظهر أحد الـ n لونًا الممكنة، وعند تغيير موضع المفتاحين يتغير اللون. أثبت أن اللون الذي يظهر يتحدد من خلال موقع أحد المفتاحين، ثم وضّح ذلك بدلالة العدد اللوني لبيان معين. (Greenwell – Lovasz [1974]).

29.1.5. احسب $\chi(G)$ للبيان G الموضح أدناه، ثّم جد بيانًا جزئيًّا حرجًا من الدرجة $\chi(G)$.



30.1.5. (+) افترض أن $S = \binom{[n]}{2}$ ترميز لمجموعة المجموعات كلها التي تحوي عنصرين من عناصر المجموعة $[n]$. عرف البيان G_n على الصورة الآتية: $V(G_n) = S$ و $E(G_n) = \{(ij, jk): 1 \leq i < j < k \leq n\}$ (الأزواج المنفصلة على سبيل المثال غير متجاورة). أثبت أن $\chi(G_n) = \lceil Lgn \rceil$ (مساعدة: أثبت أن G_n قابل للتلوين بـ r من الألوان إذا وفقط إذا وُجد لـ $[r]$ n من المجموعات الجزيئية المختلفة. (تعليق: يسمى G_n بيانَ الإزاحة للبيان K_n (Shift graph of Kn) (يُنسب إلى إيه هاجنال A. Hajnal).

31.1.5. (!) أثبت أن البيان G قابل للتلوين بـ K من الألوان إذا وفقط إذا تحقق أن $\alpha(G \square K_m) \geq n(G)$ (Berg. [1973, P379 – 80]).

32.1.5. (!) أثبت أن البيان G يكون قابلاً للتلوين بـ 2^k لونًا إذا وفقط إذا كان البيانُ اتحاد k من البيانات ثنائية الفرع. (مساعدة: هذا يعمم النظرية 23.2.1).

33.1.5. (!) أثبت أنه يوجد ترتيب لرؤوس كل بيان G، بحيث إن التلوين الجشع بالنسبة إلى هذا الترتيب يستعمل $\chi(G)$ لونًا.

34.1.5. (!) لكل $k \in \mathbb{N}$، جد شجرة T_k، درجتها القصوى تساوي k. وجد ترتيبًا σ لـ $V(T_k)$، بحيث إن التلوين الجشع لهذه الشجرة يستخدم $k + 1$ لونًا. (مساعدة: استخدم الاستقراء، وجد الشجرة والترتيب في الوقت نفسه. تعليق: تبين هذه النتيجة أن نسبة أداء التلوين الجشع إلى التلوين المثالي يمكن أن تكون سيئة بمقدار $((\Delta(G)+1)/2)$ (Bean [196]).

35.1.5. افترض أن G بيان لا يوجد له بيان جزئي مستحدث، بحيث إن هذا البيان الجزئي يشاكل P_4. أثبت أن التلوين الجشع ينتج تلوينًا أمثل لـ G بغض النظر عن ترتيب رؤوس G. (مساعدة: افترض أن الخوارزمية تستخدم k لونًا تخص الترتيب $v_1, \ldots, v_n$. وافترض أن i هي أصغر عدد صحيح بحيث توجد لـ G عصبة مؤلفة من الرؤوس التي حُدد لها الألوان من i إلى k في هذا التلوين. أثبت أن $i = 1$. (تعليق: تسمى البيانات التي تخلو من P_4 مرافقات البيانات).

36.1.5. إذا كان $\sigma = v_1, \ldots, v_n$ ترتيبًا لرؤوس G، افترض أن $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$، وأن $f(\sigma) = 1 + \max_i d_{G_i}(v_i)$ إن التلوين الجشع بالنسبة إلى σ يعطي أن $\chi(G) \leq f(\sigma)$. عرف σ^* على الشكل التالي: اجعل v_n رأسًا من رؤوس G درجته أقل ما يمكن، واجعل v_i $(i < n)$ رأسًا في $G - \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ درجته أقل ما يمكن. أثبت أن $f(\sigma^*) = 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. وبذلك، فإن σ^* تصغر (تعطي قيمة صغرى) $f(\sigma^*)$.

(Halin [1967], Matula [1968], Finck–Sachs[1969] Lick – White [1970]).

37.1.5. أثبت أنه يمكن تجزئة $V(G)$ إلى $1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H) / r$ صفًّا بحيث يوجد رأس درجته أقل من r لكل بيان جزئي رؤوسه في أحد هذه الصفوف. (مساعدة: افترض الترتيب σ^* الموجود في التمرين 36.1.5. (تعليق: هذا يعمم النظرية 19.1.5. وعندما $r = 2$ انظر (Chartanal – Kronk [1969]).

38.1.5. (!) إذا كان $\overline{G}$ ثنائي الفرع، فأثبت أن $\chi(G) = \omega(G)$. (مساعدة: صُغ الادعاء بدلالة $\overline{G}$، وإستخدم النتائج المتعلقة بالبيانات الثنائية الفرع).

39.1.5. (!) أثبت أنه يوجد $\binom{k}{2}$ ضلعًا لكل بيان لوني من الدرجة k. استخدم هذا لبرهنة أنه إذا كان G اتحادًا لـ m بيانًا تامًّا من الرتبة m، فإن $\chi(G) \leq 1 + m\sqrt{m-1}$. (تعليق: إن هذا الحد قريب من الصحة، ولكن نعلم أن مخمنة أيردوز وفابر ولوفاس (انظر Erdös [1981]) تؤكد أن $\chi(G) = m$ عندما تكون البيانات الثنائية الفرع منفصلة ضلعيًّا).

40.1.5. أثبت أن $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n(G)$، استخدم هذا لبرهنة أن، $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{n(G)}$ وابن بيانات تحقق هذه الحدود عندما يكون $\sqrt{n(G)}$ عددًا صحيحًا. Nordhaus – Gaddum [1956], Fick [1968].

41.1.5. (!) أثبت أن $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n(G) + 1$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $n(G)$) (Nordhous – Gaddum [1956]).

42.1.5. (!) عدم دقة $\chi(G) \geq n(G)/\alpha(G)$. افترض أن G بيان له n من الرؤوس، وافترض كذلك أن $c = (n+1)/a(G)$. استخدم التمرين 41.1.5 لبرهنة أن $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq (n+1)^3/4$، ولبرهنة أن $\chi(G) \leq c(n+1)/4$ أيضًا. ولكل عدد فردي n، ابنِ بيانًا G بحيث إن $\chi(G) = c(n+1)/4$.

.Nordhous – Gaddum [1956], Fick [1968]

43.1.5. (!) المسارات والعدد اللوني في البيانات الموجهة:

a) افترض أن $G = F \cup H$، أثبت أن $\chi(G) \le \chi(F)\,\chi(H)$.

b) اعتبر أن D توجيه لـ G، وأن $f: V(G) \to \mathbb{R}$ دالة، استخدم فرع (a) والنظرية 21.1.5 لبرهنة أنه إذا كان $\chi(G) > rs$، فإن D تحوي مسارًا $u_0 \to \ldots \to u_r$ بحيث إن $f(u_0) \le \ldots \le f(u_r)$ أو تحوي مسارًا $v_0 \to \ldots \to v_s$ بحيث إن $f(v_0) > \ldots > f(v_s)$.

c) استخدم فرع (b) لبرهنة أن كل قائمة مؤلفة من $rs + 1$ عددًا مختلفًا تحوي قائمة جزئية متزايدة حجمها $r + 1$، أو تحوي قائمة جزئية متناقصة حجمها $s + 1$. (Erdös – Szekeres [1935]).

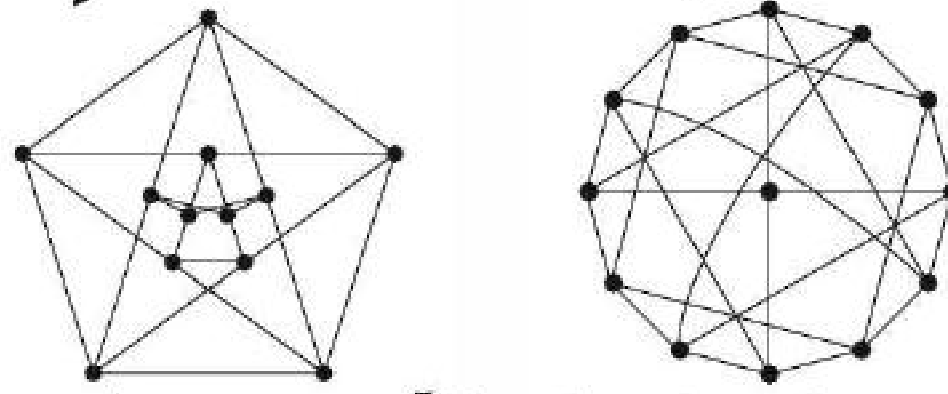
44.1.5. (!) نظرية منتي .[1962] Minty) يعرف التوجيه اللاحلقي لبيان خالٍ من النشط على أنه توجيه لا يحوي أي حلقة. لكل توجيه لاحلقي D للبيان G، اجعل $r(D) = \max_C [a/b]$ حيث C حلقة في G. وa وb تحسبان عدد الأضلاع في C التي اتجاهها إلى الأمام أو إلى الخلف مع D على الترتيب. ثبت رأسًا x في $V(G)$، وافترض أن W ممر في G يبدأ عند x. اجعل $g(W) = (a-b) \cdot r(D)$، حيث a عدد الخطوات عبر W والتي هي أضلاع اتجاهها إلى الأمام في D، أما b فهي عدد الأضلاع عبر W التي اتجاهها إلى الخلف في D. ولكل $y \in V(G)$ اجعل $g(y)$ أكبر قيمة لـ $g(W)$، بحيث تكون W مسارًا من x إلى y (افترض أن G مترابط).

a) أثبت أن $g(y)$ منتهية، ولهذا فهي معرفة جيدًا. واستخدم $g(y)$ لتحصل على تلوين فعلي لـ G بـ $r(D) + 1$ لونًا. لذا، فإن G قابل للتلوين بـ $r(D) + 1$ لونًا.

b) أثبت أن $\chi(G) = \min_{D \in \mathbf{D}} 1 + r(D)$، حيث $\mathbf{D}$ هي مجموعة توجيهات G اللاحلقية.

45.1.5. (+) استخدم نظرية منتي (التمرين 44.1.5) لبرهان النظرية 21.1.5. (مساعدة: أثبت أن هناك توجيهًا لاحلقيًا لـ G يعظم (يكبر) $(l(D))$).

46.1.5. (+) أثبت أن البيانات المنتظمة من الدرجة 4، والخالية من المثلثات، والمرسومة أدناه هي بيانات رباعية اللون (لونية من الدرجة 4). (مساعدة: افترض الرأسين المركزيين في البيان الموجود على اليسار، أما بالنسبة إلى البيان الثاني فخذ في الحسبان أكبر مجموعة مستقلة. (تعليق: لقد أثبت شفتال (Chavatal) عام 1970م أن البيان الموجود على اليسار هو أصغر بيان منتظم من الدرجة 4، وهو خالٍ من المثلثات، وعدده اللوني يساوي 4).



47.1.5. (!). أثبت أن نظرية بروكس تكافئ العبارة الآتية: كل بيان منتظم من الدرجة $k - 1$ وحرج من الدرجة Kk يكون بيانًا تامًا أو حلقة فردية (مساعدة: لبرهنة نظرية بروكس من هذه العبارة، خذ في الحسبان بيانًا جزئيًا حرجًا من الدرجة k للبيان المعطى G، حيث إن G لوني من الدرجة k).

48.1.5. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، وm من الأضلاع، ودرجته القصوى تساوي 3 على الأكثر. افترض أنه لا يوجد لـ G أي مركبة تشكل بيانًا تامًا على أربعة رؤوس. أثبت أن G يحوي بيانًا جزئيًا ثنائي الفرع عدد أضلاعه يساوي $m - n/3$ على الأقل. (مساعدة: طبق نظرية بروكس. وبعد ذلك، وضح كيف نحذف بعض الأضلاع لتحويل التلوين الثلاثي الفعلي لـ G إلى تلوين ثنائي لبيان جزئي كبير من G).

49.1.5. (–) أثبت أنه يمكن تلوين بيان بيترسون بلونين، بحيث يتألف البيان الجزئي المستحدث من كل صف لوني من أضلاع ورؤوس معزولة.

50.1.5. (!) تحسين لنظرية بروكس:

a) ليكن G بيانًا معطى، اجعل $k_1, \ldots, k_t$ أعدادًا صحيحة غير سالبة، بحيث إن $\sum k_i \ge \Delta(G) - t + 1$ أثبت أنه يمكن تجزئة $V(G)$ إلى مجموعات $V_1, \ldots, V_t$، بحيث إن أكبر درجة للبيان الجزئي G_i والذي تولده

V_iهي k_i وذلك لكل i. (مساعدة: أثبت أن التجزئة التي تصغر$\sum e(G_i)/k_i$ تمتلك الخاصية المنشودة). (Lovasz [1966]).

b) لكل $4 \le r \le \Delta(G)+1$، استخدم فرع (a) لبرهنة أنه إذا لم يحتوِ G عصبة من الدرجة r، فإن: $\chi(G) \le \left\lceil \frac{r-1}{r}(\Delta(G)+1) \right\rceil$.
(Borodin – Kostochka [1977], Catlin [1978], Lawrence [1978]).

51.1.5. (!) افترض أن G بيان قابل للتلوين بـ k من الألوان، وافترض كذلك أن P هي مجموعة من الرؤوس في G، بحيث إن $d(x, y) \ge 4$ لكل $x, y \in P$. أثبت أن كل تلوين لـ P بألوان من $[k+1]$ يمكن أن يوسع إلى تلوين فعلي لـ G من الدرجة $k+1$. (Albertson [1998]).

52.1.5. أثبت أنه يمكن تلوين بيان G كله بـ $\lceil(\Delta(G)+1)/j\rceil$ لونًا، بحيث إن كل صف لون يولد بيانًا جزئيًّا لا يمتلك بيانًا جزئيًّا مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة j. إذا كانت $j > 1$، فأثبت أنه لا يوجد عدد أقل من الصفوف اللونية يكفي، وذلك عندما يكون G منتظمًا من الدرجة j، ومترابطًا ضلعيًّا من الدرجة j، أو أن G بيان تام رتبته تكافئ 1 بمقياس j (بمعنى باقي قسمة رتبته على J يساوي 1).
(تعليق: إذا كانت $j = 1$ فإن الحصر يُختزل إلى تلوين فعلي عادي) (Matula [1973]).

53.1.5. (+) افترض أن $G_{n,k}$ هي البيان المنتظم من الدرجة $2k$ الموجود في التمرين 23.1.5. إذا كانت $k \le 4$، فحدد قيم n التي تجعل $G_{n,k}$ قابلاً للتلوين بلونين، بحيث يولد كل صف لون بيانًا جزئيًّا درجته القصوى تُساوي k على الأكثر. (Weaver – west [1994]).

54.1.5. افترض أن f تلوين فعلي لبيان G، بحيث تكون الألوان هي الأعداد الطبيعية. إن مجموع الألوان هو $\sum_{v\in V(G)} f(v)$. يمكن أن يتطلب تصغير هذا المجموع استخدام أكثر من $\chi(G)$ لونًا. فعلى سبيل المثال، نجد في الشجرة أدناه أن مجموع أفضل تلوين ثنائي يساوي 12، في حين يوجد تلوين فعلي بثلاثة ألوان مجموع ألوانه يساوي 11. جد متتالية أشجار T_k تستخدم k لونًا في تلوين فعلي يُصغر مجموع الألوان.
(Kubicka – Schwenk [1989]).



55.1.5. (+) إن طول أطول حلقة فردية إضافة إلى واحد يمثل حدًّا أعلى للعدد اللوني:

a) افترض أن G بيان مترابط من الدرجة 2 ليس ثنائي الفرع، وفيه حلقة زوجية. أثبت أنه يوجد في C رأسًا x وy، وأن مسار P من x إلى y منفصل داخليًّا عن C بحيث إن: $d_c(x,y) \ne d_p(x,y) \mod 2$.

b) افترض أن G بيان بسيط ليس له حلقة فردية طولها يساوي $2k+1$ على الأقل.
أثبت أنه إذا كانت $\delta(G) \ge 2k$، فإن G يحوي حلقة طولها $4k$ على الأقل. (مساعدة: افترض جيران نقطة طرفية لمسار أعظمي).

c) افترض أن G بيان مترابط من الدرجة 2 ليس ثنائي الفرع، ولا توجد فيه حلقة فردية طولها أكثر من $2k-1$. أثبت أن $\chi(G) \le 2k$. (Erdös – Hajnal [1966]).

2.5. بنية البيانات اللونية من الدرجة k (Structure of -k- chromatic Graphs)

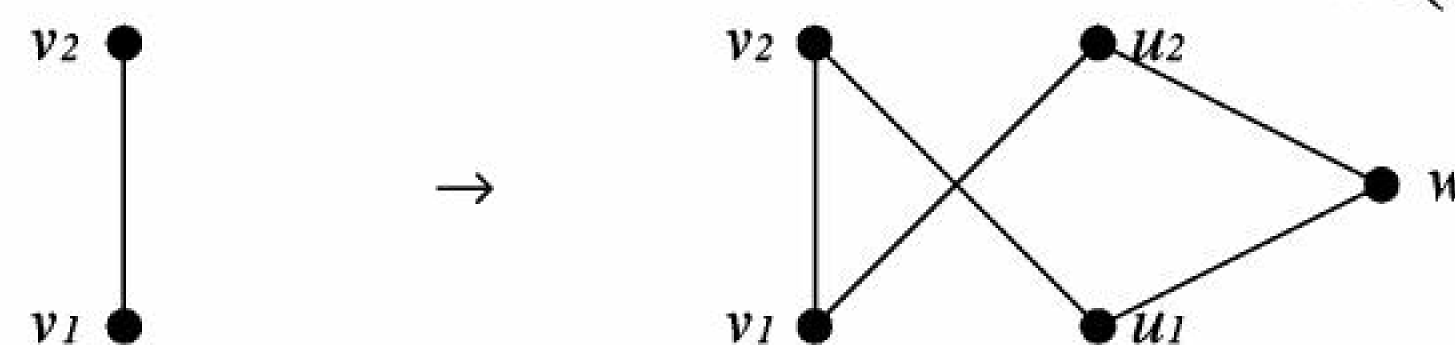
لقد لاحظنا أن $\chi(H) \ge \omega(H)$ لكل H. عندما تتحقق المساواة في هذا الحد للبيان G وللبيانات الجزئية المستحدثة من G جميعها (مثل بيانات الفترة)، فإن البيان G كامل (perfect). وسنناقش هذا النوع من البيانات في البندين 3.5 و1.8. ولكن ما يهمنا في هذا الدرس هو أن نبين مدى السوء الذي يمكن أن يكون في $\chi(G) \ge \omega(G)$. في أغلب الأحيان، يكون $\chi(G)$ أكبر كثيرًا من $\omega(G)$، وذلك من خلال وجهة نظر سنناقشها

بدقة في الدرس 5.8. (إن معدل قيم $\omega(G)$، $\alpha(G)$ و$\chi(G)$ للبيانات جميعها التي مجموعة رؤوسها $[n]$ تقترب من $21g\,n$، $21g\,n$، و$n/(21g\,n)$ على الترتيب. لذا، فإن $\omega(G)$ تعدّ عمومًا حدًّا أدنى غير جيد لـ $\chi(G)$، وأن $n/\alpha(G)$ تعدّ بوجه عام حدًّا أدنى جيدًا).

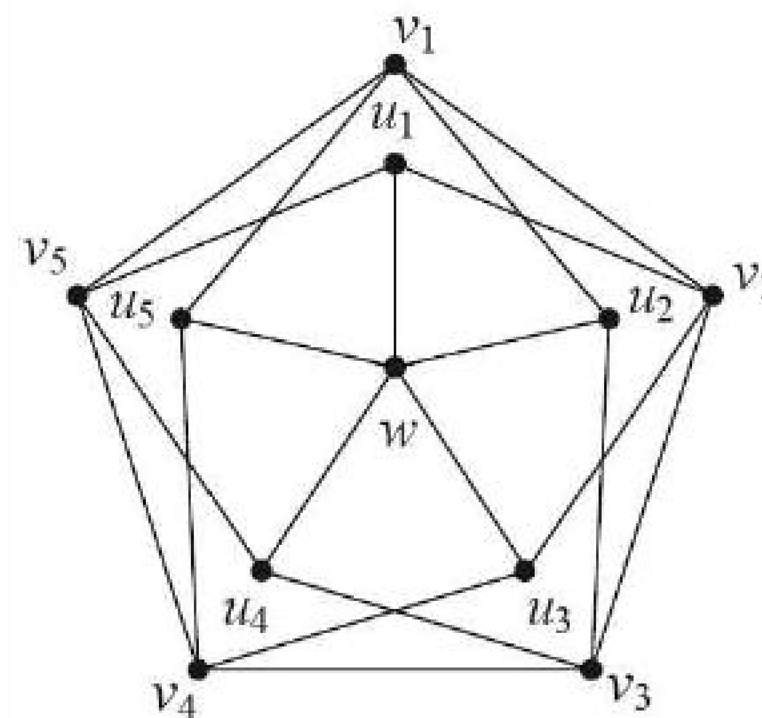
البيانات ذات العدد اللوني الكبير (Graphs with Large Chromatic Number)

يمكن للحد $\chi(G) \geq \omega(G)$ أن يكون محكمًا ودقيقًا، ويمكن كذلك أن يكون بعيدًا عن الدقة. لقد تم بناء (إيجاد) العديد من البيانات الخالية من المثلثات التي لها عدد لوني كبير بالدرجة التي نريدها. سنعرض أحد هذه البيانات في هذه المرحلة، تاركين عرض بعضها الآخر إلى التمرينين 12 – 13.

1.2.5. تعريف: افترض أن G بيان بسيط. نعرف بناء ميسليسكي (Mycielskis construction) على أنه البيان البسيط G' الذي يحوي G كالآتي: بدءًا من G الذي رؤوسه المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$، أضف رؤوسًا $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$، وأضف رأسًا آخر w. الآن، أضف أضلاعًا لجعل u_i يجاور كل عنصر في $N_G(v_i)$، وأخيرًا، اجعل $N(w) = U$.



2.2.5. مثال: من البيان الثنائي اللون K_2، وبعمل تكرار واحد لبناء ميسليسكي، نحصل على البيان ثلاثي اللون C_5 كما يظهر في الشكل أعلاه. وفي الشكل السفلي، نطبق هذا البناء على C_5 الذي ينتج بيان جروتزك (Grötzch graph) الرباعي اللون. ■

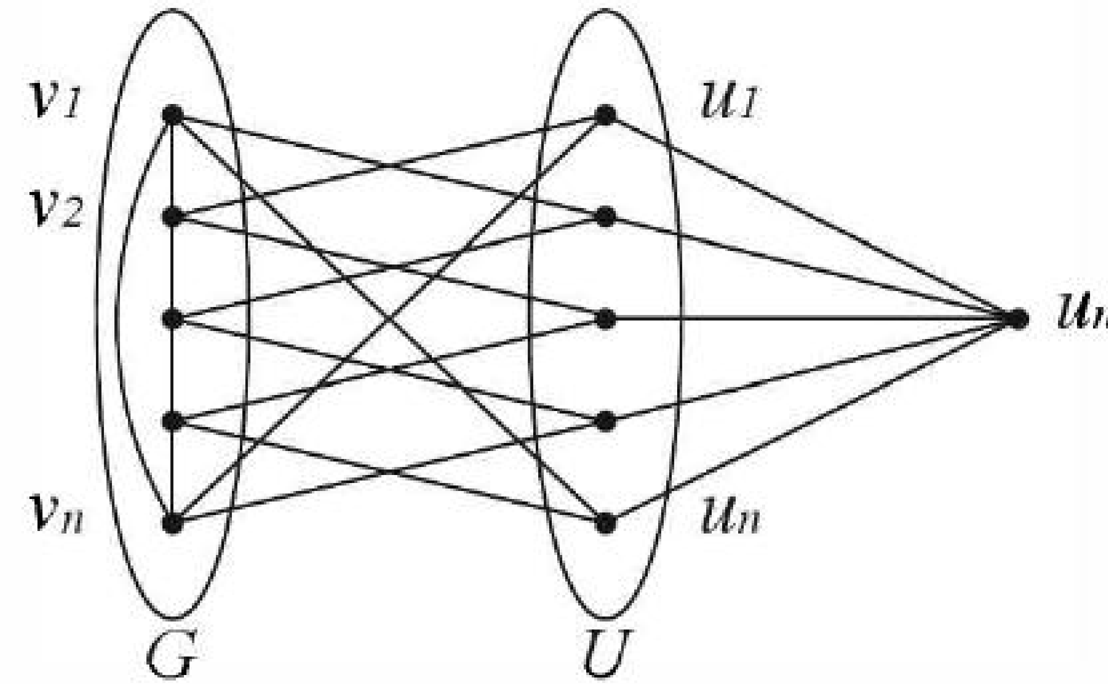


3.2.5. نظرية: (Mycielski [1955]). إذا كان G بيانًا لونيًّا من الدرجة k، وخاليًا من المثلثات، فإن بناء ميسليسكي ينتج عن G بيانًا G، بحيث إن G لوني من الدرجة $k + 1$ وخال من المثلثات.

الإثبات: افترض أن $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$، وافترض أيضًا أن G' هي البيان الذي ينتجه بناء ميسليسكي من G. وافترض كذلك أن $u_1, \ldots, u_n$ هي النسخ من $v_1, \ldots, v_n$، وأن w هو الرأس الإضافي، واجعل $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. من خلال البناء الذي قمنا به، نعلم أن U مجموعة مستقلة في G'. لذا، فإن الرؤوس الأخرى لأي مثلث يحوي u_i تنتمي إلى $V(G)$، وتكون جيرانًا لـ v_i. إن هذا يعطي مثلثًا في G وهذا مستحيل. لذا، تستنتج أن G' يخلو من المثلثات. إذا كان f تلوينًا فعليًّا من الدرجة k لـ G، فإننا نستطيع الحصول منه على تلوين فعلي من الدرجة $k + 1$ لـ G'، وذلك بوضع $f(u_i) = f(v_i)$، و $f(w) = k + 1$. لذا، فإن $\chi(G') \leq \chi(G) + 1$. ولإثبات هذا؛ اعتبر أي تلوين فعلي لـ G'؛ واحصل منه على تلوين فعلي لـ G باستخدام عدد أقل من الألوان.

افترض أن g تلوين فعلي من الدرجة k لـ G'. وبتغيير أسماء الألوان، يمكننا أن نفترض أن $g(w) = k$. إن هذا يحصر g ضمن القيم $\{1, \ldots, k - 1\}$ على U. لاحظ أن g يمكن أن تستخدم الـ k لونًا على $V(G)$. افترض أن A هي مجموعة رؤوس G الملونة باللون k من قبل g، نغيّر الألوان على A؛ لنحصل على تلوين من الدرجة $k - 1$ لـ G.

لكل $v_i \in A$، غير لون v_i إلى $g\ (u_i)$. بما أن رؤوس A جميعها لها اللون k تحت تأثير g، فإنه يوجد في A أي رأسين متجاورين. لذا، نحتاج إلى اختبار الأضلاع التي على الشكل $u_i \leftrightarrow v'$ فقط، حيث $v_i \in A$ و$v' \in V(G) - A$. إذا كان $v_i \leftrightarrow v'$، فإنه من خلال البناء كذلك نعلم أن $u_i \leftrightarrow v'$، وهذا يعطي أن $g(v') \neq g(u_i)$. وبما أننا غيّرنا لون v_i إلى $g(u_i)$، فإن هذا التغيير لا يعتدي على الضلع $v_i\, v'$. وبذلك نكون قد بيّنا أن التلوين المعدل لـِ $V(G)$ تلوين فعلي من الدرجة $k - 1$ للبيان G. ■



إذا كان G حرجًا لونيًّا، فإن البيان G' الناتج عن بناء ميسلسكي يكون أيضًا حرجًا لونيًّا (التمرين 9).

4.2.5. ملحوظة* : إذا كرّرنا استخدام بناء ميسلسكي بدءًا من $G_2 = K_2$، فإننا نُحصّل متتالية البيانات $G_2, G_3, G_4, \ldots$. وأن أول ثلاثة من هذه البيانات هي: K_2، C_5، وبيان جروتزك، وتعدّ هذه أصغر البيانات التي تخلو من المثلثات، وتكون على الترتيب: ثنائية اللون، وثلاثية اللون، ورباعية اللون، وبعد ذلك تنمو البيانات بسرعة: $n(G_k) = 2n(G_{k-1}) + 1$. وبما أن $n(G_2) = 2$، فإننا نحصل على أن $n(G_k) = 3.2^{k-2} - 1$ (نمو أسّيّ).

افترض أن $f(k)$ هي أصغر عدد من الرؤوس لبيان خالٍ من المثلثات ولوني من الدرجة k. لقد أثبت أيردوز في العام 1959م من خلال استخدام طرقِ الاحتمالات (طرق غير بنائية) أن $f(k) \leq ck^{2+\epsilon}$، حيث ϵ هي ثابت موجب، وأن c تعتمد على ϵ. ولا تعتمد على k. باستخدام أعداد رامزي (Ramsey numbers) (الدرس 3.8)، من المعلوم (غير – بنائي) أنه يوجد ثوابت c_1 و c_2 ، بحيث إن $c_1k^2 \log k \leq f(k) \leq c_2k^2 \log k$ (التمرين 15 يعطي حدًّا أدنى تربيعيًّا).

لقد بنى بلانش ديسكارتس (Blanche Desccartes) في العام [1954م ، 1947م] بيانات حرجة لونيًّا خصرها يساوي 6 (التمرين 13). في حين أثبت إيردوز عام 1959م أن هناك بيانات عددها اللوني يساوي k على الأقل، وخصرها يساوي g على الأقل (النظرية 11.5.8). بعد ذلك، تم إيجاد بناءات صريحة من قِبَل: (Lovasz [1968 a], Nesetril – Rodl [1979], Lubotzsky – philies – sarank [1988], Kriz [1989]) ومع هذه البناءات كلها، فإن منع K_r من أن يكون بيانًا جزئيًّا من G لا يضع(1) حدًّا أعلى على $\chi(G)$. لقد خمن كل من جيارفاس [Gya´rfa´s] في العام 1975م وسمنر (Sumner) في العام 1981م أن منع عصبة ثابتة وغابة ثابتة من أن تكونا بيانين جزئيين من بناء معين G لا يضع حدًّا أعلى على العدد اللوني للبيان. التمرين (11) يثبت هذه الحقيقة عندما تكون الغابة $2\ K_2$. انظر كذلك:

(Keirstead – Penrice [1990, 1994] وKierstead [1992, 1997] و(Kierstead – Rödl [1996]). ■

---

(1) لقد تم استخدام هذا الاسم المستعار من قبل W.T.Tutte وثلاثة آخرين.

مسائل القيم القصوى (التطرفية) ونظرية توران (Extermal Problems and Tura'n's Thearem)

قد تسلّط مسائل التطرفية بعض الضوء على بنية البيانات اللونية من الدرجة k. فعلى سبيل المثال، ما أصغر وأكبر البيانات من الدرجة اللونية k على n من الرؤوس؟

5.2.5. فرضية : يوجد $\binom{k}{2}$ ضلعًا على الأقل لكل بيان لوني من الدرجة k على n من الرؤوس. وتتحقق المساواة للبيانات التامة إضافة إلى الرؤوس المعزولة.

الإثبات : يوجد ضلع لكل تلوين مثالي لبيان طرفاه ملونان باللونين i و j لكل زوج i و j من الألوان. وبخلاف ذلك، فإنه يمكن ضم اللونين i و j بصف لوني واحد، وبذلك نستخدم عددًا أقل من الألوان. بما أنه يوجد $\binom{k}{2}$ زوجًا مختلفًا من الألوان، فيجب أن يكون لدينا $\binom{k}{2}$ ضلعًا مختلفًا. ■

يسأل التمرين 6 عن أصغر حجم لبيان من بين البيانات المترابطة اللونية من الدرجة k، والتي عدد رؤوسها يساوي n. إن مسألة التكبير (إيجاد قيمة كبرى أو عظمى) ممتعة أكثر (يتوافر لها معنى عندما نحصرها على البيانات البسيطة فقط). إذا أعطينا تلوينًا فعليًّا بـ k من الألوان، فبإمكاننا الاستمرار في إضافة الأضلاع دون زيادة العدد اللوني ما دام الرأسان الموجودان في صفوف لونية مختلفة غير متجاورين. لذا، فإننا نركز انتباهنا على البيانات التي لا تحوي مثل هذه الرؤوس.

6.2.5. تعريف : نعرِّف البيان التام المتعدد الفروع على أنه بيان بسيط G، بحيث يمكن تجزئة رؤوسه إلى عدة مجموعات، بحيث إن $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان كلّ من u و v ينتميان إلى مجموعات مختلفة من مجموعات تجزئة رؤوسه. هذا التعريف يكافئ قولنا: إن كل مركبة من مركبات $\overline{G}$ تكون بيانًا تامًّا. عندما $k \geq 2$ ، فإننا نكتب $K_{n_1, \ldots, n_k}$ وذلك كرمز للبيان التام المتعدد الفروع من الدرجة k (complete k − partite) الذي أحجام مجموعات تجزئة رؤوسه هي: $K_{n_1} + \ldots + K_{n_k}$.

نستخدم هذا الرمز فقط عندما تكون $k > 1$؛ لأن k_n ترمز إلى بيان تام. لاحظ أن البيان المتعدد الفروع من الدرجة k يكون لونيًّا من الدرجة k. حيث تمثل مجموعات التجزئة الصفوف اللونية في التلوين الفعلي الفريد لهذا البيان بـ k من الألوان. وبما أن درجة أي رأس في مجموعة تجزئة حجمها t تساوي $n(G) - t$، فإنه يمكن حساب الأضلاع بواسطة صيغة جمع الدرجات (التمرين 18). والآن، نسأل السؤال الآتي: كيف يكون توزيع الرؤوس على مجموعات التجزئة لكي يكون $e(G)$ أكبر ما يمكن؟

7.2.5. مثال : بيان توران (Turán graph). يُعرَّف بيان توران $T_{n,r}$ على أنه بيان تام متعدد الفروع من الدرجة r، وعدد رؤوسه يساوي n، بحيث إن أي مجموعتي تجزئة رؤوسه تختلفان عن بعض بمقدار 1 على الأكثر. ومن استخدام مبدأ طواقي الحمام (الملحق A)، فإن حجم بعض مجموعات تجزئته يساوي $\lceil n/r \rceil$ على الأقل، وحجم بعضها الآخر يساوي $\lfloor n/r \rfloor$ على الأكثر. وبناءً على ذلك، فإن الاختلاف بمقدار 1 يعني أن يكون حجم مجموعة التجزئة يساوي $\lfloor n/r \rfloor$، أو يساوي $\lceil n/r \rceil$.

افترض أن $a = \lfloor n/r \rfloor$، بعد أن تضع a رأسًا في كل مجموعة تجزئة، يتبقى $b = n - ra$. لذا، فإن $T_{n,r}$ تحوي b من مجموعات التجزئة التي حجم كل منها يساوي $a + 1$، وتحوي كذلك $r - b$ مجموعة تجزئة حجم كل منها يساوي a. لذا، فإن الشرط المعرف لـ $T_{n,r}$ يحدد صف تشاكل واحد فقط. ■

8.2.5. بديهية : بيان توران هو البيان الفريد الذي له أكبر عدد من الأضلاع من بين البيانات المتعددة التجزئة من الدرجة r (بمعنى لوني من الدرجة r) على n من الرؤوس.

الإثبات : كما لاحظنا قبل التعريف 6.2.5، فنحتاج إلى التعامل مع البيانات التامة المتعددة التجزئة من

الدرجة r فقط. إذا أعطيت بيانًا تامًّا متعدد التجزئة من الدرجة r، بحيث إن مجموعات تجزئته تختلف في حجمها بمقدار أكثر من 1، فانقل رأس v من المجموعة ذات الحجم الأكبر (حجمها i) إلى المجموعة ذات الحجم الأصغر (حجم j). إن الأضلاع التي لا تتضمن v تبقى كما كانت من قبل، ولكن V تكسب $i - 1$ جارًا في صفها (مجموعتها) القديم، وتخسر j ضلعًا في صفها الجديد، وبما أن $j < i - 1$، فإن عدد الأضلاع يزداد. لذا، نستطيع تعظيم (تكبير) عدد الأضلاع فقط من خلال مساواة الحجم كما في $T_{n,\ r}$. ■

لقد استخدمنا فكرة التغيير الموضعي سابقًا في النظرية 19.3.1، وفي النظرية 23.3.1؛ نجد أكبر بيان جزئي متعدد الفروع من الدرجة r من K_n.

ماذا يحدث لو كان لدينا أضلاع أكثر بحيث نُجْبِر العدد اللوني ليكون $r + 1$ على الأقل؟ لقد رأينا وجود بيانات عددها اللوني يساوي $r + 1$ ولا تحوي مثلثات. وعلى الرغم من ذلك، إذا ذهبنا أبعد من أكبر عدد من الأضلاع موجود في بيان لوني من الدرجة r له n من الرؤوس، فإننا مجبرون ليس فقط على استخدام $r + 1$ من الألوان، بل يجب أن يكون K_{r+1} بيانًا جزئيًّا من بياننا.

إن هذه النتيجة المشهورة لتوران تعمم النظرية 23.3.1، وتعدّ الأصل لنظرية البيانات المتطرفة (القصوى).

9.2.5 نظرية: ([Turán [1941]): البيان $T_{n,\ r}$ هو البيان الذي له أكبر عدد من الأضلاع، وذلك من البيانات البسيطة التي لها n من الرؤوس، ولا تحتوي على عصبة من الدرجة $r + 1$.

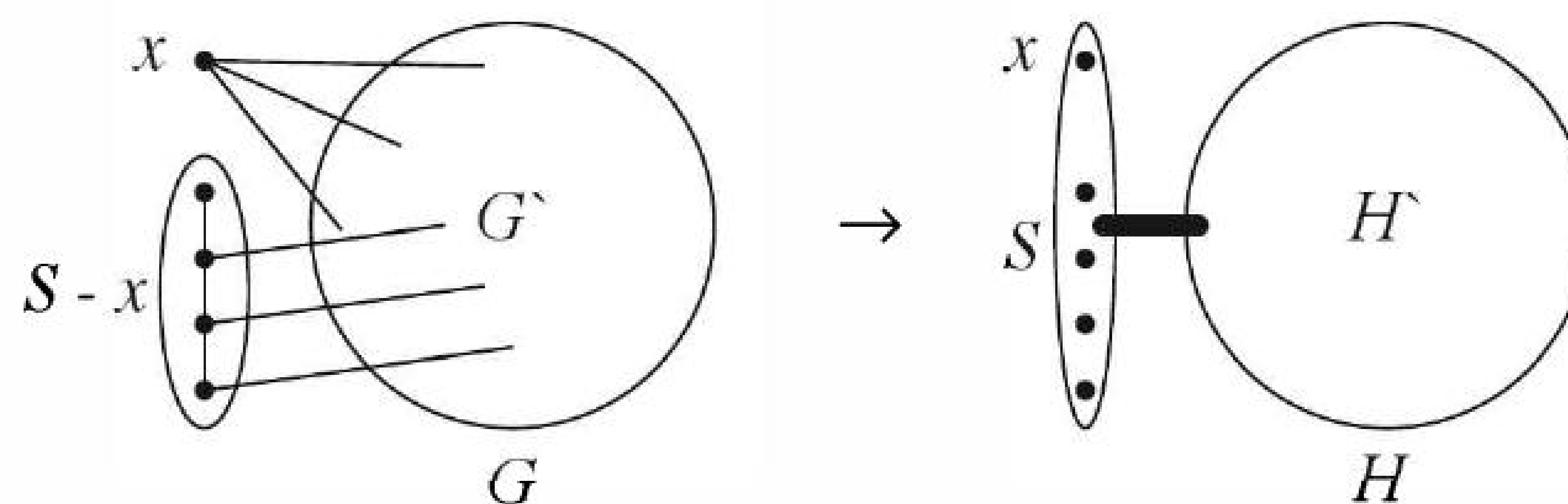
الإثبات: بيان توران، وكمثل أي بيان لوني من الدرجة r، لا يحوي عصبة من الدرجة $r + 1$؛ لأن كل مجموعة من مجموعات تجزئة رؤوسه تسهم برأس واحد في كل عصبة على الأكثر. إذا استطعنا إثبات أن البيان متعدد الفروع من الدرجة r يحقق احتواءه على أكبر عدد من الأضلاع، فإن البديهية 8.2.5 تضمن أن $T_{n,r}$ يحقق احتواءه على أكبر عدد من الأضلاع. لذا، يكفي أن نثبت أنه إذا كان G بيانًا لا يحتوي على عصبة من الدرجة $r + 1$، فإن هناك بيانًا متعدد الفروع H له مجموعة الرؤوس نفسها التي للبيان G، ويحوي عدد الأضلاع نفسها على الأقل.

نثبت هذا باستخدام الاستقراء على r. عندما $r = 1$، فإنه يوجد أضلاع لأي من G وH. افترض أن $r > 1$، وأن G بيان له n من الرؤوس، وليس له عصبة من الدرجة $r + 1$ وافترض أن $x \in V(G)$ رأس درجته تساوي k، حيث $k = \Delta(G)$. اجعل G' هي البيان الجزئي من G الذي تولده جيران x. وبما أن x يجاور كل رأس في G'، ولا يوجد لـ G عصبة من الدرجة $r + 1$، فإنه توجد عصبة من الدرجة r في G'. لذا، نستطيع تطبيق فرضية الاستقراء على G'، وهذا يعطينا بيانًا G' متعدد الفروع من الدرجة $r - 1$ رؤوسه $N(x)$، بحيث إن $e(H') \geq e(G')$.

لتكن H هي البيان المكون من H' عن طريق ربط $N(x)$ كلها إلى S كلها، حيث $S = V(G) - N(x)$ بما أن S مجموعة مستقلة، وH متعدد الفروع من الدرجة r. فندّعي بأن $e(H) \geq e(G)$.

من خلال البناء، نعلم أن $e(H) = e(H') + k(n - k)$، وكذلك لدينا $e(G) \leq e(G') + \sum_{v \in S} d_G(v)$ لأن المجموع يحسب كل ضلع في G مرة واحدة لكل طرف خارج $V(G')$، وبما أن $\Delta(G) = k$، فإن $d_G(v) \leq k$ لكل $v \in S$ و $|S| = n - k$. لذا، فإن $\sum_{v \in S} d_G(v) \leq k(n - k)$ وبذلك نحصل على أن:

$$e(G) \leq e(G') + (n - k)k \leq e(H') + k(n - k) = e(H)$$ ■

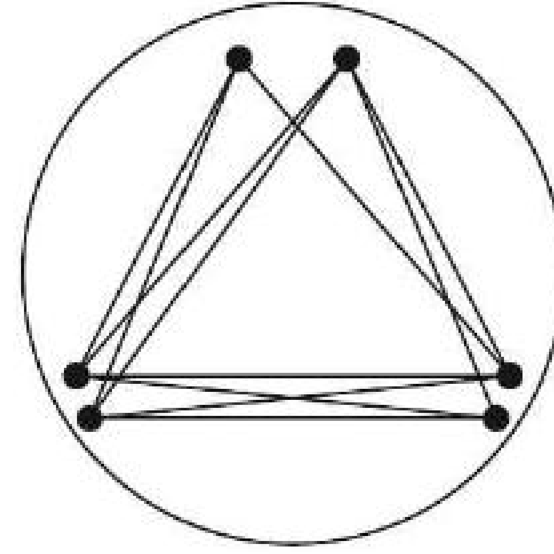


في الحقيقة، إن بيان توران هو البيان الفريد الذي لعدد أضلاعه قيمة كبرى (عظمى) (التمرين 21). تتعلق التمارين 16 − 24 بنظرية توران، وتتضمن براهين بديلة لقيمة $e(T_{n,r})$ وللتطبيقات، والتعليل الذي استخدم في النظرية 23.3.1 يُعد – ببساطة – مثالاً أو شاهدًا على خطوة الاستقراء في النظرية 9.2.5.

تنطبق نظرية توران على مسائل القيم التطرفية (القصوى) عندما يكون هناك شرط يمنع العصب من رتبة معينة. وسنعطي وصفًا هندسيًّا لتطبيق من بوندي ومورتي. ([Bondy – Murty, [1976, p 113 – 115).

10.2.5. مثال*. الأزواج المتباعدة من النقاط. افترض أن لدينا مدينة دائرية الشكل، ونرغب في تعيين مواقع لـ n من سيارات الشرطة وذلك من أجل تكبير (تعظيم) عدد الأزواج المتباعدة من هذه السيارات، ولنقل أن المسافة بين أي زوج من هذه السيارات أكبر من $d=1/\sqrt{2}$. إذا كان هنالك ست سيارات تقع على الدائرة، وعلى أبعاد متساوية بعضها من بعض، فإن الأزواج التي لا يبعد بعضها عن بعض بمقدار أكبر من d هي فقط الأزواج المتتابعة حول الخارج: يوجد 9 أزواج جيدة.

وبدلاً من ذلك، فإن وضع سيارتين بالقرب من رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $\sqrt{3}/2$ يعطينا ثلاثة أزواج سيئة، و12 زوجًا جيدًا (ربما لا يكون هذا أفضل وضع مقبول اجتماعيًّا). وعمومًا، إن وضع $\lfloor n/3 \rfloor$ أو $\lceil n/3 \rceil$ سيارات بالقرب من كل رأس من رؤوس هذا المثلث، يؤدي إلى أن الأزواج الجيدة هي الأزواج التي تقابل أضلاع بيان توران الثلاثي الفرع. وفيما يأتي سنثبت أن هذا البناء هو أفضل ما يمكن. ■

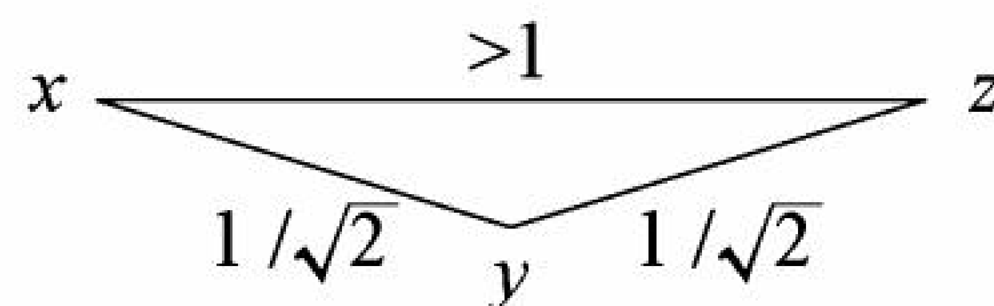


11.2.5. تطبيق* افترض أن n مجموعة من النقاط في المستوى، بحيث إن المسافة بين أي زوج من هذه النقاط لا تزيد على 1، فإن أكبر عدد من الأزواج التي تبعد بعضها عن بعض مسافة أكثر من $1/\sqrt{2}$ هو $\lfloor n^2/3 \rfloor$.

الإثبات: ارسم بيانًا رؤوسه هذه النقاط، بحيث يكون أي رأسين متجاورين إذا كانت المسافة بينهما تزيد على $1/\sqrt{2}$. باستخدام نظرية توران والبناء الموجود في المثال 10.2.5، يكفي أن نثبت أن G لا تحوي K_4.

من بين أي أربع نقاط، هناك ثلاث منها تشكل زاوية قياسها أكثر من $90°$: إذا كانت النقاط الأربع تشكل شكلاً رباعيًّا محدبًا (Convex) فإن مجموع الزوايا الداخلية لهذا الشكل يساوي $360°$، وإذا كانت إحداها داخل المثلث الذي تحدده النقاط الثلاثة الباقية، فإنها تصنع مع هذه النقاط ثلاث زوايا مجموعها يساوي $360°$.

افترض أنه يوجد لـ G عصبة من أربعة رؤوس هي: w و x و y و z، حيث إن $\angle xyz \geq 90^o$. وبما أن طول كل من xy وyz يزيد على $1/\sqrt{2}$ ، فإن طول xz أكبر من طول وتر المثلث القائم الذي طول كل من ضلعي زاويته القائمة يساوي $1/\sqrt{2}$. لذا، فإن المسافة بين x وz تزيد على 1، وهذا يناقض الفرض. ■



حتى ودون العبارة البنيوية الكاملة لنظرية توران، فإن بإمكاننا أن نجد مباشرة حدًّا أعلى على عدد أضلاع البيان الذي له n من الرؤوس والذي يخلو من K_{r+1} (التمرين 16). وبقلب هذا رأسًا على عقب، نحصل على حد أدنى حاد على العدد اللوني للبيان بدلالة عدد الرؤوس والأضلاع (التمرين 17).

البيانات الحرجة لونيًّا (Color - Critical Graphs)

إن بيان توران يحل مسألة هي نوعًا ما نقيض (ضد) فهم: ماذا يُجْبِر العدد اللوني أن يكون k؟ (أو ماذا يضمن وجود عدد لوني يساوي k؟). فهي تعُدُّ بيانات عظمى تجتنب الحاجة إلى k من الألوان بدلاً من البيانات الصغرى التي تحتاج إلى k من الألوان.

يوجد لكل بيان لوني من الدرجة k بيان جزئي حرج لونيًّا من الدرجة k؛ لأنه يمكننا الاستمرار بحذف (إهمال) أضلاع ورؤوس معزولة دون إنقاص العدد اللوني حتى نصل إلى نقطة (مرحلة) لا نستطيع بعدها حذف أي ضلع أو أي رأس معزول دون إنقاص العدد اللوني. لذا، فإن معرفة البيانات الحرجة لونيًّا من الدرجة k تساعدنا على اختبار قابلية التلوين بـ$k-1$ من الألوان. وسنقدم فيما يأتي بعض الخواص البسيطة للبيانات الحرجة من الدرجة k.

12.2.5. ملاحظة : إذا كان G بيانًا ليس له رؤوس معزولة، فإن G يكون حرجًا لونيًّا إذا وفقط تحقق أن $\chi(G - e) < \chi(G)$ لكل ضلع $e \in E(G)$. لذا، لبرهنة أن بيانًا مترابطًا يكون حرجًا لونيًّا، فإننا نحتاج – فقط – لمقارنته ببيانات جزئية نحصل عليها بحذف ضلع واحد من هذا البيان. ■

13.2.5. فرضية : افترض أن G بيان حرج من الدرجة k.

(a) لكل $v \in V(G)$، يوجد لـ G تلوين فعلي من الدرجة k، بحيث إن اللون على الرأس v لا يظهر على أي رأس آخر، وتظهر الـ $k-1$ لونًا الأخرى على $N(v)$.

(b) لكل $e \in E(G)$، يتحقق أن كل تلوين فعلي من الدرجة $k-1$ للبيان $G-e$، يعطي اللون نفسه على طرفي e.

الإثبات: (a) إذا أُعطينا تلوينًا f من الدرجة $k-1$ للبيان $G-v$، فإن إضافة اللون k على الرأس v فقط يتمم تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان G. أما الألوان الأخرى، فيجب أن تظهر جميعها على $N(v)$؛ لأنه إن لم يظهر أحد هذه الألوان على $N(v)$، فإنه يمكن تحديد هذا اللون للرأس v، وبذلك نحصل على تلوين فعلي بـ $k-1$ لونًا للبيان G.

(b) إذا وجد تلوين فعلي من الدرجة $k-1$ للبيان $G-e$، بحيث إن لطرفي e لونين مختلفين فإن إضافة e للبيان G يعطينا تلوينًا فعليًّا من الدرجة $k-1$ للبيان G. ■

لاحظ أنه لكل بيان G، فإن الفرضية 5 .2 .13a تتحقق لكل $v \in V(G)$ ، بحيث إن $\chi(G - v) < \chi(G) = k$، كما أن الفرضية 5 .2 .13b تتحقق لكل $e \in E(G)$، بحيث إن $\chi(G - e) < \chi(G)=k$.

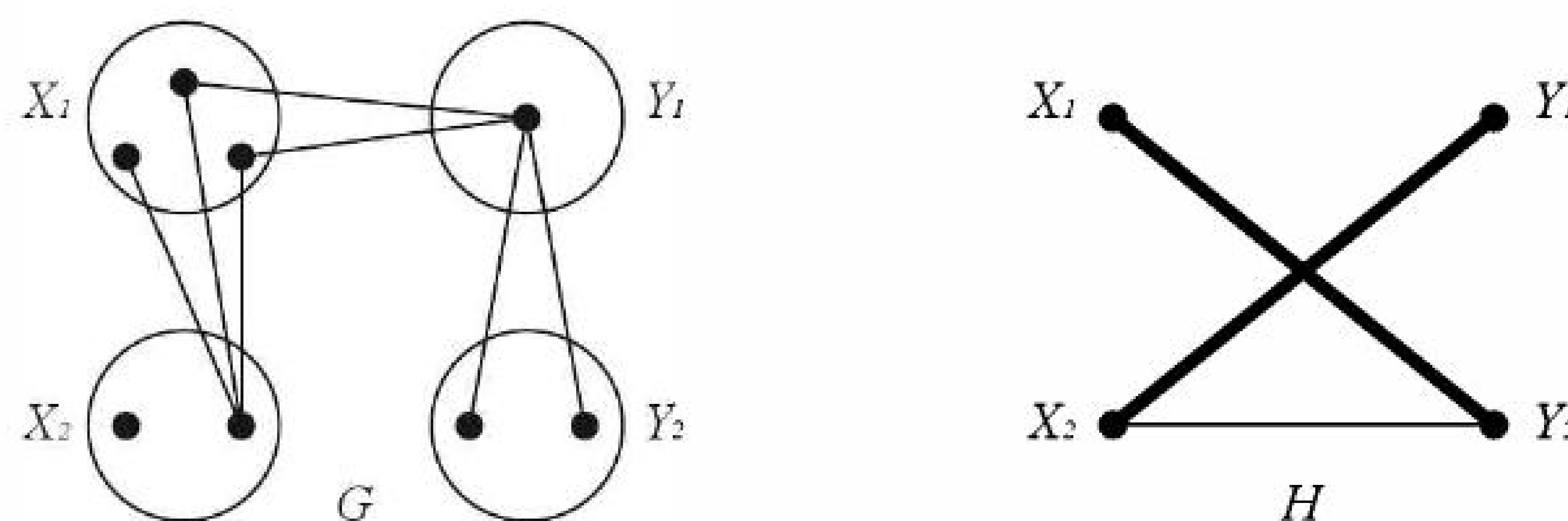
14.2.5. مثال: إن البيان $C_5 \vee K_5$ الموجود في المثال 8.1.5 هو بيان حرج لونيًّا. عمومًا، إن ربط أي بيانين حرجين لونيًّا دائمًا يعطي بيانًا حرجًا لونيًّا. ويعدّ برهان هذا سهلًا، وذلك من خلال استخدام الفرضية 12.2.5، آخذين في الحسبان حالات حذف ضلع؛ الضلع المحذوف يمكن أن يكون ضلعًا في G أو في H، أو له طرف في G والطرف الآخر في H (التمرين 3). ■

لقد أثبتنا في البديهية 18.1.5 أن $\delta(G) \geq k - 1$ عندما يكون G بيانًا حرجًا من الدرجة k. وبإمكاننا تقوية هذه النتيجة إلى $\kappa'(G) \geq k - 1$ من خلال استخدام نظرية كونج وإيجرفاري. (Konig – Egervary theorem).

15.2.5. تمهيدية: (Dirac [1953]). افترض أن G بيان، بحيث إن $\chi(G) > k$. افترض أن X وY تجزئة لـ $V(G)$. إذا كان $G[X]$ و$G[Y]$ قابلين للتلوين بـ k من الألوان، فإن القطع الضلعي $[X, Y]$ يحوي k ضلعًا على الأقل.

الإثبات: (Dirac – Sorensen – Toft [1974], Kainen) افترض أن $X_1, \ldots, X_k$ و$Y_1, \ldots, Y_k$ هي التجزئات لكل من X و Y المشكلة من الصفوف اللونية الناتجة على تلوين فعلي بـ k من الألوان لكل من $G[X]$ و$G[Y]$. إذا لم يوجد أي ضلع بين X_i وY_j، فإن $X_i \cup y_j$ تكون مجموعة مستقلة في G. سنبين ما إذا كان $|[X, Y]| < k$، فبإمكاننا ضم صفوف لونية من $G[X]$ و$G[Y]$ في صورة أزواج لتكوين تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G.

كوِّن بيانًا ثنائي الفرع H، رؤوسه $X_1, \ldots, X_k$ و$Y_1, \ldots, Y_k$ بحيث إن $X_i y_i \in E(H)$ إذا لم يوجد أي ضلع في G بين كل من المجموعتين X_i و Y_j. إذا كان $|[X, Y]| < k$، فإن في H أكثر من $k(k-1)$ ضلعًا. وبما أن m رأسًا يمكن أن تغطي (km) ضلعًا في بيان جزئي للبيان $K_{k,k}$، فلا يمكن تغطية $E(H)$ بـ $k-1$ رأسًا. من نظرية كونج وإيجرفاري، هناك مواءمة تامة M للبيان H. في G أعطي اللون i لـ X_i كلها وللمجموعة Y_j كلها التي توائم X_i في M. وبما أنه لا يوجد أضلاع تربط بين X_i وY_j، فإن عمل هذا لكل i ينتج تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان G، وهذا يناقض افتراض أن $\chi(G) > k$. لذا، نستنتج أن $|[X, Y]| \geq k$. ■

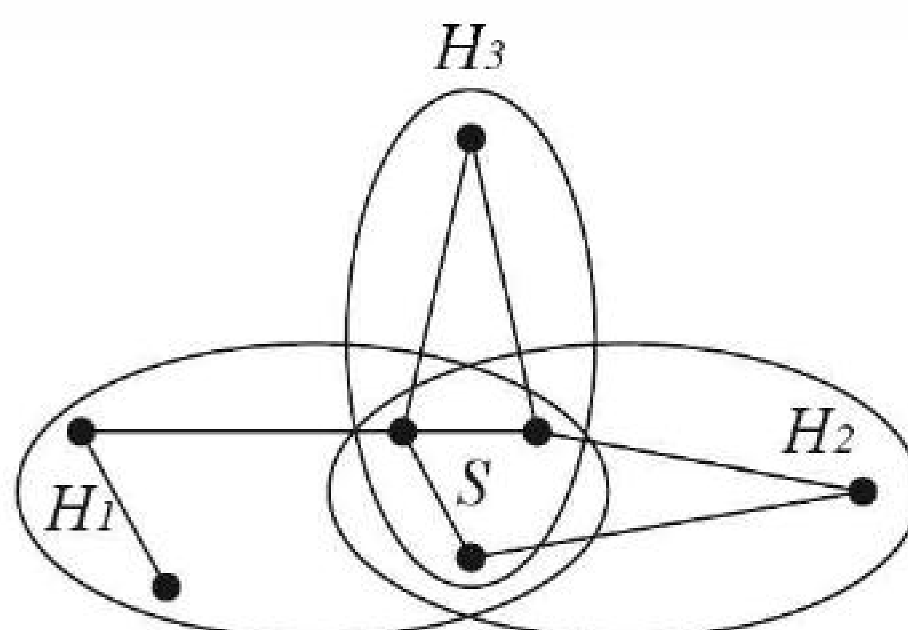


16.2.5. نظرية: (Dirac [1953]) كل بيان حرج من الدرجة k يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $k-1$.

الإثبات: افترض أن G بيان حرج من الدرجة k، وافترض أن $[X, Y]$ هما أصغر قطعين ضلعيين لـ G. وبما أن G حرج من الدرجة k، فإن $G[X]$ و$G[Y]$ يكونان قابلين للتلوين بـ $k-1$ من الألوان. طبق البديهية 15.2.5 مستخدمًا $k-1$ بوصفه وسيطًا (متغيرًا)، تجد أن $|[X,Y]| \geq k-1$. ■

على الرغم من أن البيانات الحرجة من الدرجة k يجب أن تكون مترابطة ضلعيًّا من الدرجة $k-1$، إلا أنها ليست بالضرورة مترابطة من الدرجة $k-1$. يوضح التمرين 32 كيفية بناء بيانات حرجة من الدرجة k، ودرجة ترابطها تساوي 2. وعلى الرغم من ذلك، نستطيع حصر سلوك مجموعات قطع الرؤوس القليلة في البيانات الحرجة من الدرجة k.

17.2.5. تعريف: افترض أن S مجموعة من الرؤوس في بيان G. نعرِّف الفلقة المعتمدة على S (وتكتبها على الصورة الفلقة - S) للبيان G (S – lope) على أنها البيان الجزئي من G الذي رؤوسه S، بالإضافة إلى رؤوس أحد مركبات $G - S$. لكل مجموعة جزئية S من $V(G)$، يكون البيان G اتحادًا للفلق S.



ونستخدم هذا المفهوم في برهان عبارة تتعلق بالرؤوس التي تشكل مجموعات قطع في البيانات الحرجة من الدرجة k، والتي ستكون مفيدة في النظرية الآتية. (التمرين 36 يقوي النتيجة عندما $|S| = 2$).

18.2.5. فرضية: إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة k، فإنه لا يحوي مجموعة قطع مؤلفة من رؤوس متجاورة زوجًا زوجًا. وعلى وجه الخصوص، إذا وجد في G مجموعة قطع $S = \{x, y\}$، فإن $x \not\leftrightarrow y$ ويوجد في G (فلقة $-S$) H، بحيث إن $\chi(H + xy) = k$.

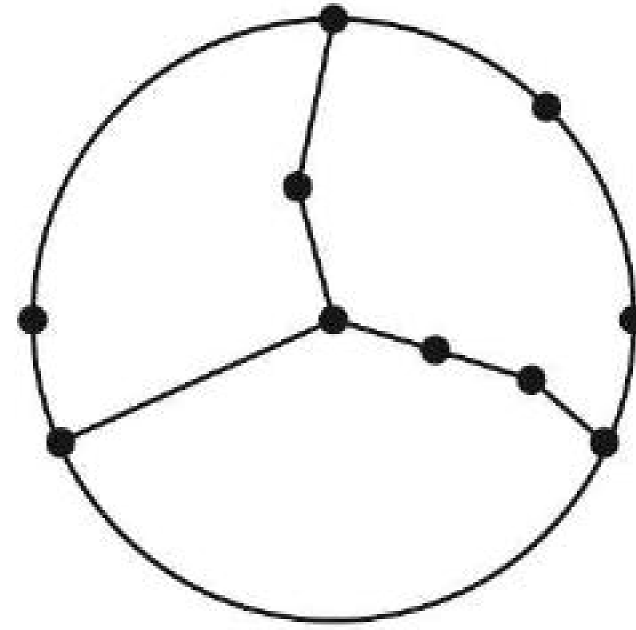
الإثبات: افترض أن S مجموعة قطع في بيان G حرج من الدرجة k، وافترض أن $H_1, \ldots, H_t$ هي مجموعة فلق G المعتمدة على S (فلق $-S$). بما أن كل H_i بيان جزئي فعلي لبيان حرج من الدرجة k، فإن H_i كله يكون قابلاً للتلوين بـ k من الألوان. وإذا وُجد تلوين فعلي من الدرجة $k-1$ لكل H_i بحيث يعطي هذا التلوين ألوانًا مختلفة لرؤوس S، فيمكن تبديل أسماء هذه الألوان في هذا التلوين لتتوافق على S. وبعد ذلك، فإن هذه الألوان تتحد لإعطاء تلوين من الدرجة $k-1$ للبيان G، وهذا مستحيل. لذا، هناك فلقة H معتمدة على S بحيث لا يوجد لهذه الفلقة تلوين فعلي من الدرجة $k-1$، بحيث إن ألوان رؤوس S تكون مختلفة.

إن هذا يعني أن S ليست عصبة. إذا كانت $S = \{x, y\}$، فإن كل تلوين من الدرجة $k - 1$ لـ H يحدد اللون نفسه لكل من x و y. واستنادًا إلى ذلك، فإن $H + xy$ غير قابل التلوين $k-1$ لونًا. ■

التقسيمات القسرية (Forced Subdivitions)

ليس من الضروري أن يكون لدينا عصبة من الدرجة k للحصول على عدد لوني k، ولكن ربما نحتاج إلى صورة أضعف للعصبة من الدرجة k.

19.2.5. تعريف: ليكن H بيانًا، نعرف تقسيم H على أنه البيان الذي نحصل عليه من H عن طريق تقسيم أضلاع H بالتتابع (التعريف 19.2.5). وهذا يكافئ قولنا: إن تقسيم H هو البيان الذي نحصل عليه من H عن طريق استبدال أضلاع H بمسارات منفصلة داخليًا.



تقسيم K_4

20.2.5. نظرية: (Dirac [1952 a]). كل بيان عدده اللوني يساوي 4 على الأقل يحوي تقسيمًا للبيان K_4.

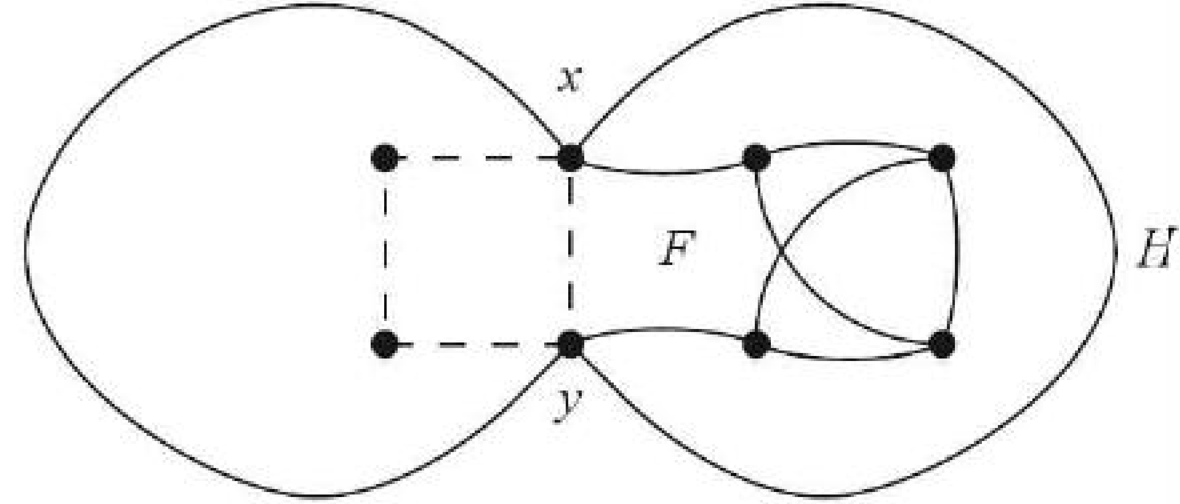
الإثبات: بالاستقراء على $n(G)$.

الخطوة الأولى: $n(G) = 4$. إن البيان G لا يمكن أن يكون إلا البيان K_4 نفسه.

لذا، افترض أن $n(G) > 4$. بما أن $\chi(G) \geq 4$، فبإمكاننا أن نفترض أن H بيان جزئي من G حرج من الدرجة 4. من الفرضية 18.2.5، لا يوجد لـ H رأس قطع. إذا كان $\kappa(H) = 2$، وكانت $S = \{x, y\}$ مجموعة قطع حجمها 2، فإن الفرضية 18.2.5 تضمن أن $x \not\leftrightarrow y$، وتضمن كذلك وجود فلقة H' لـ H معتمدة على S، بحيث إن $\chi(H' + xy) \geq 4$. وبما أن $n(H') < n(G)$، فبإمكاننا تطبيق فرضية الاستقراء للحصول على تقسيم F لـ K_4 في $H' + xy$. لاحظ أن F يظهر كذلك في G بشرط عدم احتوائه على xy (انظر الشكل أدناه). في هذه الحالة، نعدِّل F للحصول على تقسيم آخر لـ K_4 في G بأن نستبدل بالضلع xy مسارًا من x إلى y من خلال فلقة

S – أُخرى من فلق H المُعتمدة على S. إن مثل هذا المسار يكون موجودًا؛ لأن أصغرية (وجود قيمة صغرى) S تضمن وجود مسار لكل رأس من رؤوس S في كل مركبة من مركبات $H - S$.

لذا، نستطيع أن نفترض أن H مترابط من الدرجة 3. اختر رأسًا x في $V(G)$. بما أن $H - x$ مترابط من الدرجة 2؛ فإن فيه حلقة طولها يساوي 3 على الأقل (اجعل x تمثل الرأس المركزي، وc هي الحلقة الخارجية وذلك في الشكل أعلاه). بما أن H مترابط من الدرجة 3، فإن بديهية المروحة (النظرية 23.2.4) تعطينا مروحة x، $V(C)$ بحجم يساوي 3 في H. إن هذه المسارات الثلاثة بالإضافة إلى C تشكل تقسيمًا لـِ K_4 في H. ■



21.2.5.* ملاحظة : خمّن هاجوز (Hajos) في العام 1961م أن كل بيان لوني من الدرجة k يحوي تقسيمًا للبيان K_k. عندما $k = 2$، هذه العبارة تقول: إن كل بيان ثنائي اللون يحوي مسارًا غير بديهي أو غير تافه، وتقول أيضًا: عندما $k = 3$، فإن كل بيان ثلاثي اللون يحوي حلقة، والنظرية 20.2.5 تثبت العبارة في حال كانت $k = 4$. والمسألة ما زالت دون حلّ عندما $k \in \{5,6\}$. مخمنة هاجوز غير صحيحة عندما $k \geq 7$ (انظر التمرين 40، Catlin [1979]). لقد اقترح هادوايجر (Hadwiger) في العام 1943م مخمنة أضعف هي: كل بيان لوني من الدرجة k يحوي بيانًا جزئيًّا يمكن تحويله إلى K_k من خلال إجراء عمليات انقباض (تقليص) للأضلاع، هذه العبارة أضعف؛ لأن التقسيم لـ K_k هو بيان جزئي خاص من هذا النوع، فعندما $k = 4$، فإن مخمنة هادوايجر تكافئ النظرية 20.2.5. وفي حالة $k = 5$، فإنها تكافئ نظرية الألوان الأربعة (الفصل السادس). وعندما k=6، فقد بُرهنت هذه الحالة باستخدام نظرية الألوان الأربعة من قبل روبرتسون (Robertson) وسيمور (Seymour) وثوماس (Thomas) في العام 1993م. والمسألة ما زالت دون حل عندما $k \geq 7$. ■

بعض النتائج المتعلقة بالبيانات الحرجة من الدرجة k قابلة للتعميم للصف الأكبر من البيانات التي لها $\delta(G) \geq k - 1$. فعلى سبيل المثال، العبارة «كل بيان درجته الصغرى على الأقل 3 يمتلك تقسيمًا لـ K_4» (التمرين 38) هي تقوية للنظرية 20.2.5، وقد أثبت كل من ديراك (Dirac) وجنج (Jung) في العام 1965م أنه إذا كان العدد اللوني كبيرًا بما يكفي، فإن ذلك يضمن وجود تقسيم لـK_k في G (يجبر G على احتواء تقسيم لـK_K).

وقد حَسَّنَ مادر (Mader) هذه النتيجة من خلال إضعاف المفروض، وتقوية النتيجة؛ إذا كان F بيانًا بسيطًا، فإنّ كل بيان بسيط G حيث $\delta(G) \geq 2^{e(F)}$ يحوي تقسيمًا لـِ F. البداية بغرض أن $\delta(G) \geq 2^{e(F)}$ هي أكبر مما هو ضروري، ولكنها تسمح ببرهان أقصر.

22.2.5. بديهية : [Mader [1967، انظر Thomassen [1988]]. إذا كان G بيانًا بسيطًا درجته الصغرى تساوي K 2 على الأقل، فإن G يحوي بيانات جزئية منفصلة G' و H، بحيث إن: 1) H يكون مترابطا 2) $\delta(G') \geq k$ و 3) لكل رأس في G' يوجد جار في H.

الإثبات : يمكننا افتراض أن G بيان مترابط. اجعل $G \cdot H'$ ترمز إلى البيان الذي نحصل عليه من G عن طريق تقليص أضلاع البيان الجزئي المترابط H'، وحذف النسخ الزائدة من الأضلاع المكررة. إن المجموعة $V(H')$ تصبح رأسًا واحدًا في $G \cdot H'$.

خذ في الحسبان البيانات الجزئية المترابطة H' من البيان G جميعها، بحيث تحوي $G \cdot H'$ على الأقل $k(n(G) - n(H')) + 1$ ضلعًا.

بما أن $\delta(G) \geq 2k$، فإن كل بيان جزئي من G برأس واحد هو مثل هذا البيان الجزئي، وبما أن هذه البيانات الجزئية موجودة، فيمكننا اختيار H ليكون بيانًا جزئيًّا أعظميًّا له هذه الخاصية.

اجعل S تمثل مجموعة الرؤوس خارج H التي جيرانها في H، واجعل $G' = G[S]$، نحتاج فقط إلى برهنة أن $\delta(G') \geq k$. يوجد لكل رأس x في $V(G')$ جار y في $V(H)$. في البيان $G\ (H \cup xy)$، نجد أن الأضلاع الواقعة على x في G' تضعف (تنهار) إلى أضلاع من $V(G')$ إلى H التي تظهر في $G\ .\ H$، وأن الضلع $x\,y$ ينقبض. لذا فإن: $e(G \cdot H) - e(G \cdot (H \cup xy)) = d_{G'}(x) + 1$، ومن خيارنا لـ H، نجد أن هذا الفرق أكبر من k. ولذلك، فإن $\delta(G') \geq k$. ■

23.2.5.*نظرية : (Mader [1967]، انظر (Thomassen [1988] إذا كان كل من F وG بيانين بسيطين، بحيث إن $e(F) = m$ و $\delta(F) \geq 1$، فإن $\delta(G) \geq 2^m$ تضمن أن G يحوي تقسيمًا لـ F.

الإثبات: بالاستقراء على m. إذا كانت $m \leq 1$، فإن النتيجة بديهية. لذا، افترض أن $m \geq 2$. من البديهية 22.2.5، نستطيع أن نختار بيانات جزئية منفصلة H و G' في G، بحيث يكون H مترابطًا، و $\delta(G') \geq 2^{m-1}$، ويوجد جار في H لكل رأس في G'. إذا وُجد لـ F ضلع $e = x\,y$، بحيث إن $\delta(F - e) \geq 1$، فإن فرضية الاستقراء تضمن وجود تقسيم J لـ $F - e$ في G'.

ويمكن إضافة مسار خلال H بين رؤوس G التي تمثل x وy من أجل إتمام التقسيم لـ F.

إذا كانت $\delta(F - e) = 0$ لكل $e \in E(F)$، فإن كل ضلع في F يقع على ورقة. الآن F غابة من النجوم. و$\delta(G) \geq 2^m \geq 2m$ تسمح لنا بإيجاد F نفسها في غابة حجمها يساوي $2\ m - 1$ على الأكثر في G، وذلك باستخدام الفرضية 8.1.2 ■

24.2.5.* ملاحظة : الحالة التي يكون فيها F بيانًا تامًّا تتمتع بأهمية خاصة. افترض أن $f(k)$ تساوي أصغر d، بحيث يحوي كل بيان درجته الصغرى تساوي d على الأقل تقسيمًا لـ K_k. من النظرية 23.2.5، نجد أن $f(k) \leq 2^{\binom{k}{2}}$. لقد أثبت كل من كوملوز (Komlos) وسميرد ي (Szemerédi) في العام 1996م وبولوباس وثوماسون (Bollobas – Thomason) في العام 1998م أن $f(k) < ck^2$، حيث C ثابت (أثبت الأخيران أن $c \leq 256$). بما أنه لا يوجد لـ $K_{m,\,m-1}$ تقسيم لـ K_{2K} عندما $m = k(k+1)/2$ (التمرين 41)، فإن $f(k) > k^2/8$.

يعطينا التمرين 38 أن $f(4) = 3$، إضافة إلى أن $f(5) = 6$. في الشكل العشريني (الذي له عشرون وجهًا) (التمرين 8.3.7) يعطينا أن $f(5) \geq 6$؛ لأن هذا البيان منتظم من الدرجة 5، وليس له تقسيم لـ K_5 من جهة، ومن جهة أخرى، فقد أثبت مادر [1998] مخمنة ديراك [1964] التي تنص على أن كل بيان له n من الرؤوس، وله على الأقل $3\ n - 5$ ضلعًا يحوي تقسيمًا لـ K_5. ومن صيغة جمع الدرجات، فإن $\delta(G) \geq 6$ تعطينا أن عدد الأضلاع يساوي $3n$ على الأقل. لذا، فإن $f(5) \leq 6$.

أخيرًا، نلاحظ أن سكوت [1997] ($Scott$) أثبت نسخة التقسيم من مخمنة جيارفاس وسمنر (Gyárfas – Sumner) (الملاحظة 5.2.4) لكل شجرة T ولكل عدد صحيح k: إذا خلا G من عصبة من الدرجة وكان $\chi(G)$ كبيرًا بما يكفي، فإن G يحوي تقسيمًا لـ T كبيان جزئي مستحدث. ■

تمــــارين (Exercises)

1.2.5. (-) افترض أن G بيان، بحيث إن $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ لكل زوج x وy من الرؤوس المختلفة. أثبت أن G بيان تام. (تعليق: لقد خمن لوفاز أن النتيجة كذلك تتحقق عندما نفرض هذا الشرط فقط على الرؤوس المتجاورة).

2.2.5. (-) أثبت أن البيان البسيط يكون بيانًا تامًّا متعدد الفروع إذا وفقط إذا خلا هذا البيان من بيان جزئي مستحدث له ثلاثة رؤوس وضلع واحد.

3.2.5. (-) تضمن النتائج أدناه عدم وجود بيان حرج من الدرجة k وله $k + 1$ من الرؤوس:

a) افترض أن x وy رأسان في بيان حرج G، أثبت أن $N(x) \subseteq N(y)$ إذا وفقط إذا كان كل من G وH حرجًا لونيًّا، استنتج من ذلك أنه لا يوجد بيان حرج من الدرجة k بحيث يكون له $k + 1$ رأسًا.

b) أثبت أن $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$، وأن $G \vee H$ يكون حرجًا لونيًّا إذا وفقط إذا كان كل من G وH حرجًا لونيًّا. استنتج من ذلك أن $C_5 \vee K_{k-3}$ الذي له $k + 2$ رأسًا يكون حرجًا من الدرجة k.

4.2.5. (-) افترض أن $n \in \mathbb{N}$، وافترض كذلك أن G هو البيان الذي رؤوسه $\{v_0, \ldots, v_{3n}\}$ والمعرف على الشكل $i \leftrightarrow j$ إذا وفقط إذا تحقق أن $|i - j| \leq 2$، وأن $i + j$ لا يقبل القسمة على 6:

a) حدد (جد) قوالب G.

b) أثبت أن إضافة الضلع $v_0 v_{3n}$ إلى G ينتج بيانًا حرجًا من الدرجة 4.

5.2.5. (-) جد تقسيمًا لـ K_4 في بيان جروتزك (المثال 2.2.5).

• • • • •

6.2.5. حدد أصغر عدد من الأضلاع لبيان مترابط له n من الرؤوس، وعدده اللوني يساوي k (مساعدة: خذ في الحسبان البيانات الجزئية الحرجة من الدرجة k [1962] Ersov – Kozuhin، انظر [1994] Bhasicer – Samad – West من أجل درجات الترابط الأعلى.

7.2.5. (!) إذا كان لدينا تلوين أمثل لبيان لوني من الدرجة k (عدده اللوني يساوي k)، أثبت أنه يوجد لكل لون i رأس لونه i يجاور رؤوسًا ملونة بالـ $k - 1$ لونًا الأخرى.

8.2.5. استخدم خواص البيانات الحرجة لونيًّا لبرهنة الفرضية 14.1.5 مرةً أُخرى. $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}$، حيث $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ هي درجات رؤوس G.

9.2.5. (!) أثبت أنه إذا كان البيان G حرجًا لونيًّا، فإن البيان G' المولد من G من خلال بناء مسيلسكي يكون أيضًا حرجًا لونيًّا.

10.2.5. افترض أن G بيان، رؤوسه هي: $v_1, \ldots v_n$، وأن G' هو البيان المولد من G عن طريق بناء مسيلسكي. وليكن H بيانيًّا جزئيًّا من G، وافترض أن G'' هو البيان الذي نحصل عليه من G' عن طريق إضافة الأضلاع $\{u_i u_j : v_i v_j \in E(H)\}$. أثبت أن $\chi(G'') = \chi(G) + 1$، وأن:

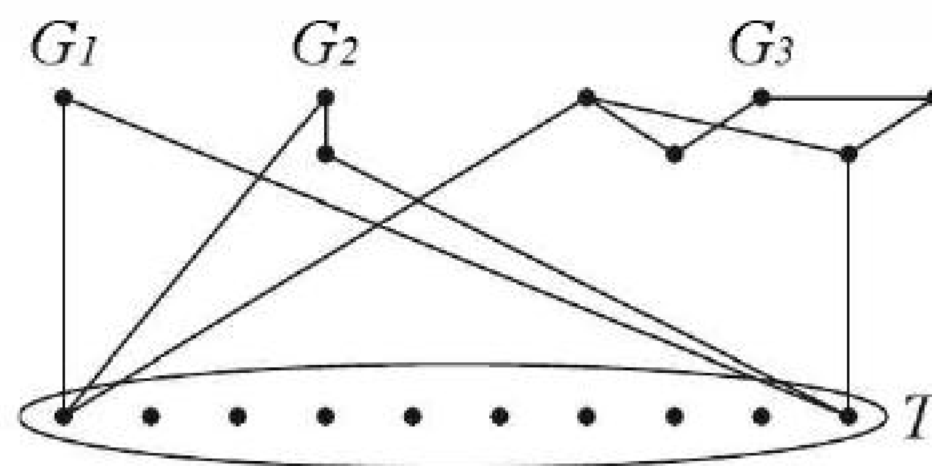
$$\omega(G'') = \max\{\omega(G), \omega(H) + 1$$ (Pritikin).

11.2.5. (!) إذا كان G بيانًا بحيث لا يمكن أن يستحدث منه البيان $2K_2$، فأثبت أن $\chi(G) \leq \binom{\omega(G)+1}{2}$ (مساعدة: استخدم عصبة كبرى لتعريف جمع فيه $\omega+(G)\binom{\omega(G)}{2}$ مجموعة مستقلة تغطي الرؤوس. تعليق: هذه حالة خاصة من مخمنة جيرفاس وسمنر (الملاحظة 4.2.5)، ([1980] Wagon).

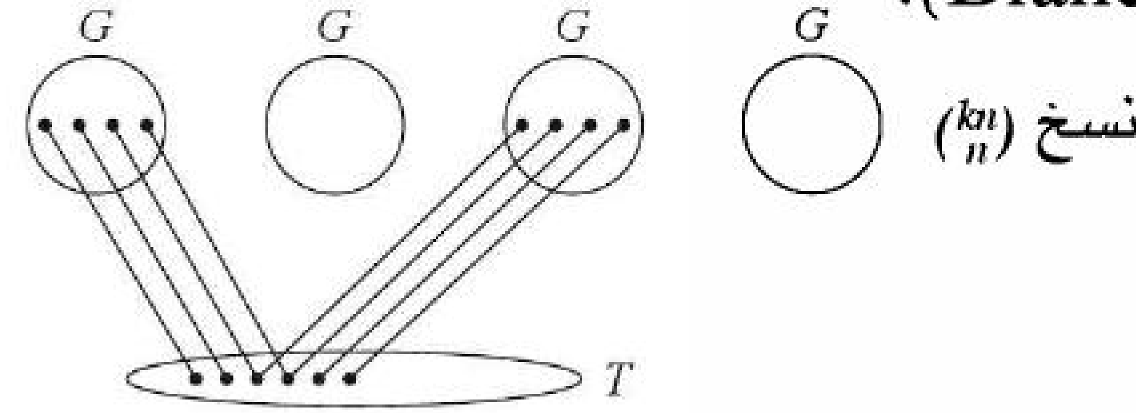
12.2.5. (!) افترض أن $G_1 = K_1$. لكل $k > 1$ عرِّف G_K على الشكل التالي: أضف مجموعة مستقلة T حجمها $\prod_{i=1}^{k-1} n(G_i)$ وذلك للاتحاد المنفصل $G_1 + \ldots + G_{k-1}$. ولكل خيار لـ $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ في $V(G_1) x \ldots x V(G_{K-1})$، اجعل رأسًا واحدًا من رؤوس T يحظى بـ $\{v_1, \ldots V_{k-1}\}$ كجوار. (في الرسم أدناه تجد G_4، وتم إيضاح الجيران لعنصرين فقط من عناصر T):

a) أثبت أن $\omega(G_k) = 2$، وأن $\chi(G_k) = k$. ([1949] Zykov).

b) أثبت أن G_k حرج من الدرجة k. [1969] Schäuble.



13.2.5. (+) افترض أن G بيان لوني من الدرجة k، وخصره يساوي 6، ورتبته n. ابن G' كالآتي: اجعل T مجموعة مستقلة بها k_n رأسًا جديدًا. خذ $\binom{kn}{n}$ نسخة من G بحيث تكون هذه النسخ منفصلة زوجًا زوجًا، على أن تكون نسخة واحدة لكل طريقة نختار بها مجموعة جزئية S من T حيث S تحوي n من العناصر. أثبت أن العدد اللوني للبيان الناتج يساوي $k + 1$، وأن خصر هذا البيان يساوي 6. (تعليق: بما أن C_6 ثنائي اللون وله خصر يساوي 6، فإنه يمكن بدء هذه العملية. وهذا يضمن أن هذا النوع من البيانات موجود). (Blanche Descartes [1974, 1954]).



14.2.5. العدد اللوني وطول الحلقات:

a) افترض أن v رأس في بيان G. من بين الأشجار المولدة لـ G. اجعل T هي الشجرة التي تجعل $\sum_{u\in v(G)} d_T(u,v)$. أكبر ما يمكن. أثبت أن كل ضلع في G يربط رؤوسًا تنتمي إلى مسار في T يبدأ عند v.

b) أثبت أنه إذا كان $\chi(G) > k \geq 2$، فإنه توجد في G حلقة طولها يزيد بمقدار 1 على أحد مضاعفات K. (مساعدة: استخدم الشجرة الموجودة في فرع (a) لتعريف تلوين من الدرجة K للبيان، (Tuza (G)).

15.2.5. (!) أثبت أن العدد اللوني لكل بيان على n من الرؤوس خال من المثلثات يساوي $2\sqrt{n}$ على الأكثر. (تعليق: لذلك يوجد لكل بيان خال من المثلثات ولوني من الدرجة k على الأقل $\frac{K^2}{4}$ رأسًا).

16.2.5. (!) أثبت أنه يوجد على الأكثر $\left(1-\frac{1}{r}\right)n^2/2$ ضلعًا لكل بيان بسيط على n من الرؤوس، بحيث لا يحوي هذا البيان عصبة من الدرجة $r + 1$. (مساعدة: يمكن برهان هذه النتيجة عن طريق استخدام نظرية توران، أو عن طريق الاستقراء على r، دون استخدام نظرية توران).

17.2.5. (!) افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، وm من الأضلاع:

a) أثبت أن $\omega(G) \geq \lceil n^2/(n^2-2m)\rceil$. (مساعدة: استخدم التمرين 16.2.5. تعليق: هذا يعطي أيضًا أن $\chi(G) \geq \lceil n^2/ n^2 - 2m \rceil$ .Myers – Liu [1972]

b) أثبت أن $\alpha(G) \geq \lceil n/(n/d+1)\rceil$ حيث d هي معدل درجة الرؤوس للبيان G (مساعدة: استخدم فرع(a)) (Erdös – Gallai [1961]).

18.2.5. بيان توران $T_{n,r}$ (المثال 7.2.5) هو البيان التام المتعدد الفروع من الدرجة r الذي له b مجموعة جزئية من رؤوسه، حجم كل منها يساوي $a + 1$، و له كذلك $r - b$ مجموعة جزئية من رؤوسه حجم كل منها a حيث $a = \lfloor n/r \rfloor$ و $b = n - ra$:

a) أثبت أن $e(T_{n,r}) = (1-1/r)n^2/2 - b(r-b)/(2r)$.

b) بما أن $e(G)$ يجب أن يكون عددًا صحيحًا، فإن الفرع (a) يعطينا: $e(T_{n,r}) \leq \lfloor (1-1/r)\, n^2/2 \rfloor$. متى نحصل على اللامساواة في هذه المتباينة؟

19.2.5. (+) افترض أن $a = \lfloor n/r \rfloor$. قارن بيان توران $T_{n,r}$ مع البيان $\overline{K}_a + K_{n-a}$ لتثبت مباشرةً أن $e(T_{n,r}) = \binom{n-a}{2} + (r-1)\binom{a+1}{2}$.

20.2.5. افترض أن n و k عددان صحيحان موجبان، اجعل $q = \lfloor n/k \rfloor$، $r = n - qk$ و $S = \lfloor n/(K+1) \rfloor$ $t = n - s(k+1)$ أثبت أن: $\binom{q}{2}k + rq \geq \binom{s}{2}(k+1) + ts$. (مساعدة: خذ بعين الاعتبار متممة بيان توران). ([Richter [1993]).

21.2.5. من بين البيانات البسيطة على n من الرؤوس التي تخلو من عصبة من الدرجة $r + 1$. أثبت أن بيان توران هو البيان الفريد الذي له أكبر عدد من الأضلاع. (مساعدة: تفحص برهان النظرية 9.2.5 بدقة وحذر أكثر).

22.2.5. تحصل مدينة دائرية الهيئة قطرها أربعة أميال على 18 محطة تقوية للهواتف المحمولة، وتستطيع كل محطة أن تبث إلى بقية المحطات التي تبعد عنها مسافة أقل أو تساوي ثلاثة أميال. أثبت أن محطتين على الأقل تستطيعان أن تبثا إلى خمس محطات أخرى على الأقل بغض النظر عن كيفية توزيع هذه المحطات في المدينة.

(أُخذ هذا السؤال من ([Bondy – Murty [1976, p 115]).

23.2.5. (!) برهان توران لنظرية توران، مشتملاً الوحدانية ([Turan [1941]):

a) أثبت أن أعظم بيان بسيط يخلو من عصبة من الدرجة $r + 1$ يحوي عصبة من الدرجة r.

b) أثبت أن $e(T_{n,r}) = \binom{r}{2} + (n-r)(r-1) + e(T_{n-r,r})$.

c) استخدم فرعي (a) و(b) لبرهنة نظرية توران بالاستقراء على n، مشتملا على توصيف البيانات التي تحقق هذا الحد.

24.2.5. (+) افترض أن $t_r(n) = e(T_{n,r})$، وافترض أيضًا أن G بيان له n من لرؤوس، وله $t_r(n) - k$ ضلعًا، وله على الأقل عصبة واحدة من الدرجة $r + 1$، حيث $k \geq 0$. أثبت أنه توجد للبيان G $f_r(n) + 1 - k$ عصبة من الدرجة $r + 1$ على الأقل، حيث $f_r(n) = n - \lceil n/r \rceil - r$ (مساعدة: أثبت أن للبيان الذي له عصبة واحدة بالضبط من الدرجة $r + 1$ على الأكثر $t_r(n) - f_r(n)$ ضلعًا)، ([Erdös [1964], Moon [1965]).

25.2.5. تشابه جزئي لنظرية توران للبيان $K_{2,m}$:

a) أثبت أنه إذا كان G بيانًا بسيطًا، وكان $\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} > (m-1)\binom{n}{2}$. فإن G يحوي $K_{2,m}$ (مساعدة: لاحظ أن $K_{2,m}$ بيان فيه رأسان لهما m جارًا مشتركًا).

b) أثبت أن $\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq e(2e/n - 1)$ ، حيث إن G يحوي e ضلعًا.

c) استخدم فرعي (a) و(b) لبرهنة أن البيان الذي له $½(m-1)^{1/2}n^{3/2} + n/4$ ضلعًا يحوي $K_{2,m}$.

d) تطبيق: إذا أعطيت n من النقاط في المستوى، فأثبت أن المسافة تساوي 1 بالضبط لـ $\frac{1}{\sqrt{2}}n^{3/2} + n/4$ زوجًا من هذه النقاط على الأكثر، ([Bondy – Murty [1976, p 111 – 112]).

26.2.5. إذا كانت $n \geq 4$، فأثبت أن خصر كل بيان له n من الرؤوس، وأكثر من $\frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ ضلعًا يساوي 4 على الأكثر. (مساعدة: استخدم طرق التمرين 25.2.5).

27.2.5. (+) لكل $n \geq 6$، أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس ليس له حلقتان منفصلتان ضلعيًّا يساوي $n + 3$، (Pósa).

28.2.5. (+) لكل $n \geq 6$، أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس ليس له حلقتان منفصلتان يساوي $3n - 6$، (Pósa).

29.2.5. (!) افترض أن G بيان يخلو من المخالب (لا يستحدث منه $K_{1,3}$):

a) أثبت أن البيان الجزئي المستحدث من اتحاد صفين لونيين في أي تلوين فعلي للبيان G يتكون من مسارات وحلقات زوجية.

b) أثبت أنه إذا وُجد لـ G تلوين فعلي يستخدم بالضبط k من الألوان، فإنه يوجد لـ G تلوين فعلي من الدرجة k، حيث يختلف حجم الصفوف في هذا التلوين بمقدار 1 على الأكثر، ([Niessen – Kind [2000]).

30.2.5.(+) أثبت أنه إذا وُجد لـ G تلوين فعلي g بحيث كان كل صف يحوي رأسين، فإنه يوجد لـ G تلوين أمثل f، بحيث يحوي كل صف لوني لهذا التلوين رأسين على الأقل. (مساعدة: إذا وُجدَ صف لوني لـ f يحوي رأسًا واحدًا، فاستخدم g لعمل تغيير في f. يمكن إعطاء الإثبات خوارزميًّا أو بالاستقراء على $\chi(G)$ [Gallai [1963 c] .

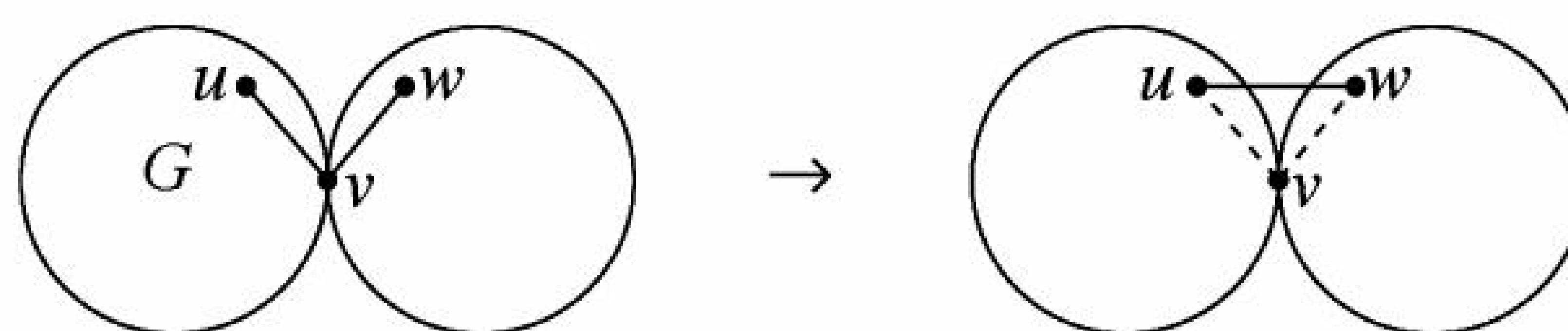
31.2.5. افترض أن G بيان مترابط لونيًّا من الدرجة k، بحيث إن G ليس بيانًا تامًّا، فضلاً عن أنه ليس حلقة طولها يكافئ $3 \ mod \ 6$، أثبت أنه يوجد لكل تلوين فعلي لـ G بـ k من الألوان رأسان لهما اللون نفسه، ولهما جار مشترك، (Tomesca).

32.2.5. (!) بناء هاجوز. ([Hajós [1961]):

a) افترض أن G وH بيانان حرجان من الدرجة k لهما رأس مشترك v حيث $vu \in E(G)$ و$vw \in E(H)$. أثبت أن البيان $(G - vu) \cup (H - v\omega) \cup u\omega$ أيضًا حرج من الدرجة k.

b) لكل $k \geq 3$، استخدم الفرع (a) للحصول على بيان حرج من الدرجة k يختلف عن K_k.

c) لكل $n \geq 4$، ما عدا $n = 5$، ابنِ بيانًا حرجًا من الدرجة 4 له n من الرؤوس.



33.2.5. افترض أن G بيان حرج من الدرجة k له مجموعة فاصلة $S = \{x,y\}$. من الفرضية 18.2.5، $x \nleftrightarrow y$. أثبت أنه يوجد للبيان G فلقتان تعتمدان على S، ويمكن أن نسميهما G_1 و G_2، بحيث إن كلًّا من $G_1 + xy$ و $G_2 \cdot xy$ حرج من الدرجة k (هنا $G_2 \cdot xy$ ترمز إلى البيان الذي نحصل عليه من G_2 بإضافة الضلع xy، ومن ثم تقليص هذا الضلع).

34.2.5. (!) افترض أن G بيان حرج من الدرجة 4، وله مجموعة فاصلة S حجمها 4. أثبت أنه يوجد للبيان $G[S]$ أربعة أضلاع على الأكثر، (Pritikin).

35.2.5. (+) برهان بديل للعبارة: كل بيان حرج من الدرجة k يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $k - 1$:

a) افترض أن G بيان حرج من الدرجة k. $(k \geq 3)$، أثبت أنه إذا كان e، f ضلعين في $E(G)$، فإنه يوجد لـ G بيان جزئي حرج من الدرجة $k - 1$ يحوي e ولا يحوي f [1974] (Toft).

b) استخدم فرع (a) والاستقراء على k لبرهان نظرية ديراك التي تنص على أن كل بيان حرج من الدرجة k يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $(k - 1)$ Toft [1974].

36.2.5. (+) أثبت أنه إذا كان G حرجًا من الدرجة k، وكان كل بيان جزئي حرج من الدرجة $k-1$ يشاكل K_{k-1}، فإن $G = K_k$ $(k \geq 4)$، (مساعدة: استخدم بديهية توفت (Toft) الخاصة بالبيانات الحرجة، التمرين 35.a.2.5) (Stiebitz [1985]).

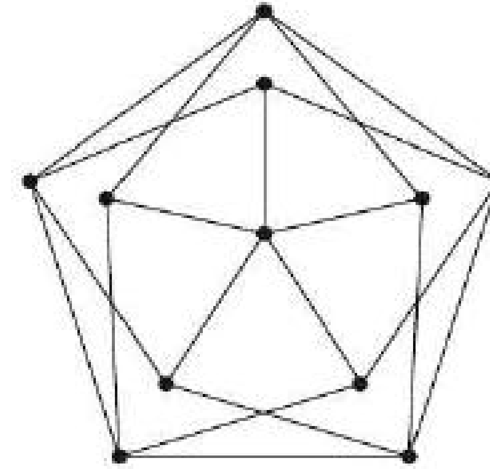
37.2.5. نقول: إن البيان G حرج تلوين الرؤوس (vertex – color – critical) إذا كان $\chi(G - v) < \chi(G)$ لكل $v \in V(G)$:

a) أثبت أنَّ كلَّ بيان حرج لونيًّا يكون حرجَ تلوين الرؤوس.

b) أثبت أنَّ كلَّ بيان حرج تلوين الرؤوس، وعدده اللوني يساوي 3، يكون حرجًا لونيًّا.

c) أثبت أنَّ البيانَ الموجود في الشكل أدناه حرجُ تلوين الرؤوس، وليس حرجًا لونيًّا.

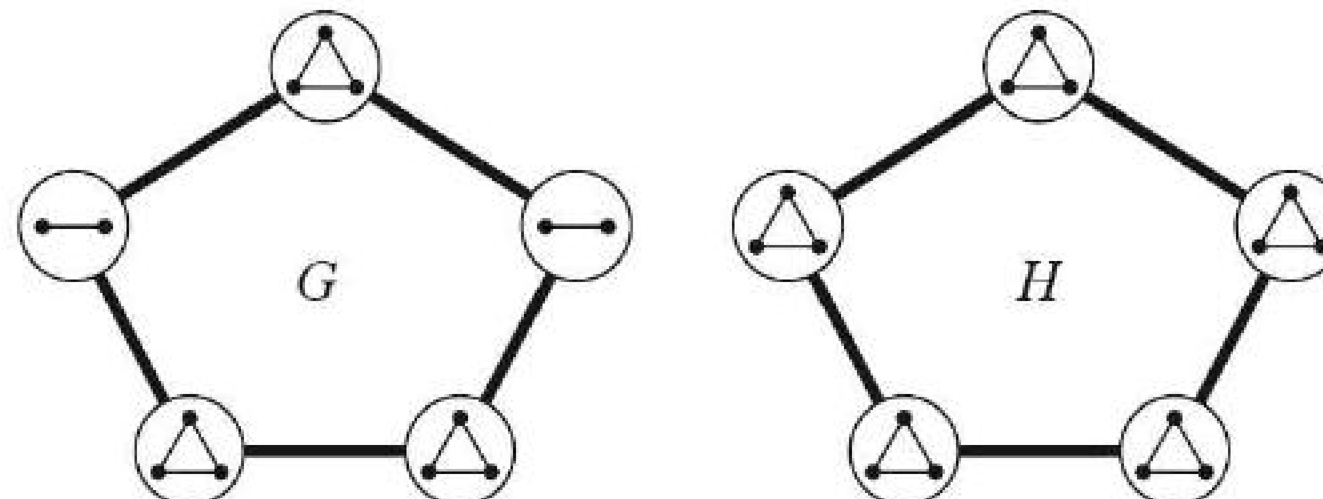
(تعليق: هذا البيان ليس بيان جروتزك).



38.2.5. (!) أثبت أن كل بيان بسيط درجته الصغرى تساوي 3 على الأقل يجب أن يحوي تقسيمًا لـ K_4. (مساعدة: أثبت النتيجة الأقوى – كل بيان بسيط غير تافه له على الأكثر رأس واحد درجته أقل من 3 يحوي تقسيمًا لـ K_4. يوضح برهان النظرية 20.2.5 أن كل بيان مترابط من الدرجة 3 يحوي تقسيمًا لـ (K_4))، Dirac [1952 a].

39.2.5. (!) افترض أنه إذا كانت $\delta(G) \geq 3$، فإن G يحوي تقسيمًا لـ K_4. أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس لا يحوي تقسيمًا لـ K_4 يساوي $2n - 3$.

40.2.5. في الشكل أدناه، افترض الضلع السميك (اللون الغامق) يعني أن كل ضلع في دائرة يجاور الأضلاع جميعها في الدائرة الأخرى. أثبت أن $\chi(G) = 7$ لكل G لا يحوي تقسيمًا لـ K_7. ثم أثبت أن $\chi(H) = 8$، ولكن H لا يحوي تقسيمًا لـ K_8. (Catlin [1979]).



41.2.5. افترض أن $m = k(k+1)/2$، وأثبت أنه لا يوجد تقسيم K_{2k} للبيان $K_{m,m-1}$.

42.2.5. (+) افترض أن F غابة لها m من الأضلاع. وافترض أيضًا أن G بيان بسيط بحيث إن $\delta(G) \geq m$، و $n(G) \geq n(F)$. أثبت أن G يحوي F بوصفه بيانًا جزئيًّا. (مساعدة: احذف ورقة واحدة من كل مركبة غير تافهة من مركبات F لتحصل على F'. افترض أن R مجموعة جيران الرؤوس المحذوفة. أرسل R لكل المجموعة X التي تحوي m رأسًا من $V(G)$ بحيث إن المجموعة X تصغر $e(G[X])$ (تجعل لها قيمة صغرى). مدد X لنسخة من F'. استخدم نظرية هال (Hall) لبرهنة أنه يمكن مواءمة X مع الرؤوس المتبقية للحصول على نسخة من (F) .Brandt [1994].

43.2.5. (+) افترض أن G بيان لوني من الدرجة k. ولاحظ أن البديهية 18.1.5، والفرضية 8.1.2 تشير إلى أن G يحوي كل شجرة لها k من الرؤوس بوصفه بيانًا جزئيًّا. قم بتقوية هذه النتيجة لبيان مماثل، وضع عليه علامات دالة: إذا كان f تلوينًا فعليًّا بـ k من الألوان للبيان G، وكانت T شجرة رؤوسها: $\{w_1, \ldots, w_k\}$، فتوجد دالة $\phi: V(T) \rightarrow V(G)$ تحافظ على التجاور بحيث إن $f(\phi)(w_i)) = i$ لكل i .

(Gyarfas – Szemeredi – Tuza [1980], Summer [1981]).

44.2.5. (+) افترض أن G بيان لوني من الدرجة k خصره يساوي 5 على الأقل، أثبت أن G يحوي كل شجرة على k من الرؤوس بوصفه بيانًا جزئيًّا مستحدثًا، (سومنز، جيرفاس - سنرميردي - توزا)

(Gyárfás – Szemerédi – Tuza [1980], Sumner [1981]).

3.5. أوجه التعداد (Enumerative Aspects)

في بعض الأحيان، نسلط الضوء على مسألة صعبة من خلال الأخذ في الحسبان مسألة أعم. لا توجد خوارزمية جيدة معروفة لاختبار وجود تلوين فعلي من الدرجة k (انظر الملحق B)، ولكن ما زال بإمكاننا دراسة عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k (هنا نثبت مجموعة من الألوان عددها k).

إن العدد اللوني $\chi(G)$ هو أصغر عدد k، بحيث يكون العد موجبًا. إن معرفة العدد لكل k يجعلنا نعرف ما هو العدد اللوني. لقد قام بيركوف (Birkhoff) العام 1912 بتقديم مسألة العد هذه بوصفها طريقًا ممكنًا لحل مسألة الألوان الأربعة (البند 3.6). في هذا الجزء من الفصل، سنناقش خواص دالة العد، ومجموعة البيانات التي يسهل عليها حساب دالة العد ومواضيع أخرى متصلة بهذا الموضوع.

حساب التلوينات الفعلية (Counting Proper Coloring)

نبدأ بتعريف مسألة العدّ بوصفها دالة لـ k.

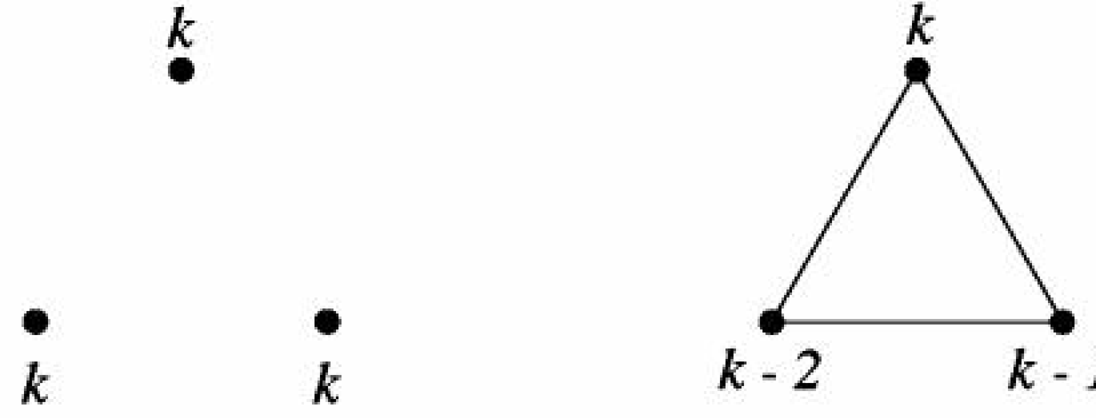
1.3.5. تعريف: ليكن $k \in \mathbb{N}$، و G بيانًا معطى. نعرّف القيمة $\chi(G;k)$ على أنها عدد التلوينات الفعلية $f: V(G) \rightarrow [k]$. إن مجموعة الألوان المتوافرة هي: $[k] = \{1, \ldots, k\}$ ومن الممكن ألا نستخدم كل الـ k لونًا في التلوين f. إن تغيير أسماء الألوان المستخدمة في تلوين معين ينتج تلوينًا مختلفًا.

2.3.5. مثال: $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$ و $\chi(K_n;k) = k(k-1)\ldots(k-n+1)$.

عند تلوين رؤوس $\overline{K}_n$ ، نستطيع أن نستعمل أي لون من الـ k لونًا عند كل رأس بغض النظر عن الألوان التي استعملناها عند الرؤوس الأخرى، علاوة على أن كل دالة من الـ K_n دالة من مجموعة الرؤوس إلى المجموعة $[k]$ هي تلوين فعلي. لذا، فإن $\chi(\overline{K}_n;k) = k^n$. لا نستطيع استخدام الألوان التي استخدمت سابقًا في أثناء التلوين لتلوين الرأس i عند تلوين رؤوس K_n، لذا فإنه يتبقى $k - i + 1$ لونًا بوصفه خيارًا لتلوين الرأس i بغض النظر عن الطريقة التي أختيرت فيها الألوان السابقة. لذا، فإن $\chi(K_n;k) = k(k-1)\ldots(k-n+1)$. باستطاعتنا

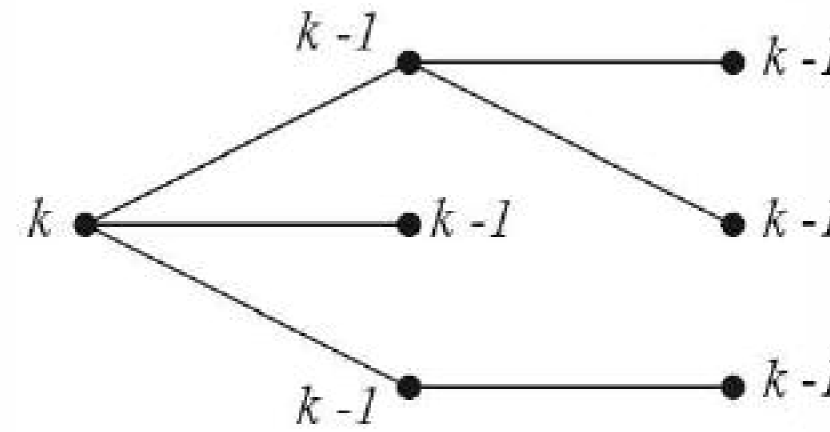
أيضًا عدّ هذه كـ $n!\binom{n}{2}$ وذلك بأن نختار أولاً n لونًا مختلفًا، ثم نضرب المقدار في $n!$ من أجل عد الطرق التي من خلالها نُحدد الألوان للرؤوس، فعلى سبيل المثال $\chi(K_3;3) = 6$ و $\chi(K_3;4) = 24$.

لاحظ أن قيمة حاصل الضرب تساوي 0 عندما $k < n$، وهذا منطقي لأنه لا يوجد تلوين فعلي في k من الألوان للبيان K_n عندما $k < n$. ■



3.3.5. فرضية : إذا كانت T شجرة لها n من الرؤوس، فإن $\chi(T;k) = k\,(k\text{-}1)^{n-1}$.

الإثبات: اختر رأسًا v ليكون جذرًا لـ T، نستطيع تلوين v بـ k من الطرق. إذا وسّعنا التلوين الفعلي للرؤوس الجديدة بالتزامن مع تنمية الشجرة من v، فإن اللون الممنوع عند كل خطوة هو لون الوالد. لذا، يوجد لدينا $k-1$ خيارًا لتلوين أي رأس جديد. بالإضافة إلى ذلك، فإن حذف ورقة يبين استقرائيًّا أن كل تلوين فعلي بـ k من الألوان يظهر بهذه الطريقة. لذا، فإن $\chi(T;k) = k\,(k\text{-}1)^{n-1}$. ■



هناك طريقة أُخرى لعدّ الألوان، وهي ملاحظة أن الصفوف اللونية لكل تلوين فعلي للبيان G تجزئ $V(G)$ إلى مجموعات مستقلة. وبتجميع الألوان بحسب هذه التجزئة، يتم الحصول على صيغة (قاعدة) لـ $\chi(G;k)$، وهي كثيرة حدود في k درجتها تساوي $n(G)$. لاحظ أن هذا يتحقق للأجوبة في المثال 2.3.5، والفرضية 3.3.5. وبما أن هذه الخاصية تتحقق لكل بيان، فإن $\chi(G;k)$ بوصفها دالة في k تسمى كثيرة الحدود اللونية للبيان G.

4.3.5 فرضية : افترض أن $x_{(r)} = x(x-1)\ldots(x-r+1)$. إذا كانت $p_r(G)$ ترمز إلى عدد تجزئات $V(G)$ إلى r من المجموعات المستقلة غير الخالية، فإن $\chi(G;k) = \sum_{r=1}^{n(G)} p_r(G)k_{(r)}$، وهذه كثيرة حدود من الدرجة $n(G)$.

الإثبات: عندما نستخدم r من الألوان فعليًّا في تلوين فعلي، فإن الصفوف اللونية تجزئ $V(G)$ إلى r من المجموعات المستقلة، وهذا يمكن أن يحدث بـ $p_r(G)$ طريقة. وعندما يتوافر لنا k من الألوان، فإنه يوجد بالضبط $k_{(r)}$ طريقة لاختيار الألوان وتحديدها للصفوف، إضافة إلى أن التلوينات الفعلية جميعها تظهر بهذه الطريقة. لذا، فإن الصيغة المعطاة أعلاه لـ $\chi(G;k)$ صحيحة.

بما أن $k_{(r)}$ كثيرة حدود في k و $p_r(G)$ ثابت لكل r، فإن هذه الصيغة تعطي أن $\chi(G;k)$ دالة كثيرة حدود في k. لاحظ أنه عندما يكون عدد رؤوس G يساوي n فيوجد بالضبط تجزئة واحدة لـ G إلى n مجموعة مستقلة، ولا توجد أي تجزئة أخرى تستخدم مجموعات أكثر من ذلك. لذا، فإن الحد القائد (الحد ذو الدرجة الأعلى) هو k^n. ■

5.3.5. مثال: $p_n(G) = 1$ دائمًا، وذلك من خلال استخدام مجموعات حجم كل منها يساوي 1. ولذلك

$p_1(G) = 0$ إلا إذا خلا G من الأضلاع؛ لأن كل مجموعة الرؤوس تكون مجموعة مستقلة فقط للبيان $\overline{K}_n$

خذ في الحسبان البيان $G = C_4$. توجد بالضبط تجزئة واحدة إلى مجموعتين مستقلتين: إن الرؤوس المتضادة (المتقابلة) تكون في المجموعة نفسها. وعندما $r = 3$، فإننا نضع رأسين متضادين في مجموعة، ونترك الرأسين الآخرين في مجموعات وحدهما، ويمكننا عمل ذلك بطريقتين. لذا، فإن $p_2 = 1$، $p_3 = 1$، $p_4 = 1$ وأن:

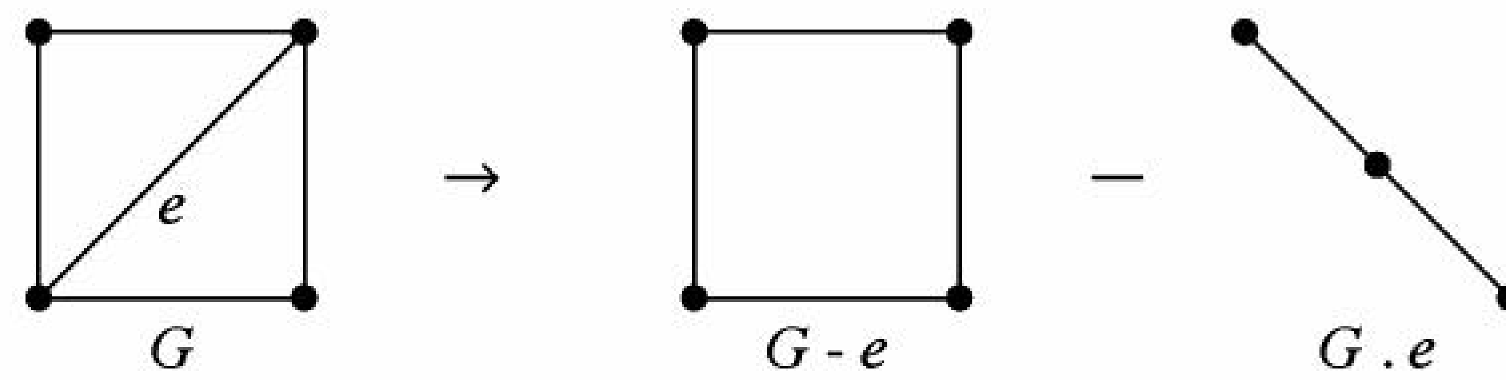
$$\chi(C_4; k) = 1 \cdot k(k - 1) + 2 \cdot k(k - 1)(k - 2) + 1 \cdot k(k - 1)(k - 2)(k - 3) = k(k - 1)(k^2 - 3k + 3)$$ ■

إن حساب كثيرة الحدود اللونية بهذه الطريقة - عمومًا - غير مناسب بسبب وجود عدد كبير من التجزئات للأخذ في الحسبان. وتوجد حسابات بخطوات مكررة كتلك التي استخدمت في الفرضية 8.2.2. لعدّ الأشجار المُولّدة؛ اجعل $G \cdot e$ مرة أخرى ترمز إلى البيان الذي نحصل عليه من G بتقليص (إنقباض) الضلع e (التعريف 7.2.2). بما أن عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k لا تتأثر بالأضلاع المكررة، فإننا نهمل نسخ الأضلاع المكررة التي تنتج من جراء إجراء عملية تقليص (انقباض) الأضلاع، محافظين على نسخة واحدة فقط من كل ضلع مكرر لعمل بيان بسيط.

6.3.5. نظرية: (صيغة التكرار اللوني: Chromatic recurrence). إذا كان G بيانًا بسيطًا، وكان e ضلعًا في $E(G)$، فإن $\chi(G; k) = \chi(G - e; k) - \chi(G \cdot e; k)$.

الإثبات: إن كل تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G هو تلوين فعلي من الدرجة k للبيان $G - e$، بالإضافة إلى أن التلوين الفعلي من الدرجة k للبيان $G - e$ يكون تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان G إذا وفقط إذا أعطى هذا التلوين ألوانًا مختلفة للرأسين u و v اللذين هما رأسا الضلع e. لذا، نستطيع حساب التلوين الفعلي من الدرجة k للبيان G بطرح عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان $G - e$ التي تعطي u و v اللون نفسه من $\chi(G - e; k)$.

لاحظ أن تلوينات $G - e$ التي يكون لـ u و v فيها اللون نفسه ترتبط مباشرة بالتلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان $G - e$ التي فيها لون الرأس الناتج عن الانقباض هو لون الرأسين u و v نفسه. إن مثل هذا التلوين يلوّن فعليًّا أضلاع $G \cdot e$ جميعها إذا وفقط إذا لوّن هذا التلوين أضلاع G المختلفة عن e جميعها. ■



7.3.5. مثال: التلوين الفعلي من الدرجة k للبيان C_4. إن حذف ضلع من C_4 ينتج P_4، ولكن تقليص ضلع من C_4 ينتج K_3. وبما أن K_4 شجرة، و K_3 بيان تام، فإن لدينا $\chi(P_4; k) = k(k - 1)^3$ و $\chi(K_3; k) = k(k - 1)(k - 2)$ وباستخدام صيغة التكرار اللوني فإننا نحصل على:

$$\chi(C_4; k) = \chi(K_4; k) - \chi(K_3; k) = k(k - 1)(k^2 - 3k + 3)$$ ■

بما أن $G \cdot e$، و $G - e$ تحوي أضلاعًا أقل من G، فبإمكاننا استخدام صيغة التكرار اللوني استقرائيًّا لحساب $\chi(G; k)$. لاحظ أننا نحتاج إلى شرط ابتدائي للبيانات التي ليس لها أضلاع، والتي سبق أن حسبناها: $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$.

8.3.5. نظرية: (Whitney [1933 c]) افترض أن G بيان بسيط، فإذا كانت $\chi(G; k)$ هي كثيرة الحدود اللونية لهذا البيان، فإن درجة $\chi(G; k)$ هي $n(G)$. كما أن معاملات $\chi(G; k)$ هي أعداد صحيحة تتذبذب في الإشارة بين الموجب والسالب، وتبدأ على الشكل: $1, e(G), \ldots$.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $e(G)$. لاحظ أن الادعاء يتحقق تلقائيًّا عندما $e(G) = 0$، حيث $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$. ولخطوة الاستقراء، افترض أن G بيان له n من الرؤوس، و $e(G) \geq 1$. إن كلًّا من $G - e$، و $G . e$ يحوي أضلاعًا عددها أقل من عدد أضلاع G ويوجد $n - 1$ رأسًا للبيان $G . e$. لذا، وباستخدام فرضية الاستقراء، نجد أن هناك أعدادًا صحيحة غير سالبة $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ بحيث إن $\chi(G - e; k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i k^{n-i}$، و $\chi(G - e; k) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i b_i k^{n-1-i}$. ونجد من التكرار اللوني أن:

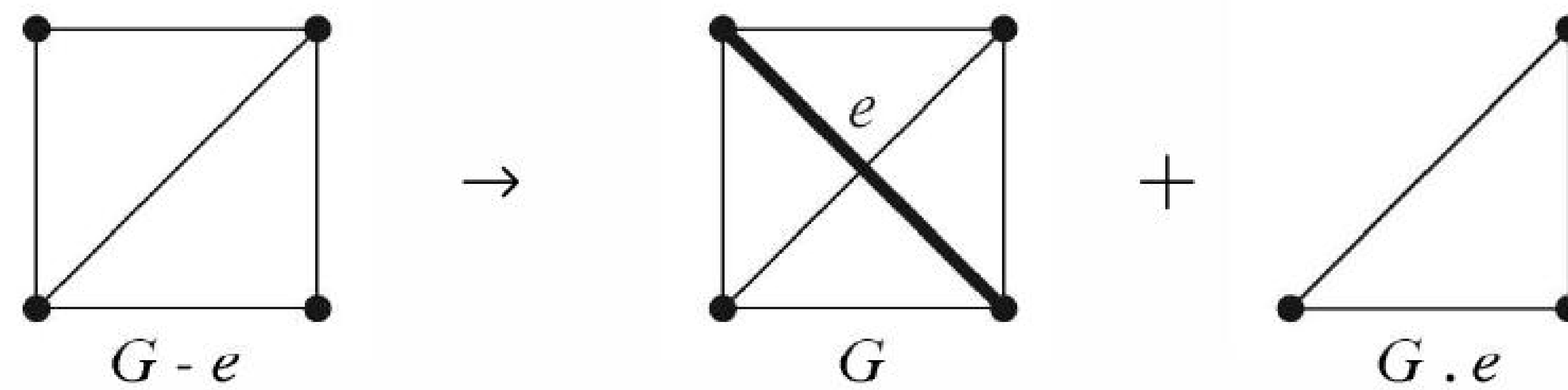
$\chi(G - e; k)$:	$k^n - [e(G) - 1]\, k^{n-1} + a_2 k^{n-2}$	$- \ldots +$	$(-1)^i$	$a_i k^{n-i} \ldots$	
$- \chi(G \cdot e; k)$:	$- (\quad k^{n-1} - b_1 k^{n-2}$	$+ \ldots +$	$(-1)^{i-1}$	$b_{i-1} k^{n-i} \ldots)$	
$= \chi(G; k)$:	$k^n - e(G)\, k^{n-1} + (a_2 + b_1)\, k^{n-2}$	$- \ldots +$	$(-1)^i$	$(a_i + b_{i-1})\, k^{n-i} \ldots$	

لذا، فإن $\chi(G; k)$ هي كثيرة حدود، معاملها القائد $a_0 = 1$، والمعامل الذي يليه هو $-(a_1 + b_0) = -e(G)$ وتتذبذب إشارة معاملاتها بين الموجب والسالب. ■

9.3.5. مثال: عند إضافة ضلع إلى بيان، فإننا نحصل على بيان يسهل حساب كثيرة الحدود اللونية له، حيث يمكننا استخدام صيغة التكرار اللوني بطرق مختلفة؛ فبدلًا من كتابة $\chi(G; k) = \chi(G-e; k) - \chi(G . e; k)$، فإننا نستطيع كتابة $\chi(G - e; k) = \chi(G; k) + \chi(G \cdot e; k)$.

ولحساب $\chi(K_n - e; k)$ على سبيل المثال، فإننا نفترض أن $K_n = G$ في الصيغة البديلة أعلاه لنحصل على أن:

$$\chi(K_n - e; k) = \chi(K_n; k) + \chi(K_{n-1}; k) = (k - n + 2)^2 \prod_{i=0}^{n-3} (k < i)$$



وسننهي مناقشة هذا الموضوع من خلال إعطاء صيغة صريحة لإيجاد $\chi(G; k)$. لاحظ أن لهذه الصيغة الكثير من الحدود الأسية. لذا، فإن استخداماتها ستكون نظرية بصورة أساسية. إن هذه الصيغ تلخص النتيجة التي نحصل عليها إذا استخدمنا صيغة التكرار اللوني حتى نتخلص من اختيار الأضلاع جميعها.

10.3.5. نظرية: (Whitney [1932 c]). افترض أن $c(G)$ ترمز إلى عدد المركبات لبيان G. إذا أُعطينا $S \subseteq E(G)$ مجموعة جزئية من أضلاع G، وإذا كانت $G(S)$ ترمز إلى البيان المُولد للبيان G الذي أضلاعه تساوي المجموعة S، فإن العدد $\chi(G; k)$ الذي يمثل عدد التلوينات الفعلية للبيان G، يُعطى بالعلاقة:

$$\chi(G; k) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} k^{c(G(S))}$$

الإثبات: من تطبيق صيغة التكرار اللوني، فإن الانقباض قد يولد أضلاعًا مكررة. ولاحظنا سابقًا أن حذف الأضلاع المكررة لا يؤثر في $\chi(G; k)$. وندعي أيضًا أن حذف النسخ الإضافية من الأضلاع لا يؤثر في الصيغة التي نرغب في إثباتها.

افترض أن e و e' ضلعان في G لهما النقاط الطرفية نفسها. لاحظ أنه إذا كان $e' \in S$، و $e \notin S$ فإن $c(G(S \cup \{e\})) = c(G(S))$؛ لأن طرفي e ينتميان إلى المركبة نفسها لـ $G(S)$. على أي حال، $|S \cup \{e\}| = |S| + 1$. لذا، فإن حدود المجموع الخاصة بـ S و $S \cup \{e\}$ تختصر معًا. ومن هنا، فإن حذف حدود مجموعات الأضلاع التي تحوي e' لا يغير المجموع. وهذا يعني أنه بإمكاننا حذف e' أو إبقائه دون تغيير الصيغة.

عند حساب صيغة التكرار اللوني، فإننا نحصل على النتيجة نفسها إذا لم نهمل الأضلاع المكررة أو النشط، وبدلاً من ذلك، احتفظنا بالأضلاع المحذوفة جميعها أو التي تم تقليصها. وبتكرار تطبيق الصيغة، نحصل على $2^{e(G)}$. حدًّا في أثناء عملية اختيارنا للأضلاع جميعها، وعليه، فإن كل ضلع قد حُذِفَ، أو قُلِّص.

عندما تُحذَف الأضلاع جميعها أو تُقلَّص، فإن البيان المتبقي يتألف من رؤوس معزولة. اجعل S تمثل مجموعة الأضلاع التي تم تقليصها، إن الرؤوس المتبقية ترتبط بمركبات $G(S)$. وأن كل مركبة من هذه المركبات تصبح رأسًا واحدًا عندما تُقلَّص أضلاع S وتُحذَف الأضلاع الأخرى. إن الـ $c(G(S))$ رأسًا معزولاً في النهاية تعطي حدًّا له $K^{c(G(S))}$ لونًا. بالإضافة إلى ذلك، فإن الإشارة تتذبذب لكل مساهمة ناتجة عن انقباض لضلع، وتكون المساهمة موجبة إذا وفقط إذا كان $|S|$ عددًا زوجيًّا.

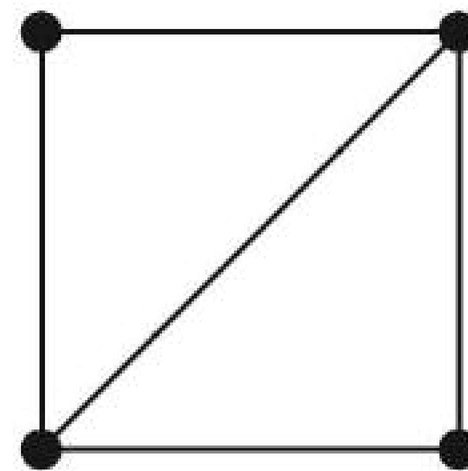
لذا، وعندما تكون S هي مجموعة الأضلاع التي قُلِّصت، فإن المساهمة تكون مساوية $(-1)^{|S|} k^{c(G(S))}$ وهذا يُحْسَب لكل حد في المجموع. ■

11.3.5. مثال: كثيرة حدود لونية. في الحالة التي يكون فيها G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس، فإن كل بيان جزئي مُولد عدد أضلاعه 0، أو 1 أو 2، يمتلك n، أو $n - 1$، أو $n - 2$ مركبة على الترتيب. وعندما $|S|=3$، فإن عدد المركبات يساوي $n - 2$ إذا وفقط إذا كانت الأضلاع الثلاثة تشكل مثلثًا، وبخلاف ذلك، يكون عدد المركبات $n - 3$.

فعلى سبيل المثال، إذا كانت G طائرة ورقية (لها 4 رؤوس و5 أضلاع) فإن هناك 10 مجموعات في كل منها ثلاثة أضلاع؛ حيث نجد في اثنتين منها أن $G(S)$ مكونة من مثلث إضافة إلى رأس معزول واحد. أما المجموعات الثمانية المتبقية فتعطي بيانًا جزئيًّا مولدًا له مركبة واحدة. إن نوعي هذه الثلاثيات يحسب سالبًا؛ لأن $|S| = 3$. لاحظ أن هناك مركبة واحدة لكل البيانات الجزئية المولدة التي لها 4 أو 5 أضلاع، لذا، فإن النظرية 10.3.5 تعطي أن:

$$\chi(G;k) = k^4 - 5k^3 + 10k^2 - (2k^2 + 8k^1) + 5k - k = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k$$

وهذا يتفق مع $\chi(G; k) = k(k-1)(k-2)$ التي تحسب من خلال الألوان مباشرةً، أو باستخدام $\chi(G; k) = \chi(C_4; k) - \chi(P_3; k)$. ■



لقد أثبت ويتني (Whitney) النظرية 10.3.5 باستخدام مبدأ التضمين والاستبعاد للعد البسيط. من بين المجموعة الكلية لـ k من الألوان، فإننا نعني بالتلوين الفعلي كلَّ تلوين لا يحدد اللون نفسه لطرفي أي ضلع في البيان. اجعل A_i تمثل مجموعة التلوينات من الدرجة k التي تحدد اللون نفسه لطرفي الضلع e_i. نرغب في حساب التلوينات التي لا تقع في أي من $A_1, \ldots A_m$ (انظر التمرين 17).

البيانات الوترية (CHORDAL GRAPHS)

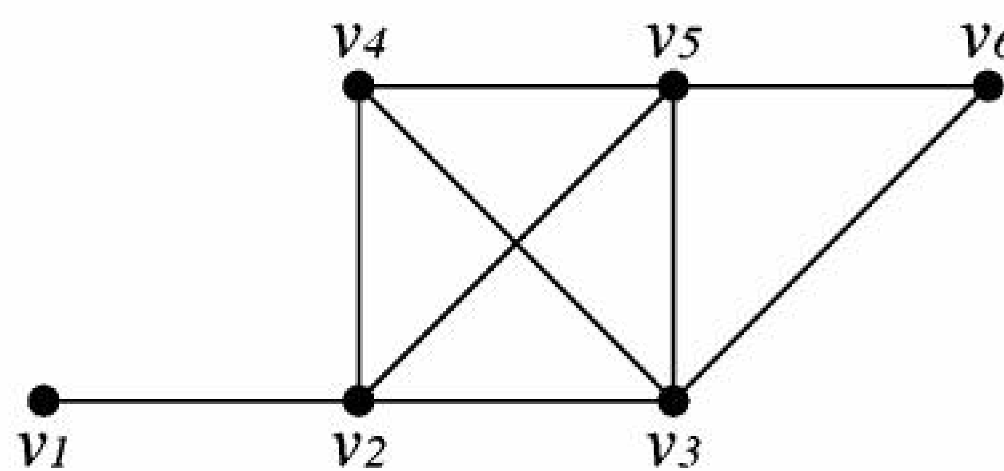
إن عدَّ التلوينات سهل بالنسبة إلى الأشجار والبيانات التامة (والطائرة الورقية)، حيث تظهر هذه البيانات من K_1 عن طريق الإضافة بالتتابع لرؤوس مربوطة بعصبة، وكثيرة الحدود اللونية لمثل هذا البيان هي حاصل ضرب عوامل خطية.

12.3.5. تعريف: نقول: إن رأسًا في G مُبَسَّطي (بسيط: Simplicial) إذا كان جواره في G عصبة، حيث إنّ ترتيب الحذف المبسطي (simplicial elimination ordering) هو ترتيب $\{v_n\ ,\ \ldots,\ v_1\}$ لحذف الرؤوس، بحيث إن v_i رأس مبَسَّطي للبيان المتبقي المستحدث من قبل $\{v_1,\ \ldots,\ v_i\}$. (تسمى هذه الترتيبات أيضًا ترتيبات الحذف الكاملة).

13.3.5. مثال: كثيرات الحدود اللونية من ترتيبات الحذف المبسطي. إذا كانت لدينا شجرة، فإن ترتيب الحذف المبسطي فيها هو حذف متتابع لأوراق من هذه الشجرة. لقد لاحظنا أنه إذا كانت G شجرةً على n من الرؤوس، فإن $\chi(G;\ k)\ =\ k(k-1)^{n-1}$.

عندما تكون $v_1, \ldots, v_n$ ترتيب حذف مبسطي لـ G، فإن قاعدة الضرب الخاصة بالتركيبات الأولية (Elementary Combinatorics) (الملحق A) تسمح لنا بعدّ التلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان G. إذا لوَّنا $v_1,\ \ldots,\ v_{i-1}$، ومن ثم أضفنا v_i، فإنه يوجد $k-d(i)$ طريقة لتلوين v_i حيث $d(i) = |N(v_i) \cap \{v_1,\ldots,v_{i-1}\}|$. لاحظ أن العامل $k-d(i)$ مستقل عن الطريقة التي اختيرت بها الألوان السابقة؛ لأن جيران v_i التي لوِّنت تشكل عصبة حجمها $d(i)$ وألوانها مختلفة.

حذف الرأس المبَسَّطي الذي يبدأ به ترتيب الحذف المبسطي يعطينا – استقرائيًّا - أن كل تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G يظهر بهذه الطريقة. وبذلك نكون قد عبّرنا عن كثيرة الحدود اللونية بوصفها حاصل ضرب لعوامل خطية. في البيان أدناه، تمثل $v_1, \ldots, v_6$ ترتيب حذف مبسطي. وعندما نكوّن بيانًا بالترتيب $v_1, \ldots, v_6$، فإن قيم $d(1),\ \ldots,\ d(6)$ هي: 2، 3، 2، 1، 1، 0 على الترتيب، فضلًا عن أن كثيرة الحدود اللونية هي: $k(k-1)(k-1)(k-2)(k-3)(k-2)$. ■



14.3.5. ملاحظة: من المهم ملاحظة أن بعض البيانات التي ليس لها ترتيبات حذف مبسطي تتمتع بخاصية أن كثيرة الحدود اللونية هي أيضًا حاصل ضرب عوامل خطية على الشكل $k-r_i$، حيث r_i عدد صحيح غير سالب. إن التمرين 19 يعطي مثالًا على ذلك.

لذا، فإن وجود ترتيب حذف مبسطي يكون شرطًا كافيًا، وليس ضروريًّا لكي يكون لكثيرة الحدود اللونية خاصية التحليل الجميلة لعواملها الخطية. ■

توجد ترتيبات حذف مبسطي لكل من الأشجار، والبيانات التامة، والبيانات القريبة من البيانات التامة (K_{n-e})، وبيانات الفترة (التمرين 28). لاحظ أنه عندما $n \geq 3$، فإنه لا يوجد ترتيب حذف مبسطي لـ C_n للحلقة بسبب عدم وجود رأس مبسطي نبدأ منه عملية الحذف، حيث إن وجود ترتيبات حذف مبسطي يكافئ غياب مثل هذه الحلقات بوصفها بيانات مستحدثة.

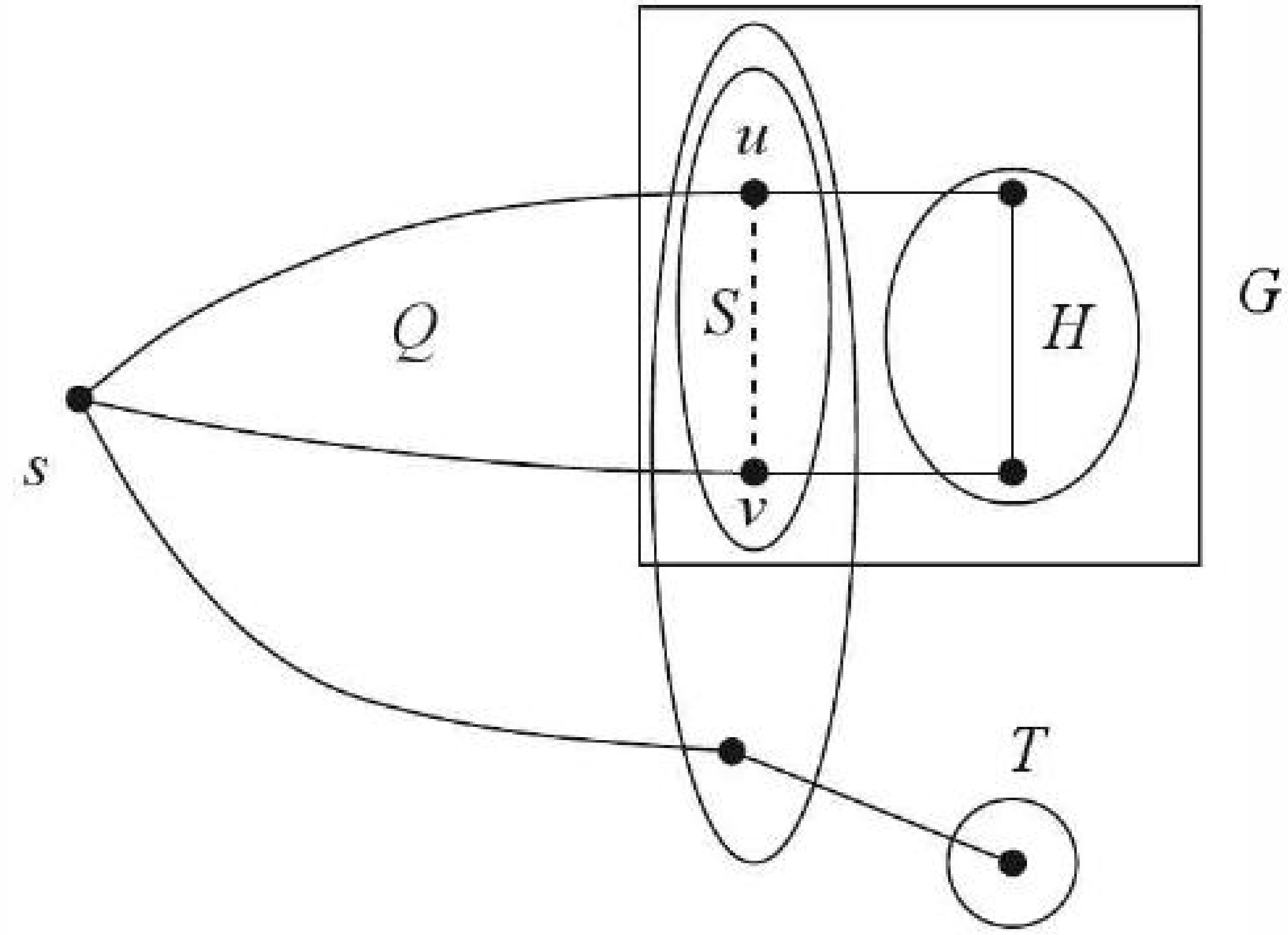
15.3.5. تعريف: نُعرّف وتر (chord) الحلقة C على أنه ضلع غير موجود فيها، وطرفاه في C. ونعرف الحلقة اللاوترية على أنها حلقة في G طولها يساوي 4 على الأقل. وليس لها وتر (وهذا يعني أن الحلقة هي بيان جزئي مستحدث). ونقول إن البيان G وتري إذا كان بيانًا بسيطًا يخلو من الحلقات اللاوترية.

الدافع وراء المصطلح «وتر» هو دافع هندسي. إذا رسمنا حلقة بحيث إن رؤوسها مرتبة على دائرة، ورسمت أوتارها بوصفها قطعًا مستقيمة، فإن أوتار هذه الحلقة هي نفسها أوتار الدائرة.

ومن السهولة بمكان بيان عدم وجود حلقة لاوترية لبيان له ترتيب حذف مبسطي. لذا فإن توصيفنا لهذه البيانات هو نظرية TONCAS أخرى. وسنفصل الجزء الأساسي من برهان الكفاية بوصفها بديهية تعدّ في حدّ ذاتها مفيدة جدًّا. (انظر أيضًا ([1983] Laskar – shier.

16.3.5. بديهية: (Faraber – Jamison [1986] – Voloshin [1982]) لكل رأس x في بيان وتري G، يوجد رأس مبسطي لـ G وذلك من بين الرؤوس الأبعد عن x في G.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $n(G)$. عندما $n(G) = 1$، فإن الرأس الفريد في K_1 هو مبسطي. لذا، افترض أن $n(G) \geq 2$. إذا كانت x تجاور الرؤوس جميعها، فإننا نطبق فرضية الاستقراء على البيان الوتري $G - x$. لاحظ أن كل رأس مبسطي y في $G - x$ يكون أيضًا رأسًا مُبسطيًّا في G؛ لأن x يجاور كل $N(y) \cup \{y\}$. وبخلاف ذلك، اجعل T تمثل رؤوس G التي بُعدها عن x أكبر ما يمكن، واجعل H مركبة من مركبات $G[T]$. وافترض أن S تساوي مجموعة رؤوس $G - T$ التي لها جيران في $V(H)$. واجعل Q ترمز إلى مركبة $G - S$ التي تحوي x.

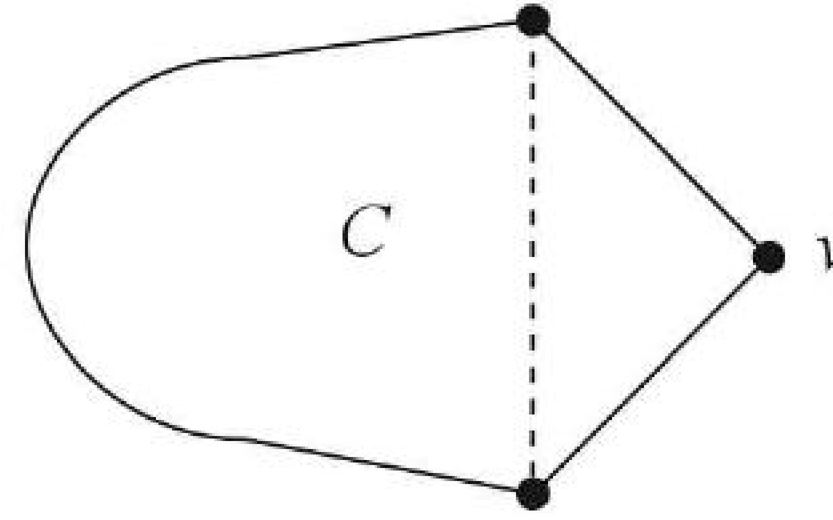


ندعي أن S عصبة. لاحظ أنه يوجد لكل رأس في S جار في $V(H)$، وجار آخر في Q. وأنه إذا كان كل من u و v رأسين مختلفين في S، فإن اتحاد أقصر المسارات من u إلى v عبر H و Q يشكل حلقة طولها 4 على الأقل. وبما أنه لا يوجد أضلاع من $V(H)$ إلى $V(Q)$، فإنه لا يوجد لهذه الحلقة أوتار عدا uv. وبسبب عدم وجود حلقة لاوترية في G، فإن $u \leftrightarrow v$. وبما أن $u, v \in S$ رؤوس اختيارية، فإن S عصبة.

الآن، افترض أن $G' = G[S \cup V(H)]$، لاحظ أن $x \notin G'$، وبذا فإن G' أصغر من G. لذا، نطبق فرضية الاستقراء على G'، وعلى رأس u في S كذلك. وبما أن S عصبة، فإن $S - \{u\} \subseteq N(u)$. لذا، وبغض النظر عن أن G' عصبة أم لا. فإن لها رأسًا مبسطيًّا z في $V(H)$. وبما أن $N_G(z) \subseteq V(G')$، فإن الرأس z يكون أيضًا مبسطيًّا في G، وكذلك فإن بُعْدَ z عن x أكبر ما يمكن كما هو منشود. ■

17.3.5. نظرية: (Dirac [1961]) يوجد ترتيب حذف مبسطي لبيان بسيط G إذا وفقط إذا كان G بيانًا وتريًّا.

الإثبات: الضرورة، افترض أن للبيان G ترتيبَ حذف مبسطي، وأن C حلقة في G، طولها 4 على الأقل. في اللحظة التي يقوم ترتيب الحذف بحذف رأس، ولنقل v من رؤوس C فإن جيران v المتبقية تشكل عصبة. حيث تشمل هذه العصبة جيران v الموجودة في C. إن الضلع الناتج الذي يربط بينها يشكل وترًا في C. لذا، فإنه لا يوجد في G حلقة لاوترية.



الكفاية: من البديهية 16.3.5 يوجد لكل بيان وتري رأس مبسطي. وهذا يعطي ترتيب حذف مبسطي من خلال الاستقراء على $n(G)$؛ لأن كل بيان جزئي مستحدث من بيان وتري يكون بيانًا وتريًّا. ■

بعض الخواص الأخرى للبيانات الوترية تظهر في التمارين 20 – 27.

إطلالة على البيانات الكاملة (A Hint of Perfect Graphs)

لقد أثبتنا في الفرضية 16.1.5 أن $\chi(G) = \omega(G)$ وذلك عندما يكون G بيان فترة، بالإضافة إلى ذلك، فإن كل بيان جزئي مستحدث من بيان فترة يكون أيضًا بيان فترة؛ لأننا نستطيع حذف الفترة التي تمثل الرأس v من الفترات التي تمثل البيان G للحصول على تمثيل بفترات للبيان $G - v$. لذا، فإن العلاقة $\chi(H) = \omega(H)$ تتحقق لكل بيان جزئي H مستحدث من بيان فترة.

18.3.5. تعريف: نقول: إن البيان G بيان كامل إذا تحقق أن $\chi(H) = \omega(H)$ لكل بيان جزئي مستحدث $H \subseteq G$. ويكافئ ذلك قولنا أن $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ لكل $A \subseteq V(G)$.

نعرِّف عدد غطاء (أغطية) العصب (clique cover number) $\theta(G)$ لبيان G على أنه أصغر عدد يلزمنا من العصب في G لتغطية $V(G)$، لاحظ أن $\theta(G) = \chi(\overline{G})$.

بما أن العصب والمجموعات المستقلة تتبادل الأدوار في أثناء عملية أخذ المتممة، فإن عبارة الكمال لـ $\overline{G}$ هي $\alpha(H) = \theta(H)$ لكل بيان جزئي مستحدث H من G. لقد أثبت لوفاس [1972 b ,1792 a] نظرية البيان الكامل (PGT) التي تنص على أن البيان G يكون كاملاً إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ كاملاً. وسنثبت هذه في النظرية 6.1.8. وهنا سنوضح البيانات الكاملة فقط.

19.3.5. تعريف: نقول: إن عائلة البيانات $\mathbf{G}$ وراثية إذا كان كل بيان جزئي مستحدث من بيان في $\mathbf{G}$ بيانًا في $\mathbf{G}$.

20.3.5. ملاحظة: افترض أن $\mathbf{G}$ صفّ وراثي من البيانات. لبرهان أن كل بيان في G كامل، يكفي أن نثبت أن $\chi(G) = \omega(G)$ لكل $G \in \mathbf{G}$. وبذلك، نكون قد شملنا برهان هذه المساواة للبيانات الجزئية المستحدثة جميعها من G. ■

21.3.5. مثال: البيانات الثنائية الفرع وبياناتها الخطانية. إن البيانات الثنائية الفرع تشكل صفًا وراثيًا و G.

لذا، فإن البيانات الثنائية الفرع تكون كاملة. وعندما يكون H ثنائي الفرع، فإن عبارة الكمال لـ $\overline{H}$ هي التمرين 38.1.5 التي تتبع $\alpha(H) = \beta'(H)$ (النتيجة 24.1.3). للبيانات الثنائية الفرع، نلاحظ أن النتيجة غير البديهية $\alpha(G) = \theta(G) = \beta'(G)$ تتبع النتيجة البديهية $\chi(G) = w(G)$ من خلال الـ PGT.

لقد قدّمنا في التعريف 18.2.4 اختصارًا لموضوع البيانات الخطانية لبرهان النسخة الضلعية من نظرية منجر، تذكر أن للبيان الخطاني $L(G)$ رأسًا لكل ضلع من أضلاع G حيث إن $e, f \in V(L,(G))$ يكونان متجاورين إذا وُجدتْ لهما نقطة طرفية مشتركة في G. إن البيانات الخطانية للبيانات الثنائية الفرع تشكل عائلة وراثية؛ لأن حذف رأس في البيان الخطاني يمثل حذف الضلع المرتبط بهذا الرأس في البيان الأصلي. لذا، فإن برهنة أن $\alpha(L(G)) = \theta(L(G))$ وذلك عندما يكون G بيانًا ثنائي الفرع ستثبت أن متممات البيانات الخطانية هي بيانات كاملة. لاحظ أن العصبة في $L(G)$ (عندما يكون G ثنائي الفرع) تتألف من أضلاع G التي لها نقاط طرفية مشتركة. لذا، فإن تغطية رؤوس $L(G)$ بعصب، يقابل اختيار رؤوس في G لتشكيل غطاء رأسي. إن المجموعات المستقلة في $L(G)$ تمثل مواءمات في G، إذن فالكمال لمتممات البيانات الخطانية للبيانات الثنائية الفرع يؤدي لنظرية كونج وايجرفاري $(\alpha'(G) = \beta(G))$ الخاصة بالمواءمة وأغطية الرؤوس للبيانات الثنائية الفرع.

مما سبق، نجد أن الـ PGT كذلك تعطينا أن $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$. إن التلوين الفعلي للبيان $L(G)$ هو تجزئة لـ $E(G)$ إلى موائمات، وأن $\omega(L(G)) = \Delta(G)$ (للبيان الثنائي الفرع G)لذا، فإن المساواة $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$ تعني أنه يمكن تجزئة أضلاع البيان الثنائي الفرع G إلى $\Delta(G)$ مواءمة. وسنقدم في النظرية 7.1.7 برهانًا مباشرًا لهذه النتيجة الإضافية لـ كونج [1916]. ■

بما أن كل بيان فترة هو بيان وتري (التمرين 28)، فبرهان أن البيانات الوترية جميعها هي بيانات كاملة يقوي الفرضية 16.1.5. وسنكتشف في البند 1.8 توصيفات أخرى لبيانات الفترة والبيانات الوترية.

22.3.5. نظرية : ([Berge [1960]). إن البيانات الوترية هي بيانات كاملة.

الإثبات: إن حذف الرؤوس لا ينتج حلقات لاوترية. لذا، فإن هذه العائلة وراثية. من الملاحظة 20.3.5 يلزمنا فقط إثبات أنه إذا كان G وتريًا، فإن $\chi(G) = \omega(G)$.

لقد أثبتنا في النظرية 17.3.5 أنه يوجد للبيان G ترتيب حذف مبسطي. افترض أن $v_n, \ldots, v_1$ هي عكس لهذا الترتيب. إن جيران v_i من المجموعة $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ تمثل عصبة وذلك لكل i.

نطبق تلوينًا جشعًا على هذا الترتيب. إذا كان لون v_i هو k، فإن الألوان $1, \ldots, k-1$ تظهر على جيران لـ v_i ظهرت سابقًا، وبما أن هذه الرؤوس تشكل عصبة، لذا ومع v_i فإننا سنحصل على عصبة حجمها k. أي أننا سنحصل على عصبة حجمها يساوي عدد الألوان المستخدمة. ■

يوضح برهان النظرية 22.3.5. أن التلوين الجشع بالنسبة إلى عكس ترتيب حذف مبسطي ينتج تلوينًا أمثل. وهذا يعمم الفرضية 16.1.5 المتعلقة ببيانات الفترة. إن v_n هي عكس لهذا الترتيب. وأن جيران v_i من المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$ تمثل عصبة. سنعرض صفًا اساسيًا واحدًا من البيانات الكاملة يشمل البيانات الثنائية الفرع جميعها.

23.3.5. تعريف*. نعرِّف التوجيه المتعدي للبيان G على أنه توجيه D، بحيث إنه إذا كان xy و yz ضلعين في D، فإنه يوجد ضلع آخر xz في G موجه من x إلى z في D. ويسمى البيان البسيط G ببيان مقارنة إذا وُجِدَ له توجيه متعدٍّ.

24.3.5. مثال*. افترض أن G بيان ثنائي بالتجزئة الثنائية X, Y . إذا وجّهنا كل ضلع من X إلى Y، فسنحصل على توجيه متعدٍّ. لذا، فإن كل بيان ثنائي الفرع هو بيان مقارنة. إن التوجيه المتعدي يظهر من علاقات ترتيب، حيث إن $x \rightarrow y$ يمكن أن تعني أن x تحوي y وهذه علاقة تعدٍّ. ■

25.3.5. فرضية*. ([Berge [1960]). بيانات المقارنة هي بيانات كاملة.

الإثبات: كل بيان جزئي موجه لبيان موجه متعدٍّ يكون متعديًا. لذا، فإن مجموعة بيانات المقارنة هي بيانات وراثية. وبذلك يلزمنا فقط أن نبين أن كل بيان مقارنة قابل للتلوين باستخدام $\omega(G)$ لونًا.

افترض أن F توجيه متعدٍّ للبيان G، لاحظ أن F لا تحوي حلقات. وكما هو واضح من برهان النظرية 21.1.5، فإن تلوين G الذي يعين لكل رأس v عدد الرؤوس في أطول مسار في F ينتهي عند v هو تلوين فعلي. وباستخدام التعدي، فإن الرؤوس في أي مسار في F تشكل عصبة في G، وبذلك نكون قد أثبتنا أن $\chi(G) \leq \omega(G)$. ■

حساب التوجيهات اللاحلقية (اختياري)
(Counting Acyclic Orientations (optional))

من المدهش أن $\chi(G; k)$ تحمل معنى في الحالة التي يكون فيها k عددًا صحيحًا سالبًا. يسمى التوجيه الذي لا يحوي حلقات لبيان G بتوجيه لا حلقي للبيان. إن إعطاء k القيمة 1- في $\chi(G; k)$ ستساعدنا على حساب التوجيهات اللاحلقية للبيان G.

26.3.5. مثال: يوجد للبيان C_4 أربعة أضلاع و16 توجيهًا، منها 14 توجيهًا لاحلقي. لقد أثبتنا في المثال 7.3.5 إن $\chi(C_4; k) = k(k-1)(k^2-3k+3)$ وبحساب هذه القيمة عندما $k = -1$ نجد أن $(-1)(-2)(7)=14$ ■

27.3.5. نظرية ([Stanley [1973]). إن قيمة $\chi(G; k)$ عندما $k = -1$ هي $(-1)^{n(G)}$ مضروبًا في عدد التوجيهات اللاحلقية للبيان G.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $e(G)$. افترض أن $a(G)$ هي عدد التوجيهات اللاحلقية للبيان G، لاحظ أنه عندما يخلو البيان G من أضلاع، فإن $a(G)=1$ و $\chi(G;-1)=(-1)^{n(G)}$ لذا فإن الادعاء يتحقق. سنثبت أن $a(G) = a(G-e) + a(G.e)$ لكل $e \in E(G)$. وإذا كان ذلك صحيحًا، فيمكن استخدام خطوات مكررة على a، وفرضية الاستقراء على $a(G)$ بدلالة $\chi(G; k)$ والتكرار على $\chi(G; k)$.

لحساب أن:

$$a(G) = (-1)^{n(G)}\chi(G-e;-1)+(-1)^{n(G)-1}\chi(G\cdot e;-1) = (-1)^{n(G)}\chi(G;-1)$$

الآن، نثبت التكرار على a. إن كل توجيه لاحلقي للبيان G يحوي توجيهًا لاحلقيًا للبيان $G - e$. إن التوجيه اللاحلقي D يمكن أن يمدد إلى 0 أو 1 أو 2 توجيهًا لاحلقيًا للبيان G من خلال توجيه الضلع $e = uv$. وفي حال عدم وجود مسار من u إلى v، فإننا نستطيع اختيار التوجيه $u \rightarrow v$، وفي حال عدم وجود مسار من v إلى u، فنستطيع اختيار التوجيه $v \rightarrow u$. وبما أن D لاحلقي، فإن D لا تحوي مسارًا من u إلى v ومسارًا من v إلى u في الوقت نفسه، لذا فإن هذين الخيارين للضلع e لا يمكن أن يكونا ممنوعين في الوقت نفسه.

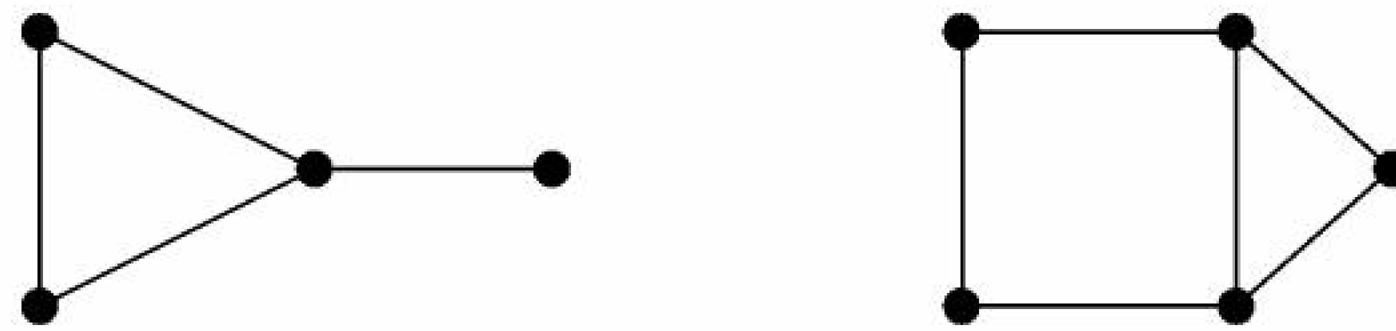
وبناءً على ذلك، فإنه يمكن تمديد D بإحدى طريقتين على الأقل، وبذلك فإن $a(G)$ تساوي $a(G-e)$ بالإضافة إلى عدد التوجيهات التي يمكن أن تمدد بالطريقتين. إن هذه التوجيهات التي يمكن تمديدها بهاتين الطريقتين هي التوجيهات اللاحلقية للبيان $G-e$ التي لا يوجد فيها مسار من u إلى v، وكذلك لا يوجد فيها مسار من v إلى u، لاحظ أنه يوجد بالضبط $a(G.e)$ من هذه التوجيهات؛ لأن أي مسار من u إلى v أو من v إلى u في أي توجيه للبيان $G-e$ يصبح حلقة في $G.e$. ■

توضيح $\chi(G;k)$ وتفسيره عندما يكون k عددًا سالبًا بوجه عام (التمرين 32) هي مثال واضح على ما يسمى "التبادل التوافقي". (Stanley [1974]).

لاحظ أن الرمز $\chi(G;k)$ يمكن أن يكون كثيرة حدود أو عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان G.

تمــــارين (Exercises)

1.3.5. (–) احسب كثيرات الحدود اللونية للبيانات المرسومة أدناه:



2.3.5. (–) استخدم التكرار اللوني للحصول على كثيرة الحدود اللونية لكل شجرة على n من الرؤوس.

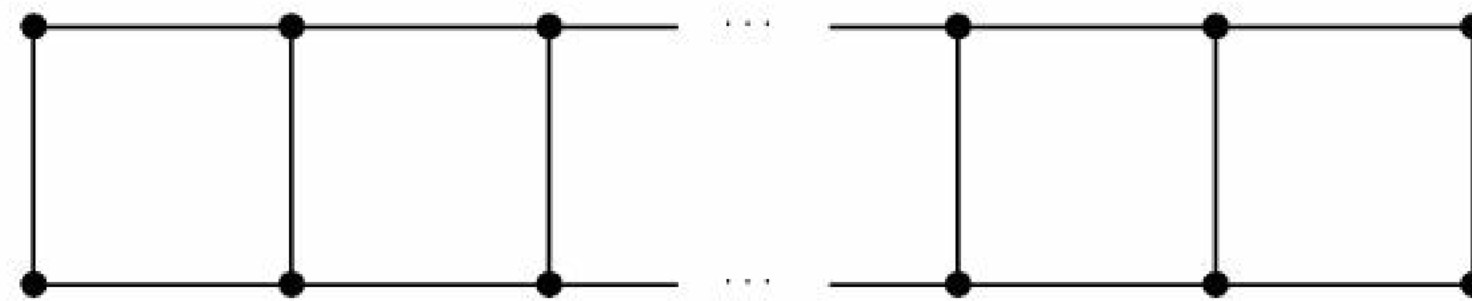
3.3.5. (–) أثبت أن $k^4-4k^3+3k^2$ ليست كثيرة حدود لونية.

4.3.5. a) أثبت أن $\chi(C_n;k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$.

b) إذا كان $H=G\vee K_1$، أثبت أن $\chi(F;k)=k\chi(G;k-1)$.

من الفرعين السابقين، جد كثيرة الحدود اللونية للعجلة $C_n\vee K_1$.

5.3.5. افترض أن $G_n=Pn\,\square\,K_2$ (حيث $n\geq 1$)، لاحظ أن هذا بيان له $2n$ رأسًا و $3n-2$ ضلعًا كما هو موضح في الشكل أدناه. أثبت أن: $\chi(G_n;k)=(k^2-3k+3)^{n-1}k(k-1)$.



6.3.5. (!) افترض أن G بيان له n من الرؤوس، استخدم الفرضية 4.3.5 لإعطاء برهان غير استقرائي لحقيقة أن معامل k^{n-1} في $\chi(G;k)$ هو $-e(G)$.

7.3.5. أثبت أنه لا يوجد لكثيرة الحدود اللونية لبيان على n من الرؤوس جذر حقيقي أكبر من $n-1$. (مساعدة: استخدم الفرضية 4.3.5).

8.3.5. (!) أثبت أن عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k لبيان مترابط G يكون أقل من $k(k-1)^{n-1}$، وذلك عندما يكون $k\geq 3$ و G ليس شجرة. ماذا يحدث عندما $k=2$؟

9.3.5. (!) أثبت أن $\chi(G;x+y)=\sum_{U\subseteq V(G)}\chi(G[U];x)\,\chi(G[\overline{U}];y)$.

(مساعدة: بما أن طرفي المساواة هما كثيرتا، فيكفي أن نثبت تحقق المساواة عندما يكون x و y أعدادًا صحيحة موجبة: قم بذلك من خلال عدّ $x+y$ تلوينًا فعليًّا بطريقة مختلفة).

10.3.5. افترض أن G بيان مترابط بحيث إن $\chi(G;K) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_i K^{n-i}$. أثبت أن $a_i \geq \binom{n-1}{i}$ لكل $1 \leq i \leq n$، (مساعدة: استخدم التكرار اللوني).

11.3.5. (!) أثبت أن مجموع معاملات $\chi(G;\ k)$ يساوي صفرًا، إلا إذا خلا G من الأضلاع (مساعدة: عندما تكون الدالة كثيرة حدود، فكيف يمكن الحصول على مجموع المعاملات؟).

12.3.5. (+) معاملات $\chi(G;\ k)$:

a) أثبت أن آخر حد غير صفري في كثيرة الحدود اللونية للبيان G هو الحد الذي أُسه يساوي عدد مركبات G.

b) استخدم فرع (a) لبرهنة أنه إذا كانت $p(k) = k^n - ak^{n-1} + \ldots + ck^r$ حيث $a > \binom{n-r+1}{2}$، فإن p ليست كثيرة حدود لونية. (فهذا يتضمن – على سبيل المثال- أن كثيرة الحدود في التمرين 3.3.5 ليست كثيرة حدود لونية.

13.3.5. افترض أن G وH بيانان يمكن أن يكونا متداخلين (بينهما أجزاء مشتركة):

a) إذا كان $G \cap H$ بيانًا تامًّا، فأثبت أن $(G \cup H;k) = \dfrac{\chi(G;k)\chi(H;k)}{\chi(G \cap H;k)}$.

b) اختر مسارين اتحادهما حلقة لتثبت أن هذه الصيغة يمكن أن تفشل عندما لا يكون $G \cap H$ بيانًا تامًّا.

c) طبق الفرع (a) لتستنتج أن العدد اللوني للبيان هو أكبر عدد لوني لقوالب هذا البيان.

14.3.5. (!) لتكن P بيانَ بيترسون. من نظرية بروكس، نعلم أن هذا البيان ثلاثي اللون، لذلك، وباستخدام مبدأ طواقي الحمام، نجد في G مجموعة مستقلة S حجمها 4:

a) أثبت أن $P - S = 3K_2$.

باستخدام فرع (a) والتماثل، حدد عدد تجزئات رؤوس P إلى ثلاث مجموعات مستقلة.

b) بوجه عام، كيف يمكن الحصول على عدد التجزئات إلى أصغر عدد من المجموعات المستقلة من كثيرة الحدود اللونية للبيان G؟

15.3.5. افترض أن العدد اللوني للبيان G يساوي k. أثبت أنه يوجد على الأكثر k^{n-k} تجزئة لرؤوس G إلى k من المجموعات المستقلة، حيث إن البيان الفريد الذي يحقق المساواة هو $K_k + (n-k)K_1$ (عصبة من الدرجة k إضافة إلى $n-k$ رأسًا معزولا). (مساعدة: استخدم الاستقراء على n، وخذ في الحسبان حذف رأس واحد)، ([Tomescu [1971).

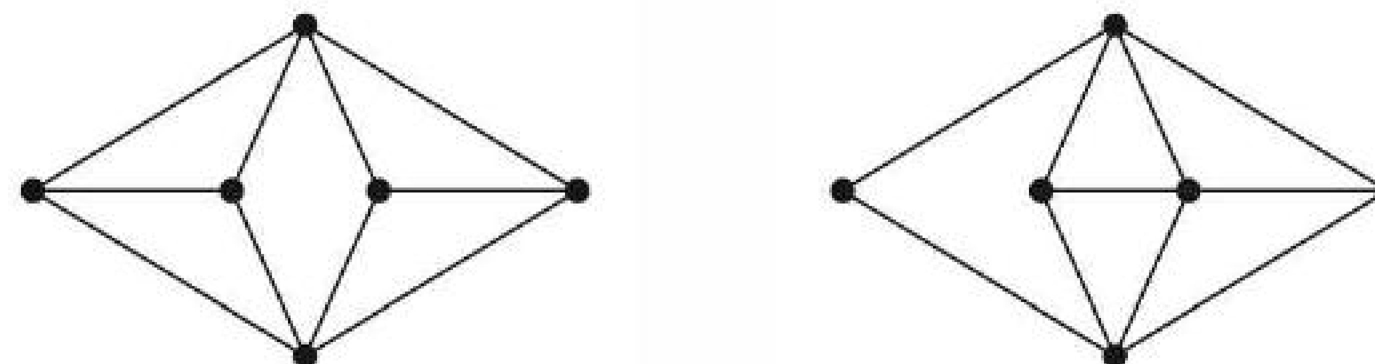
16.3.5. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس وm من الأضلاع. أثبت أنه يوجد في G $\frac{1}{3}\binom{m}{2}$ مثلثًا على الأكثر. استنتج أن معامل k^{n-2} في $\chi(G;k)$ يكون موجبًا، إلا إذا كان G يحوي رأسًا واحدًا على الأكثر. (مساعدة: استخدم النظرية 10.3.5).

17.3.5. (*) استخدم مبدأ التضمين والاستبعاد لبرهان النظرية 10.3.5 مباشرة.

18.3.5. (!) خذ في الحسبان كثيرات الحدود اللونية للبيانات أدناه:

a) دون حساب كثيرتي الحدود هاتين، أعطِ برهانًا قصيرًا على أنهما متساويتان.

b) اكتب كثيرة الحدود اللونية هذه في صورة حاصل جمع كثيرتي حدود لونيتين لبيانين وتريين، واستخدم هذا لحسابها بسطر واحد.



19.3.5. (-) افترض أن G هو البيان الذي نحصل عليه من K_6 من طريق قسمة أحد الأضلاع، استخدم التكرار اللوني لحساب $\chi(G;k)$ بوصفه حاصل ضرب لعوامل خطية (عوامل على الشكل $(k - c_i)$. أثبت أن G ليس بيانًا وتريًّا. ([Read [1975], Dmitriev [1980]).

20.3.5. افترض أن G بيان وتري. استخدم ترتيب حذف مبسطي لبيان G لبرهنة العبارات الآتية:

a) يوجد لـ G على الأكثر n من العصب العظمى، حيث تتحقق المساواة في الحالة التي لا يحوي فيها G أضلاعًا. ([Fulkerson – Gross [1965]).

b) إن كل عصبة عظمى في G لا تحوي رأسًا مبسطيًّا للبيان تكون مجموعة فاصلة.

21.3.5. يعرَّف عدد سزكرز وولف (Skekeres – wilf number) للبيان G على أنه $1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$ أثبت أن البيان G يكون بيانًا وتريًّا إذا وفقط إذا تحقق أنه في كل بيان جزئي من G يكون عدد سزكرز وولف مساويًا لعدد العصب، ([Voloshim [1982]).

22.3.5. افترض أن $k_r(G)$ تمثل عدد العصب من الدرجة r لبيان وتري مترابط G. أثبت أن $\sum_{r\geq 1}(-1)^{r-1}\ K_r(G)=1$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $n(G)$. لاحظ أن صيغة ذات الحدين (الملحق A) تعطينا أن $\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{m}{j}=0$ عندما $m \in N$).

23.3.5. افترض أن S هي مجموعة رؤوس حلقة في بيان وتري G. أثبت أنه توجد في S حلقة رؤوسها هي رؤوس S جميعها ما عدا رأسًا واحدًا. (تعليق: في الحالة التي توجد للبيان G حلقة مولدة وتكون $S \subset V(G)$، خَمَّنَ هندري بأنه توجد أيضًا للبيان G حلقة رؤوسها هي S كلها بالإضافة إلى رأس واحد آخر)، ([Hendry [1990]).

24.3.5. افترض أن e ضلع في حلقة C في بيان وتري، أثبت أن e تشكل مثلثًا مع رأس ثالث من رؤوس C.

25.3.5. افترض أن Q عصبة عظمى في بيان وتري G، أثبت أنه إذا كان $G - Q$ بيانًا مترابطًا، فإن Q تحوي رأسًا مبسطيًّا ([Voloshin – Gorgos [1982]).

26.3.5. يثبت التمرين 13.3.5. الصيغة $\chi(G \cup H; k) = \frac{\chi(G;k)\chi(H;k)}{\chi(G \cap H;k)}$ عندما يكون $G \cap H$ بيانًا تامًّا:

a) أثبت أن هذه الصيغة تتحقق في الحالة التي يكون فيها $G \cup H$ بيانًا وتريًّا بصرف النظر عن أن $G \cap H$ بيان تام.

b) أثبت أنه إذا كان x رأسًا في بيان وتري G فإن:

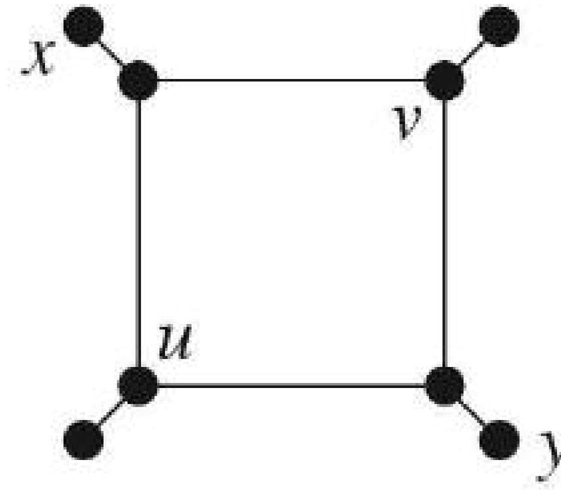
$$\chi(G;k)=\chi(G-x;k)\,k\ \frac{\chi(G[N(x)];k-1)}{\chi([N(x)];k)}$$

(تعليق: يسمح فرع (b) بحساب كثيرة الحدود اللونية لبيان وتري G عن طريق ترتيب حذف اختياري. فعلى سبيل المثال، إن حذف الرأس المركزي في P_5 يؤدي إلى أن:

$\chi(P_5;k)=[k(k-1)]^2\ k\,\frac{(k-1)^2}{k^2}=k(k-1)^4$.(Voloshin [1982]).

27.3.5. (+) نعرِّف فاصل الرؤوس الأصغري في بيان G على أنه مجموعة جزئية $S \subseteq V(G)$، بحيث إنها تشكل لرأسين x و y أصغر مجموعة رؤوس، بحذفها تُفصَل x و y. كل مجموعة فصل أصغرية هي فاصل رؤوس أصغري، لكن u، v في البيان أدناه توضح أن العكس يمكن ألا يتحقق:

a) أثبت أنه إذا كان كل فاصل رؤوس أصغري عصبة، فإن الخاصية نفسها تتحقق لكل بيان جزئي من G.
b) أثبت أن البيان G وتري إذا وفقط إذا كان كل فاصل رؤوس أصغري عصبة. (Dirac [1961]).



28.3.5. (!). افترض أن G بيان فترة، أثبت أن G بيان وتري، وأن $\overline{G}$ بيان مقارنة.

29.3.5. جد أصغر بيان G غير كامل بحيث إن $\chi(G)=\omega(G)$.

30.3.5. يسمى الضلع في البيان G الذي له توجيه لاحلقي بضلع تابع (غير مستقل) إذا حصلنا على حلقة عندما نعكس اتجاهه:

a) أثبت أن كل توجيه لاحلقي لبيان مترابط على n من الرؤوس يحوي $n-1$ ضلعًا مستقلًا.
b) أثبت أنه إذا كان $\chi(G)$ أقل من خصر G، فإنه يوجد للبيان G توجيه ليس له أضلاع تابعة. (مساعدة: استخدم التقنية الموجودة في برهنة النظرية 21.1.5).

31.3.5. (*) إن العدد $a(G)$ للتوجيهات اللاحلقية للبيان G يحقق العلاقة التكرارية $a(G)=a(G-e)+a(G.e)$ (النظرية 27.3.5. فضلًا عن أنه من الواضح أن عدد الأشجار المولدة يحقق العلاقة التكرارية نفسها؛ هل يكون عدد التوجيهات اللاحلقية لبيان G دائمًا يساوي عدد الأشجار المولدة؟ ولماذا؟

32.3.5. (*) افترض أن D توجيه لاحلقي للبيان G، وافترض أيضًا أن f تلوين لـ $V(G)$ من المجموعة $[k]$. نقول: إن (D, F) زوج منسجم (متناغم) إذا تحقق أنه إذا كان $u \rightarrow v$ فإن $f(u) \le f(v)$. افترض أن $\eta(G;k)$ تساوي عدد الأزواج المنسجمة. أثبت أن $\eta(G;k) = (-1)^{n(G)}\chi(G;k)$، (Stanley [1973]).

الفصل السادس

البيانات المستوية (Planar Graphs)

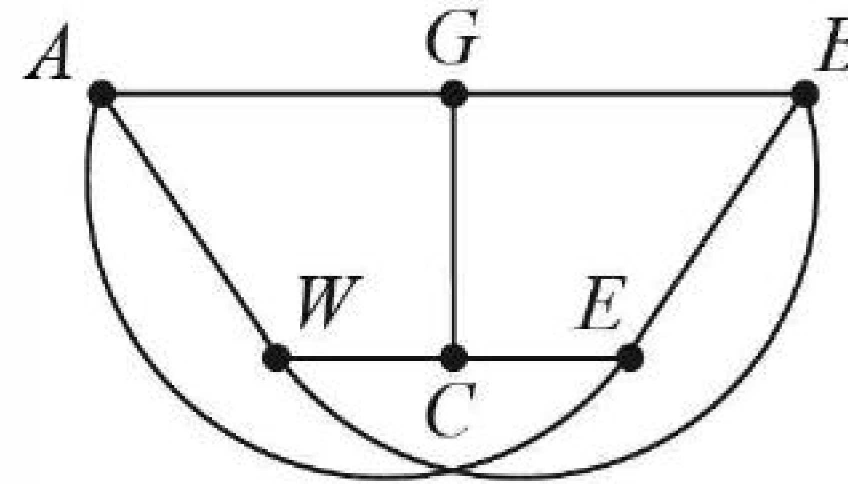
1.6. المتضمنات وصيغة أويلر (Embeding and Euler's Formula)

تُعدُّ نظرية البيان (الطبوغرافية) وبحسب فهم الكثيرين وتصورهم دراسة لتصميم البيانات. ويعزى الحافز (الدافع) الأولي لهذا الفهم إلى مسألة الألوان الأربعة الشهيرة ، وهي: هل يمكن تلوين كلّ خارطة على الكرة الأرضية بأربعة ألوان بحيث تكون ألوان المناطق التي بينها حدود مشتركة مختلفة؟ وفيما بعد، اشتملت الحوافز على تصميم (الدارات: Ciccuits) أو الحلقات على رقاقات السليكون. إن تقاطع الأسلاك يسبب بعض المشاكل في التصميمات. لذا، نسأل: ما الدارات التي لها تصميمات دون تقاطعات؟

الرُّسوم في المستوى (Drawings in the plane)

مشكلة الذكاء الآتية قديمة قِدم ددني ([1917] Dudeney).

1.1.6. مثال: غاز، ماء، كهرباء. افترض أن A، و B، و C ثلاثة أعداء يعيشون بين الأشجار. ونريد أن نجد مسارات لكلّ منهم لكي تصله منفعة من المنافع الثلاثة وهي عادة؛ الغاز والماء والكهرباء.ومن أجل تجنب المواجهة بينهم؛ فإننا نرغب في إيجاد مسارات لهم لا تتقاطع.والسؤال هو: هل يمكن عمل ذلك؟ لاحظ أن هذه المسألة تعني: هل يمكن رسم $K_{3,3}$ في المستوى دون تقاطعات بين أضلاعه؟ سنثبت أنَّ هذا غير ممكن.■



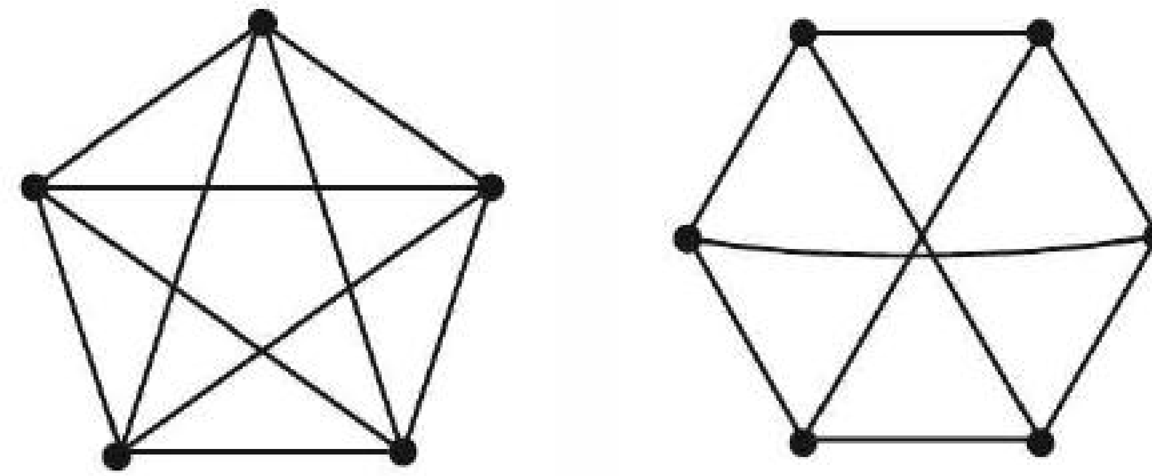
تستند التعليلات والحجج التي تقال عن رسم البيانات في المستوى إلى حقيقة أن كلّ منحنى مغلق يفصل المستوى إلى منطقتين (داخل المنحنى وخارجه). وفي نظرية البيانات الأولية، يُعدُّ هذا الأمر حقيقة حدسية مسلمًا بها، ولكن التفاصيل التوبولوجية صعبة جدًّا. قبل أن نناقش طريقًا لجعل التعليلات دقيقة لنظرية البيان، سنوضّح بطريقة غير رسمية كيفية استخدام هذه النتيجة لإثبات استحالة سوية بعض البيانات (أي استحالة رسم هذه البيانات في المستوى دون تقاطع أضلاعها).

2.1.6. قضية : لا يمكن رسم K_5 و $K_{3,3}$ دون تقاطعات.

الإثبات: خذ في الحسبان رسمًا للبيان K_5 أو $K_{3,3}$ في المستوى. افترض أنَّ C حلقة مولدة، إذا كان الرسم لا يحوي أضلاعًا متقاطعة، فإن C تمثِّل منحنى مغلقًا، ويجب أن تُرسم أوتار C داخل هذا المنحنى أو خارجه.

لاحظ أن هناك وترين يتعارضان إذا كان ترتيب رؤوسهما متناوبًا بين الزوجي والفردي، وعندما يتعارض وتران، نستطيع رسم أحدهما فقط داخل C، والثاني خارج C.

تحتوي الحلقة السداسية في $K_{3,3}$ على ثلاثة أوتار متعارضة، وباستطاعتنا وضع وترين على الأكثر؛ الأول داخلها والآخر خارجها. لذا، يستحيل إتمام عملية طمر $K_{3,3}$ في المستوى. والآن، إذا كانت C حلقة خماسية في K_5، فإنه يوجد وتران على الأكثر داخل C، ووتران آخران خارجها.وبما أنه يوجد خمسة أوتار، فإن إتمام عملية طمر K_5 في المستوى غير ممكنة. لذا، فإن كلًّا من هذين البيانين بيانٌ غير سويٍّ. ■



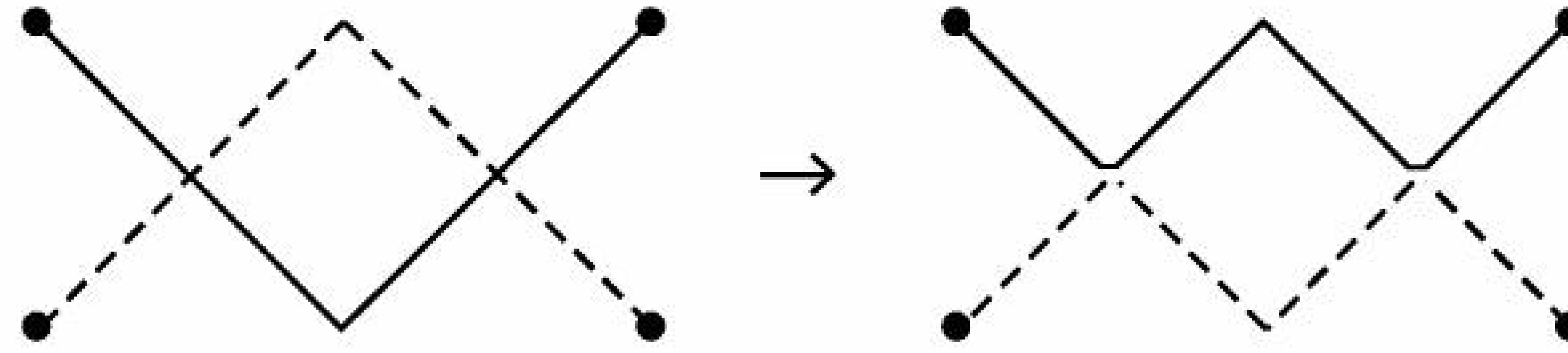
لاحظ أننا نحتاج إلى مفهوم واضح ودقيق عن الرسم. لقد استخدمنا المنحنيات للتدليل على الأضلاع. إن استخدام المنحنيات التي تشكلها القطع المستقيمة يجنبنا الصعوبات التوبولوجية. وأن هذه القطع تُقرِّب أي منحنى بدرجة كبيرة جدًّا؛ حيث إن العين المجردة لا تلحظ الفرق.

3.1.6. تعريف: يعرّف المنحنى على أنه مدى دالة متصلة من $[0.1]$ إلى $\mathbb{R}^2$. ويعرف منحنى المضلع على أنه منحنى مكوّن من عدد منتهٍ من القطع المستقيمة. ويُسمّى بالمنحنى المضلع من u إلى v إذا بدأ عند u وانتهى عند v.

إن رسم البيان هو دالة f معرَّفة على $V(G) \cup E(G)$ بحيث تحدد لكلّ رأس v نقطة $f(v)$ في المستوى، وتحدد لكلّ ضلع طرفيه u و v منحنى من $f(u)$ إلى $f(v)$. إن صور الرؤوس تكون مختلفة، وأن أي نقطة على الشكل $f(e) \cap f(e')$. تكون نقطة تقاطع إذا لم تكُ رأسًا مشتركًا.

من الشائع استعمال الاسم نفسه للبيان G، أو لرسم معين للبيان G مع الأخذ في الحسبان تسمية النقاط والمنحنيات بالرؤوس والأضلاع للبيان G. وبما أن علاقة النقاط الطرفية بين النقاط والمنحنيات هي نفسها علاقة الوقوع بين الرؤوس والأضلاع، فيمكن رؤية رسم البيان على أنه أحد عناصر صفّ التَّشاكل الذي يحوي G.

وبتحريك الأضلاع قليلاً، نستطيع التأكيد على عدم اشتراك ثلاثة أضلاع بنقطة داخلية، وأن أي ضلع لا يحوي رؤوسًا عدا طرفيه، وكذلك عدم وجود ضلعين متماسين. إذا تقاطع ضلعان أكثر من مرة، فنستطيع تعديلهما كما في الشكل أدناه لتقليل عدد التقاطعات بينهما. لذا، فإننا نشترط كذلك أن الضلعين يتقاطعان مرة واحدة على الأكثر، وسنلزم أنفسنا بالتعامل مع رسوم تحقق هذه الخواص.



4.1.6. تعريف: نقول: إنَّ البيانَ سويٌّ إذا وُجد له رسمٌ في المستوى دون تقاطعات بين أضلاعه ويُسمّى مثل هذا الرسم طمرًا سويًّا للبيان G ونعرِّف بيان المستوى على أنه طمر سويّ معين لبيان سويّ.

ونقول: إن المنحنى مغلق إذا بدأ في النقطة نفسها وانتهى بها. ونقول: إنه بسيط، إذا لم يوجد فيه نقاط مكررة إلا في حالة كانت نقطة البداية = نقطة النهاية.

إنَّ الطّمر السوي للبيان يقطع المستوى إلى قطع هي مواضيع أساسية للدراسة.

5.1.6. تعريف: المجموعة المفتوحة في المستوى هي مجموعة جزئية $U \subseteq \mathbb{R}^2$ بحيث يتحقق أنه إذا كانت $p \in U$، فإن النقاط جميعها التي تبعد عن p بمقدار قليل تكون موجودة أيضًا في U. ونعرِّف المنطقة على أنها مجموعة مفتوحة U تحوي منحنى مضلعًا من u إلى v لكلّ زوج $u,v \in U$.

نعرِّف وجوه بيان المستوى على أنها مناطق أعظمية من المستوى لا تحوي أيًّا من النقاط التي استخدمت في الطّمر.

إنَّ لبيان المستوى G المنتهي وجهًا واحدًا غير محدود (يُسمّى كذلك الوجه الخارجي). وتكون الوجوه منفصلة زوجًا زوجًا. إن النقطتين p و q تكونان في الوجه نفسه إذا وفقط إذا وُجِدَ منحنى مضلع من p إلى q لا يقطع أيًّا من أضلاع البيان.

وفي بيان المستوى، تكون كلّ حلقة مطمورة في صورة منحنى مغلق، وتقع بعض الوجوه في داخلها، أما بعضها الآخر فيقع خارجها، وهذا يعتمد على حقيقة أن المنحنى المغلق البسيط يفصل المستوى إلى منطقتين.

وكما اقترحنا، فإن هذا ليس صعبًا كثيرًا للمنحنيات المضلعة. وسنعرض بعض تفاصيل هذه الحالة من أجل توضيح كيفية حساب إمكانية وجود النقطة في الداخل أو في الخارج.

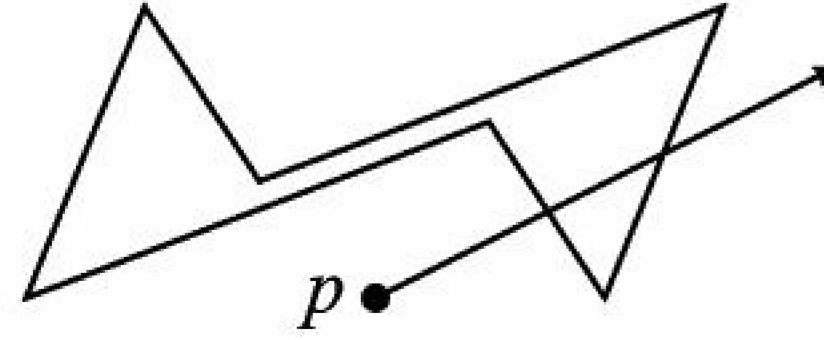
يظهر هذا الإثبات في (تفربرج [1980] Tverberg).

6.1.6. نظرية*. (حالة خاصة لنظرية منحنى جوردان: Restricted Jordan Curve theorem) إن منحنى المضلع المغلق البسيط C الذي يتألف من عدد منتهٍ من القطع المستقيمة يقسم المستوى إلى وجهين حيث تكون C حدودًا لكلّ منها.

الإثبات: بما أنَّ عدد القطع المستقيمة منته، فإنَّ القطع غير المتقاطعة لا تكون قريبة اعتباطيًّا. لذا، نستطيع مغادرة الوجه عندما نقطع C فقط. وإذا تتبعنا C، فإن النقاط التي تكون موجودة عن يميننا تقع في وجه واحد، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقاط التي تقع عن يسارنا. (يوجد معنى جبري دقيق لليسار واليمين هنا). إذا كانت $x \notin C$، وكانت $y \in C$، فإن القطعة xy أولاً تقطع C في مكان ما عندما تقترب من C من اليمين إلى اليسار. لذا، فإن كل نقطة لا تقع على C، فإنها تقع في الوجه نفسه مع إحدى المجموعتين الموصوفتين أعلاه على الأقل.

ولإثبات أنَّ النقاط على كلّ من اليسار واليمين تقعان في وجوه مختلفة، خذ في الحسبان أشعة في المستوى. ونقول: إنَّ الشعاعَ المنبعثَ من نقطة p رديءٌ إذا احتوى نقطة طرفية لإحدى القطع المستقيمة في C. وبما أنَّ

عددَ القطع المستقيمة في C منته، فإن هناك عددًا منتهيًا من الأشعة الرديئة المنطلقة من p وبما أنَّ عددَ القطع منته، فإن كلّ شعاع جيد مّن p يقطع C عددٌ منته من المرات، وكلّما تغير الاتجاه، فإن عدد التقاطعات فقط يتغير في اتجاه رديء لاحظ أن نوعية عدد التقاطعات هي نفسها قبل مثل هذا الاتجاه وبعده. ونقول: إن p نقطة زوجية عندما يقطع الشعاع الجيد المنبعث من p C عددًا زوجيًّا من المرات. وبخلاف ذلك تكون p نقطة فردية.



إذا كان لدينا نقطتان x و y في الوجه نفسه لـ C، فاجعل P هي المنحنى المضلع من x إلى y الذي لا يقطع C. وبما أن C يحوي عددًا منتهيًا من القطع المستقيمة، فإنه يمكن إجراء تعديل طفيف على النقاط الطرفية للقطع المستقيمة الموجودة في P، بحيث تصبح الأشعة المارة عبر قطع P جيدة لنقاطها الطرفية. لاحظ أن قطعة من P تنتمي إلى شعاع ينبعث من إحدى النقاط الطرفية، ويمر بالطرف الآخر إضافة إلى أن لكلّ من النقطتين أشعة جيدة في الاتجاه نفسه. وبما أن النقطة المستقيمة لا تقطع C، فإن للنقطتين النوعية نفسها. لذا، فإن لكلّ نقطتين في الوجه نفسه النوعية نفسها.

وبما أن النقاط الطرفية لأي قطعة قصيرة تقطع C مرة واحدة فقط تمتلك نوعيات متضادة، إذن، يوجد وجهان مختلفان، وأن كلًّا من النقاط الزوجية والفردية تشكل الوجهين الخارجي والداخلي على الترتيب. ■

البيانات الثَنَويّة (Dual Graphs)

تُعدُّ الخارطةَ على المستوى أو على الكرة بيانًا مستويًا فيه المقاطعات هي الوجوه، والرؤوس هي الأماكن التي تلتقي فيها الحدود. أمّا الأضلاع فهي أجزاء الحدود التي تربط بين رأسين. ونسمح بالحالة العامة من حيث وجود العرى والأضلاع المكررة. ونستطيع تكوين بيان مستوٍ يرتبط ببيان المستوى G حيث يُسمّى البيانَ الثَنَوي للبيان G.

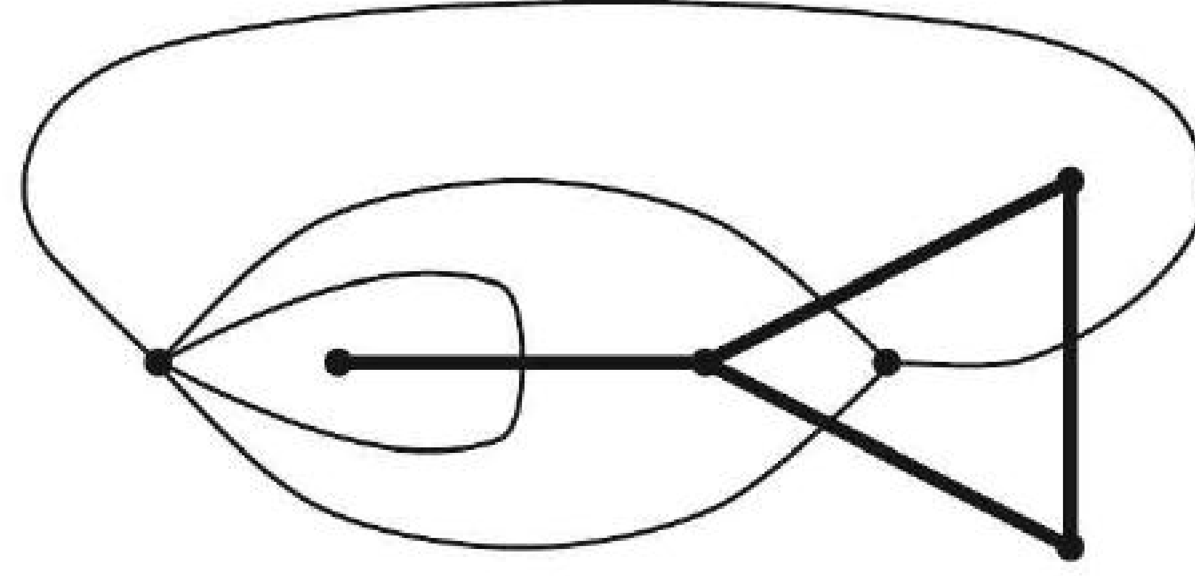
6.1.7. تعريف: يعرف البيان الثنوي G^* لبيان مستوٍ G على أنه بيان مستوٍ ترتبط رؤوسه بوجوه G (رأس في كلّ وجه) وترتبط أضلاع G^* بأضلاع G علىَ الصورَة التالية: إذا كان e ضلعًا في G حيث الوجه X على أحد جانبي e، في حين يكون Y الوجه على الجانب الآخر، فإن النقاط الطرفية للضلع الثنوي $e^* \in E(G^*)$ هما الرأسان x و y في G^* التي تمثّل الوجهين X و Y من وجوه G. فضلًا عن أن ترتيب الأضلاع التي تقع على $x \in V(G^*)$ في المستوى هو ترتيب الأضلاع نفسه التي تحدّ الوجه X في ممرٍّ حول حدود هذا الوجه.

6.1.8. مثال: يحوي كلّ طمر سويّ للبيان K_4 أربعة وجوه تشترك بأضلاع حدودية زوجًا زوجًا. لذا، فإن البيان الثنوي للبيان K_4 هو نسخة أخرى من K_4 نفسه.

ولكلّ طمر سوي للمكعب Q_3 8 رؤوس، و12 ضلعًا، و6 وجوه، وأن الوجوه المتضادة لا تشترك بحدود. إن البيان الثّنويّ لهذا البيان هو طمر سويّ للبيان $K_{2,2,2}$ الذي له 6 رؤوس و 12 ضلعًا و8 وجوه.

لاحظ أن إيجاد البيان الثّنويّ لبيان يمكن أن يُنْتِجَ عرى وأضلاعًا مكررة؛ فعلى سبيل المثال، اجعل G كفّا (paw). في الشكلّ أدناه، رسمنا الكفَّ بوصفه بيانًا مستويًا بالخط الغامق، في حين رُسِمَ البيان الثنوي بالخطوط

العادية المتصلة، وبما أن للبيان G أربعة رؤوس، وأربعة أضلاع، ووجهين، فإنه يوجد للبيان G^* 4 وجوه، و4 أضلاع، ورأسان. ■



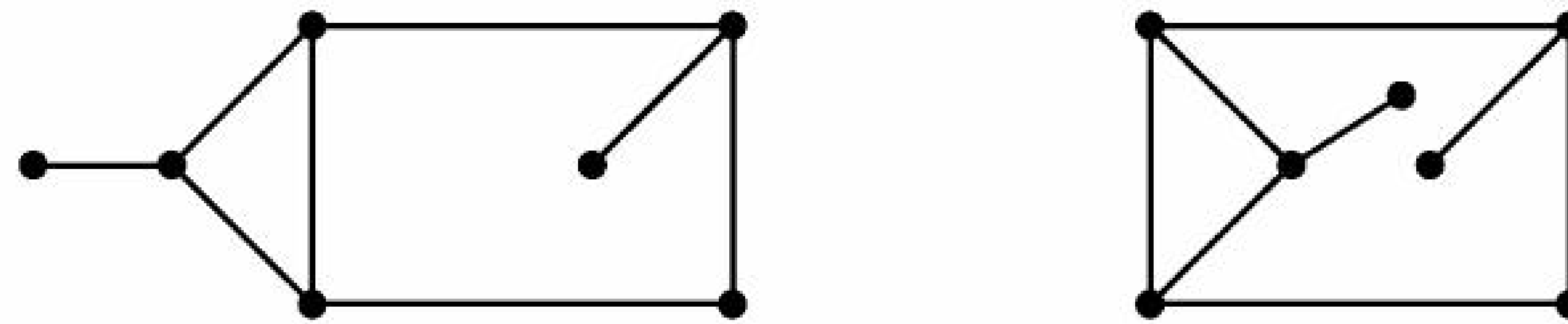
9.1.6. ملاحظة:

1) يوضّح المثال 8.1.6. أنه يمكن أن يكون للبيان الثنوي لبيان بسيط عرى أو أضلاع مكررة. حيث إن ضلع القطع في G يصبح عروة في G^* وذلك لوجود الوجه نفسه على جانبيه. وتظهر الأضلاع المكررة في البيان الثنوي في حالة وجود أكثر من ضلع حدودي مشترك بين الوجوه المختلفة.

2) تتطلب بعض التعليلات والحجج وصفَ البيان الثنوي هندسيًّا بصورة حذرة. ولكلّ وجه X في G نضع رأسًا x للبيان الثنوي داخل هذا الوجه، وبذلك فإن كلّ وجه من وجوه G يحوي رأسًا واحدًا من رؤوس G^*. ونرسم منحنى من x إلى نقطة e لكلّ ضلع في حدود X، إضافة إلى أن هذه المنحنيات لا تتقاطع، ويلتقي كلّ منحنى من هذه المنحنيات بمنحنى آخر من الجانب الآخر للضلع e، وعند النقطة نفسها لتشكيل ضلع من أضلاع G^*، وهذا هو الضلع الثنوي الذي يقابل الضلع e. ولا يوجد أضلاع أخرى تدخل X. لذا، فإن G^* بيان مستوى، وكلّ ضلع من G^* في هذا التصميم يقطع ضلعًا واحدًا بالضبط من أضلاع G.

تؤدّي مثل هذه التعليلات إلى إثبات أن $(G^*)^*$ يشاكل G إذا وفقط إذا كان G بيانًا مترابطًا (التمرين 18). يستخدم الرياضيون كلمة "ثنوي" عادة في الحالة التي يؤدي فيها إجراء العملية مرتين إلى استعادة الشيء الأصلي الذي نبدأ به. ■

10.1.6. مثال: إذا وُجد لدينا طمران لبيان سويٍّ، فمن المحتمل جدًّا أن تكون البيانات الثنوية لهذين الطّمرين غير متشاكلة، ويوجد لكلّ من الطّمرين الموضحين أدناه ثلاثة أوجه. لذا، ففي كلّ حالة يوجد للبيان الثنوي لكلّ منهما ثلاثة رؤوس. في الطّمر الموجود عن اليمين، لاحظ أن درجة الرأس المرتبط بالوجه الخارجي تساوي 4، في حين يخلو البيان الثنوي للطّمر الموجود عن اليسار من أي رؤوس درجتها تساوي 4. ولا يحدث هذا في البيانات المترابطة من الدرجة 3. وهناك طمرٌ واحدٌ فقط لكلّ بيان سوي مترابط من الدرجة 3 (انظر التمرين 45.2.8). ■



عندما يكون البيان السوي مترابطًا، فإن حدود كلّ وجه ممرّ مغلق، وفي الحالة التي لا يكون فيها البيان مترابطًا، فإنه يوجد أوجه حدودها مكونة من أكثر من ممرّ مغلق.

11.1.6. تعريف: إن طول الوجه لبيان مستوٍ G هو الطول الكلّي للممرات المغلقة التي تحدّ هذا الوجه.

12.1.6.مثال ينتمي ضلع القطع لحدود وجه واحد فقط، ويسهم مرتين في طول هذا الوجه. ولكلّ بيان في

المثال 10.1.6 ثلاثة وجوه، أطوالها في الطّمر الموجود عن اليسار هي: 3،و 6،و 7، أما أطوال الوجوه التي عن اليمين فهي: 3، و 4، و 9، ومجموع هذه الأطوال يساوي 16 في كلّ حالة، وهذا يشكلّ ضعف عدد الأضلاع. ■

13.1.6. قضية : إذا كان $l\,(Fi)$ يمثّل طول الوجه Fi في بيان G، فإن $2\,e(G) = \sum l(F_i)$.

الإثبات: إن أطوال الوجوه هي نفسها درجات رؤوس البيان الثّنوي، وبما أنّ $e\,(G) = e\,(G^*)$، فإنّ العبارة $2\,e(G) = \sum l\,(F_i)$ هي الصيغة نفسها لجمع الدرجات $2\,e\,(G^*) = \sum d^*_G(x)$ للبيان الثنوي G^*، (إن كلًّا من المجموعتين تحسب ضعف عدد الأضلاع). ■

توضّح القضيّة 13.1.6. أنّ العبارات المتعلقة ببيانات المستوى المترابطة تصبح عبارات عن البيان الثنوي من خلال تبديل الأدوار بين الرؤوس والأوجه؛ لأنّ الأضلاع التي تقع على رأس معين تصبح أضلاعًا حدودية لوجه والعكس بالعكس. لذا، فإن أطوال الوجوه ودرجات الرؤوس تتبادل الأدوار.

ويمكننا كذلك تفسير تلوين G^*. وتمثّل أضلاع G^* حدودًا مشتركة لوجوه G. وأن العدد اللوني لـ G^* يساوي عدد الألوان اللازمة لتلوين أوجه G تلوينًا فعليًّا. وبما أنه إذا كان G بيانًا مترابطًا، فإن $G = (G^*)^*$. وهذا يعني أن أربعة ألوان تكفي لإعطاء تلوين فعليّ لكلّ خارطة مستوى إذا وفقط إذا كان العدد اللونيّ لأيّ بيان مستوٍ يساوي 4 على الأكثر.

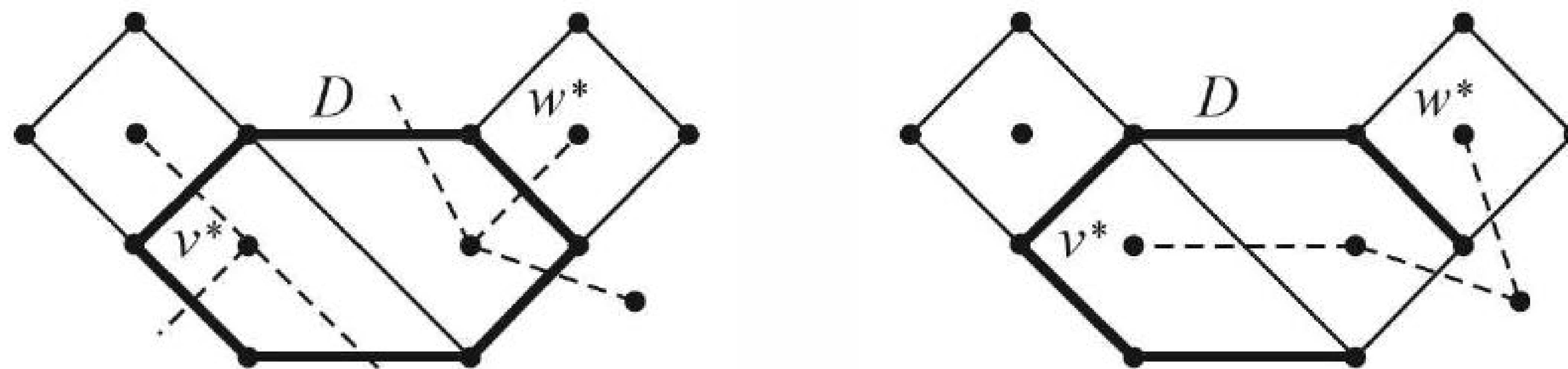
وتنصّ نظرية منحنى جوردان على أنّ كلّ بيان بسيط مغلق يعطي قطعًا بين داخله وخارجه. لاحظ أن مبدأ الثنوية بين منحنى وقطع يصبح مبدأ ثنوية بين الحلقات والروابط وذلك فيما يخص بيانات المستوى.

14.1.6. نظرية : إذا كان G بيانًا مستويًا، فإن مجموعة من أضلاعه تشكّلُ حلقة في G إذا وفقط إذا كانت الأضلاع الثنوية المرتبطة بهذه الأضلاع تشكل رابطة في G^*.

الإثبات: افترض أن $D \subseteq E(G)$. إذا خلت D من الحلقات في G، فإن D لا تحيط بأي منطقة، لذا يمكن الوصول إلى وجه G غير المحدود من أي وجه آخر دون أن نقطع D. لذلك، فإن $G^*\text{-}D^*$ يكون مترابطًا، وأن D^* لا تحوي ضلع قطع.

إذا كانت D مجموعة أضلاع حلقة في G، فإن مجموعة الأضلاع $D^* \subseteq E(G^*)$ المناظرة لأضلاع D في G^* تحوي الأضلاع الثنوية جميعها التي تربط بين كلّ من الوجوه الموجودة داخل D وخارجها (تضمن نظرية منحنى جوردان وجود ضلع واحد على الأقل لكلّ حالة). لذا، فإن D^* تحوي قطعًا ضلعيًّا.

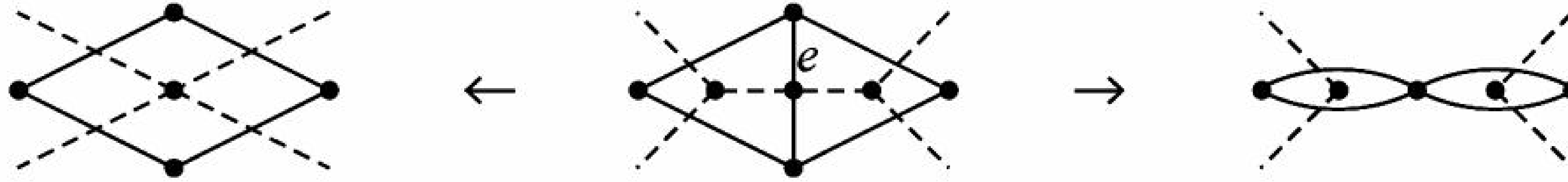
إذا حَوَت D حلقة أو أكثر، فإن D^* تحوي قطعًا ضلعيًّا أو أكثر. لذا، فإن D^* هي أصغر قطع ضلعي إذا وفقط إذا كانت D حلقة. ■



تؤدي الملاحظة الآتية إلى إثبات استقرائيٍّ للنظرية 14.1.6 (التمرين 19).

15.1.6. ملاحظة : لاحظ أنَّ حذف ضلع (لا يمثل ضلع قطع) من G له الأثر نفسه لتقليص أحد أضلاع G^*، لأن هناك وجهين يتداخلان لإعطاء وجه واحد. وأنَّ تقليص ضلع ليس عروة في G له الأثر نفسه لحذف ضلع في G^*. وتجد في البيان الموضح في الشكل أدناه أنَّ G هو البيان الموجود في الوسط، و$G - e$ عن اليسار، و $G.e$ عن اليمين.

لاحظ أنه من أجل المحافظة على الثنوية، فإننا نُبقى على الأضلاع المكررة والعرى التي تنتج عن تقليص أضلاع البيانات المستوية.



تسمح لنا الحدود بتوصيف البيانات المستوية الثنائية الفرع. ويمكن برهنة هذا التوصيف بالاستقراء. (التمرين 20).

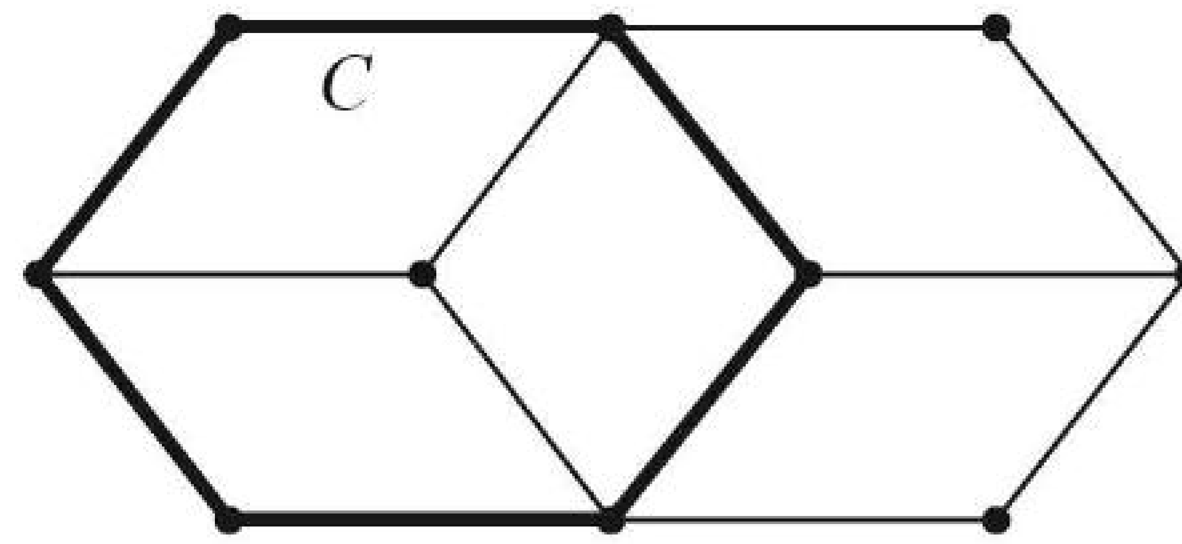
16.1.6. نظرية : العبارات الآتية متكافئة وذلك لبيانٍ مستوٍ G.

a) G ثنائيُّ الفرع.
b) طولُ كلّ وجه من أوجه G عددٌ زوجيٌّ.
c) البيانُ الثنويُّ G^* بيانٌ أويلري.

الإثبات : $A \Rightarrow B$. تتكون حدود أي وجه من ممرات مغلقة. وكلّ ممر مغلق فردي يحوي حلقة فردية، لذا تكون مساهماتُ الوجوه جميعُها في الطول زوجيةً في بيان مستوٍ ثنائيّ الفرع.

$B \Rightarrow A$. افترض أن C حلقة في G، وبما أن G يخلو من التقاطعات، فإنها بيان بسيط مغلق. اجعل F هي المنطقة التي حدودها C. لذا، فإن كلّ منطقة في G إما أن تكون كاملة داخل F أو كاملةً خارجها. وإذا جمعنا أطوال وجوه المناطق الموجودة داخل F، فإننا نحصل على عدد زوجي؛ لأنَّ طولَ كلّ وجه عددٌ زوجيٌّ. ويحسب هذا المجموع كلّ ضلع من أضلاع C مرة واحدة، وكذلك يحسب كلّ ضلع داخل F مرتين لأن كلّ ضلع من هذه الأضلاع ينتمي مرتين إلى وجوه F. لذا، فإن نوعية طول C هي نوعية كامل المجموع نفسه، وهي زوجية.

$C \Rightarrow B$. البيان الثنوي G^* مترابط، ودرجات رؤوسه هي أطوال أوجه G. ∎



إن العديد من الأسئلة المتعلقة بالبيانات السَّويَّة العامة تكون سهلة الإجابة لبعض صفوف البيانات الخاصة.

17.1.6. تعريف : نقول: إن البيان سوي خارجي إذا وُجد له طمر بحيث يقع كلّ رأس من رؤوسه على حدود الوجه غير المحدود. ونعرِّف بيان المستوى الخارجي على أنه طمر لبيان سوي خارجي.

إن البيان الموجود في المثال 10.1.6 هو سوي خارجي، ولكننا نحتاج إلى طمر آخر لإثبات ذلك.

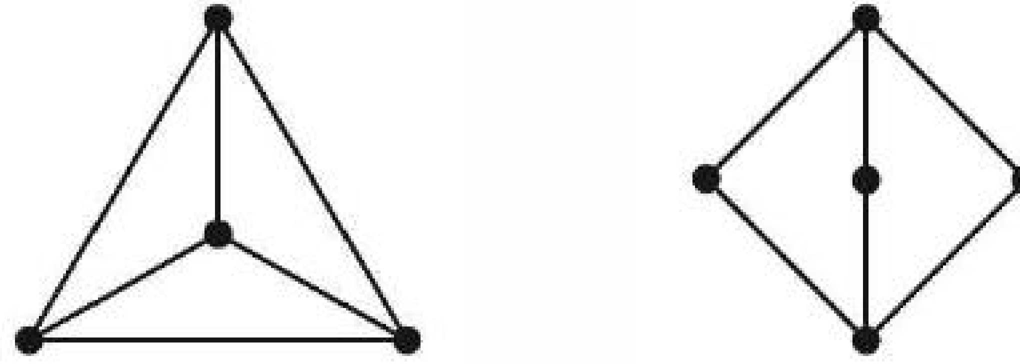
18.1.6. قضية : إن حدود الوجه الخارجي لبيان مستوٍ خارجي مترابط من الدرجة 2 هي حلقة مولدة.

الإثبات: تحوي هذه الحدودُ الرؤوسَ جميعها. فإذِا كانت حلقة، فإنها تمر عبر أحد الرؤوس أكثر من مرة، وسيكون مثل هذا الرأس رأس قطع.

19.1.6. قضية : K_4 و $K_{2,3}$ بياناتٌ سويّةٌ وليست سويّة خارجيّة.

الإثبات: لإثبات أن هذه البيانات ليست سوية خارجية، لاحظ أنها مترابطة من الدرجة 2. لذا، فإن الطّمر في مستوى خارجي يتطلب وجود حلقة مولدة، ولا توجد حلقة مولدة لـ $K_{2,3}$؛ لأن طولها سيساوي 5 في بيان ثنائي الفرع إن وُجدت.

توجد حلقة مولدة في K_4، ولكن النقاط الطرفية للضلعين الباقيين تتناوب على هذه الحلقة. لذا، فإن هذين الوترين يتعارضان، ولا يمكن رسمهما معًا داخل هذه الحلقة. بالإضافة إلى أن رسم وتر خارجي يفصل رأسًا عن الوجه الخارجي. ■

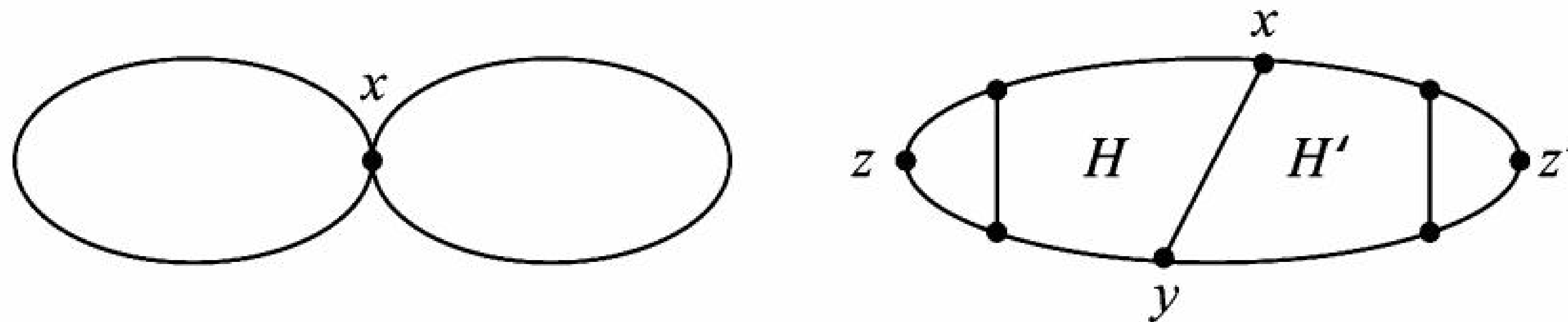


20.1.6. قضية : يوجد لكلّ بيان سوي خارجي بسيط رأسٌ درجته تساوي 2 على الأكثر.

الإثبات: يكفي أن نبرهن النتيجة للبيانات المترابطة. نستخدم الاستقراء على $n(G)$. عندما $n(G) \le 3$، فإن درجة كلّ رأس تساوي 2 على الأكثر. لذا، افترض أن $n(G) \ge 4$. سنبرهن عبارة أقوى وهي وجود رأسين غير متجاورين درجة كلّ منهما تساوي 2 على الأكثر للبيان G.

إذا كان $n(G) > 4$ ، فيوجد لـ G رأس قطع x. لذا، فإن لكلّ فلقة $\{x\}$- من G رأسًا درجته تساوي 2 على الأكثر، وهذا الرأس مختلف عن x، وهذان الرأسان غير متجاورين في G.

إذا كان G مترابطًا من الدرجة 2، فإن حدود الوجه الخارجي هي حلقة C. وإذا خلت C من الأوتار، فإن G منتظم من الدرجة 2. وإذا كان xy وترًا في C، فإن كلّ مجموعة من مجموعتي رؤوس المسارين من x إلى y تولد بيانًا جزئيًّا سويًّا خارجيًّا. وباستخدام فرضية الاستقراء، فإن هذه البيانات الجزئية H و H' تحوي الرأسين z و z' درجة كلّ منهما تساوي 2 على الأكثر، وهذان الرأسان لا ينتميان إلى المجموعة $\{x,y\}$ (هذا يشمل الحالة عندما يكون H أو H' مساويًا للبيان K_3). وبما أنه لا يوجد أي وتر من C يمكن رسمه خارجه، أو يمكن أن يقطع xy، فإن $z \nleftrightarrow z'$. لذا، فإن z و z' هما زوج الرؤوس المنشود. ■



صيغة أويلر (Euler's Formula)

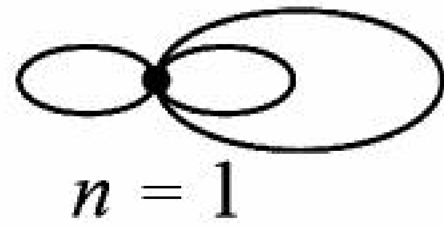
تُعدُّ صيغة أويلر ($n - e + f = 2$) أداة الحساب الرئيسة التي تربط بين رؤوس البيانات السَّويَّة وأضلاعها وأوجهها.

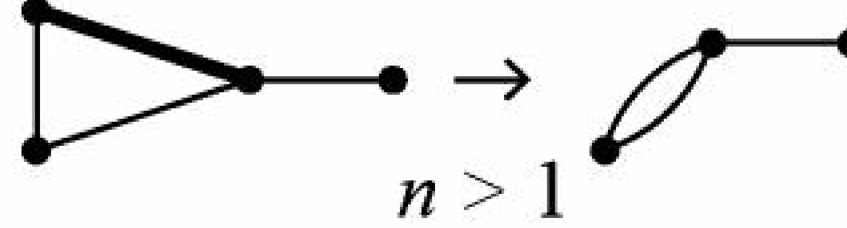
21.1.6. نظرية : (Euler [1758]) افترض أن G بيان مستو مترابط، وكانت n هي عدد رؤوسه، و e عدد أضلاعه، و f عدد الوجوه فيه، فإن $n-e + f = 2$.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على n. إذا كان $G:(n = 1)$ باقة من العرى يمثل كلّ منها منحنى مغلقًا في الطّمر. إذا كانت $e = 0$، فإن $f = 1$ وتتحقق الصيغة. فكلّ عروة مُضافة تمرّ خلال وجه وتقطعه لوجهين (هذا يتبع من نظرية منحنى جوردان). فهذا يزيد من عدد الأضلاع وعدد الوجوه بمقدار 1. وبذلك تصمد المعادلة وتصبح صحيحة عندما تكون $n = 1$ لأي عدد من الأضلاع.

إن هذا يوسّع عدد كلّ من الأضلاع والأوجه بمقدار 1 لكلّ منهما. لذا، فإن الصيغة تتحقق عندما $n = 1$ بغض النظر عن عدد الأضلاع. الآن، افترض أن $n > 1$، وبما أن G مترابط، فبإمكاننا أن نجد ضلعًا بحيث لا يكون هذا الضلع عروة. وبتقليص هذا الضلع؛ نحصل على بيان مستو G' له n' من الرؤوس، و e' من الأضلاع، و f' من الوجوه. لاحظ أن تقليص الضلع لا يغير عدد الوجوه (لقد أنقصنا الحدود فقط)، ولكنه يغير عدد كلّ من الأضلاع والرؤوس بمقدار 1. لذا، فإن $n' = n - 1$ ،$e' = e - 1$ و $f' = f$ وبتطبيق فرضية الاستقراء، نجد أن:

$$n - e + f = n' + 1 - (e' + 1) + f' = n' - e' f' = 2$$ ■





22.1.6. ملاحظة :

1) نستنتج من صيغة أويلر أن لكلّ الطمورات السَّويَّة لبيان مترابط G عددَ الأوجه نفسه. وعلى الرّغم من أن البيان الثنوي قد يعتمد على الطّمر الذي تم اختياره للبيان G، إلا أن عدد الرؤوس لا يبقى هو نفسه.

2) إن صيغة أويلر أعلاه تفشل في حالة البيانات غير المترابطة.

إذا كان لبيان G k مركبة، فإن إضافة $k - 1$ ضلعًا للبيان G تنتج بيانًا مستويًا مترابطًا دون تغيير عدد الأوجه. لذا، نستطيع تعميم صيغة أويلر لبيانات المستوى التي لها k مركبة لتصبح $n-e+f = k + 1$ (فعلى سبيل المثال، خذْ في الحسبان البيانَ الذي له n من الرؤوس ويخلو من الأضلاع). ■

يوجد لصيغة أويلر العديد من التطبيقات، وعلى وجه الخصوص بيانات المستوى البسيطة حيث لكلّ وجه طول يساوي 3 على الأقل.

23.1.6. نظرية : إذا كان G بيانًا مستويًا بسيطًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، فإن $e(G) \geq 3n(G) - 6$. وكذلك إذا كان G يخلو من المثلثات، فإن $e(G) \leq 2n(G) - 4$.

الإثبات: يكفي أن نتعامل مع البيانات المترابطة، وبخلاف ذلك نستطيع إضافة أضلاع. لاحظ أن صيغة أويلر تربط بين $n(G)$ و $e(G)$ في الحالة التي نستطيع فيها التخلص من f. تعطينا القضية 13.1.6 متباينة بين e و f. إن كلّ حدود وجه في بيان بسيط تحوي على الأقل ثلاثة أضلاع $(n(G) \geq 3)$. وبجعل $\{f_i\}$ تمثّل قائمة أطوال الوجوه، فإننا نحصل على أن $2e = \sum f_i \geq 3f$، وبالتعويض بصيغة أويلر، نحصل على أن $e \leq 3n - 6$.

إذا خلال البيان G من المثلثات، فإن طول كلّ وجه يساوي 4 على الأقل. وفي هذه الحالة، نجد أن $2e = \sum f_i \geq 4f$. وباستخدام هذا بصيغة أويلر نجد أن $e \leq 2n\text{-}4$.

24.1.6. مثال: إن عدم سوية K_5 و $K_{3,3}$ تتبع مباشرة من النظرية 23.1.6. فللبيان K_5 نجد أن $e = 10 > 9 = 3n\text{-}6$، وللبيان $K_{3,3}$ الذي يخلو من المثلثات، نجد أن $e=9 > 8 = 2n\text{-}4$. لذا، فإن لهذه البيانات عددًا كبيرًا من الأضلاع مما يؤدي إلى استحالة سويتها. ■

25.1.6. تعريف: نعرِّف البيان السوي الأعظمي على أنه بيان سوي وليس بيانًا جزئيًا مولدًا لبيان آخر، علاوة على أن البيان المثلثاتي هو بيان المستوى البسيط الذي تحيط حلقة ثلاثية بكلّ وجه من أوجهه.

26.1.6. قضية: إذا كان G بيانًا مستويًا بسيطًا له n من الرؤوس، فإن العبارات الآتية تكون متكافئة:

A) يوجد لـ G $3n\text{-}6$ ضلعًا.
B) بيان مثلثاتي.
C) بيان مستوى أعظمي.

الإثبات: $A \Leftrightarrow B$. بما أن G بيان مستو بسيط، فإن الإثبات 23.1.6. يوضح أن وجود $3n\text{-}6$ ضلعًا يكافئ العبارة $2e = 3f$، والتي تحدث فقط عندما يكون كلّ وجه محاط بحلقة ثلاثية.

$B \Leftrightarrow C$. يوجد وجه طوله أطول من حلقة ثلاثية إذا وفقط إذا وُجدت طريقة لإضافة ضلع إلى الرسم والحصول على بيان مستوٍ بسيط أكبر من البيان الموجود. ■

27.1.6. ملاحظة: ينطمر البيان في المستوى إذا وفقط إذا انطمر على كُرَة. إذا أُعطينا طمرًا على كرة، فبإمكاننا خرق هذه الكرة داخل وجه، وإسقاط هذا الطّمر على مستوى مماس للكرة عند النقطة المضادة لنقطة الخرق. إن هذا يعطينا طمرًا سويًّا يصبح فيه الوجه المخروق هو الوجه غير المحدود في المستوى. وهذه العملية قابلة للعكس.

28.1.6. تطبيق. متعدد السطوح المنتظم. بطريقة غير رسمية، نفكر في متعدد السطوح المنتظم على أنه مجسم حدوده مؤلفة من مضلعات منتظمة لها الطول نفسه، ولها عدد الوجوه نفسه التي تلتقي عند كلّ رأس. عندما نمدد المسطح على كرة، ثمَّ نضع الرسم في المستوى كما في الملاحظة 27.1.6، فإننا نحصل على بيان مستوٍ منتظم طول أوجهه متساوية. لذا، فإن البيان الثنوي أيضًا يكون بيانًا منتظمًا.

افترض أن G بيان، عدد رؤوسه n، وعدد أضلاعه e، وعدد أوجهه f. وافترض أيضًا أن G منتظم من الدرجة k، وطول كلّ وجه من وجوهه يساوي l. إن صيغة جمع الدرجات لكلّ من G و G^* تعطينا أن $kn = 2e = lf$.

وبالتعويض عن n و f في صيغة أويلر، نحصل على $e\left(\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{l}\right) = 2$. وبما أن كلًّا من 2 و e أعداد موجبة، فإن المعامل الآخر يجب أن يكون موجبًا أيضًا. وبذا، نحصل على أن $\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{L} > 0$، ومنها نجد أن $\frac{2}{k} + \frac{2}{L} > 1$ أي أن $2l + 2k > kl$. إن هذه المتباينة تكافئ المتباينة $(k\text{-}2)\ (l\text{-}2) < 4$.

بما أن البيان الثنوي لبيان منتظم من الدرجة 2 ليس بسيطًا، فإننا نطلب أن يكون $k,l \geq 3$. الآن $(k\text{-}2)\ (l\text{-}2) < 4$ وهذا يتطلب أيضًا أن يكون $k,l \leq 5$. إن أزواج الأعداد الصحيحة (k, l) التي تفي بهذه المتطلبات هي: $(3,3)$، $(3,4)$، $(3,5)$، $(4,3)$ و $(5,3)$.

وإذا حدّدنا k و l، فإن هناك طريقة واحدة فقط لرسم البيان المستوي عندما نبدأ بأي وجه. لذا فهناك خمسة مجسمات (مسطحات) أفلاطونية فقط، كما في القائمة التالية، واحد لكلّ زوج (k,l) يحقق المتطلبات.

الاسم	f	n	e	$(k\text{-}2)\ (L\text{-}2)$	l	k
الرّباعيّ السّطوح	4	4	6	1	3	3
المكعّب	6	8	12	2	4	3
الثّماني السّطوح	8	6	12	2	3	4
الثنعشريّ السّطوح	12	20	30	3	5	3
العشرينيّ السّطوح	20	12	30	3	3	5

تمارين

1.1.6. (-): أثبت أو انقض:

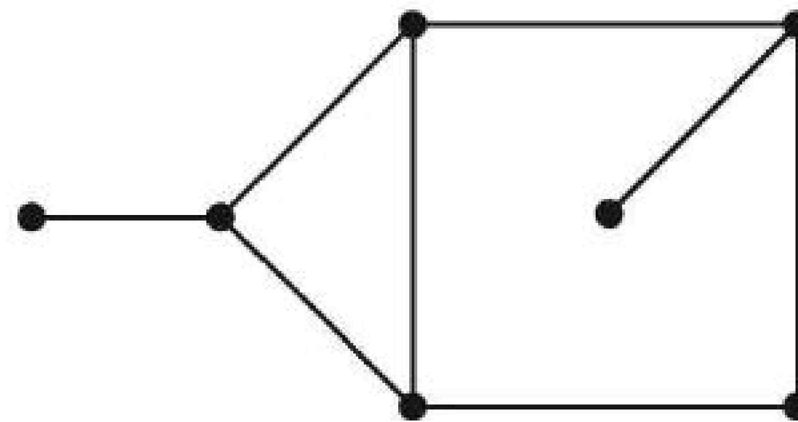
a) كلّ بيان جزئيّ لبيان سويّ يكون سويًّا.

b) كلّ بيان جزئيّ لبيان غير سويّ يكون غير سويّ.

2.1.6. (-) أثبت أن البيانات المشكلة بحذف ضلع واحد من K_5 و $K_{3,3}$ تكون بيانات سويّة.

3.1.6. (-) جد قيم r و s التي تجعل $K_{r,s}$ سويًّا.

4.1.6. (-) جد عدد صفوف تشاكل البيانات السَّويَّة التي يمكن الحصول عليها كبيان ثنويّ سويّ للبيان الموجود في الشكل أدناه.



5.1.6. (-) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: يوجد رأس قطع للبيان السوي إذا وفقط إذا كان الممرُّ المحيط بأي وجه حلقةً.

7.1.6. (-) يُعَرَّفُ البيان السوي الخارجي الأعظمي على أنه بيان سوي خارجي بسيط بحيث لا يكون بيانًا جزئيًّا مولدًا لبيان سوي خارجي بسيط أكبر. افترض أن G بيان سوي خارجي أعظمي له ثلاثة رؤوس على الأقل. أثبت أن G مترابط من الدرجة 2.

8.1.6. (-) أثبت أنه يوجد رأس درجته تساوي 5 على الأكثر في كلّ بيان سوي بسيط.

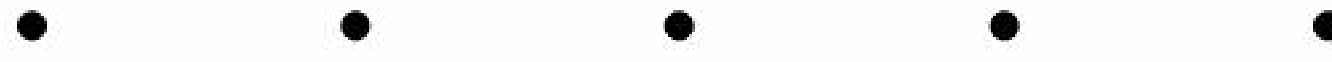
9.1.6. (-) استخدم النظرية 23.1.6 لتبرهن أن كلّ بيان بسيط سوي عدد رؤوسه أقل من 12 يحوي رأسًا درجته تساوي 4 على الأكثر.

10.1.6. (-) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: لا يوجد بيان سوي ثنائي الفرع بسيط درجته الصغرى تساوي 4 على الأقل.

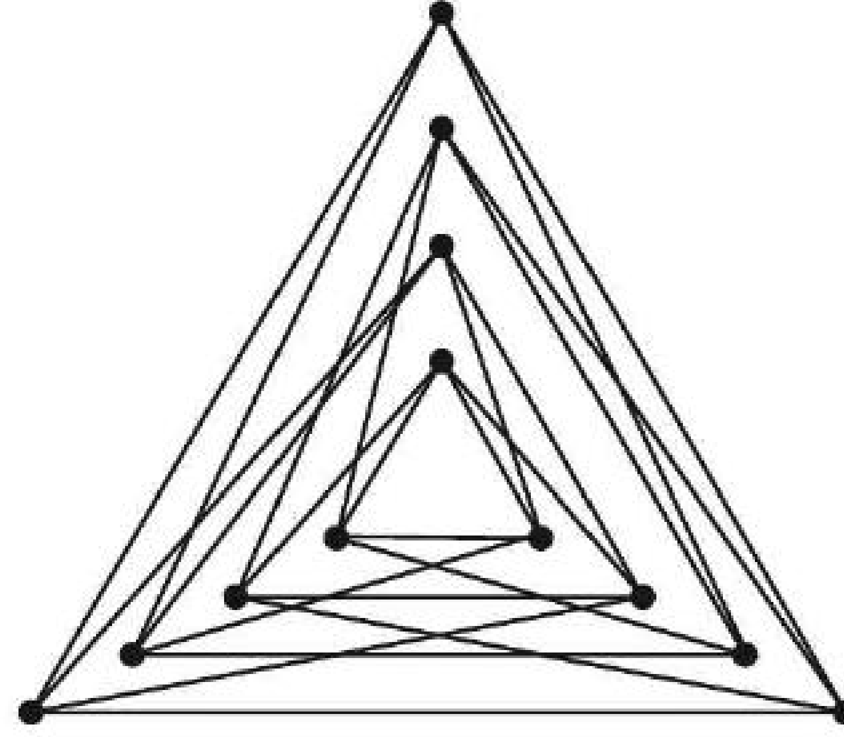
11.1.6. (-) افترض أن G بيان سوي أعظمي. أثبت أن G^* مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 ومنتظم من الدرجة 3.

12.1.6. (-) ارسم متعددات السّطوح الخمسة كبيانات سوية. ثم أثبت أنَّ ثُمانيَّ السّطوح هو البيان الثنوي

للمكعب، وأنَّ العشريني هو البيان الثنوي للثنعشري.



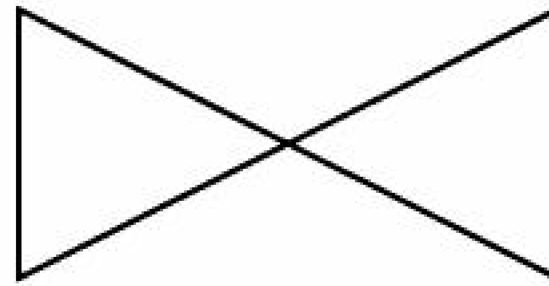
13.1.6. جدْ طمرًا سويًّا للبيان في الشكل أدناه.



14.1.6. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: لكلّ $n \in \mathbb{N}$ يوجد بيان سوي منتظم من الدرجة 4 مترابط وبسيط وله أكثر من n رأسًا.

15.1.6. ابن (جد) بيانًا سويًّا منتظمًا من الدرجة 3 قطره 3 وله 12 رأسًا. (تعليق: أثبت T.Barcume أنَّ مثل هذا البيان ليس له أكثر من 12 رأسًا).

16.1.6. افترض أن F هو البيان الذي يمكن رسمه في المستوى على نحو متواصل (باستمرار) دون المرور على أي ضلع مرة ثانية في أثناء عملية الرسم، ومنتهيًا عند نقطة البداية (يمكن اعتبار هذا بيانًا أويلريًّا). أثبت أنه يمكن رسم F دون السماح للقلم بقطع مكان رُسِمَ سابقًا. فعلى سبيل المثال، توجد للشكل أدناه طريقتان للرسم أو التتبع؛ أحدهما يقطع نفسه والآخر لا يقطَع نفسه.



17.1.6. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كان G بيانًا مستويًا بسيطًا مترابطًا من الدرجة 2 درجته الصغرى 3، فإن البيان الثنوي G^* يكون بيانًا بسيطًا.

18.1.6. ليكن G بيانًا مستويًا معطى. ارسم البيان الثنوي G^* بحيث يقطع كلُّ ضلع ثنوي الضلعَ المناظر له في G، ولا يقطع أيَّ ضلع آخر. أثبت ما يلي:

a) G^* مترابط.

b) إذا كان G مترابطًا، فإن كلّ وجه لـ G^* يحوي رأسًا واحدًا فقط من رؤوس G.

c) $(G^*)^* = G$ إذا وفقط إذا كان G مترابطًا.

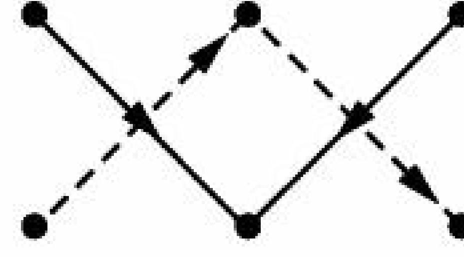
19.1.6. افترض أن G بيانٌ مستو. استخدم الاستقراء على $e(G)$ لتبرهن النظرية 14.1.6 التي نصُّها: تشكل المجموعة $D \subseteq E(G)$ حلقة في G إذا وفقط إذا كانت المجموعة المناظرة $D^* \subseteq E(G^*)$ تُشكل رابطة في G^*. (مساعدة: قلِّص ضلعًا من أضلاع D، وطبِّق الملاحظة 15.1.6.).

20.1.6. أثبت بالاستقراء على عدد الأوجه أن البيان المستوي G يكون ثنائي الفرع إذا وفقط إذا كان طولُ كلّ وجه عددًا زوجيًّا.

21.1.6. (!) أثبت أن مجموعة من الأضلاع في بيان مستو مترابط G تشكل شجرة مولدة لـ G إذا وفقط كانت الأضلاع الثنوية للأضلاع المتبقية في G تشكل شجرةً مولدة لـ G^*.

22.1.6. البيان الثنوي الضعيف (WeaK dual) للبيان G هو البيان الذي نحصل عليه من G^* بحذف الرأس الموجود في الوجه غير المحدود من أوجه G. أثبت أن البيان الثنوي الضعيف لبيان مستو خارجي عبارة عن غابة.

23.1.6. (!) البيانات المستوية الموجهة. افترض أن G بيانٌ مستو، وأن D توجيه لـ G. إن البيان الثنوي D^* عبارة عن توجيه للبيان G^* بحيث إنه عندما يتم تتبع ضلع من أضلاع D من الذيل إلى الرأس، فإن الضلع الثنوي في D^* يقطعه من اليمين إلى اليسار. فعلى سبيل المثال، إذا كانت الأضلاع المتصلة في البيان أدناه في G، تكون الأضلاع المنقطة في D^*.



أثبت أنه إذا كان D مترابطًا بقوة، فلا توجد أيّ حلقة في D^*، وأن $\delta^-(D^*) = \delta^+(D^*) = 0$. استنتج أنه إذا كان D مترابطًا بقوة، فإنه يوجد لـ G وجه تشكل أضلاعه حلقة مع اتجاه عقارب الساعة، كما يوجد وجه آخر تشكل أضلاعه حلقة مع عكس اتجاه عقارب الساعة.

24.1.6. (!). إثبات بديل لصيغة أويلر:

a) استخدم المنحنيات المضلعة (ليست صيغة أويلر) للإثبات بالاستقراء على $n(G)$ أن كلّ طمر سوي لشجرة G يحوي وجهًا واحدًا.

b) أثبت صيغة أويلر بالاستقراء على عدد الحلقات.

25.1.6. (!) أثبت أن كلّ بيانٍ مستو على n من الرؤوس يشاكل بيانه الثنوي يجب أن يحوي $2n$-2 ضلعًا. ولكلّ $n \geq 4$ جد بيانًا مستويًا بسيطًا علىَ n من الرؤوس يشاكل بيانه الثنوي.

26.1.6. لكلّ $n \geq 2$، جد أكبر عدد من الأضلاع في بيان خارجي بسيط له n من الرؤوس بإعطاء ثلاثة براهين كالآتي:

a) بالاستقراء على n.

b) باستخدام صيغة أويلر.

c) باضافة رأس في الوجه غير المحدود، واستخدام النظرية 23.1.6.

27.1.6. افترض أن G بيانٌ مستو منتظم من الدرجة 3، ومترابط بحيث يقع كلّ رأس من رؤوسه في وجه واحد طوله يساوي 4، وكذلك في وجه واحد طوله 6، وفي وجه واحد طوله 8 أيضًا:

a) حدد عدد الأوجه من كلّ طول بدلالة $n(G)$.

b) استخدم صيغة أويلر وفرع (a) لتحديد عدد أوجه G.

28.1.6. افترض أن C منحنى مغلق يحيط بمنطقة محدبة في المستوى، وافترض أيضًا أنه تم رسم m وترًا في C بحيث لا يوجد أيّ ثلاثة منها تشترك بنقطة، ولا يوجد أيّ اثنين منها يشتركان بنقطة طرفية. اجعل p تساوي عدد أزواج الأوتار التي تتقاطع. بدلالة m و p احسب عدد القطع المستقيمة، وعدد المناطق المشكلة داخل C (Alexanderson – Wetzel [1977]).

29.1.6. أثبت أن متممة البيان السوي البسيط الذي له 11 رأسًا على الأقل هي بيان غير سوي. ابن بيانًا سويًّا بسيطا على ثمانية رؤوس بحيث يكون هذا البيان ذاتي التتام (Self Complementary) أي أن متممته هي البيان نفسه.

30.1.6. (!) افترض أن G بيان سوي بسيط على n من الرؤوس خصره يساوي k. أثبت أن عدد أضلاع G يساوي $\frac{k}{k-2}(n-2)$ على الأكثر. استخدم هذا لإثبات أنَّ بيانَ بيترسون بيانٌ غيرُ سويٍّ.

31.1.6. افترض أن G بيانٌ بسيطٌ رؤوسه $v_1, \dots, v_n$، وأضلاعه $\{v_i v_j : |i - j| \leq 3\}$. أثبت أنَّ G بيانٌ سويٌّ أعظميٌّ.

32.1.6. افترض أن G بيان سويّ أعظمي. أثبت أنه إذا كانت S مجموعة ثلاثية فاصلة للبيان G^*، فإن G^*-S يحوي مركبتين (chappell).

33.1.6. (!) افترض أن G بيان مثلثاتي، وافترض أيضًا أن n_i هو عددُ رؤوس G التي درجتها تساوي i. أثبت أن $\sum (6 - i)\, n_i = 12$.

34.1.6. ابنِ عائلة غير منتهية من البيانات السَّويَّة البسيطة التي درجتها الصغرى تساوي 5 بحيث يكون لكلّ منها 12 رأسًا درجة كلّ منها تساوي 5 (مساعدة: عدِّل الثنعشري).

35.1.6. (!) أثبت أنه إذا كان G بيانًا سويًّا بسيطًا له أربعة رؤوس على الأقل، فيوجد فيه أربعة رؤوس على الأقل درجة كلّ منها أقل من 6 لكلّ قيمة من قيم n الزوجية حيث $n \geq 8$، جد بيانًا سويًّا بسيطًا على n من الرؤوس له أربعة رؤوس بالضبط، درجة كلّ منها أقل من 6، (Grünbaum – MotzKin [1963]).

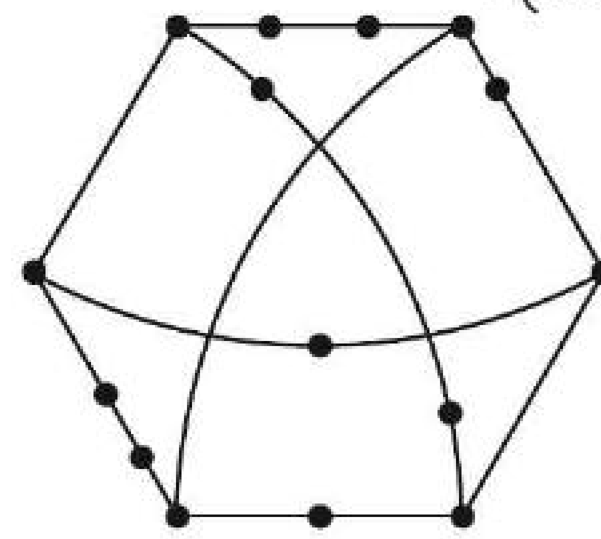
36.1.6. افترض أن S مجموعة n من النقاط في المستوى بحيث تساوي المسافة بين x و y في المستوى 1 على الأقل لكلّ $x, y \in S$. أثبت أنه يوجد على الأكثر $3n - 6$ زوجًا v,u في S بحيث تساوي المسافة في المستوى بين u و بالضبط 1v.

37.1.6. إذا أُعطيتَ أعدادًا صحيحة $k \geq 2$ و $l \geq 1$ بحيث إن kl عدد زوجي، فابنِ بيانًا سويًّا له K وجهًا بالضبط، وطول كلّ وجه من هذه الوجوه يساوي l.

2.6. توصيف البيانات المستوية

ما البيانات التي تنطمر في المستوى؟ لقد برهنّا أن K_5 و $K_{3,3}$ لا ينطمران. في الحقيقة، إن هذه البيانات هي البيانات الحاسمة التي قادت إلى توصيف البيانات السَّويَّة. وهذا التوصيف معطى من خلال نظرية كواراتوسكي (Theorem KuratowsKi's). في إحدى المرات، وجّه كاسمير كواراتوسكي سؤالا إلى فرانك هراري عن أصل الرمزين K_5 و $K_{3,3}$، فردّ هراري "بأن K في K_5 هو الحرف الأول من كاسمير، وأن K في $K_{3,3}$ هو الحرف الأول من كواراتوسكي".

تذكر أن جزء البيان هو بيان نحصل عليه من البيان الأصلي بأن نستبدل الأضلاع بمساراتٍ زوجية منفصلةً داخليًّا زوجًا زوجًا (التعريف 19.2.5).



جزئية في $K_{3,3}$

1.2.6. قضية : إذا وُجد لبيان G بيان جزئي يمثل تقسيمًا لـ K_5 أو $K_{3,3}$، فإن G بيان غير سوي.

الإثبات: كلّ بيان جزئي لبيان سوي يكون سويًّا. لذا، يكفي برهنة أن تقسيمات K_5 و $K_{3,3}$ غير سوية. لاحظ أن تقسيم الأضلاع لا يؤثر في سوية البيان. كما أن المنحنيات المستخدمة في طمر لتقسيم لـ G يمكن استخدامها للحصول على طمر للبيان G والعكس صحيح. ■

من القضية 1.2.6. نجد أنَّ خلوَّ البيان من تقسيمات K_5 و $K_{3,3}$ شرطٌ ضروريٌّ ليكون البيان سويًّا. لقد أثبت كواراتوسكي TONCAS.

2.2.6. نظرية : ([1930] KuratowsKi). يكون البيان سويًّا إذا وفقط إذا خلا من تقسيم لـ K_5 و $K_{3,3}$. ■

إن نظرية كواراتوسكي هي هدفنا في النصف الأول من هذا الجزء. وبعد ذلك، سنقوم بالتعليق على توصيفات أخرى للبيانات السَّويَّة. وعندما يكون G بيانًا سويًّا، فإننا نبحث عن طمر سوي بخواص إضافية. لقد قام واجنر [1936] Wagner وفاري [1948] Fa'ry وستاين [1951] Stein بإثبات أنه يوجد لكلّ بيان سوي بسيط طمرٌ تكون فيه الأضلاع جميعها عبارة عن قطع مستقيمة؛ وهذا معروف باسم نظرية فاري (التمرين 6).

أما فيما يخص البيانات المترابطة من الدرجة 3، فسنبرهن خاصية أقوى، وهي أنه يوجد طمرٌ يكون كلّ وجه فيه عبارة عن متعدد أضلاع محدب.

التحضير لنظرية كواراتوسكي

سوف نستخدم أسماء قصيرة للبيانات الجزئية التي تبرهن عدم السَّويَّة للبيانات.

3.2.6. تعريف: نعرِّف البيان الجزئي الكواراتوسكي للبيان G على أنه بيان جزئي من G بحيث يكون تقسيما لـ K_5 أو $K_{3,3}$. ونعرِّف البيان غير السوي الأصغري على أنه بيان غير سوي بحيث يكون أيُّ بيان جزئي فعلي منه بيانًا سويًّا.

سنبرهن أن البيان غير السوي الأصغري الذي ليس بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًّا يجب أن يكون مترابطًا من الدرجة 3. وإذا برهنا أن كلّ بيان مترابط ثلاثي خالٍ من بيان جزئي كواراتوسكي يكون سويًّا، فإننا نكون قد أكملنا إثبات نظرية كواراتوسكي.

4.2.6. تمهيدية. إذا كانت F مجموعة أضلاع وجه في طمرٍ سوي للبيان G، فإن هناك طمرًا تكون فيه F مجموعة أضلاع الوجه غير المحدود.

الإثبات: أسقط الطّمر على الكرة، حيث تبقى مجموعة أضلاع المناطق هي نفسها، وتكون المناطق جميعها محدودة. وبعد ذلك، ارجع إلى المستوى من خلال الإسقاط من داخل الوجه الذي تحيط به F ■

5.2.6. تمهيدية. كلّ بيان غير سوي أصغري يكون مترابطًا من الدرجة 2.

الإثبات: افترض أن G بيان غير سوي أصغري. إذا كان G غير مترابط، فإننا نطمر أحد مركباته داخل أحد الوجوه لطمر المركبات الأخرى. وإذا وُجد لـ G رأس قطع v، فاجعل $G_1,\ldots,G_k$ تمثّل فلق G المعتمدة على v ($G - \{v\}$ Lobes). ومن أصغرية G، نعلم أن G_i كلّه يكون سويًّا. وباستخدام التمهيدية 4.2.6، نستطيع طمر G_i بحيث يكون v على الوجه الخارجي. ونقوم بضغط كلّ طمر ليكون موجودًا داخل زاوية مقدارها $\frac{360^\circ}{k}$ عند v، وبعد ذلك نضم هذه الطُّمورات عند v لنحصل على طمر للبيان G.

6.2.6. تمهيدية. لتكن $S=\{x,y\}$ مجموعة فصل بعنصرين للبيان G.

إذا كان G غير سوي، فإن إضافة ضلع xy لفلقة $S-$ من G تعطي بيانًا غير سوي.

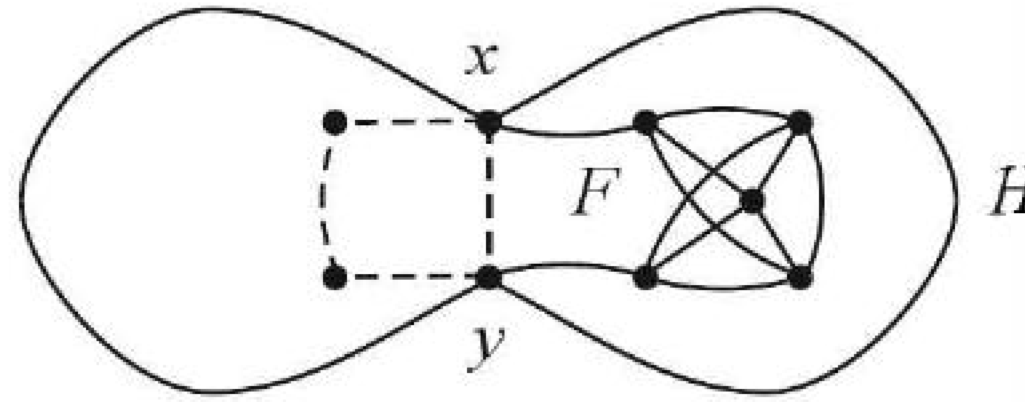
الإثبات: افترض أن $G_1,\ldots,\ G_K$ هي فلق $S-$ للبيان G. واجعل $H_i = G_i \cup xy$. إذا كان H_i سويًّا، فباستخدام التمهيدية 4.2.6 يوجد طمر لـ H_i، بحيث يكون xy على الوجه الخارجي. ولكلّ $i>1$ لاحظ أن هذا يسمح لـ H_i أن يلصق بطمر لـ $\bigcup_{j=1}^{i-1} H_j$ وذلك بطمر H_i في وجه يحوي xy على حدوده. بعد ذلك، لاحظ أن حذف الضلع xy إذا كان غير موجود في G يعطي طمرًا سويًّا للبيان G. ■

إن التمهيدية التالية تسمح لنا بحصر اهتمامنا بالبيانات المترابطة من الدرجة 3 من أجل إثبات نظرية كوراتوسكي. إن البيان المفترض غير موجود، وإذا وُجد وجب أن يكون مترابطًا من الدرجة 3.

7.2.6. تمهيدية. إذا كان G بيانًا عدد أضلاعه أقل ما يمكن من بين البيانات غير السَّويَّة جميعها التي ليس لها بيانات جزئية كوراتوسكية، فإنه مترابط من الدرجة 3.

الإثبات: إن حذف ضلع من G لا ينتج بيانًا جزئيًّا كوراتوسكيًّا في G، ويضمن الفرض أن حذف ضلع واحد ينتج بيانًا جزئيًّا سويًّا. لذا، فإن G بيان غير سوي أصغري. ومن التمهيدية 5.2.6 نجد أن G مترابط من الدرجة 2 افترض أنه يوجد في G مجموعة فصل بعنصرين $S = \{x,y\}$. بما أن G غير سوي، فإن اتحاد xy مع فلقة $- S$ يكون غير سوي (التمهيدية 6.2.6)، افترض أن H هو هذا البيان. بما أن عدد أضلاع H أقل من عدد أضلاع G، فإن أصغرية G تجبر وجود بيان جزئي كوراتوسكي F في H. تظهر F كلّها في G ما عدا الضلع xy ربما.

بما أنَّ S مجموعةُ قطع رؤوس صغرى، فإن هناك جيرانًا لكلّ من x و y في كلّ فلقة $- S$. لذا، باستطاعتنا تغيير xy في F للمسار من x إلى y من خلال فلقة $- S$ أخرى وذلك من أجل الحصول على بيان جزئي كوراتوسكي من G، وهذا يناقض فرض عدم وجود بيانات جزئية كوراتوسكية من G. لذا، لا توجد لـ G مجموعة فصل بعنصرين. ■



الطُّمورات المحدَّبة

لإتمام إثبات نظرية كوراتوسكي؛ يكفي برهنة أن كلّ بيان مترابط من الدرجة 3 وخالٍ من بيان جزئي كوراتوسكي يكون سويًّا. سنستخدم الاستقراء. ومن أجل تسهيل إثبات خطوة الاستقراء، فإن من المفيد إثبات نتيجة أقوى.

8.2.6. تعريف: الطّمر المحدّب لبيان هو طمر سويّ فيه كلّ وجه محاط بمتعدد أضلاع محدّب.

لقد أثبت توت (Tutte [1960,1963]) أنّ لكلّ بيان سوي مترابط من الدرجة 3 طمرًا محدّبًا. إن هذا أفضل ما يمكن الوصول إليه بدلالة الترابط، وذلك لأنه إذا كانت $n \geq 4$، فإنه لا يوجد طمرٌ محدَّبٌ للبيان $K_{2,n}$ السوي المترابط من الدرجة 2.

سنتبع طريقة ثوماسين (Thomassen) لإثبات نظرية كوراتوسكي من خلال إثبات نتيجة توت الأقوى المتعلقة بالبيانات المترابطة من الدرجة 3 التي ليس لها بيانات جزئية كوراتوسكية. (هناك إثبات آخر لنتيجة توت أساسه التفكيكات المقبضية – Kelmans [2000]).

سنبرهن نظرية توت هذه باستخدام الاستقراء على $n(G)$. إن النموذج لإثبات العبارات الشرطيّة بالاستقراء (الملاحظة 25.3.1) يخبرنا عن التمهيدات التي نحتاج إليها. إن فرضياتنا هنا هي: "مترابط من الدرجة 3» «وليس له بيانات جزئية كوراتوسكية"، والنتيجة المنشودة هي «طمر محدب». للبيان G الذي يحقق الفرضيات، نحتاج إلى إيجاد بيان أصغر G' يحقق هذه الفرضيات لكي نستطيع تطبيق فرضية الاستقراء.

تسمح لنا التمهيدية الأولى (6. 2. 9) بالحصول على بيان أصغر G' مترابط من الدرجة 3، عن طريق تقليص أحد أضلاع G. في حين توضّح التمهيدية الثانية (6. 2. 10) أن G' يخلو من بيان جزئي كواراتوسكي؛ أيْ أنه يحقق القضية الثانية.

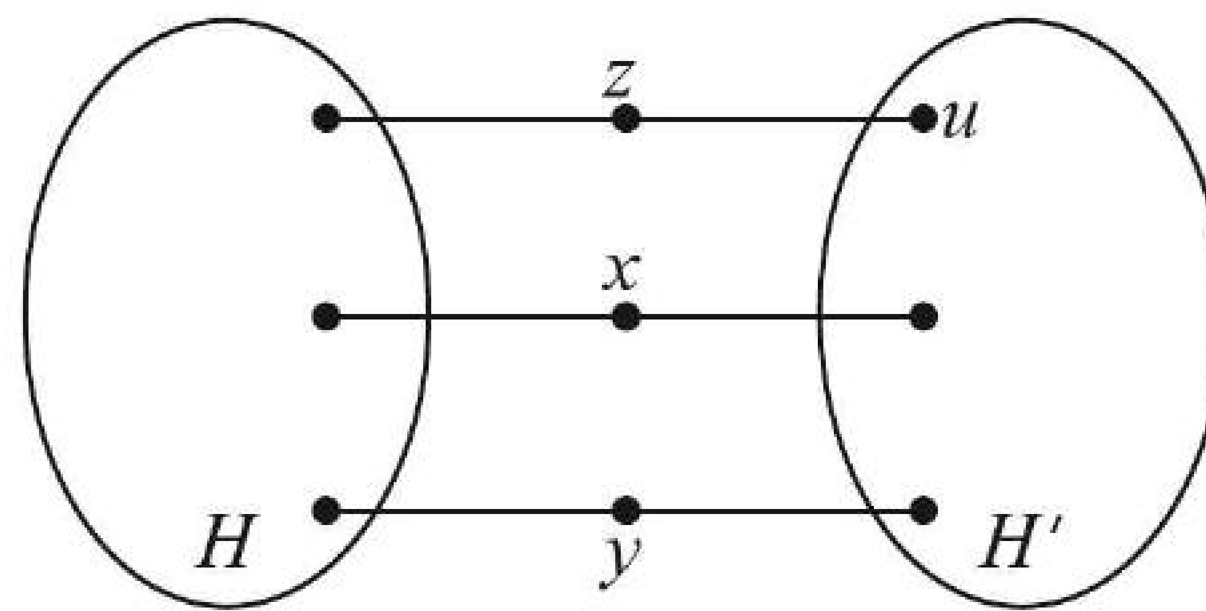
وسوف يتم إكمال الإثبات بالحصول على طمر محدّب للبيان G من خلال وجود طمر محدّب للبيان G'.

9.2.6. تمهيدية. (Thomassen [1980]). إذا كان G بيانًا مترابطًا من الدرجة 3 وله خمسة رؤوس على الأقل، فيوجد فيه ضلع e، بحيث إن $G.e$ مترابط من الدرجة 3.

الإثبات: سنستخدم التناقض ومبدأ التطرفية (القيم القصوى). خذ في الحسبان ضلعًا e طرفاه x و y. فإذا كان $G.e$ غير مترابط من الدرجة 3، فإنَّ له مجموعة فصل بعنصري S. بما أن G مترابط من الدرجة 3، فإن S يجب أن تحوي الرّأس الناتج عن تقليص e. افترض أنَّ z الرّأسُ الثاني في S، وسمِّه رفيقَ الزوج المتجاور x و y. ولاحظ أن $\{x,y,z\}$ هي مجموعة فصل لـ G بثلاثة عناصر.

افترض أنه لا يوجد في G ضلع بحيث يعطي تقليصه بيانًا مترابطًا من الدرجة 3. لذا، فإن لكلّ زوج متجاور رفيقًا. ومن بين أضلاع G، اختر $e = xy$ ورفيقها z بحيث إن للبيان غير المترابط الناتج $G - \{x,y,z\}$ مركبة H رتبتها أكبر ما يمكن. اجعل H' مركبة أخرى من مركبات G-$\{x,y,z\}$ (انظر الشكل أدناه). بما أن $\{x,y,z\}$ مجموعة فصل صغرى، فيوجد لكلّ من x,y,z جارٌ في كلّ من H و H'. اجعل u جارًا لـ z في H'، واجعل v رفيقَ الزوج u,z. ومن تعريف "الرفيق"، نجد أن G-$\{z ,u,v\}$ غير مترابط، أما البيان الجزئي من G المولد من $V(H) \cup \{x,y\}$ فهو مترابط.

إن حذف v من هذا البيان الجزئي (إن وُجد فيه) لا يجعل هذا البيان الجزئي غير مترابط، لأنه عندئذ يكون G-$\{z,v\}$ غير مترابط. لذا، فإن $G_{V(H)\cup\{x,y\}}$ -v محتوى في مركبة من مركبات G-$\{z,u,v\}$ بحيث إن عدد رؤوس هذه المركبة أكبر من عدد رؤوس H. وهذا يناقض خيار x,y,z. ■



وفيما يلي نحتاج إلى برهنة أن تقليص ضلع يحافظ على غياب البيانات الجزئية الكواراتوسكية. سنعرّف مصطلحًا جديدًا وهو رؤوس التفريع (التغصين) في تقسيم H' لـ H الذي يشير إلى الرؤوس التي درجتها تساوي 3 على الأقل في H'.

10.2.6. تمهيدية. إذا كان G بيانًا خاليًا من البيانات الجزئية الكواراتوسكية، فإن $G.e$ أيضًا خالٍ من البيانات الجزئية الكواراتوسكية.

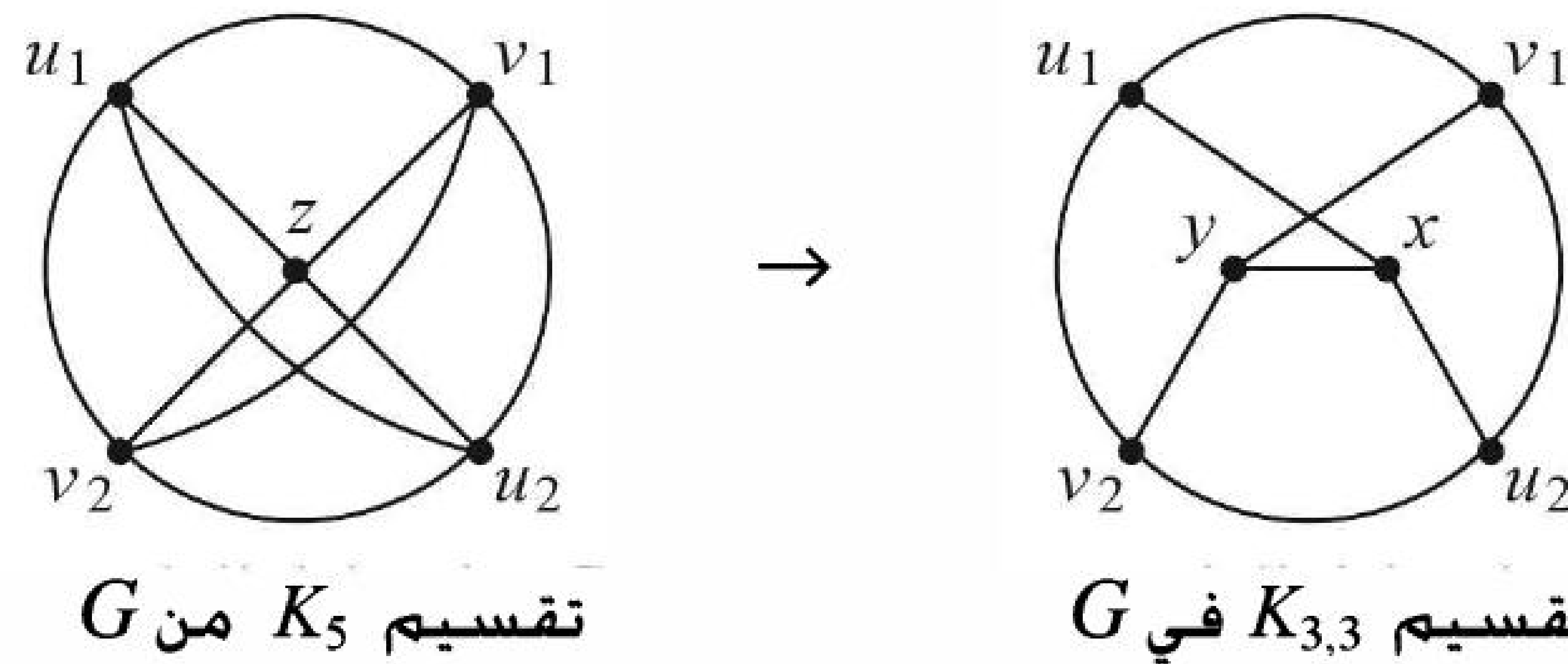
الإثبات: سنبرهن المكافئ العكسي: إذا حوى $G.e$ بيانًا ، فإن G أيضًا يحوي بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًّا.

افترض أن z هو رأس $G.e$ الذي نحصل عليه بتقليص الضلع $e = xy$.

إذا كان z لا ينتمي إلى H، فإن H نفسه يكون بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًّا من G. وإذا كان $z \in V(H)$ لكن z ليس رأس تفريع لـ H، فإننا نحصل على بيان جزئي كواراتوسكي لـ G من H بأن يحل x أو y أو الضلع xy محل z.

وبالمثل، إذا كان z رأس تفريع في H، وكان ضلع واحد على الأكثر يقع على z في H ويقع على x في G، فإن تمديد z إلى xy يطيل هذا المسار، ويكون y هو رأس التفريع لبيان جزئي كواراتوسكي في G.

في الحالة المتبقية (الموضحة أدناه) يمثّل H تقسيمًا لـ K_5، و z رأس تفريع، والأضلاع الأربعة الواقعة على z في H مكونة من ضلعين واقعين على y في G. في هذه الحالة، افترض أن u_1 و u_2 هما رأسا التفريع في H الموجودان على الأطراف الأخرى للمسارات المغادرة لـ z من خلال أضلاع واقعة على x في G، واجعل v_1 و v_2 رأسي تفريع H الموجودين على الأطراف الأخرى للمسارات المغادرة لـ z من خلال أضلاع واقعة على y في G، وبحذف المسارين من u_1 إلى u_2، ومن v_1 إلى v_2 من H، نحصل على تقسيم لـ $K_{3,3}$ في G، حيث y, u_1, u_2 تمثّل رؤوس تفريع لإحدى مجموعتي تجزئة رؤوسه، أما x, v_1, v_2 فتمثّل رؤوس تفريع المجموعة الأخرى. ■



تقسيم K_5 من G　　　　تقسيم $K_{3,3}$ في G

الآن، سنبرهن نظرية توت.

11.2.6. نظرية: (Tutte [1960 , 1963]) إذا كان G بيانًا مترابطًا من الدرجة 3، ولا يحوي تقسيمًا لـ K_5 أو $K_{3,3}$، فإن له طمرًا محدبًا في المستوى، بحيث لا يوجد له ثلاثة رؤوس على خط مستقيم.

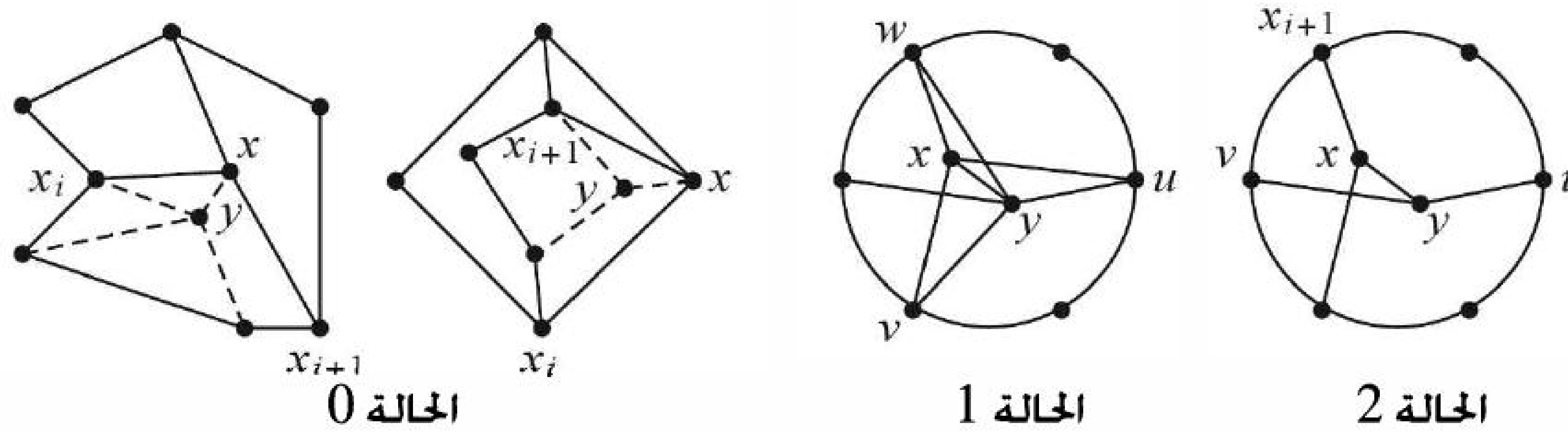
الإثبات: (Thamassen [1980, 1981]) نستخدم الاستقراء على $n(G)$. إذا كان $n(G) \le 4$، فإن البيان الوحيد المترابط من الدرجة 3 بحيث إن عدد رؤوسه يساوي 4 على الأكثر هو K_4، والذي يوجد له مثل هذا الطّمر.

لذا، افترض أن $n(G) \ge 5$. خذ e ضلعًا في G بحيث إن $G.e$ مترابط من الدرجة 3، كما هو مؤكد في التمهيدية 9.2.6. وليكن z هو الرأس الذي نحصل عليه بتقليص e. من التمهيدية 10.2.6 نعلم أن $G.e$ لا يحوي بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًا. ونحصل من فرضية الاستقراء على طمر محدّب لـ $H = G.e$ بحيث لا يوجد أيُّ ثلاثة رؤوس على خط واحد.

في هذا الطّمر، يتحقق أن للبيان الجزئي الذي نحصل عليه بحذف الأضلاع الواقعة على z وجهًا يحوي z (ربما غير محدود). وبما أن $H - z$ مترابط من الدرجة 2، فإن حدود هذا الوجه عبارة عن حلقة C. إن جيران z جميعها تقع على C، وهذه الجيران ربما تكون في G جيرانًا لـ x، أو y، أو لكليهما، حيث y, x هما الطرفان الأصليان للضلع e.

إن الطّمر المحدّب لـ H يشمل قطعًا مستقيمة من z إلى جيرانها جميعها. اجعل $x_1, \ldots, x_n$ جيرانَ x في ترتيب حلقي على C. إذا وقعت جيران y في جزء C من x_i إلى X_{i+1}، فإننا نحصل على طمر محدّب

لـ G بوضع x عند z في H، ووضع y عند نقطة قريبة من z داخل الزاوية المشكلة من xx_i و xx_{i+1} كما يظهر في الشكل الموجود في الحالة 0 أدناه. وإنْ لم يحدث هذا، فإما: أن يشترك y مع x في ثلاثة جيران هي: u,v,w. أو 2 يوجد لـ y جاران هما: u,v يتناوبان على C مع جاري x هما: x_i و x_{i+1}. في الحالة الأولى، يشكّل C مع xy ومع الأضلاع من $\{x,y\}$ إلى $\{u,v,x\}$ تقسيمات لـ K_5. أما في الحالة الثانية، فإن C يشكّل مع المسارات $uy\,v$ و $x_i \times x_{i+1}$ و xy تقسيمًا لـ $K_{3,3}$. وبما أننا نتعامل فقط مع بيانات تخلو من بيانات جزئية كواراتوسكية، فإن الحالة 0 هي التي يجب أن تحدث.



إن التمهيدية 7.2.6 والنظرية 11.2.6 معًا تعطيان نظرية كواراتوسكي (النظرية 2.2.6). ويمكن الحصول على نظرية فاري على حدة: إذا وُجِدَ لبيانٍ طمرٌ سويٌّ، فيوجد لهذا البيان طمرٌ سويّ كخطوط مستقيمة (التمرين 6).

وفيما يخص تطبيقات الحاسوب، فإننا نرغب أكثر في الحصول على طمر سوي على شكل خطوط مستقيمة، رؤوسه تقع عند النقاط الصحيحة (النقاط التي إحداثياتها أعداد صحيحة).

لشبكة صغيرة نسبيًّا، أثبت شنايدر (Schnyder [1992]) أنه يوجد لكلّ بيان سوي على n من الرؤوس طمرٌ كخطوط مستقيمة، رؤوسه تقع عند النقاط الصحيحة للشبكة $[n-1] \times [n-1]$.

لقد تم إثبات العديد من توصيفات البيانات السَّويَّة، حيث تناولنا بعضها في التمارين. وسنقوم بوصف توصيفين إضافيين.

12.2.6. * تعريف: نقول: إن البيان H هو تصغير أو فرع (Minor) للبيان G إذا أمكن الحصول على H من G بحذف (بالحذف والتقليص) بعض أضلاع G أو تقليصها.

فعلى سبيل المثال، يُعَدُّ K_5 تصغيرًا لبيان بيترسون، علمًا بأن هذا البيان لا يحوي تقسيمًا لـ K_5.

13.2.6. * ملاحظة. يمكن إجراء حذف الأضلاع أو تقليصها بأي ترتيب نريده إذا حافظنا على معرفة ما يحدث للأضلاع في أثناء هذه العمليات. لذا، فإن تصغيرات G تُعدُّ «تقليصات لبيانات جزئية من G».

إذا وُجِدَ في G تقسيم H' لـ H، فإن H أيضًا هي تصغير لـ G تم الحصول عليه بحذف أضلاع G غير الموجودة في H'، ومن ثم تقليص الأضلاع الواقعة على رؤوس درجتها تساوي 2. إذا كانت الدرجة الكبرى لـ G تساوي 3، فإن H تصغير لـ G إذا وفقط إذا وُجِدَ في G تقسيم لـ H (التمرين 11).

لقد أثبت واجنر (wagner [1937]) أن بيان G يكون سويًّا إذا وفقط إذا لم يكن K_5 أو $K_{3,3}$ تصغيرًا لـ G. إن تمرين 12 يحصل على هذه النتيجة من نظرية كواراتوسكي. ■

14.2.6. * ملاحظة. تُنْسَبُ بعض التوصيفات بدرجة كبيرة إلى طمورات حقيقية. فعلى سبيل المثال. عندما يُرسَم بيان ثلاثي الترابط في المستوى، فإن حذف مجموعة رؤوس حلقة محيطة بوجه معين يترك بيانًا جزئيًّا مترابطًا.

ونقول: إن حلقة في بيان هي حلقة غير فاصلة إذا لم تكن مجموعة رؤوسها مجموعة فصل. لقد أثبت كيلمانز (Kelmans [1980,1981b]) أن أيَّ تقسيم لبيان ثلاثي الترابط يكون سويًّا إذا وفقط إذا وقع كلّ ضلع e في حلقتين غير فاصلتين. وقد قام كيلمانز العام [1993] بعمل مسح للمادة المتصلة بذلك. ■

اختبارات مستوية البيانات (اختياري)

لقد أعطى ديراك وشوستر (Schuster) العام 1954 أول إثبات قصير لنظرية كواراتوسكي. وقد ظهر هذا الإثبات في (Harary [1969, 109-112]). وفي (Bondy –Marty [1976, p 153 – 156]) وفي (Chartrand – LesniaK [1986 , p 96 – 48])، ويَسْتخدم هذا الإثبات بعض البيانات الجزئية الخاصة للبيان.

15.2.6. تعريف: في الحالة التي يكون فيها H بيانًا جزئيًّا من G، فإن شظية H- من G تعرّف على أنها:

a) ضلع ليس في H، أما طرفاه ففي H. أو:

b) مركبة من مركبات $G\text{-}V(H)$ بالإضافة إلى مجموعة الأضلاع (ورؤوس الروابط) التي تربطها بـ H.

يشكل البيان الجزئي H بالإضافة للشظية H- تفكيكًا لـ G.

إن شظايا H – هي عبارة عن "القطع" التي يجب إضافتها إلى طمر لـ H للحصول على طمر لـ G. قديمًا، استخدم المصطلح جسر H–، إلا أننا نستخدم شظية H- لتجنب الإشكالات التي تنتج عن الاستخدامات الأخرى "للجسر".

تختلف شظية H – عن الفلقة $V(H)$ –؛ لأن الأولى تحذف أضلاع H (لا تحوي أي ضلع من أضلاع H)، وكذلك يمكن لشظية H– أن تتكون من ضلع واحد غير موجود في H، إلا أنه يربط بين رأسين من رؤوس H، وذلك لأنه يجب ألا يكون H بيانًا جزئيًّا مستحدثًا.

أما فيما يخص الحالة التي يكون فيها البيان مترابطًا من الدرجة 3 من حالات نظرية كواراتوسكي، فقد قام ديراك وشوستر (Schuster) باعتبار بيان G مترابطا من الدرجة 3 أصغريًّا يخلو من بيان جزئي كواراتوسكي. إن حذف ضلع e يعطينا بيانًا سويًّا مترابطًا من الدرجة 2. وبعد اختيار حلقة C تمر بطرفي e، نستطيع إضافة e إلى الطّمر، إلا إذا وُجِدَت شظية C– مطمورة داخل C، «وتتعارض» مع e. كما في إثبات النظرية 11.2.6، فإن هذا ينتج بيانًا جزَئيًّا كواراتوسكيًّا من G.

لقد استخدم توت فكرة شظايا C– المتعارضة للحصول على توصيف آخر للبيانات السَّويَّة.

16.2.6. تعريف: افترض أن C حلقة في بيان G نقول: إن شظيتي C– ، A و B تتعارضان إذا وُجد لهما ثلاثة رؤوس مشتركة للربط مع C، أو إذا وُجد لهما أربعة رؤوس هي: v_1، و v_2 و v_3، و v_4 في ترتيب حلقي على C، بحيث إن v_1 و v_3 هما رأسا الربط مع A. وأن v_2 و v_4 هما رأسا الربط مع B. إن بيان تعارض C هو بيان رؤوسه شظايا C – من G، بحيث تكون شظايا C- المتعارضة متجاورة.

لقد أثبت توت عام 1958م أن البيان G يكون سويًّا إذا وفقط كان بيان تعارض كلّ حلقة في G عبارة عن بيان ثنائي الفرع (التمرين 13). لقد استخدمنا هذه الفكرة في إثباتنا الأول الذي برهنا فيه أن K_5 و $K_{3,3}$ بيانان غير سويين (القضية 2.1.6). إن بيان التعارض لحلقة مولدة للبيان $K_{3,3}$ هو C_3، إلا أن بيان التعارض لحلقة مولدة للبيان K_5 هو C_5.

يوجد للبيانات المترابطة من الدرجة 3 غير السَّويَّة بياناتٌ جزئيةٌ كواراتوسكية من نوع خاص. لقد قدم كيلمانز (Kelmans [1981b]) تخمينًا لتعميم نظرية كواراتوسكي، وقد أثبت هذا التخمين من قبل كيلمانز

(Kelmans [1983, 1984b]) وثوماسين (Thomassen [1984]) كلّ على حدة. والتخمين هو: كل بيان غير سوي مترابط من الدرجة 3 له ستة رؤوس على الأقل يحوي حلقة لها ثلاثة أوتار متقاطعة زوجًا زوجًا.

إن إيجاد توصيفات للبيانات السَّويَّة قادنا إلى البحث عن خوارزمية سريعة لاختبار سوية البيانات. لقد قام كلّ من هوبكرفت وترجان (Hopcroft-Tarjan [1974]) وبوث ولوكر (Booth –LuecKer [1976]) بتقديم عروض خوارزميات خطية بالنسبة إلى الزمن ومعقدة، إلا أن بوير ومايرفولد (Boyer-Myrvold [1999]) قدما خوارزمية أسهل. وقام جولد (Gould [1988,p177 – 185]) بمناقشة أفكار خوارزمية هوبكرفت وترجان. إن الخوارزمية التي كانت موجودة قبل ذلك أبسط، إلا أنها ليست خطية زمنيًّا، لأن زمن تشغيلها يتغير بحسب كثيرة حدود، وتعود هذه الخوارزمية إلى كلّ من ديموكرون (Demoucron) وما لجرانج (malgrange) وبيرتوست (pertuiset) [1964]، حيث إنها تستخدم شظايا -H.

تتضمن هذه الفكرة ما يلي: إذا أمكن تمديد طمر سوي لـ H ليصبح طمرًا سويًّا لـ G، فإن هذا التمديد يحقق أن كلّ شظية H من G تظهر داخل وجه واحد من H . وإذا كان G سويًّا، فإننا نبني بتزايد بيانات جزئية من G بحيث تكون سوية وأكبر، ويمكن تمديدها لتصبح طمرًا للبيان G ونحاول عادة توسيع (تكبير) H من خلال اتخاذ قرارات صغيرة لا تقود إلى مشاكل.

ولتوسيع H، نختار وجهًا F يقبل شظية $-H$، ولنقلْ إن هذه الشظية هي B. إن حدود F يجب أن تحوي رؤوس الربط جميعها مع B، وعلى الرغم من أننا لا نعرف أفضل طريق لطمر B في F. إلا أنه يوجد طريق واحد فقط لإضافة مسار في B عبر F، بحيث يصل هذا المسار بين رؤوس رابط مع نفسه، لذا نضيف مثل هذا المسار. إن تفاصيل اختيار F و B تظهر في الخوارزمية أدناه، حيث تعمل هذه الخوارزمية كالخوارزميات التي ذُكرت، حيث إنها تؤدي إلى طمر إذا كان G بيانًا سويًّا.

17.2.6. خوارزمية. (اختبار سويّة البيانات)

المدخلات: بيان مترابط من الدرجة 2 (بما أن G سوي إذا وفقط إذا كان كلّ قالب من قوالبه سويًّا. وبما أن الخوارزمية 23.1.4 تحسب عدد القوالب، فيمكن الافتراض بأنَّ G قالب له ثلاثة رؤوس على الأقل).

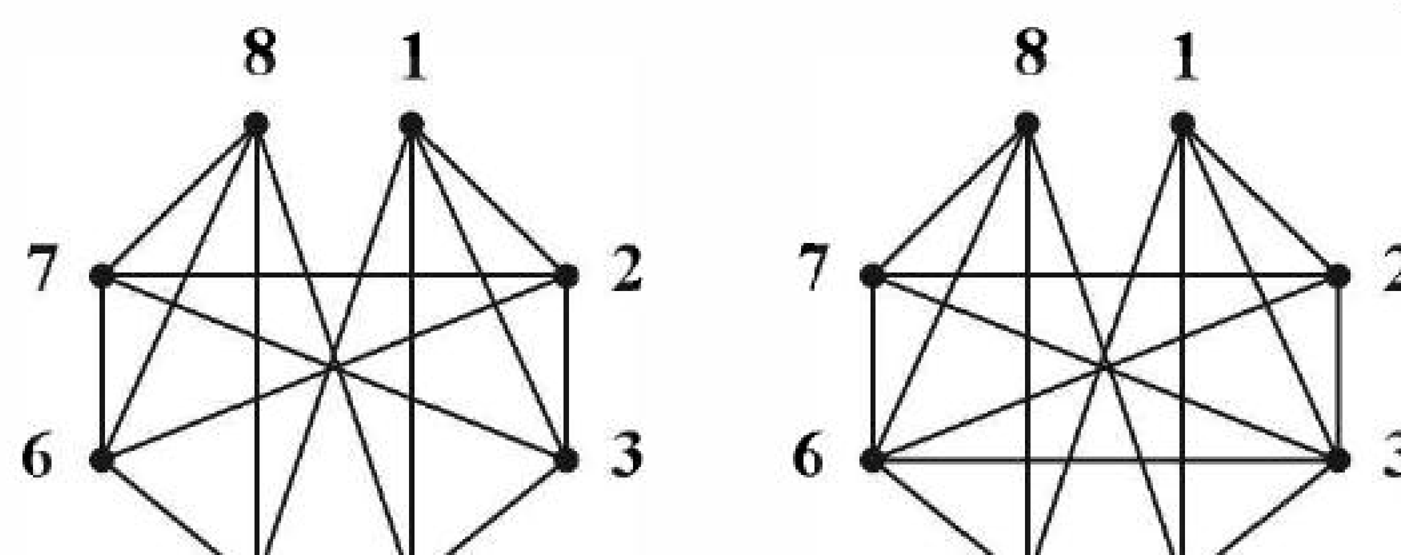
الفكرة: أضف مسارات بالتتابع من الشظايا الحالية. وحافظ على مجموعات الرؤوس التي تشكل حدودًا للبيان الجزئي الذي طُمرَ سابقًا.

البداية: بعد إيجاد G_i وتحديدها، جدْ G_{i+1} كالتالي:

1. للقالب G، عيّن شظايا $- G_i$ جميعها وحددها.
2. لكلّ شظية B - G_i، حدّد أوجه G_i جميعها التي تحوي رؤوس الربط جميعها مع B، وسمّ هذه المجموعة $F(B)$.
3. إذا كانت $F(B)$ مجموعة خالية لبعض B، فإننا نحصل على الحالة التي يكون فيها البيان غير سوي. إذا كان $|F(B)| = 1$ لبعض B، فاختر B. إذا كانت $|F(B)| > 1$ لكلّ B فاختر أي B.
4. اختر مسارًا P بين رأسين لرابط للشظية B - G_i التي تم اختيارها. اطمر P عبر وجه في $F(B)$. سمِّ البيان الناتج G_{i+1}، وحدِّث قائمة حدود الأوجه.
5. إذا كان $G_{i+1} = G$، فاحصل على بيان سوي، وبخلاف ذلك، وَسِّع I، وعُدْ إلى الخطوة الأولى.

18.2.6. مثال: خذ في الحسبان البيانين المرسومين أدناه.

(من (Bondy – Murty [1976, p 165 – 166]). إن الخوارزمية 17.2.6 تقود إلى طمر سوي للبيان الموجود عن اليسار، ولكنها تنتهي في الخطوة 3. للبيان الموجود عن اليمين، يوجد للحلقة 12348765 ثلاثة أوتار متقاطعة زوجًا زوجًا وهي: 14، 27، 36. ■



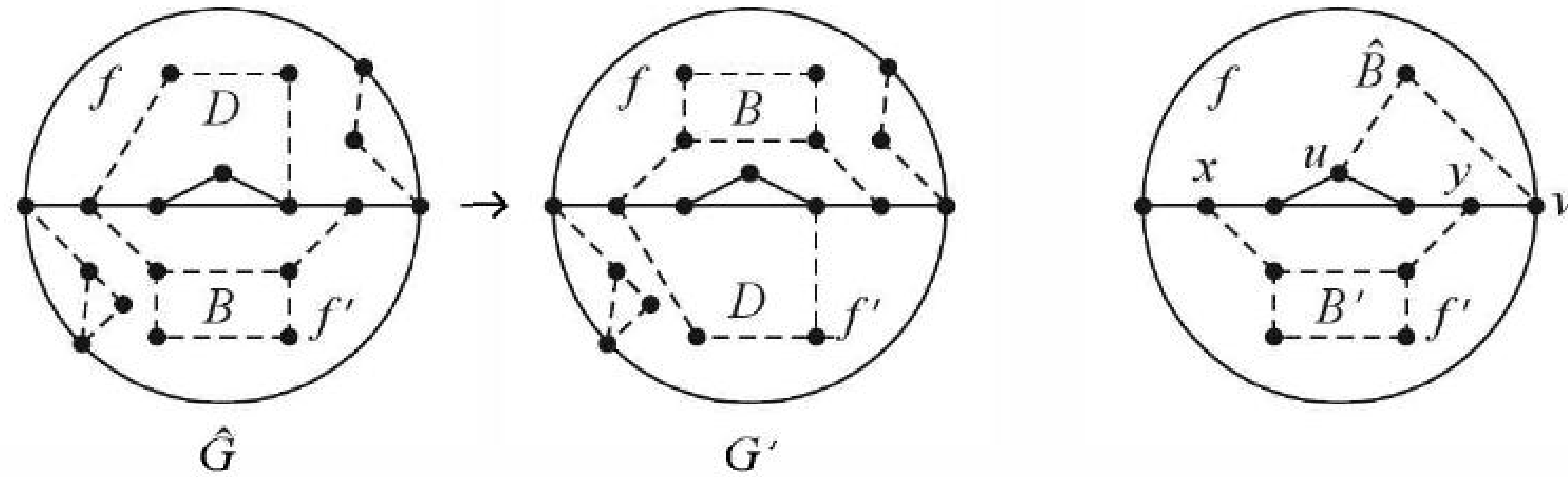
19.2.6. نظرية : (Demourcron – Malgrange – Pertuiset [1964]) إن الخوارزمية 17.2.6 تنتج طمرًا سويًّا إذا كان البيان G سويًّا.

الإثبات: يمكننا افتراض أنَّ G مترابط من الدرجة 2 لاحظ أن أي حلقة تظهر على شكل منحنى مغلق بسيط في كلّ طمر سوي. وبما أنه يمكننا عكس المستوى، فإن كلّ طمر لحلقة في بيان سوي G قابل للتمديد ليصبح طمرًا للبيان G لذا، يمكن تمديد G_0 لطمر سوي للبيان G إذا كان G سويًّا. لاحظ أنه يكفي برهنة ما إذا كان بيان مستو G_i قابلاً للتمديد لطمر سوي للبيان G، وكانت الخوارزمية تنتج بيانًا مستويًا G_{i+1} من G_i، فإن G_{i+1} أيضًا يكون قابلاً للتمديد لطمر سوي للبيان G لاحظ أنه يوجد لكلّ شظية $G_i -$ رأسًا ربط؛ لأن G مترابط من الدرجة 2.

إذا وُجدتْ شظية B - G_i بحيث إن $|F(B)| = 1$، فإن وجهًا واحدًا فقط يوجد لـ G_i يمكن أن يحوي P في تمديد لـ G_i إلى طمر سوي للبيان G. تضع الخوارزمية P في هذا الوجه للحصول على G_{i+1}. لذا، فإن G_{i+1} قابل للتمديد في هذه الحالة.

تظهر المشاكل فقط في الحالة التي يكون فيها $|F(B)| > 1$ لكل B حيث نقوم باختيار الوجه الخطأ لنطمر فيه مسارًا P من الشظية التي تم اختيارها. افترض أننا: (1) طمرنا P في وجه($f \in F(B)$)، (2) مددنا G_i لطمر سوي $\hat{G}$ لـ G فيه P داخل الوجه $f' \in F(B)$. نعدّل $\hat{G}$ لإثبات أنه يمكن تمديد G_i لطمر آخر G' لـ G تكون فيه P داخل f'. وهذا يوضح أن خيارنا لا يسبب مشاكل، وأن G_{i+1} الذي بُنِيَ قابل للتمديد.

لتكن C مجموعة الرؤوس الموجودة على حدود f و f'، وهذا يشكل الرؤوس الموجودة في ربط لـ B. نرسم G' من خلال التبديل بين f و f' لشظايا $- G_i$ جميعها التي تضعها $\hat{G}$ في f أو f'، والتي تقع رؤوس ربطها في C إن هذا موضح في الشكل الموجود عن اليسار أدناه، حيث إن أضلاع G غير الموجودة في G_i هي القطع المنقطة.



يبدّل هذا التغيير B، ويعطينا الطّمر المنشود G' إلا إذا وجدت شظية $\hat{B}$ -G_i غير مستبدلة تتعارض مع شظية مستبدلة. وبما أن التبديل متماثل في f و f' ويغير داخلهما فقط، فإننا نستطيع افتراض أن $\hat{B}$ يظهر في f في $\hat{G}$. تعني كلمة "تعارض" أنه يوجد لـ $\hat{G}$ B' في f' والتي نحاول تحريكها إلى f، بحيث يكون $\hat{B}$ و B' متجاورين في بيان التعارض لـ f.

اجعل $\hat{A}$ و A' ترمزان إلى مجموعات الرؤوس التي يتم عندها ربط $\hat{B}$ و B' إلى حدود f. وبما أن $\hat{B}$ و B' تشكلان تعارضًا، فإما أن يوجد لـ $\hat{A}$ و A' ثلاثة رؤوس مشتركة، أو أربعة رؤوس متناوبة على حدود f. وبما أن $A' \subseteq C$ و $\hat{A} \not\subseteq C$، فإن الاحتمالية الأولى تعطي الاحتمالية الثانية. اجعل x, u, y و v تمثّل هذا التناوب الذي فيه $x,y \in A' \subseteq$ ، و $u,v \in A'$ كما هو واضح عن اليمين أعلاه: إذا لم يوجد مثل هذا التناوب، فإن $\hat{B}$ و B' لا تتعارضان أو أنه يمكن تبديل $\hat{B}$ إلى f'.

وبما أن $u \notin C$، و y بين u و v على f، فإنه لا يوجد وجه آخر يحوي كلًّا من u و v. لذا، فإن $\hat{B}$ تفشل في أن تكون رؤوس ربطها محتواة في وجهين على الأقل، وهذا يناقض فرض أن $|F(\hat{B})| > 1$. ■

نستطيع أن نبدأ باختيار وجود $3n - 6$ ضلعًا على الأكثر للبيان G، محافظين على قوائم لحدود الوجوه.

ونقوم بإجراء عمليات أخرى من خلال بحث خطي (يعتمد على معادلة خطية). لذا، فإن هذه الخوارزمية تشتغل بزمن تربيعي. إن الإثبات الذي قدمه كلوتز ([Klotz [1989) لنظرية كوراتوسكي يعطي أيضًا خوارزمية تربيعية لاختبار سوية بيان معين، وتجد بيانًا جزئيًّا كوراتوسكيًّا عندما يكون G بيانًا غير سوي.

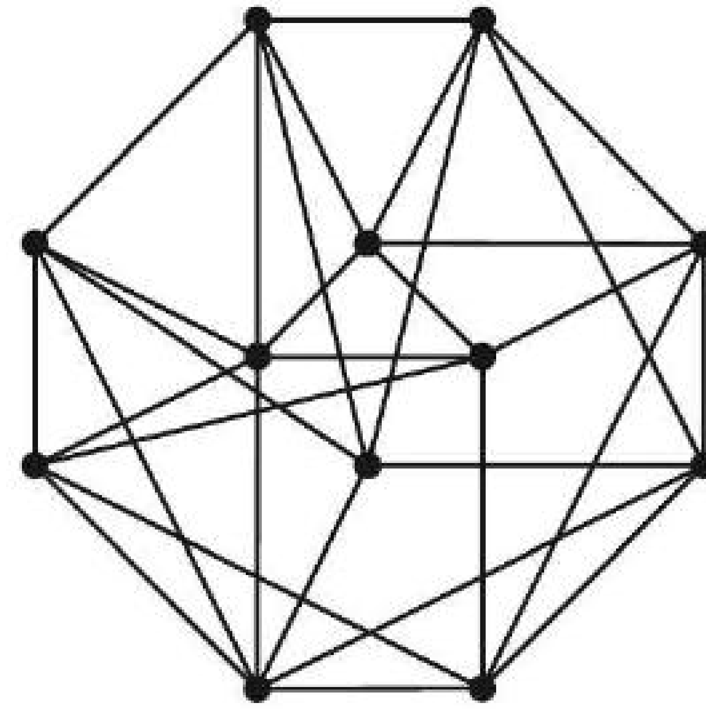
تمـــارين

1.2.6. (−) أثبت أنَّ متممةَ البيان Q_3 بيانٌ غير سوي.

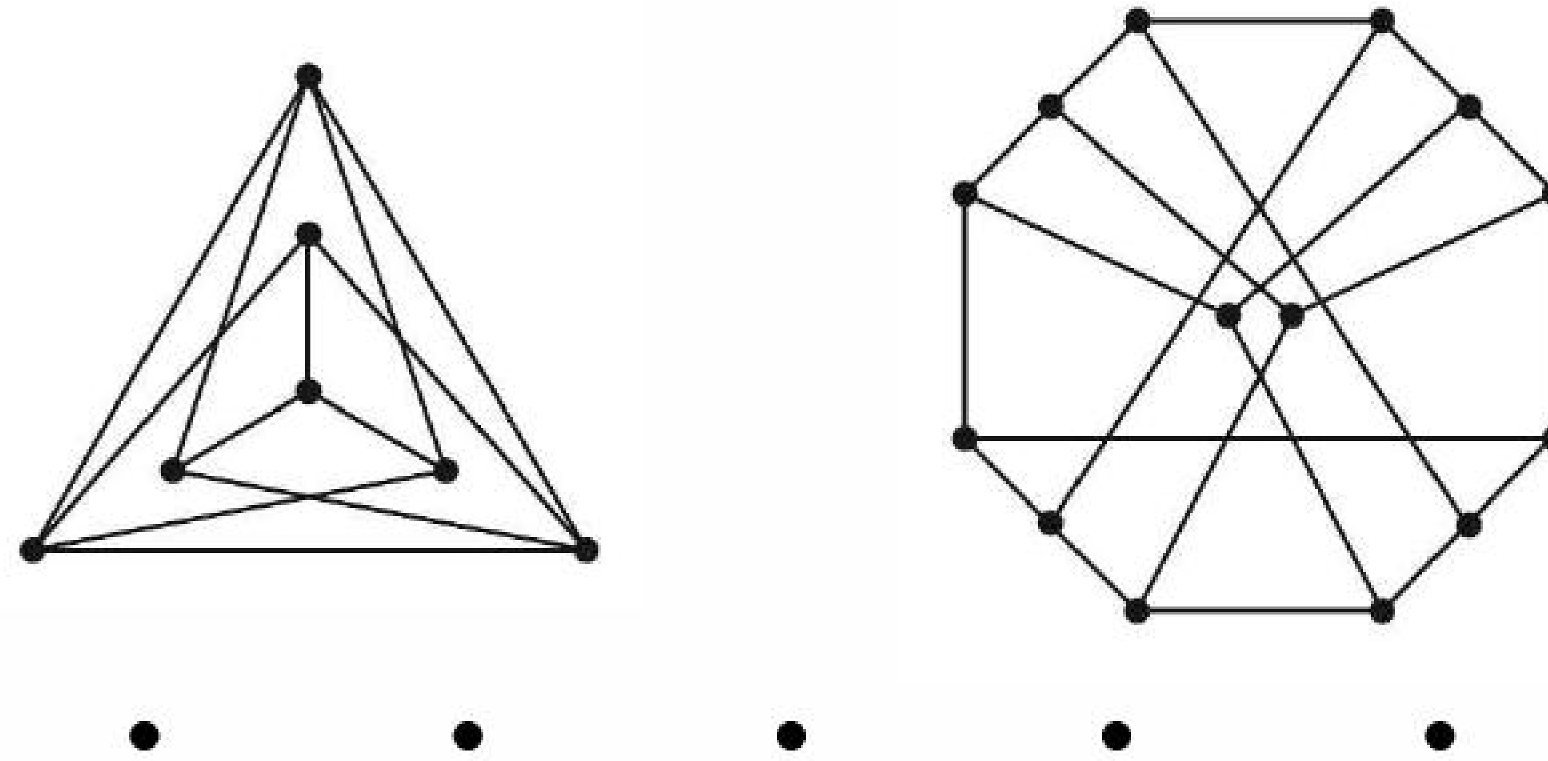
2.2.6. (!) أعطِ ثلاثة براهين لإثبات أن بيان بيترسون غير سوي باستخدام:

a) نظرية كوراتوسكي.
b) صيغة أويلر وحقيقة أن خصر بيان بيترسون يساوي 5
c) خوارزمية ديموكرون ومالجرانج وبيرتوست الخاصة باختبار سوية البيانات.

3.2.6. (−) جد طمرًا محدبًا في المستوى للبيان أدناه.



4.2.6. (−) أثبت عدم السَّويَّة، أو أعطِ طمرًا محدبًا لكلّ بيان من البيانات الموضحة أدناه.



5.2.6. حدد أقل عدد من الأضلاع يمكن حذفه من بيان بيترسون للحصول على بيان جزئي سوي.

6.2.6. (!) نظرية فاري. افترض أن R منطقة محاطة بمتعدد أضلاع بسيط له على الأكثر خمس حواف (يعني مضلع بسيط أن الأضلاع عبارة عن قطع مستقيمة لا تتقاطع). أثبت أنه يوجد في R نقطة ترى R كلّها، بمعنى أن القطعة المستقيمة من x إلى أي نقطة في R لا تقطع حدود R استخدم هذا لتبرهن استقرائيًّا أنه يوجد لكلّ بيان سوي طمرٌ على شكل خطوط مستقيمة.

7.2.6. (!) استخدم نظرية كوراتوسكي لتبرهن أن البيان G يكون سويًّا خارجيًّا إذا وفقط إذا خلا G من بيان جزئي يشكل تقسيمًا لـ K_4 أو لـ $K_{2,3}$ (مساعدة: لتطبيق نظرية كوراتوسكي؛ جد تعديلاً مناسبًا لـ G إن هذا أسهل كثيرًا من تقليد إثبات نظرية كوراتوسكي).

8.2.6. (!) إذا كان هناك بيان مترابط من الدرجة 3، وله ستة رؤوس على الأقل، ويحوي تقسيمًا لـ K_5،

فبرهن أن G يحوي تقسيمًا لـ $K_{3,3}$، ((Wagner [1937]).

9.2.6. (+) لكلّ $n \geq 5$، أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان سوي بسيط على n من الرؤوس ليس له حلقتان منفصلتان هو $2n - 1$ (تعليق: قارن مع التمرين 28.2.5)، ([1999] MarKus).

10.2.6. (!) افترض أن $f(n)$ هي أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس لا يحوي تقسيمًا لـ $K_{3,3}$:

a) إذا كانت $n - 2$ تقبل القسمة على 3، فجد بيانًا لتوضح أن $f(n) \geq 3n\text{-}5$.

b) أثبت أن $f(n) = 3n - 5$ عندما يكون $n - 2$ قابلاً للقسمة على 3 وبخلاف ذلك، فإن $f(n) = 3n\text{-}6$.

(مساعدة: استخدم الاستقراء على n، واستخدم التمرين 8.2.6 في الحالة التي يكون فيها البيان مترابطًا من الدرجة 3 ([1984] Thomassen)

(تعليق: لقد أثبت مادر ([1998] Mader) النتيجة الأصعب، وهي أن $3n\text{-}6$ هي أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس لا يحوي تقسيمًا لـ K_5).

11.2.6. (!) افترض أن H بيان، درجته الكبرى تساوي 3 على الأكثر. أثبت أن بيانًا G يحوي تقسيمًا لـ H إذا وفقط إذا كان G يحوي بيانًا جزئيًّا قابلاً للتقليص إلى H

12.2.6. (!) لقد أثبت واجنر العام 1937م أن الشرط الثاني ضروري وكاف ليكون البيان G سويًّا، وهو: لا يمكن الحصول على K_5 أو $K_{3,3}$ من خلال إجراء عمليات الحذف والتقليص للأضلاع:

a) أثبت أن حذف الأضلاع وتقليصها يحافظ على السَّويَّة، واستنتج من ذلك أن شرط واجنر ضروري.

b) استخدم نظرية كواراتوسكي لإثبات أن شرط واجنر كاف.

13.2.6. أثبت أن البيان G يكون سويًّا إذا وفقط إذا كان بيانُ تعارض كلّ حلقة C في G ثنائي الفرع ([1958] Tutte).

14.2.6. افترض أن x و y رأسان لبيان سوي G أثبت أنه يوجد لـ G طمر سوي فيه x و y على الوجه نفسه إلا إذا وجدت حلقة C في $G - x - y$، بحيث إن x و y ينتميان إلى شظايا - C متعارضة في G (مساعدة: استخدم نظرية كواراتوسكي. تعليق: لقد أثبت توت هذا النتيجة دون استخدام نظرية كواراتوسكي كما استخدمها لإثبات هذه النظرية).

15.2.6. افترض أن G بيان مستو بسيط مترابط من الدرجة 3 يحوي حلقة C أثبت أن C تكون حدودًا لوجه في G إذا وفقط إذا وُجدت في G شظية - C واحدة بالضبط. (تعليق: لقد أثبت توت عام 1963م هذه النتيجة للحصول على نتيجة ويتني ([1933b] Whitney's) وهي أنه يوجد - مبدئيًّا - طمر سوي واحد فقط للبيانات السَّويَّة المترابطة من الدرجة 3. انظر أيضًا ([1981a] Kelmans).

16.2.6. (+) افترض أن G بيان سوي خارجي له n من الرؤوس، وافترض أيضا أن P مجموعة فيها n نقطة في المستوى، بحيث إنه لا توجد ثلاثة منها على الخط نفسه إن النقاط القصوى لـ P تُحدث مضلعًا محدبًا يحوي باقي النقاط في داخله:

a) افترض أن p_1 و p_2 نقاط قصوى متتابعة في P، أثبت على وجود نقطة $p \in P\text{-}\{p_1, p_2\}$ بحيث إن:1) لا توجد أي نقطة من P داخل (p_1p_2p) و 2)يوجد خط l يمر في P ويفصل p_1 عن p_2، ويقطع P فقط عند p، ويوجد بالضبط $I - 2$ نقطة من نقاط P محتواة في جانب L الذي يحوي p_2.

b) أثبت أنه يوجد لـ G طمر على شكل خطوط مستقيمة بحيث ترسل رؤوسها إلى P كلّها. (مساعدة: استخدم فرع (a) لإثبات النتيجة الأقوى وهي أنه: إذا كان كلّ من v_1 و v_2 رأسين متتابعين للوجه غير المحدود لبيان G سوي خارجي أعظمي، وكان p_1 و p_2 رأسين متتابعين للغلاف المحدب لـ P، فيمكن طمر G خطيًّا على P، بحيث إن $f(v_1) = p_1$، و $f(v_2) = p_2$ ([1989] Gritzmann – Mohar – pach – PollacK).

3.6. وسطاء المستوية

إن كلّ خاصية، وكلّ وسيط درسناه للبيانات العامة يمكن دراسته للبيانات السَّويَّة. وأن المسألة ذات الأهمية التاريخية الأكثر هي مسألة أكبر عدد لوني للبيانات السَّويَّة. لذا، سنقوم بدراسة الوسطاء الذين من خلالهم نقيس مقدار بُعد بيان معين عن خاصية السَّويَّة.

تلوين البيانات المستوية

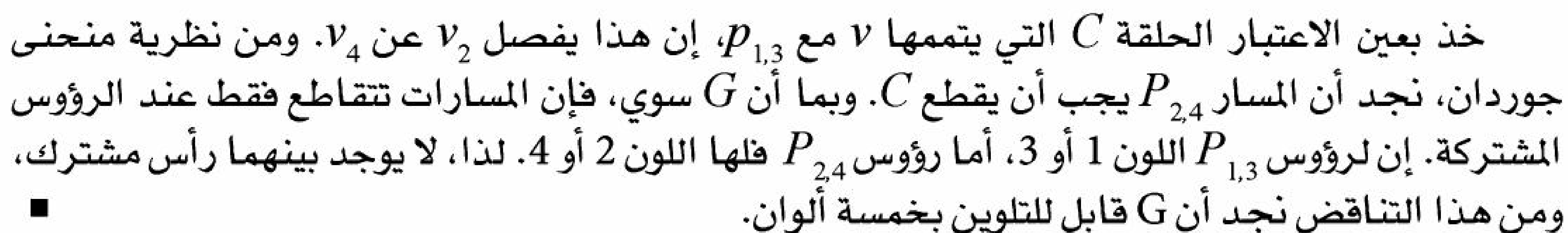
بما أن لكلّ بيان سوي بسيط على n من الرؤوس $3n - 6$ ضلعًا على الأكثر ، فإن مثل هذا البيان يحوي رأسًا درجته تساوي 5 على الأكثر، إن هذا يعطينا إثباتا استقرائيًّا لخاصية أن البيانات السَّويَّة قابلة للتلوين بستة ألوان (انظر التمرين 2). لقد حسَّن هيود (Heawood) هذا الحد.

1.3.6. نظرية : (نظرية الألوان الخمسة – Heawood [1980]). كلّ بيان سوي قابل للتلوين بخمسة ألوان.

الإثبات : بالاستقراء على $n(G)$.

إذا كان $n(G) \leq 5$، فإن كلّ بيان من هذه البيانات يكون قابلاً للتلوين بخمسة ألوان. لذا، افترض أن $n(G) > 5$. إن الحد على الأضلاع (النظرية 6. 1. 23) يعطي أنه يوجد للبيان G رأس v درجته تساوي 5 على الأكثر. ومن فرض الاستقراء، نعلم أن $G - v$ قابل للتلوين بخمسة ألوان. اجعل $f: V(G-v) \to [5]$ تلوينًا فعليًّا لـ $G - v$ بخمسة ألوان، إذا لم يكن G قابلاً للتلوين بخمسة ألوان، فإن f تحدد كلّ لون لجار من جيران v، وهذا يعني أن $d(v) = 5$. ليكن v_1 ، و v_2 ، وv_3 ، وv_4، وv_5 هم جيران v في ترتيب مع اتجاه عقارب الساعة حول v، أعد تسمية الألوان بحيث إن $f(v_i) = i$.

افترض أنَّ $G_{i,j}$ البيانُ الجزئي من $G - v$ المستحدث من الرؤوس التي عليها اللونان i أو j. وبتبديل اللونين على أي مركبة من مركبات $G_{i,j}$، نحصل على تلوين بخمسة ألوان للبيان $G - v$. إذا كانت مركبة $G_{i,j}$ التي تحوي v_i لا تحوي v_j، فبإمكاننا تبديل الألوان عليها لإزالة اللون i من $N(v)$. الآن، إن إعطاء اللون i إلى v ينتج تلوينًا خماسيًّا للبيان G. لذا، فإن G قابل للتلوين بخمسة ألوان، إلا إذا كانت مركبة $G_{i,j}$ التي تحوي v_i تحوي v_j، وذلك لكلّ خيار لـ i و j. اجعل $p_{i,j}$ مسارًا في $G_{i,j}$ من v_i إلى v_j، إن هذا موضح أدناه عندما $(i,j) = (1,3)$.



خذ بعين الاعتبار الحلقة C التي يتممها v مع $p_{1,3}$، إن هذا يفصل v_2 عن v_4. ومن نظرية منحنى جوردان، نجد أن المسار $P_{2,4}$ يجب أن يقطع C. وبما أن G سوي، فإن المسارات تتقاطع فقط عند الرؤوس المشتركة. إن لرؤوس $P_{1,3}$ اللون 1 أو 3، أما رؤوس $P_{2,4}$ فلها اللون 2 أو 4. لذا، لا يوجد بينهما رأس مشترك، ومن هذا التناقض نجد أن G قابل للتلوين بخمسة ألوان. ■

إن كلّ بيان سوي قابلٌ للتلوين بخمسة ألوان. ولكن، هل هناك حاجة فعلية حقيقية إلى خمسة ألوان؟ إن تاريخ هذا السؤال المحيِّر قد نوقش من قبل العديدين مثل Aigner [1984,1987] و Ore [1967a] و[Saaty – Kainen [1977,1986 و [Appel – HaKen [1998 و [Fritsch – Fritsch [1989.

إن أول ما وصل إلينا بخصوص نظرية الألوان الأربعة هو ما ورد في رسالة بعث بها أوجستس دي مورجان (Augustusde morgan) إلى السير وليام هاملتون (Sir William Hamiltan) في الثالث والعشرين من تشرين أول العام 1852م.

لقد سُئل هذا السؤال من قِبَل طالب دي مورجان وهو فريدريك جوثري (Frederich Guthrie) والذي نسبه فيما بعد إلى أخيه فرانسيس جوثَري (Francis Guthrie)، وقد تم صياغة هذا السؤال بدلالة تلوين الخرائط.

إن سهولة نص المسألة وخواصها الهندسية اللطيفة قادت إلى الكثير من البراهين غير الصحيحة، بعضها تم نشره وبقي دون كشف لسنوات. لا يكفي منع وجود خمسة مناطق متجاورة زوجًا زوجًا، وذلك لوجود بيانات لونية من الدرجة 5 (لها خمسة ألوان) ولا تحوي K_5 (فعلى سبيل المثال تذكر بناء مسيلسكي).

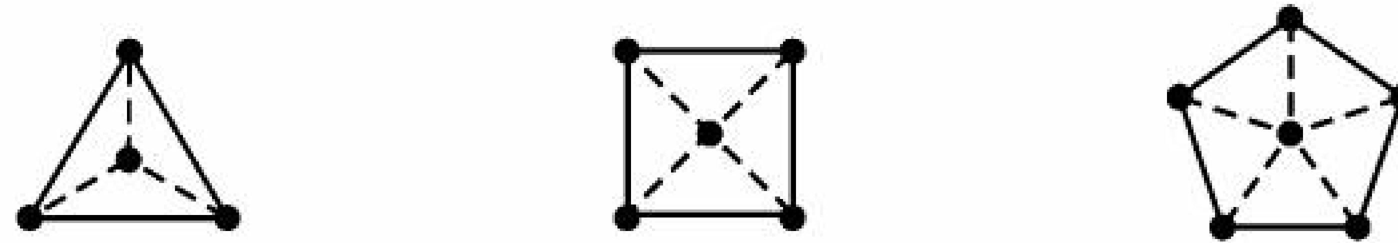
لقد أعلن كيلي المسألة العام 1878 إلى جمعية رياضيِّي لندن، وقام كمب (Kempe) العام 1879 بنشر «حل» للمسألة، وفي العام 1890 قام Heawood بنشر دحض لهذا الحل. وعلى الرغم من ذلك، فإن فكرة كمب عن المسارات المتناوبة التي استُخدمت من قبل هيود لإثبات نظرية الألوان الخمسة قادت أخيرًا إلى تقديم إثبات للمسألة من قبل أبل (Appel) [1976,1977,1986] من خلال العمل مع كوك (KocK). يُسمّى المسار الذي تتناول ألوانه بين لونين محددين بسلسلة كمب.

عندما برهنا نظرية الألوان الخمسة استقرائيًّا، قلنا إن أصغر مثال ناقض يحوي رأسًا درجته 5 على الأكثر، وأن البيان السوي الذي له مثل هذا الرأس لا يعدُّ مثالاً ناقضًا أصغر. إن هذا يقترح علينا طريقًا لنظرية الألوان الأربعة؛ إننا نبحث عن مجموعة بيانات لا يمكن تفاديها ولا يمكن أن تكون موجودة! نحتاج فقط إلى اعتبار بيانات مثلثاتية (تثليثات)؛ لأن كلّ بيان سوي بسيط يكون محتوًى في تثليث.

2.3.6. تعريف: نعرِّف التشكل في تثليث سوي على أنه حلقة فاصلة (الحلقة) (The ring) C بالإضافة إلى جزء البيان الموجود داخل C، وفيما يخص مسألة الألوان الأربعة، نقول: إن مجموعة من التشكلات لا يمكن تفاديها إذا وُجدَ مثال ناقض أصغر بحيث إنه يجب أن يحوي عنصرًا منها.

نقول: إن التشكل مصغَر (قابل للتصغير) إذا وُجد بيان سوي يحويه بحيث لا يمكن أن يكون مثالاً ناقضًا أصغر.

3.3.6. مثال: مجموعة لا يمكن تفاديها. لقد لاحظنا أن $\delta(G) \le 5$ لكلّ بيان سوي بسيط. لاحظ أنه في تثليث فإنَّ درجة كلّ رأس تساوي 3 على الأقل. لذا، لا يمكن تفادي مجموعة التشكلات الثلاثة الموضحة أدناه.



لقد رُسمت الأضلاع من الحلقة إلى الداخل على شكل خطوط متقطعة؛ لأنه يتم تحديد التشكل (في تثليث) إذا عُلمت درجات الرؤوس المجاورة للحلقة، وتم حذف الحلقة (التمرين 7). وبناء على ذلك، فإننا نكتب هذه التشكلات على الصورة "3•" ، "4•" و "5•" على الترتيب. ■

عندما نقول: إن التشكل لا يمكن أن يكون في مثال ناقض أصغر، فنعني أنه إذا ظهر هذا التشكل في تثليث G، فيمكن عندئذٍ أن يستبدل به تثليث G' عدد رؤوسه أقل، بحيث يمكن التلاعب بكلّ تلوين رباعي لـ G' للحصول على تلوين رباعي لـ G.

4.3.6. ملاحظة : إثبات كمب. لنحاول أن نبرهن نظرية الألوان الأربعة بالاستقراء مستخدمين المجموعة التي لا يمكن تفاديها {•3،•4،•5}.

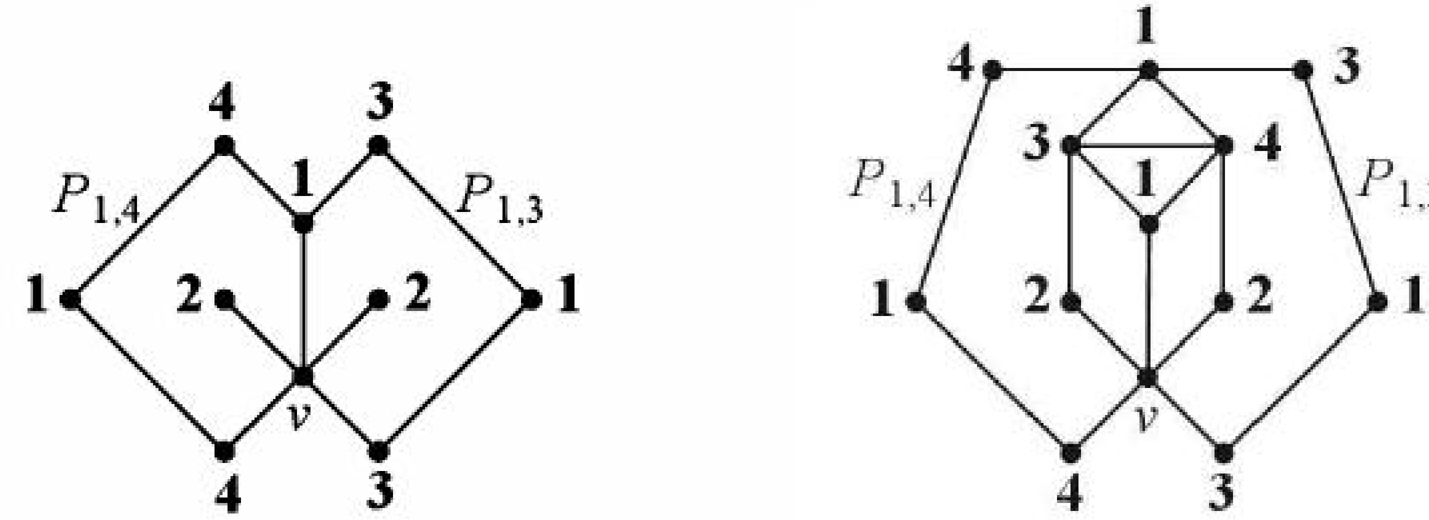
إن طريقة الإثبات تشبه إثبات النظرية 1.3.6. نستطيع تمديد تلوين رباعي لـ $G - v$ لإكمال تلوين رباعي لـ G، إلا إذا ظهرت الألوان الأربعة على $N(v)$. لذا، فإن "•3" مصغر.

إذا كانت $d(v) = 4$، فإن تعليل سلسلة كمب يعمل كما في النظرية 1.3.6. ويكون "•4" مصغرًا.

الآن خذ "•5" بعين الاعتبار. وعندما $d(v) = 5$، فإن الحصر على التثليثات يعطينا أن اللون المكرر على $N(v)$ في التلوين الرباعي الفعلي لـ $G - v$ يظهر على جيران غير متتابعة لـ v. افترض ثانيةً أن: v_1، وv_2، وv_3، وv_4 و v_5 جيران v مرتبة مع اتجاه عقارب الساعة. من التماثل، نستطيع افتراض أنه إذا كان f تلوينًا رباعيًّا لـ $G - v$، فإن $f(v_5) = 2$ و $f(v_i) = i$ لكلّ $1 \leq i \leq 4$.

عرِّف $G_{i,j}$ و $P_{i,j}$ كما في النظرية 1.3.6.. نستطيع أن نحذف اللون 1 من $N(v)$ إلا إذا وُجدت السلسلتان $P_{1,3}$ و $P_{1,4}$ من v_1 إلى v_3 و v_4 عن الترتيب، كما يظهر في الشكل الموجود على اليسار أدناه. إن المركبة H لـ $G_{2,4}$ التي تحوي v_2 تُفصل عن v_4 و v_5 بالحلقة المكونة من v مع $P_{1,3}$. وكذلك، فإن المركبة H' لـ $G_{2,3}$ التي تحوي v_5 تُفصل عن v_2 و v_3 بالحلقة المكونة من v مع $P_{1,4}$. الآن، نستطيع حذف اللون 2 من $N(v)$ بتبديل 2 مع 4 في H، و 2 مع 3 في H'. هل هذا صحيح؟

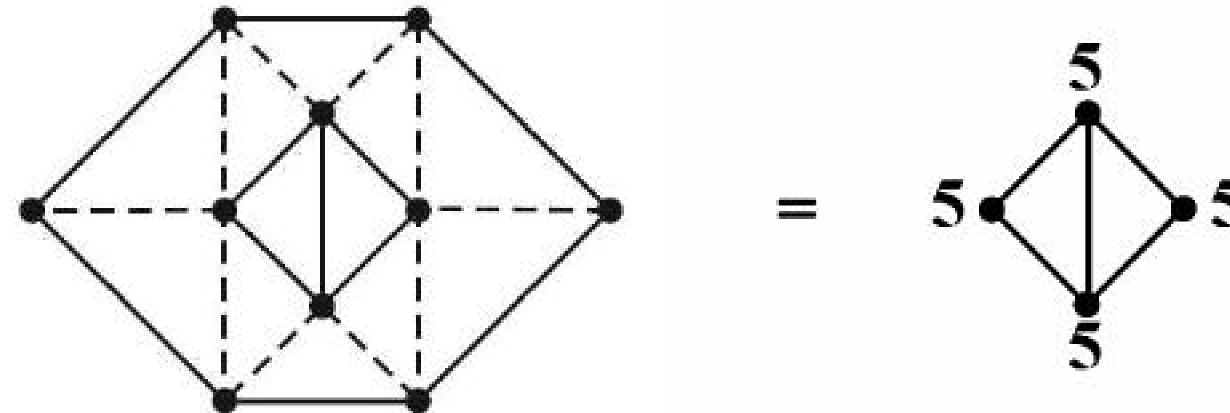
لقد كانت هذه هي الحالة الأخيرة في إثبات كمب.



تكمن المشكلة هنا في أن $P_{1,3}$ و $P_{1,4}$ يمكن أن يُجْدلا (تتشابك على شكل ضفيرة)، أو تتقاطع عند رأس لونه 1 كما يظهر في الشكل أعلاه عن اليمين. ونستطيع أن نعمل تبديلاً في H أو في H'، ولكن عمل تبديل في كليهما يُنْتِجُ زوجًا من الرؤوس المتجاورة التي لها اللون 2. ■

بسبب هذه المعضلة، لم نبرهن أن «•5» مصغر، ويجب علينا اعتبار تشكلات أكبر. لقد ساهم هيسك (Heesch [1969]) بفكرة البحث عن تشكلات حجم حلقاتها أصغر بدلاً من قلة من الرؤوس في الداخل. ليس صعبًا إثبات أن كلّ تشكل حجمه 3 أو 4 يكون مصغرًا (التمرين 9). إن هذا يكافئ إثبات أنه لا يوجد تثليث خماسي اللون أصغر يحوي حلقة فاصلة طولها يساوي 4 على الأكثر.

5.3.6. مثال* : لقد دفع بيركوف (BirKhoff [1913]) بهذه الفكرة إلى الأمام، حيث أثبت أن كلّ تشكل حجم حلقته يساوي 5، وله أكثر من رأس داخل الحلقة يكون مصغرًا. كما أثبت أيضًا أن التشكل الذي حجم حلقته يساوي 6 والموجود أدناه، والمسمى ماسة بيركوف، يكون مصغرًا.



إن إثبات أن ماسة بيركوف مصغرة، يحتاج إلى صفحة كاملة من التحليل المفصل. وأن أحد الطرق هو محاولة إثبات أن التكوينات الفعلية الرباعية جميعها لحلقة تمتد إلى داخلها. على الرغم من أنه يمكن ضمّ بعض الحالات، وأنه يمكن تمديد بعضها الآخر، إلا أنه من الضروري في بعض الحالات استخدام سلاسل كمب لإثبات إمكانية تبديل الألوان إلى حالة قابلة للتمديد. ■

إن هذا التحليل المعقد لأول مثالٍ غير بديهي يوحي إلينا أننا بالكاد بدأنا. إن التفاصيل المتبقية هائلة. فمنذ عام 1913م إلى عام 1950م تمَّ إيجاد تشكلات مصغرة إضافية تكفي لإثبات أن كلّ البيانات السَّويَّة التي لها 36 رأسًا على الأكثر تكون قابلة للتلوين بأربعة ألوان. لقد كان هذا تقدمًا بطيئًا. وفي السّتينيّات قام هيسك بتركيز انتباهه على حجم الحلقة، وأعطى موجهًا مساعدًا على الاكتشاف) لإيجاد التشكلات المصغرة، وطور طرقًا لتوليد المجموعات التي لا يمكن تفاديها.

لقد استخدم أول إثبات تشكلات يصل حجم حلقتها إلى 14. إذا كان لدينا حلقة حجمها 13، فإن لها 66430 تلوينًا مختلفًا بأربعة ألوان. إن التصغير يتطلب إثبات أن كلّ تشكل مصغر يقود إلى تلوين رباعي لكامل البيان. لاحظ أنه يمكن أن نحتاج إلى التعليلات بواسطة سلاسل كمب والانهيار الجزئي لبعض التشكلات. لذا، فإن براهين التصغير (إيجاد تشكل مصغر) ليست سهلة.

لقد قام أبل وهيكن (HaKen) بالعمل مع كوك (KocK) بتحسين مستكشف هيسك وآخرين وذلك لحثّ باحثي الحواسيب على البحث عن التشكلات «الواعدة». وبالعمل 1000 ساعة على ثلاثة حواسيب العام 1976م؛ حيث وجدوا مجموعة لا يمكن تفاديها تحوي 1936م تشكلاً مصغرًا، حجم كلّ منها يساوي 14 على الأكثر.

6.3.6. نظرية : (نظرية الألوان الأربعة Appel – HaKen – Koch [1977]) كلّ بيان سوي قابل للتلوين بأربعة ألوان. ■

أدّت التحسينات في العام 1983م إلى اكتشاف مجموعة لا يمكن تفاديها تحوي 1258 تشكلاً مصغرًا. فقد تمّت العودة إلى الإثبات من قِبَل كلّ من روبرتسون (Robertson) وساندرز (sanders) وسيمور (Sey-mour) وثوماس (Thoams) عامَ [1996]، حيث إنهم باستخدام الطريق نفسه قاموا بتقليل عدد القواعد التي تنتج مجموعات لا يمكن تفاديها إلى 633 تشكلاً مصغرًا. وقاموا بتوفير شفرتهم الحاسوبية من خلال الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) في العام 1997م، وبهذا نستطيع إثبات نظرية الألوان الأربعة خلال ثلاث ساعات من العمل على محطة عمل على سطح المكتب.

7.3.6. *ملاحظة : (تفريغ الشحنة). لتوليد مجموعات لا يمكن تفاديها، نستبدل بحالة المسألة (رأس درجته 5) تشكلات أكبر تتضمن رأسًا درجته 5 ويمكن رؤية هذا على أنه تحليل حالة بتفصيل أكثر للحالة الأصعب.

نحتاج إلى قواعد منظمة للحفاظ على مجموعة مُستنزفة (مستنفدة) صغيرة معقولة.

في أي تثليث، نعلم أن $\sum d(v) = 2e(G) = 6n\text{-}12$، أعد كتابة ذلك على الشكل $12 = \sum(6 - d(v))$، وفكر في $6 - d(v)$ كشحنة على الرأس v. بما أن 12 موجبة، فإن بعض الرؤوس لها شحنة موجبة (درجة 5). إن قواعد استبدال الحالات الرديئة تتضمن تحريك الشحنة من مكان إلى آخر. وتسمى هذه قواعد تفريغ الشحنة. وبما أن الشحنة الموجبة يجب أن تكون موجودة في مكان ما، فإننا نحصل على مجموعات جديدة لا يمكن تفاديها. إن القضية التالية تصف تأثير أبسط قواعد تفريغ الشحنات. ■

8.3.6. قضية : يحوي كلّ تثليث سوي درجته الصغرى 5 تشكلاً في المجموعة أدناه.

5 •—• 5 5 •—• 6

الإثبات: ابدأ بشحنة معرفة بواسطة $d(v)$ - 6. إن أول قاعدة لتفريغ الشحنة تأخذ الشحنة من رأس شحنة موجبة (درجة 5) وتوزعها بالتساوي بين جيران هذا الرأس.

الآن، يوجد جار لأي رأس درجته 5 أو 6 وشحنته موجبة درجته 5 ويجب أن يكون للرأس الذي درجته 7 وشحنته موجبة ستة رؤوس على الأقل درجة كلّ منها تساوي 5 أما الرؤوس التي درجتها 8 أو أكثر، فلا يوجد لها شحنة موجبة. ومن قاعدة تفريغ الشحنة هذه، نعلم أن الشحنة الكلّية في البيان تبقى 12. لذا، فإن لرأس v=شحنة موجبة. ومن هنا، فإن أحد التشكلات المحددة يحدث في كلّ حالة من حالات $d(v)$. ■

يتم حاليًّا استخدام طرق تفريغ الشحنات لحل بعض المسائل باستخدام التحليل لحالات بمساعدة الحاسوب.

لقد جوبهت نظرية الألوان الأربعة بضجيج كبير، حيث إن بعضهم يعارض مبدئيًّا استخدام الحاسوب، في حين تذمر آخرون من طول الإثبات لصعوبة التحقق من صحته. أما آخرون، فكانوا قلقين من أخطاء الحاسوب. لقد وُجد القليل من الأخطاء في الخوارزميات الأصلية، ولكن تم إصلاح ذلك من قِبَل كلٍّ من أبل وهيكن ([Appel – HaKen [1986). إن الذين تحققوا من الحسابات يدويًّا يعلمون أن احتَمالية الخطأ البشري في الإثبات الرياضي أكبر كثيرًا من احتمالية خطأ الحاسوب، وذلك بعد التثبت من صحة الخوارزميات.

عدد التقاطع (Crossing Number)

فيما تبقى من هذا الجزء، سنأخذ بعين الاعتبار الوسطاء الذين من خلالهم نستطيع قياس انحراف بيان ما عن السَّويَّة. إن أحد هؤلاء الوسطاء هو الوسيط الطبيعي الذي يمثل عدد البيانات السَّويَّة اللازمة لتشكيل بيان معين، والتمارين من 16 إلى 20 تتعامل مع هذا الوسيط.

9.3.6. تعريف: نعرِّف سُمك البيان G على أنه أقل عدد من البيانات السَّويَّة في هذا البيان إلى بيانات سوية.

10.3.6. قضية: يساوي سُمك البيان G الذي له n من الرؤوس، وm من الأضلاع $m/(3n - 6)$على الأقل. وإذا خلا هذا البيان من المثلثات، فإن سُمكه يساوي $m/(2n-4)$ على الأقل.

الإثبات: من النظرية 23.1.6. نعلم أن المقام هو أكبر حجم لكلّ بيان جزئي سوي. وباستخدام مبدأ طواقي الحمام، نحصل على المتباينة. ■

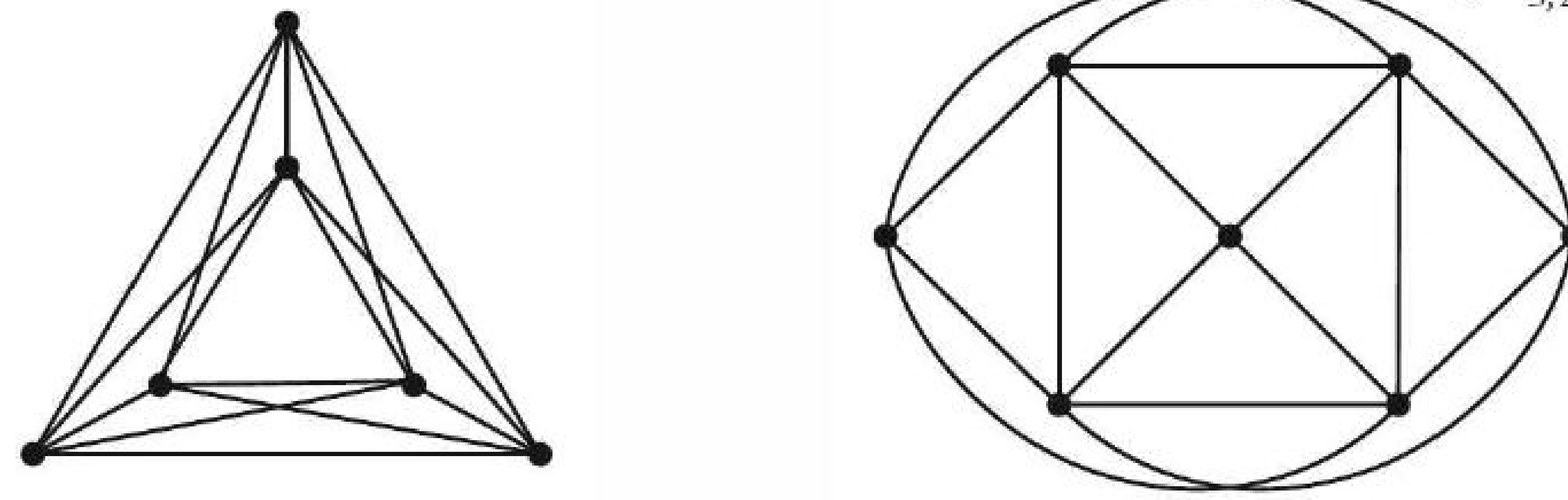
أحيانًا وببساطة، نرسم البيان في المستوى، حتى وإن لم يكن هذا البيان سويًّا. ومثال ذلك الدارة الموضوعة على رقاقة ترتبط برسم بيان. وبما أن تقاطع الأسلاك يقلل من الأداء، ويسبب مشاكل كامنة، فإننا نحاول تقليل عدد التقاطعات. وسنقوم بمناقشة هذا الوسيط في الجزء المتبقي من هذا الجزء.

11.3.6. تعريف: نعرِّف عدد التقاطع $\nu(G)$ لبيان G على أنه أصغر عدد من التقاطعات عند رسم G في المستوى.

12.3.6. مثال: $\nu(K_6) = 3$ و $\nu(K_{3,2,2}) = 2$. نستطيع إيجاد عدد التقاطع لبعض البيانات الصغيرة عن طريق الأخذ في الحسبان بيانات جزئية سوية عظمى من هذه البيانات. خذ رسمًا لـ G في المستوى. إذا كان H بيانًا جزئيًّا سويًّا أعظم من هذا البيان، فإن كلّ ضلع من أضلاع G غير الموجودة في H يقطع ضلعًا من أضلاع H. لذا، فإن هذا الرسم يحوي $e(G) - e(H)$ تقاطعًا على الأقل إذا كان عدد رؤوس G n، فإن $e(H) \leq 3n - 6$، وإذا خلا G من المثلثات، فإن $e(H) \leq 2n - 4$.

بما أن عدد أضلاع K_6 يساوي 15، وأن عدد أضلاع كلّ بيان سوي له ستة رؤوس يساوي 12 على الأكثر، فإن $\nu(K_6) \geq 3$. و يبرهن الرسم الموجود عن اليسار أدناه المساواة.

بما أن $K_{3,2,2}$ يحوي 16 ضلعًا، وعدد أضلاع أي بيان سوي على سبعة رؤوس يساوي 15 على الأكثر، فإن $\nu(K_{3,2,2}) \geq 1$. إن أفضل رسم وجدناه يحوي تقاطعين كما يظهر في الرسم أدناه عن اليمين. ولتحسين الحد الأدنى، لاحظ أن $K_{3,2,2}$ يحوي $K_{3,4}$. بما أن $K_{3,4}$ خالٍ من المثلثات، فإن بيانه الجزئي السوي يحوي 10 أضلاع على الأكثر. لذا، فإن $\nu(K_{3,4}) \geq 2$. وبما أن كلّ رسم للبيان $K_{3,2,2}$ يحوي رسمًا للبيان $K_{3,4}$، فإن: $\nu(K_{3,2,2}) \geq \nu(K_{3,4}) \geq 2.$



13.3.6. قضية : افترض أن G بيان له n من الرؤوس، و m من الأضلاع. إذا كان k أكبر عدد من الأضلاع في بيان جزئي سوي من G، فإن $\nu(G) \geq m - k$ بالإضافة إلى أن $\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}$

الإثبات: إذا أُعطيتَ رسمًا للبيان G في المستوى، فاجعل H تمثّل أكبر بيان جزئي من G في هذا الرسم بحيث لا يوجد أي تقاطعات بين أضلاع H إن كلّ ضلع غير موجود في H يقطع على الأقل ضلعًا من أضلاع H. وبخلاف ذلك، يمكن إضافته إلى H وبما أن عدد أضلاع H يساوي k على الأكثر، فإن هناك على الأقل m-k تقاطعًا بين أضلاع H وأضلاع G - $E(H)$

بعد إهمال $E(H)$، يوجد لدينا m - K ضلعًا متبقيًا على الأقل إن التعليل نفسه يعطينا $(m - k) - k$ تقاطعًا على الأقل عند رسم الجزء المتبقي من البيان. وبتكرار خطوات التعليل أو إعادتها، نحصل على $\sum_{i=1}^{t}(m - ik)$ تقاطعًا على الأقل؛ حيث $t = \lfloor m/k \rfloor$. إن قيمة هذا المجموع تساوي $mt - kt(t + 1)/2$.

الآن، نكتب $m = tk+r$، حيث $0 \leq r \leq k - 1$، ونعوّض $t = (m - r)/k$ في قيمة المجموع. وبالتبسيط نحصل على أن $\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} + \frac{r(k-r)}{2k}$. ■

يكون الحدُّ الأول m - k الموجود في القضية 13.3.6 مفيدًا عندما يكون عدد أضلاع G قليلاً. إن عدد التقاطع لبيان بسيط G يساوي على الأقل $e(G) - 3n + 6$، وعندما يكون G ثنائي الفرع، فإن عدد التقاطع يساوي $e(G) - 2n + 4$ على الأقل. إن تكرار خطوات التعليل يحسب الحد الأدنى عندما يكون $e(G)$ أكبر، ولكن هذا الحد يكون ضعيفًا للبيانات الكثيفة.

خذْ K_n على سبيل المثال. في ظل عدم وجود إجابة دقيقة، نأمل على الأقل في تحديد الحد القائد في كثيرة الحدود التي تعطينا $\nu(K_n)$. وفي العادة، تُكتب كثيرة الحدود التي درجتها k في المتغير n على الشكل ($a n^k + O(n^{k-1})$). وهذا منسجم مع تعريف الرمز «O الكبيرة» في التعريف 3.2.3. تعطي القضية 13.3.6 أن $\nu(K_n) \geq \frac{1}{24}n^3 + O(n^2)$. ولكن في الحقيقة، فإن $\nu(K_n)$ ينمو ككثيرة حدود من الدرجة 4. إن عدد التقاطع لا يمكن أن يزيد على $\binom{n}{4}$ ؛ لأن بإمكاننا وضعَ الرؤوس على محيط دائرة، ثم نرسم أوتارًا لـ K_n، إن كلّ أربعة رؤوس تسهم بتقاطع واحد بالضبط. وفي الواقع، فإن هذا أسوأ رسم ممكن لـ K_n على شكل خطوط مستقيمة؛ ولأن في أي رسم على شكل خطوط مستقيمة، فإن كلّ مجموعة مؤلفة من أربعة رؤوس تسهم في تقاطع واحد

على الأكثر، حيث يعتمد ذلك على وجود الرأس الرابع داخل المثلث المشكل من قبل الرؤوس الثلاثة الأخرى أو خارجه. فكم تقاطعًا يمكن أن نختصر إذا رسمنا رسمًا أفضل من هذا؟

14.3.6. نظرية : (R.Guy [1972]): $\frac{1}{80}n^4+O(n^3)\le v(K_n)\le\frac{1}{64}n^4+O(n^3)$

الإثبات : إن التعليل بطريقة الحساب بخطوات مكررة يؤدي إلى إيجاد حد أدنى. وإن رسم K_n بأقل عدد من التقاطعات يحوي n رسمًا لـ K_{n-1}، ونحصل على كلّ منها بحذف رأس واحد، وكلّ رسم جزئي يحوي $v(K_{n-1})$ تقاطعًا على الأقل. لذا، فإن العدد الكلّي يساوي $nv(K_{n-1})$ على الأقل. ولكن تم حساب كلّ تقاطع في الرسم الكلّي $(n-4)$ مرة. لذا، نستنتج أن $(n-4)v(K_n)\ge n\,v(K_{n-1})$.

من هذه المتباينة، نبرهن استقرائيًّا أن $v(K_n)=\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ لكلّ $n\ge 5$: عندما $n=5$ فإن عدد تقاطعات K_5 يساوي 1، لذا افترض أن $n>5$، وباستخدام فرضية الاستقراء نحسب:

$$v(K_n)\ge\frac{n}{n-4}v(K_{n-1})\ge\frac{n}{n-4}\ \frac{1}{5}\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}=\frac{1}{5}\binom{n}{4}$$

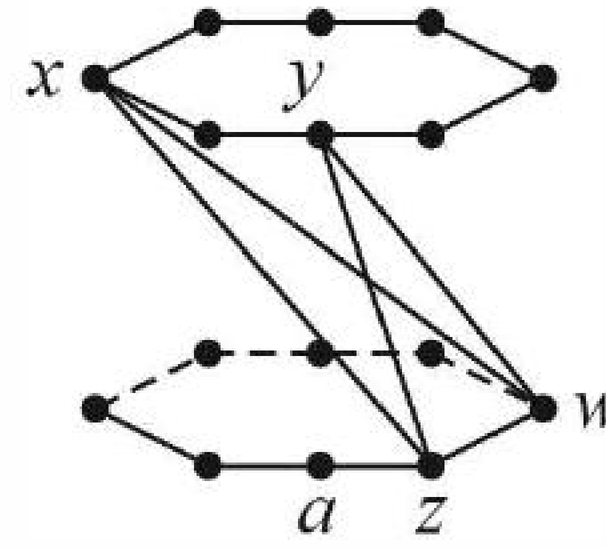
يمكن تحسين مقام الحد الذي درجته 4 في الحد الأدنى أعلاه من 120 إلى 80 آخذين في الحسبان نسخًا من البيان $K_{6,n-6}$ الذي عدد تقاطعه يساوي $6\left\lfloor\frac{n-6}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-7}{2}\right\rfloor$ (التمرين 26b).

إن رسمًا أفضل لهذا يخفض الحد الأدنى من $\binom{n}{4}$ إلى $\frac{1}{64}n^4+O(n^3)$. خذ $n=2k$. إن رسم K_n في المستوى يكافئ رسمه على كرة أو على علبة. ضع k رأسًا على الحافة العليا للعلبة، و k رأسًا على الحافة السفلى للعلبة، نرسم أوتارًا في أعلى العلبة، وأوتارًا أخرى في أسفلها لتمثّل هذه الـ k عصبة.

إن الأضلاع من أعلى إلى أسفل تقع في k صفًّا طبيعيًّا. إن «عدد الصفّ» هو عبارة عن الفصل الدائري بين النقاط الطرفية العليا والسفلى، والذي يمتد من $\left\lceil\frac{-k+1}{2}\right\rceil$ إلى $\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil$، نرسم هذه الأضلاع بحيث يكون التفافها حول العلبة أقل ما يمكن عند مرورها من أعلى إلى أسفل. لذا، فإن الأضلاع الموجودة في الصفّ نفسه لا تتقاطع. الآن، نقوم بِلَيِّ العلبة (تحريكها دائريًّا) لجعل إزاحة الصفوف تبدأ من 1 وتنتهي بـ K. إن هذا يسهل عملية حساب التقاطعات ولا يغير أزواج الأضلاع المتقاطعة.

إن التقاطع على جوانب العلبة يشتمل على وجود رأسين في الأعلى، ورأسين آخرين في الأسفل، لنقل أن y,x هما الرأسان في الأعلى، و w,z هما الرأسان في الأسفل، حيث إن لـ $x\ Z$ إزاحة موجبة أصغر من إزاحة xw، يوجد لدينا تقاطع لـ $Z,\ y,\ x$ و w إذا وفقط إذا كانت الإزاحات لـ y، و z، و w تمثّل قيمًا موجبة مختلفة ومتزايدة. (فعلى سبيل المثال، يتحقق هذا لـ x، وy، وZ، و w في الشكل التوضيحي أدناه، ولكنه لا يتحقق لـ x، وy، وZ، و a، لأن الضلع ya يلتف حول العلبة). لذا، يوجد $k\binom{k}{3}$ تقاطعًا على جانب العلبة الملوية. لذا، فإن:

$$v(K_n)\le 2\binom{k}{4}+k\binom{k}{3}=\frac{1}{64}n^4+O(n^3)$$



15.3.6. مثال: $\nu(K_{m,n})$. إن أبسط رسم يضع الرؤوس على جانبي قناة، حيث يضع مجموعة على جانب، في حين يضع المجموعة الأخرى على الجانب الآخر، وحيث يتم رسم الأضلاع كخطوط مستقيمة عبر القناة. إن هذا يحوي $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ تقاطعًا، ولكن من السهل إنقاص هذا بمعامل مقداره 4 ضع رؤوس $K_{m,n}$ على محورين متعامدين، ثم ضع $\lceil n/2 \rceil$ رأسًا على محور y الموجب، و $\lfloor n/2 \rfloor$ رأسًا على محور y السالب. وبالمثل، اقسم الـ m رأسًا على محور x الموجب والسالب. وبجمع هذه الأنواع من التقاطعات التي نحصل عليها عندما نصل كلّ رأس على محور x بكلّ رأس على محور y، فإننا نحصل على $\nu(K_{m,n}) \le \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$، (ZarnaKiewicz [1954]). لقد خُمّن هذا الحدُّ على أنه حدٌّ أمثل (لمزيد من المعلومات؛ ارجع إلى [Guy [1969).

لقد أثبت كليتمان (Kleitman) العام 1970م هذه النتيجة عندما $min\{n,m\} \le 6$. أما وودال (woodall) فوجد أن $K_{7,11}$ و $K_{9,9}$ هما أصغر حالتين غير معروفتين، وكان هذا في العام 1993م باستخدام الحاسوب. واستنادًا إلى ما توصل إليه كليتمان فقد أثبت جاي (Guy) العام 1970 أن $\nu(K_{m,n}) \ge \frac{m(m-1)}{5}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$. وهذا غير بعيد عن الحد الأعلى (التمرين 26).

لقد خُمّنَ حدٌّ أدنى لعدد التقاطع من قبَل ايردوز وجاي العام 1970م، وهذا التخمين يلجأ إلى تطبيق هندسي. إن إثباتنا استقرائي، ويعمم الحد الأدنى الموجود في إثبات النظرية 14.3.6. وهناك إثبات احتمالي مناسب في التمرين 11.5.8. كما توجد نتيجة أقوى في (Pach – To'th [1997]).

16.3.6. *نظرية. (Aitai –chva'tal-Newborn-Szemer'edi[1982],Leightpm [1983]).

افترض أن G بيان بسيط. إذا كان $e(G) \ge 4n(G)$، فإن $\nu(G) \ge \frac{1}{64}e(G)^3/n(G)^2$.

الإثبات: افترض أن $m = e(G)$ و $n = n(G)$ نستخدم الاستقراء على n إذا كانت $m \le 5n$ (هذا يشمل البيانات البسيطة جميعها والتي عدد رؤوسها يساوي 11 على الأكثر). لاحظ أن $(\alpha-3) \ge \frac{1}{64}\alpha^3$ عندما $4 \le \alpha \le 5$. يجعل $m = \alpha n$ حيث $4 \le \alpha \le 5$ نحصل على أن $\nu(G) \ge m - 3n \ge \frac{1}{64}m^3/n^2$ كما هو منشود.

افترض أن $n > 11$. إذا أعطينا رسمًا أمثل للبيان G، فإن كلّ تقاطع سيظهر في n-4 من الرسوم التي نحصل عليها بحذف رأس واحد. ومن فرضية الاستقراء، نجد أن $\nu(G-v) \ge \frac{1}{64}\frac{(m-d(v))^3}{(n-1)^2}$، لذا، فإن: $(n-4)\nu(G) \ge \sum_{v\in V(G)}\frac{1}{64}\frac{(m-d(v))^3}{(n-1)^2}$.

من التحدب، نعلم أن الحد الأدنى - دائمًا - يكون مساويًا على الأقل لما نحصل عليه عند تبديل درجات الرؤوس بمعدل الدرجة لهذه الرؤوس. وبكلمات أخرى، $\sum(m-d(v))^3 \ge n(m-2m/n)^3$. كذلك $(n-1)^2(n-4) \le (n-2)^3$. لذا، فإن:

$$\nu(G) \ge \frac{1}{64}n\frac{(n-2)^3m^3}{n^3(n-1)^2(n-4)} \ge \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}$$ ■

17.3.6. مثال: تحقيق الحد. إن المقدار الموجود في النظرية 16.3.6 هو أفضل ما يمكن. خذْ $G = \frac{n}{2m}K_{2m/n}$، حيث $2m$ من مضاعفات n إن العدد الكلّي للرؤوس هو n، كما أن العدد الكلّي للأضلاع يقارب $\frac{n^2}{2m}\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}\right)^2 = m$. وبما أن

$v(K_r) \leq \frac{1}{64}r^4$، فإن $v(G) = \frac{n^2}{2m}\frac{1}{64}\left(\frac{2m}{n}\right)^4 = \frac{1}{8}\frac{m^3}{n^2}$. إن هذا المقدار يختلف بمقدار ثابت عن الحد الأدنى الموجود في القضية 16.3.6. ■

سنطبق القضية 16.3.6. على مسألة في الهندسة التوافقية أو التركيبية (Combinatorial Geomerty). لقد سأل إيردوز العام [1946م] قائلاً: كم وحدة مسافة يمكن أن يكون بين n من النقاط في المستوى؟ إذا وُجدت البيانات في شبكة وحدة (البعد الأفقي أو العمودي بين النقاط يساوي 1)، فإن البيان الذي يمثل مسافات الوحدة هو الضرب الديكارتي لمسارين، وهذا ينتج حوالي $n\text{-O}(\sqrt{n})$ ضلعًا. وبأخذ النقاط جميعها (الشبكة منتقاة) التي تقع ضمن مسافة مناسبة من نقطة الأصل، حصل إيردوز على نحو $n^{1+c/Loglogn}$ وحدة مسافات. إن معدل هذا النماء أكثر من خطي، إلا أنه يقل عن $n^{1+\varepsilon}$ لكلّ عدد موجب ε.

لقد أثبت إيردوز كذلك حدًّا أعلى قيمته $O(n^{3/2})$. بما أن أي دائرتين نصف قطر كلّ منهما يساوي 1 يتقاطعان في نقطتين على الأكثر، فإن بيان مسافات الوحدة G لا يمكن أن يحوي $K_{3,2}$. لذا، فإن لكلّ زوج من النقاط جارين مشتركين على الأكثر. وبما أن كلّ رأس v يشكل جارًا مشتركًا لـ $\binom{d(v)}{2}$ زوجًا من جيرانه، فإن $\sum\binom{d(v)}{2} \leq 2\binom{n}{2}$. وبما أن معدل الدرجة يساوي $2e(G)/n$، فإن التحدب يعطينا أن $\sum\binom{d(v)}{2} \geq n\binom{2e(G)/n}{2}$. إن هذه المتباينات مجتمعة معًا تعطينا الحد المنشود (يتعامل التمرين 25.2.5 مع مسألة تعظيم الأضلاع عمومًا في الحالة التي لا تحوي فيها البيانات عصبًا ثنائية).

باستخدام بعض التعليلات من نظرية الأعداد المتعلقة بعلاقات الوقوع بين النقاط والخطوط في مجموعة نقاط، قام كلّ من سبنسر (spencer) وسيميردي (Szemere›di) وتروتر (Trotter) في العام 1984م بتحسين الحد الأعلى إلى $O(n^{4/3})$. كما قام سزكلي (Sze›Kely) بتطبيق النظرية 16.3.6 لإعطاء إثبات رائع وقصير لهذا الحد باستخدام نظرية البيانات.

18.3.6. *نظرية: ([Spencer –Szemer′edi-Trotter[1984]).

يوجد على الأكثر $4n^{4/3}$ زوجًا من النقاط، بحيث إن المسافة بين عنصري أيّ زوج منها تساوي 1 من بين مجموعة تحوي n من النقاط في المستوى.

الإثبات: ([Sze′Kely [1997]) بتحريك النقاط أو أزواج النقاط دون تقليل عدد الأزواج ذات المسافة 1 نستطيع أن نؤكد أن كلّ نقطة تكون مشمولة بأحد هذه الأزواج، وأنه لا توجد نقطتان على بعد مقداره 1 فقط إحداها عن الأخرى. إذا وُجدت نقطة مشمولة بزوج واحد فقط مسافته 1، فبإمكاننا تدويرها حول قرينتها في الزوج حتى تكون على بعد بمقدار 1 من نقطة أخرى، وهذا يختصر المسألة إلى الحالة التي تكون كلّ نقطة من النقاط مشمولة في زوجين من هذه الأزواج على الأقل.

افترض أن P تَشَكّلٌ أمثل على n من النقاط. حيث يوجد q زوجًا ذات مسافة وحدة (المسافة بين عنصري الزوج تساوي 1 أو وحدة).

لنحصل على بيان من P باستخدام الأزواج ذات مسافة الوحدة كأضلاع، وإنما برسم دائرة وحدة حول كلّ نقطة. إذا كانت نقطة في P تبعد بمقدار 1 عن k نقطة من نقاط P، فإن هذه النقاط تقسم الدائرة إلى k قوسًا. وبالمحصلة، نحصل على $2q$ قوسًا، إن هذه هي أضلاع لبيان G خالٍ من العرى. وبما أن كلّ نقطة يمكن أن تظهر على دائرتي وحدة (ليس على ثلاث)، فمن الممكن أن يوجدَ في G بعض الأضلاع المكررة مرتين، لا أكثر.

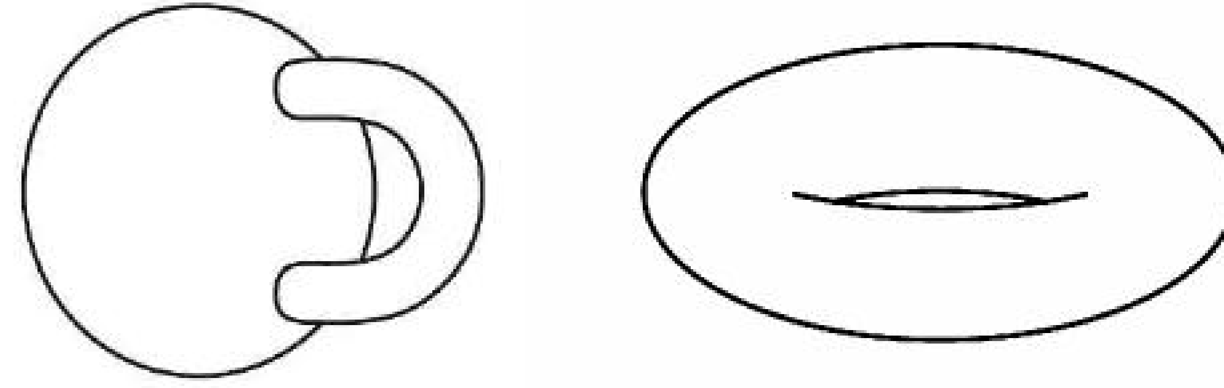
نحذف ضلعًا من كلّ ضلع مكرر للحصول على بيان بسيط G' له q ضلعًا على الأقل لاحظ أنه يمكن افتراض أنَّ $q \geq 4n$. وبخلافَ ذلك، فإن الحد المنشود يكون متحققًا مُسبقا.

بما أن هذه الأقواس تقع على n من الدوائر، فمن غير الممكن أن يكون بينها العديد من التقاطعات؛ يتقاطع كلّ زوج من هذه الدوائر مرتين على الأكثر. لذا، فإن الطريقة التي وضعنا بها G' تحوي $2\binom{n}{2}$ تقاطعًا على الأكثر. ومن النظرية 16.3.6، نجد أن G' يحوي $\frac{1}{64}\ {q^3}/{n^2}$ تقاطعًا على الأقل. إن هذه المتباينات تعطينا أن $q \le 4n^{4/3}$. ■

السطوح ذات الجنس الأعلى (اختياري) Surfaces of Higher Genus

يمكن أن نُغَيِّرَ السطح لتفادي التقاطعات بدلاً من تقليل التقاطعات في المستوى. إن هذا هو تأثير بناء الجسور وملتقيات الطرق التي تتقاطع بمستويات مختلفة، بدلاً من تركيب الإشارات الضوئية. إن سطح الأرض عبارة عن كرة. كما أن من المناسب لهذا النقاش أن نرسم على الكرة بدلاً من الرسم في المستوى.

وكما لاحظنا في الملاحظة 27.1.6، فإن هذين الوضعين متكافئان ولتفادي حدوث حدود في السطح؛ فإننا نضيف جسرًا يقطع حفرتين في الكرة، ومن ثمَّ نصل أضلاع الحفرتين بأنبوب وبتمديد الأنبوب وضغط باقي الكرة، فإننا نحصل على كعكة (الدونت) التي لها شكل العجلة.



19.3.6. تعريف: نعرِّف المقبض على أنه أنبوب يربط بين حفرتين مقطوعتين في سطح. أما الطارة (Torus) فهي السطح الذي نحصل عليه بإضافة مقبض واحد إلى الكرة.

إن الطارة توبولوجيًّا هي نفسها الكرة التي لها مقبض واحد؛ بمعنى أنه يمكن نقل أحد السطحين إلى الآخر بواسطة دالة متصلة[1].

يمكن أن يكون للبيان الكبير عدد كبير من التقاطعات، ويحتاج إلى عدد أكبر من المقابض إن إضافة مقابض كافية إلى الرسم على الكرة بحذف التقاطعات الموجودة في البيان جميعها يُنْتِجُ طمرًا. لاحظ أنه عندما نضيف عددًا من المقابض إلى كرة فإننا لا نهتم بكيفية عمل ذلك، وذلك بسبب وجود نتيجة في التوبولوجي مفادها أننا إذا حصلنا على سطحين بإضافة العدد نفسه من المقابض إلى الكرة، فإن هناك دالة متصلة تنقل كلًّا منهما إلى الآخر.

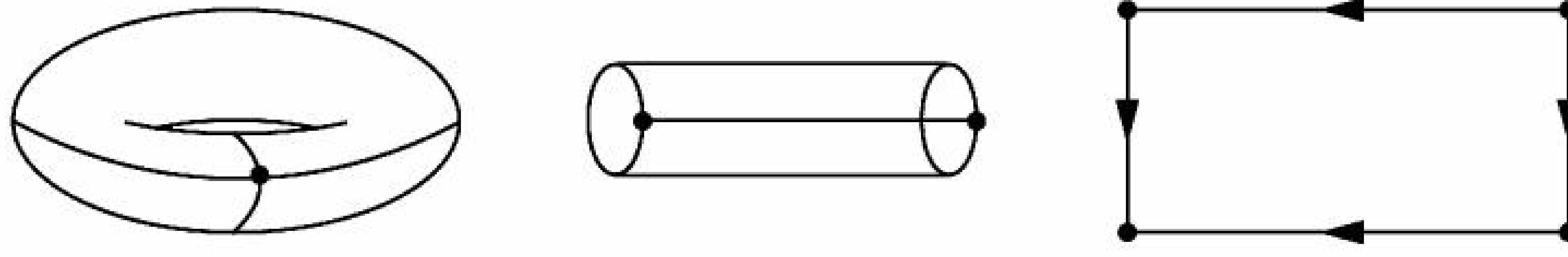
20.3.6. تعريف: نعرِّف جنس المنحنى للسطح الذي نحصل عليه بإضافة مقابض إلى الكرة على أنه عدد المقابض المضافة إلى هذه الكرة. وسنستخدم الرمز $S\gamma$ للتدليل على السطح الذي جنسه يساوي γ في حين نعرِّف جنس البيان على أنه أصغر γ، بحيث يمكن طمر G في S_γ. إن البيانات التي يمكن طمرها في السطوح التي جنسها 0،1،2 هي البيانات السَّويَّة، والطارية (التي لها طمر على الطارة)، وثنائية الطارة (السطح الذي له مقبضان يُسمّى طارة ثنائية) على الترتيب.

إن نظرية البيانات السَّويَّة تعمم في بعض الاتجاهات إلى البيانات التي يمكن طمرها على سطوح من جنس أعلى؛ وسنناقش هذا باختصار، ولأهمية ذلك ثقافيًّا كذلك. إن رسم البيانات الكبيرة على سطوح جنسها عالٍ ليس سهلاً، ومن الصعوبة بمكان تتبعه، حتى الرسم على العُقدة (S_3). موضعيًّا، يظهر هذا السطح كصَفحة ورق مستوية. ومن أجل رسم البيان؛ علينا أن نضع السطح كلّه منبسطًا. ولعمل ذلك يجب قطعه. إذا استطعنا متابعة كيفية إلصاق الأضلاع معًا من أجل استعادة السطح، فبإمكاننا وصف السطح على قطعة ورق منبسطة. أولاً، خذ في الحسبان الطارة.

---

(1) هذا مصدر النكتة التي تقول: إن الشخص المتخصص في التوبولوجيا هو الشخص الذي لا يعرف الفرق بين حبة الدونت وفنجان القهوة.

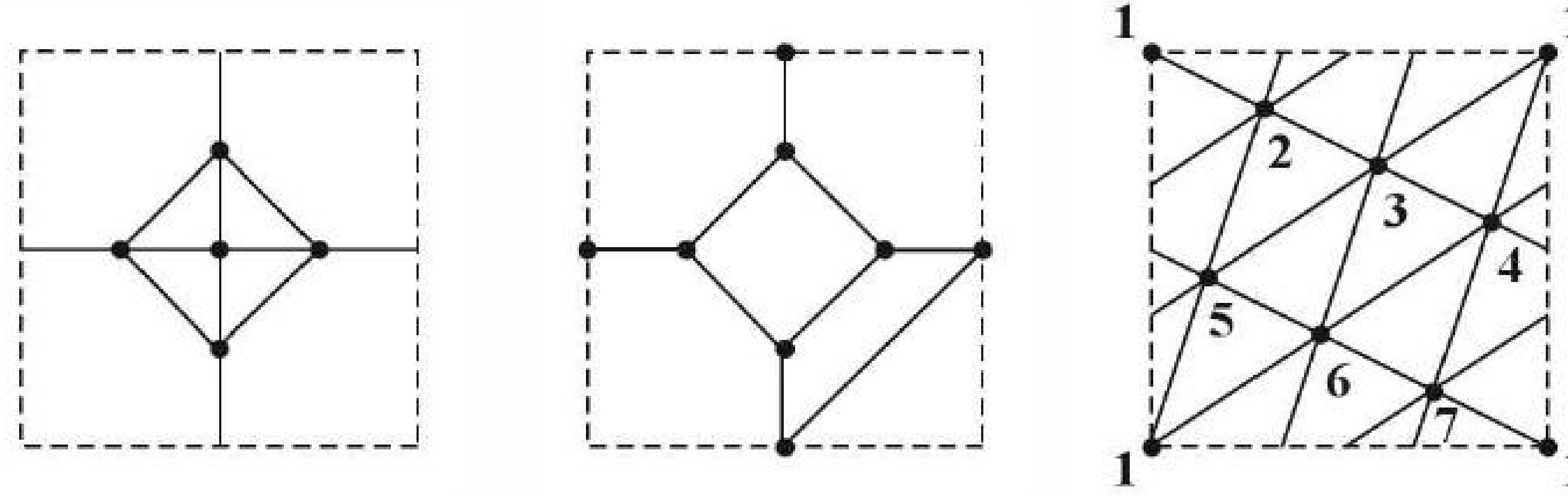
21.3.6. مثال: وصف توافقي (تركيبي) للطارة.



إن قطع الأنبوب المغلق مرة واحدة يحوله إلى أسطوانة، وبشق هذه الأسطوانة طوليًا، نستطيع وضعها منبسطة كمستطيل. إن وضع علامات دالة على أضلاع المستطيل يشير إلى كيفية إعادة إلصاق هذه الأضلاع معًا، بحيث تتم مطابقة الأضلاع التي لها العلامة الدالة نفسها بعضها ببعض.

إن متابعة مطابقة الأضلاع مهمة لأنه يمكن لأضلاع طمر على سطح معين أن تقطع مثل هذا القطع وعندما يصل ضلع إلى أحد حدود المستطيل، فإنه يكون قد وصل إلى أحد جوانب القطع المتَخيَّل، وعندما يعبر (يقطع) الضلع هذا القطع، فإنه ينفذ من النقطة المماثلة على النسخة الأخرى من هذا الحد. إن الزوايا الأربع لهذا المستطيل ترتبط بنقطة واحدة على السطح والتي يمرّ من خلالها القطعين.

أدت هذه الأفكار الجيدة لطمر جميل على الطارة لكلّ من K_5،و $K_{3,3}$، و K_7.



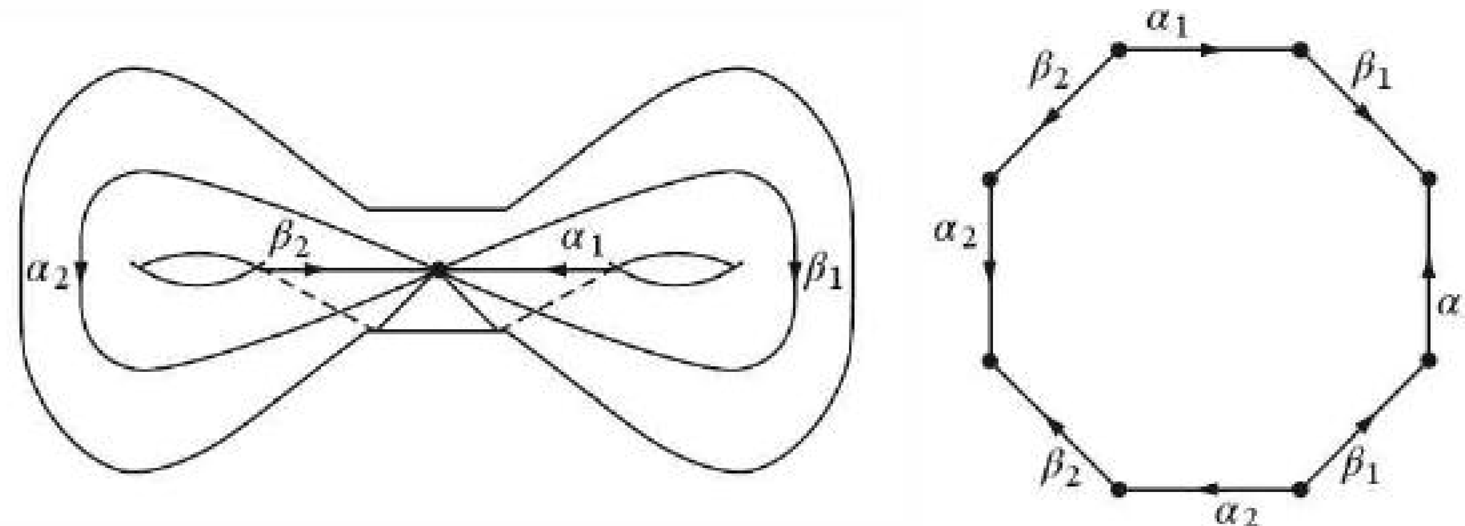
لاحظ وجود بعض المرونة في عمل القطوع للسطوح ذات الجنس الأعلى. ولكن، كلّ طريق يأخذ قطعين لكلّ مقبض قبل أن تستطيع وضع السطح بصورة منبسطة. إن التمثيل العادي يأتي من خلال التعبير عن المقابض "كفلق" للسطح، حيث توجد نقطة مشتركة بين القطوع على المحور (hub).

22.3.6. مثال: وضع الطارة الثنائية منبسطة. تجد أدناه تمثيلاً مضلعًا للطارة الثنائية. إن عمل القطوع يكافئ إضافة عرى عند رأس واحد حتى تحصل على طمر في وجه واحد لضمة العرى. وعمومًا، نعمل 2γ قطعًا عبر نقطة واحدة ولتكن من وضع $S\gamma$ منبسطا.

إن متابعة الحدود من كلّ قطع تقود إلى تمثيل لـ $S\gamma$ كمضلع عدد أضلاعه 4γ يتحقق فيه أنه يمكن وصف كلّ اجتياز أو عبور (استعراض) للحدود في اتجاه عقارب الساعة من خلال قراءة القطوع في أثناء عبورنا لها ونسجل القطع باستخدام رمز النظير العكسي عندما نجتازه في الاتجاه المضاد.

وبما أننا نتابع حدود وجه واحد فقط آخذين في الحسبان أن يدنا اليسرى دائمًا على الحائط فإنه يتم تتبع كلّ ضلع مرة إلى الأمام ومرة أخرى إلى الخلف. ولهذا المثال هنا، فإن المُستعرِض هو $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}$.

لاحظ أنه يمكن وضع كلّ سطح على الشكل: $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}$ .... $\alpha_\gamma\beta_\gamma\alpha_\gamma^{-1}\beta_\gamma^{-1}$. ويمكن الحصول على وضعيات (تمثيلات) أخرى للسطح من خلال عمل قطوع بطرق مختلفة أي طرق مختلفة لطمر باقة مؤلفة من 2γ عروة. فمثلاً، يمكن تمثيل الطارة الثنائية بمضلع ثماني حدوده $\alpha\beta\gamma\delta\,\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}$.



23.3.6. ملاحظة: صيغة أويلر لـ S_γ. نعرِّف الخلية الثنائية على أنها منطقة تحقق أنه يمكن تقليص كلّ منحنى في داخلها بواسطة دالة متصلة إلى نقطة. إن طمر الخلية الثنائية عبارة عن طمر تكون كلّ منطقة فيه خلية ثنائية. يمكن تعميم صيغة أويلر لتشمل طمور الخلية الثنائية للبيانات المترابطة على S_γ (التمرين 35)، بحيث تصبح على الشكل:

$$n - e + f = 2 - 2\gamma$$

فعلى سبيل المثال، إن طمرنا لـ K_7 على الطارة $(\gamma = 1)$ له 7 رؤوس، و21 ضلعًا، و 14 وجهًا و $7 - 21 + 14 = 0$. يشبه إثبات صيغة أويلر لـ S_γ إثبات هذه الصيغة في حالة المستوى، إلا أن إثبات الخطوة الأساس للبيانات التي لها رأس واحد يحتاج إلى حذر أكثر. حيث يلزمنا أن نبين حاجتنا إلى 2γ قطعًا لكي نستطيع جعل السطح منبسطًا (أي للحصول على طمر خلية ثنائية لبيان له رأس واحد ووجه واحد). ■

24.3.6. تمهيدية. كلّ بيان بسيط على n من الرؤوس مطمور في S_γ يحوي $3(n - 2 + 2\gamma)$ ضلعًا على الأكثر.

الإثبات: التمرين 35. ■

لاحظ أن K_7 يحقق التمهيدية 24.3.6 مع المساواة على الطارة $(\gamma = 1)$. وبما أن كلّ وجه في الطّمر الطّاري (طمر في الطّارة) لـ K_7 عبارة عن مضلع ثلاثي، فإن K_7 بيان طاريّ أعظميّ. وبإعادة كتابة $e \le 3(n\text{-}2 + 2\gamma)$، نحصل على حد أدنى لعدد المقابض التي يجب إضافتها للحصول على سطح يمكن طمر G فيه. لذا، فإن $\gamma(G) \ge 1 + \frac{(e - 3n)}{6}$.

توصل التمهيدية 24.3.6 إلى مثيل لنظرية الألوان الأربعة لـ $S\gamma$.

25.3.6. نظرية: (صيغة هيود – Heawood [1890]). إذا كان G قابلاً للطمر على $S_\gamma (\gamma > 0)$ فإن $\chi(G) \le \left\lfloor (7 + \sqrt{1 + 48\gamma}) / 2 \right\rfloor$.

الإثبات: افترض أن $c = (7 + \sqrt{1 + 48\gamma}) / 2$. يكفي أن نبرهن أنه يوجد لكلّ بيان بسيط قابل للطمر على S_γ رأسٌ درجته $c - 1$ على الأكثر. وبذلك، فإن الحد على $\chi(G)$ يتبع من الاستقراء على $n(G)$.

بما أن $\chi(G) \le c$ للبيانات التي لها c رأسًا على الأكثر جميعها، فيجب علينا معالجة الحالة التي يكون فيها $n(G) > c$ فقط.

نستخدم التمهيدية 24.3.6 لإثبات أن معدل (ومن ثم أقل قيمة) الدرجة يساوي c-1 على الأكثر، وتتبع المتباينة الثانية أدناه من كون $\gamma > 0$ و $n > c$. وبما أن c تحقق أن $c^2 - 7c + (12 - 12\gamma) = 0$، فإننا نحصل على أن $c - 1 = 6 - (12 - 12\gamma)/c$. لذا، فإن معدل الدرجة يحقق الحد المنشود.

$$\frac{2e}{n} \le \frac{6(n\text{-}2\text{+}2\gamma)}{n} \le 6 - \frac{12\text{-}12\gamma}{c} = c\text{-}1$$ ■

إن المتباينة الرئيسة تفشل هنا عندما $\gamma = 0$. لذا، فإن التعليل غير صالح للبيانات السَّويَّة. وعلى الرغم من ذلك، فإن الصيغة تُختصر لتصبح $\chi(G) \le 4$ عندما $\gamma = 0$ إن إثبات حدّ هيوود حاد يتضمن طمر K_n على S_γ حيث $\gamma = [(n\text{-}3)\ (n\text{-}4) / 12]$.

ينقسم الإثبات إلى عدة حالات بحسب صفوف تكافؤ n بمقياس 12 (K_7 هو المثال الأول في الصّفّ السّهل). منجزًا في (Ringle – youngs [1968])، حيث يشتمل على كتاب نظرية تلوين الخرائط (Ringel [1974]).

بما أننا أخذنا مسألة التلوين على S_γ في الحسبان، فمن الطبيعي أن يتساءل أحدنا عن البيانات التي تنطمر على S_γ. توجد عدة توصيفات للبيانات السَّويَّة، بدءًا من نظرية كواراتوسكي (النظرية 2.2.6) ونظرية

واجنر (التمرين 12.2.6) لاحظ أن حذف الأضلاع أو تقليصها لا يؤثر في طمر البيانات على أي سطح.

توجد لكلّ سطح قائمة صغرى فرعية من العوائق التي تعيق الطّمر. تنصُّ نظرية واجنر على أن قائمة العوائق للمستوى هي $\{K_{3,3}, K_5\}$. وأن كلّ بيان غير سوي يحوي أحد هذه البيانات كبيان فرعي.

يوجد أكثر من 800 من الممنوعات الفرعية الصغرى المعروفة للطّارة، وتكون قائمة الممنوعات منتهية لكلّ سطح، وهذا يتبع من العبارة الأعم الموجودة أدناه. (تؤدي علاقة التقسيم في نظرية كواراتوسكي إلى قوائم غير منتهية).

26.3.6. نظرية : (نظرية البيان الفرعي – (Robertson –seymour[1985] في أي قائمة غير منتهية من البيانات، يوجد بيان معين بحيث يكون بيانًا فرعيًّا لبيان آخر. ■

ربما تكون هذه أصعب نظرية معروفة في نظرية البيان؛ لأن إثباتها يحتاج إلى أكثر من 500 صفحة (دون مساعدة الحاسوب) موجودة على شكل سلسلة مؤلفة من أكثر من 20 بحثًا امتدت إلى ما بعد العام 2000م. كما يوجد لها العديد من التشعبات حول تركيبة البيان وبنيته، وتعقيد الحسابات. إن التقنيات المستخدمة في الإثبات أوجدت فروعًا جديدة في نظرية البيان. وأن بعض جوانب هذه التقنيات وعلاقتها بإثبات نظرية البيان الفرعي موجودة في الوحدة الأخيرة من كتاب ديستل (Diestel [1997]).

تمارين

1.3.6.(-) هات نصًّا لخوارزمية كثيرة حدود زمنية بحيث تأخذ بيانًا سويًّا كمدخل، وتُنْتِجُ تلوينًا فعليًا بخمسة ألوان لهذا البيان.

2.3.6. (-) يكون البيان G مُضْمَحلًّا (مُتَفَسِّخًا) من الدرجة k (*k*-degenerate) إذا وُجد في كلّ بيانٍ جزئي منه رأسٌ درجته تساوي k على الأكثر، أثبت أن البيان المضمحل(المتفسخ) من الدرجة k يكون قابلاً للتلوين بـ $k+1$ لونًا.

3.3.6.(-) استخدم نظرية الألوان الأربعة لتبرهن أن كلّ بيان سوي خارجي يكون قابلاً للتلوين بثلاثة ألوان.

4.3.6. (-) جد عدد التقاطع لكلٍّ من $K_{2,2,2,2}$ و $K_{4,4}$، وعدد التقاطع لبيان بيترسون كذلك.

5.3.6. استخدم نظرية الألوان الأربعة لتبرهن أن كلّ بيان سوي يتفكك إلى بيانين ثنائيي الفرع. (Hedetniemi [1969], Mabry [1995])

6.3.6. دون استخدام نظرية الألوان الأربعة، أثبت أن كلّ بيان سوي له 12 رأسًا على الأكثر يكون قابلاً للتلوين بأربعة ألوان. استخدم هذا لتبرهن أن كلّ بيان سوي له 32 رأسًا على الأكثر يكون قابلاً للتلوين بأربعة ألوان.

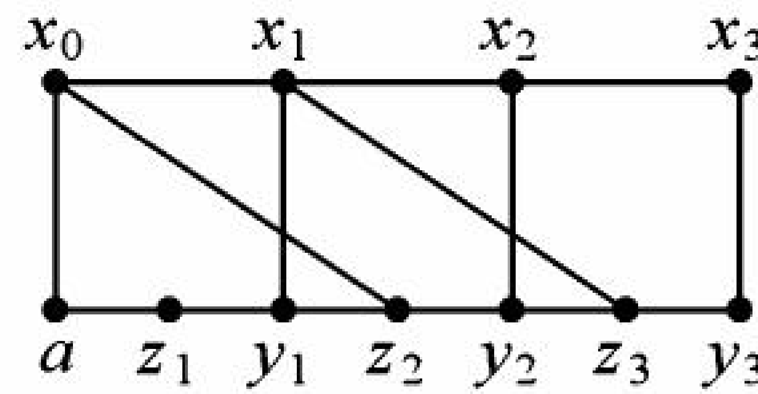
7.3.6. (!) افترض أن H تشكل في تثليث سوي (التعريف 2.3.6). وافترض كذلك أن H' هو البيان الذي نحصل عليه من وضع درجات الرؤوس كعلامات دالة على جيران رؤوس الحلقة، ومن ثم نحذف رؤوس الحلقة. أثبت إمكانية استرداد H من H'.

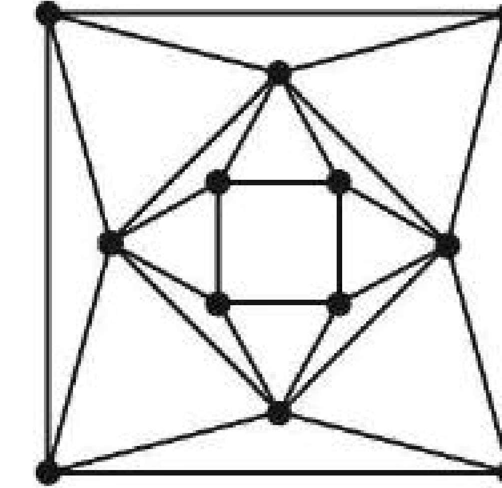
8.3.6. جدْ تشكلاً حجم حلقته يساوي 5 في تثليث سوي، بحيث إن درجة كلّ رأس تساوي 5 على الأقل، وبحيث يوجد أكثر من رأس داخلي واحد.

9.3.6. (+) أثبت أن كلّ تشكل سوي حجم حلقته يساوي 4 على الأكثر يكون مصغرًا. (مساعدة: الحلقة عبارة عن حلقة فاصلة C. أثبت أنه إذا كانت التثليثات الأصغر قابلة للتلوين بأربعة ألوان، فإن للفلق -C من G أربعة ألوان تتوافق على C)، (BirKhoff [1913]).

10.3.6. نظرية جروتزك (Grötzch[1959]), (انظر Thomassen[1994a]).

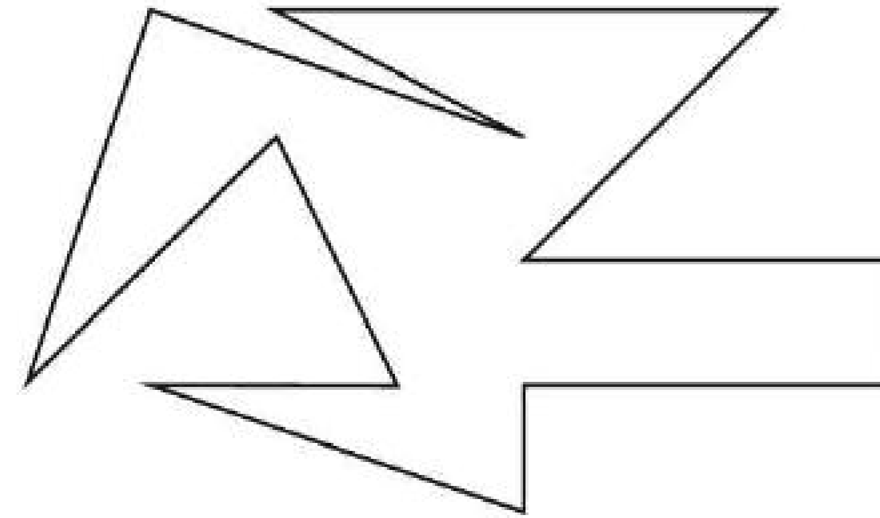
تنصّ هذه النظرية على أن كلّ بيان سوي G خال من المثلثات يكون ثلاثي اللون. لذا، فإن $a(G) \geq n(G)/3$ لقد أثبت توفي (Tovey) وستاينبرج (stienberg) العام 1993م أن $a(G) \geq n(G)/3$ دائمًا. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن من خلال الأخذ في الحسبان عائلة من البيانات على الشكل التالي: G_1 عبارة عن حلقة خماسية رؤوسها: a، وx_o، وx_1، وy_1، وz_1 على الترتيب. لـ $k > 1$، نحصل على G_k من G_{k-1} بإضافة الرؤوس الثلاثة: x_k، وy_k، و z_k والأضلاع الخمسة: $x_{k-1}x_k$ ، $x_k y_k$، $y_k z_k$، $z_k y_{k-1}$، $z_k x_{k-2}$ تجد البيان G_3 موضحًا عن اليسار في الشكل أدناه. ([Franghnaugh [1985]).





11.3.6. عرِّف متتالية من بيانات المستوى على الشكل التالي: افترض أن G_1 هي C_4، لـ $n > 1$ احصل على G_n من G_{n-1} بإضافة حلقة رباعية تحيط بـ G_{n-1} واجعل كلّ رأس من رؤوس الحلقة الجديدة يجاور رأسين متتابعين من رؤوس الوجه الخارجي السابق في الشكل أعلاه عن اليمين تجد البيان G_3 أثبت أنه إذا كان n عددًا زوجيًّا، فإن كلّ تلوين رباعي فعلي لـ G_n يستخدم كلّ لون على n من الرؤوس بالضبط (Albentson).

12.3.6. (!) من دون استخدام نظرية الألوان الأربعة، أثبت أن كلّ بيان سوي خارجي يكون قابلاً للتلوين بثلاثة ألوان. طبق هذا لتبرهن نظرية صالة عرض الآثار (الفنون) التي تنصّ على أنه: إذا وضعت صالة عرض الآثار كمضلع له n من الحواف، فإن من الممكن وضع $\lfloor n/3 \rfloor$ حارسًا، بحيث إن كلّ نقطة داخلية تكون مرئية من قبل أحد الحراس. لـ $3 \geq n$، ابنِ مضلعًا يتطلب $\lfloor n/3 \rfloor$ حارسًا.



13.3.6. نعرِّف صالة عرض (معرض) الآثار (الفنون) الذي له جدران على أنه مضلع إضافة إلى بعض الأوتار غير المتقاطعة التي تُسمى «جدرانًا» والتي تصل (تربط) بين الرؤوس كلّ جدار داخلي يحتوي على فتحة صغيرة تسمى «مدخلاً» إذا وُضع الحارس على المدخل، فإنه يستطيع رؤية كلّ شيء داخل الغرفتين المتجاورتين، ولكن الحارس الذي لا يكون موجودًا في المدخل، فإنه لا يستطيع أن يرى أبعد من الجدار. حدد أصغر عدد t من الحراس يلزم استخدامه لحراسة معرض فني له جدران بحيث تكون كلّ نقطة داخلية مرئية من قبل أحد الحراس (Hutchinson [1995],Künalgen[1999]) .

14.3.6. (+) أثبت أن البيان السوي الأعظمي يكون قابلاً للتلوين بثلاثة ألوان إذا وفقط إذا كان هذا البيان أويلريًّا. (مساعدة: لإثبات الكفاية؛ استخدم الاستقراء على $n(G)$ اختر زوجًا مناسبًا أو ثلاثة رؤوس متجاورة لاستبدالها بأضلاع) ([Heawood [1898]).

15.3.6. (!) أثبت أنه يمكن تجزئة رؤوس بيان سوي خارجي بسيط إلى مجموعتين، بحيث يكون البيان الجزئي الذي تحدثه كلّ مجموعة عبارة عن اتحاد منفصل لمسارات (مساعدة: عرف تجزئة باستخدام نوعية

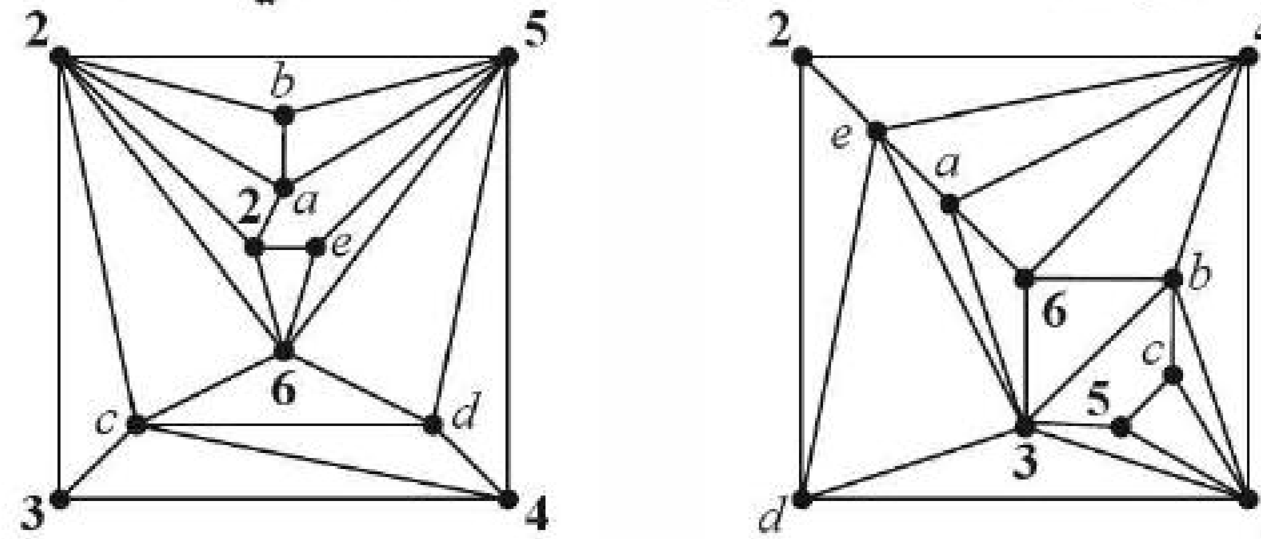
المسافة (زوجية أم فردية) بالنسبة إلى رأس مثبت)،
(MihóK-[1983],AKiyama-Era-Gervacia-Watanabe[1989],Goddard [1991])

16.3.6. (+) أثبت أن المكعب الرباعي Q_4 بيان غير سوي. فكّك Q_4 إلى بيانين متشاكلين سويّين لذا، فإن سُمك Q_4 يساوي 2.

17.3.6. أثبت أن سُمك K_n يساوي $\left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$ على الأقل، وبرهن كذلك أن المساواة تتحقق للبيان K_8 بإيجاد بيان سوي ذاتي التتام له ثمانية رؤوس (تعليق: يساوي السمك $\left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$ ما عدا K_9 K_{10} حيث سُمك كلّ منهما يساوي 3 تجد الحدود العليا عندما $n > 10$ موجودة في (BeineKe –Harary [1965]) وذلك عندما $n \not\equiv 4 \bmod 6$ وفي (AleKsee GonČaKov [1976])عندما يكون: $n \equiv 4 \bmod$.

18.3.6. فكّك K_9 إلى ثلاثة بيانات سوية متشاكلة زوجًا زوجًا.

19.3.6. إذا كان سُمك G يساوي 2، فبرهن أن $\chi(G) \le 12$ استخدم البيانين الموجودين أدناه لتبرهن أن $\chi(G)$ يمكن أن تكون كبيرة، وتصل إلى 9 عندما يكون سُمك G يساوي 2، (T.SulanKe).



20.3.6. (!) عندما يكون r عددًا زوجيًّا و $s > (r-2)^2/2$، فبرهن أن سُمك $K_{r,s}$ يساوي r/2، (BeineKe-Harrary-moon [1964]).

21.3.6. حدد قيمة $v(K_{1,2,2,2})$ واستخدمها لحساب $v(K_{2,2,2,2})$.

22.3.6. أثبت أنه لا يوجد بيان جزئي سوي من $K_{3,2,2}$ بحيث يكون لهذا البيان الجزئي 15 ضلعًا، واستخدم هذا لتعطي إثباتا ثانيًا لحقيقة أن $v(K_{3,2,2}) \ge 2$.

23.3.6. ليكن M_n البيانَ الذي نحصل عليه من الحلقة C_n بإضافة أوتار تربط بين الرؤوس المتقابلة (إذا كان n عددًا زوجيًّا)، وتربط بين الرؤوس شبه المتقابلة (إذا كان n عددًا فرديًّا). إن البيان M_n منتظم من الدرجة 3 إذا كان n زوجيًّا، ومنتظم من الدرجة 4 إذا كان n عددًا فرديًّا. جد $v(M_n)$، (Guy-Harary [1967]).

24.3.6. البيان P_n^k له مجموعة رؤوس $[n]$، ومجموعة أضلاع هي: $\{ij: |i-j| \le k\}$، أثبت أن P_n^3 بيانٌ سوي أعظمي، استخدم طمرًا سويًّا للبيان P_n^3 لتبرهن أن: $v(P_n^4) = n-4$ (Harary – Kainen [1993]).

25.3.6. (+) لكلّ عدد صحيح موجب k، ابن (جد) بيانًا يمكن طمره على الطارة إلا أن رسمه في المستوى يحوي K تقاطعًا على الأقل (مساعدة: يكفي إعطاء عائلة طاريّة (يمكن طمرها على الطّارة) واحدة بحيث تكون سهلة الوصف: استخدم القضية 13.3.6.).

26.3.6. (!) استخدم حساب كليتمان $v(K_{6,n}) = 6\left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$ لتعطي تعليلاً حسابيًّا (عدًّيًّا) للحدود الدنيا التالية:

a) $v(K_{m,n}) \ge m \frac{m-1}{5} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ (Guy [1970]).

b) $v(K_p) \ge \frac{1}{80} P^4_{+} O(P^3)$.

27.3.6. (!) لقد تم تخمين أن $\nu(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. افترض أن هذه المخمنة صحيحة لـ $K_{m,n}$، وأن m عدد فردي. أثبت أن هذه المخمنة صحيحة كذلك لـ $K_{m+1,n}$، (KLeitman [1970]) .

28.3.6.(!) افترض أن m و n عددان فرديان، وبرهن أن نوعية عدد أزواج الأضلاع المتقاطعة تكون نفسها في رسوم $K_{m,n}$ جميعها (نأخذ في الحسبان الرُّسوم التي تتقاطع فيها الأضلاع مرة واحدة على الأكثر فقط، مع الأخذ في الحسبان أيضًا أن الأضلاع التي لها النقطة الطرفية نفسها لا تتقاطع) استنتج أن $\nu(K_{m,n})$ يكون فرديًّا عندما يكون كلّ من $m - 3$ و $n - 3$ قابلاً للقسمة على 3، ولكنه يكون زوجيًّا بخلاف ذلك.

29.3.6. افترض أن n عدد فردي، أثبت أن نوعية عدد أزواج الأضلاع المتقاطعة تكون نفسها. استنتج أن $\nu(K_n)$ يكون زوجيًّا عندما يكون n مكافئًا لواحد أو ثلاثة بمقياس 8 (أي عندما $n \equiv 1 \mod 8$، أو $n \equiv 3 \mod 8$)، ويكون فرديًّا عندما يكون n مكافئًا لـ 5 أو 7 بمقياس 8.

30.3.6. (!) من المعلوم أن $\nu(C_m \square C_n) = (m-2)n$ إذا كانت $m \leq \min\{5,n\}$، وكذلك $\nu(K_4 \square C_n) = 3n$:

a) جد رسمًا في المستوى لإثبات الحدود العليا.

b) أثبت أن $\nu(C_3 \square C3) \geq 2$. (مساعدة: جد ثلاثة تقسيمات لـ $K_{3,3}$، بحيث تستخدم هذه التقسيمات مجتمعة كلّ ضلع مرتين).

31.3.6. اجعل $f(n) = \nu(K_{n,n,n})$:

a) أثبت أن $3\nu(K_{n,n}) \leq f(n) \leq 3\binom{n}{2}^2$.

b) أثبت أن $\nu(K_{3,2,2}) = 2$ و $\nu(K_{3,3,1}) = 3$. ثم أثبت أن $7 \leq \nu(K_{3,3,2}) \leq 5$، و $9 \leq \nu(K_{3,3,3}) \leq 15$.

c) يبرهن التمرين 3.6. $26a$ أن الحد الأدنى في فرع (a) يساوي $\left(3/20\right)n^4 + O(n^3)$ على الأقل حَسِّن هذا الحد باستخدام علاقة خطوات مكررة لإثبات أن $f(n) \geq n^3(n-1)/6$.

d) إنّ الحدّ الأعلى في الفرع (a) هو $\frac{3}{4}n^4 + O(n^3)$، حَسِّن هذا الحدّ إلى الحدّ $f(n) \leq \frac{9}{16}n^4 + O(n^3)$. (مساعدة: أحد البناءات يطمر البيان في رباعيّ السّطوح (tetrahedron) ويعمم لبناء $K_{L,m,n}$، وهناك بناء آخر يستخدم K_n، ويعمّم لبناء $K_{n,\ldots,n}$).

32.3.6.(*) جدْ (ابن) طمرًا على الطارة لبيان بسيط غير ثنائي الفرع منتظم من الدرجة 3 بحيث يكون طول كلّ وجه فيه عددًا زوجيًّا.

33.3.6. (*) افترض أن n عدد يساوي 9 على الأقل، بحيث إن n ليس عددًا أوليًّا، وليس ضعفًا لعدد أولي. جد (ابن) بيانًا على الطارة (يمكن رسمه على الطارة دون تقاطعات) بحيث يكون له n رأسًا، ويكون منتظمًا من الدرجة 6.

34.3.6.(*) نقول: إن طمرًا لبيان على سطح معين يكون منتظمًا إذا كان لوجوهه جميعها الطول نفسه جد طمرًا منتظمًا على الطارة لكلّ من: $K_{4,4}$ ، و$K_{3,6}$، و $K_{3,3}$.

35.3.6.(*) أثبت صيغة أويلر للجنس γ: إن عدد رؤوس أي طمر وأضلاعه وأوجهه لخلية ثنائية لبيان على سطح $S\gamma$ يحقق العلاقة $n - e + f = 2 - 2\gamma$.

استنتج من ذلك أنه يوجد $3(n - 2 + 2\gamma)$ ضلعًا على الأكثر لبيان بسيط له n من الرؤوس، وقابل للطمر على S_γ.

36.3.6.(*) استخدم صيغة أويلر لـ S_γ لتبرهن أن $\gamma(K_{3,3,n}) \geq n-2$. وحدد هذه القيمة بالضبط عندما $n \leq 3$.

37.3.6.(*). لكلّ عدد صحيح موجب k، استخدم صيغة أويلر لتبرهن أنه يوجد بيان سوي G، بحيث إن $\gamma(G \square K_2) \geq k$.

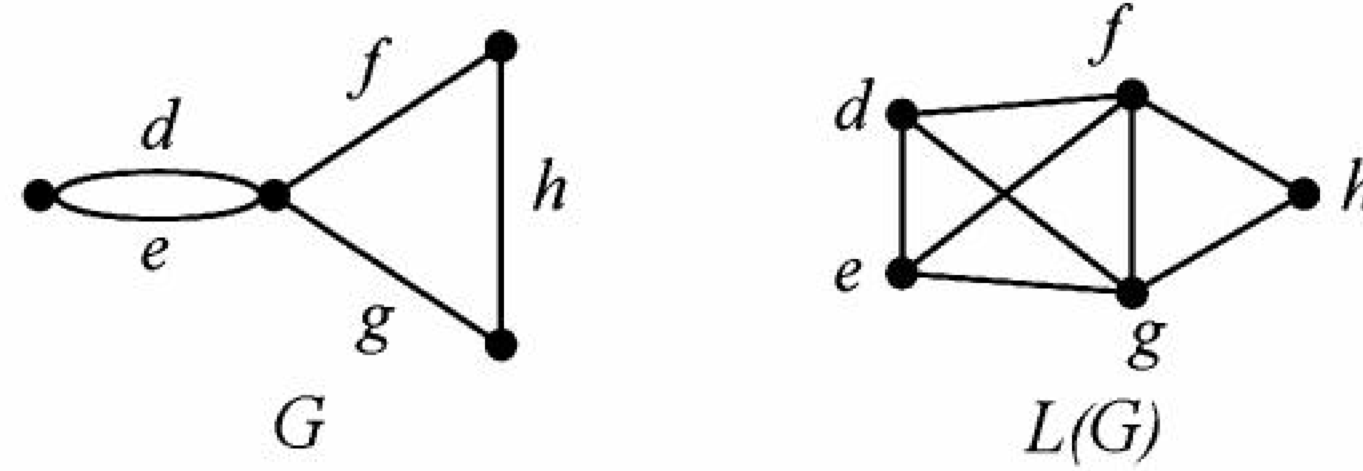
الفصل السابع

الأضلاع والحلقات (Edges and Cycle)

1.7. البيانات الخطية (Line Graphs and Edge Coloring)

يوجد للكثير من المسائل المتعلقة بالرؤوس مشابه طبيعي متعلق بالأضلاع. فمثلاً، المجموعات المستقلة ليس لها رؤوس متجاورة؛ والمواءمات ليس لها أضلاع "متجاورة"، بالإضافة إلى أن تلوين الرأس يجزئ الرؤوس إلى مجموعات مستقلة. وبدلاً من ذلك، نستطيع تجزئة الأضلاع إلى مواءمات. إنَّ هذه الأزواج من المسائل مرتبطة من خلال البيانات الخطية (التعريف 18.2.4). وهنا نعيد التعريف، لنؤكد عودتنا إلى السياق بأن البيان ربما يملك أضلاعًا متكررة. نستعمل "بيانًا خطيًّا أو خطانيًّا" و $L(G)$ بدلاً من " بيان ضلعي"؛ لأن $E(G)$ ترمز أصلاً إلى مجموعة الأضلاع.

1.1.7. تعريف: البيان الخطاني (line graph) للبيان G، يكتب $L(G)$. هو البيان البسيط الذي تكون رؤوسه هي الأضلاع في G، حيث $ef \in E(LG)$ عندما يكون e و f لهما نهاية طرفية مشتركة في G.



لاحظ أن بعض المسائل حول الأضلاع في البيان G يمكن التعبير عنها بوصفها مسائل حول الرؤوس في $L(G)$. وعندما توسع إلى البيانات البسيطة جميعها، فربما تكون مسألة الرأس أكثر صعوبة. أما إذا استطعنا حلها، فنكون قد أجبنا عن السؤال الأصلي حول الأضلاع في G بتطبيق نتيجة الرأس على $L(G)$.

درسنا في الفصل الأول الدارات الأويلرية. إنَّ دارة أويلرية في G تعطي حلقة مولدة في البيان الخطي $L(G)$. (يبين التمرين 10.2.7. أن العكس ربما لا يتحقق!) في الجزء 2.7، سوف ندرس الحلقات المولدة للبيانات عمومًا. وكما نوقش في الملحق B، فإن هذه المسألة صعبة حسابيًّا.

أما في الفصل الثالث، فقد درسنا المواءمات. إن مواءمة في G تصبح مجموعة مستقلة في $L(G)$. لذلك، فإن $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$، وأن دراسة α' للبيانات هي نفسها دراسة α للبيانات الخطية. وأن حساب α للبيانات العامة هو أكثر صعوبة من حسابها للبيانات الخطية. يأخذ الجزء 1.3 هذا في الحسبان للبيانات الثنائية الفرع، ونصف الحالة العامة باختصار في الملحق B.

وفي الفصل الرابع درسنا الترابط. لقد أعطت نظرية منجر علاقة أصغر أعظم للترابط وللمسارات المنفصلة داخليًّا في البيانات جميعها. وبتطبيق هذه النظرية على بيان خطي مناسب، نكون قد أثبتنا علاقة أصغر أعظم مشابهة للترابط الضلعي وللمسارات المنفصلة ضلعيًّا في البيانات جميعها.

و درسنا في الفصل الخامس تلوين الرأس. أما تلوين الأضلاع، فإنه يجعل كل صف لوني مواءمةً تصل فعليًّا إلى تلوين رأسي للبيان الخطي. لذلك، فإن التلوين الضلعي هو حالة خاصة من التلوين الرأسي؛ وعليه فهو أسهل. سوف نناقش التلوين الضلعي في هذا الجزء. عندما تُصاغ نتيجتنا الرئيسة بلغة التلوين الرأسي للبيانات الخطية، فإنها خوارزمية لحساب $\chi(H)$ ضمن مدى لا يتعدى 1 عندما يكون H هو البيان الخطي لبيان بسيط. لذلك، تقترح البيانات الخطية المسائل للتلوين الضلعي والحلقات المولدة التي سوف تناقش في هذا الفصل. أولاً، سوف ندرس هذه البنود بصورة منفصلة. وأما في الجزء 3.7، فسوف ندرس صلات بعضها ببعض، وصلاتها بالبيانات المستوية أيضًا.

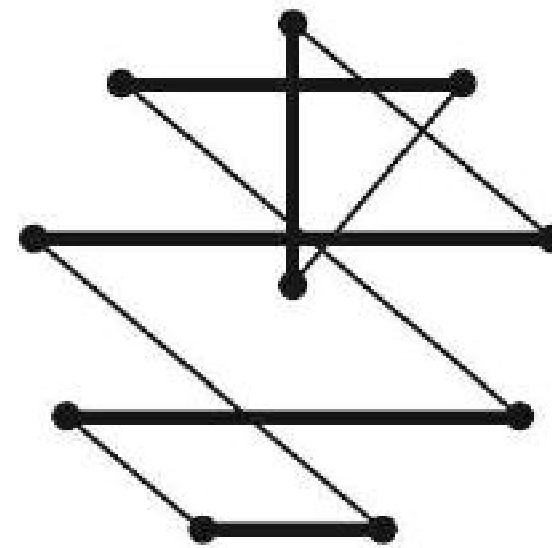
عند تطبيق الخوارزميات للبيانات الخطية، قد نحتاج إلى معرفة ما إذا كان G بيانًا خطيًّا. هناك خوارزميات جيدة تستخدم تمييزات البيانات الخطية لفحص ذلك. ولكن سوف نناقشها في نهاية هذا الجزء.

التلوينات الضلعية (Edge-Colorings)

احتجنا في المثال 11.1.1 الذي قدم التلوين الرأسي إلى جدولة لجان مجلس الشيوخ. أما مسائل التلوين الضلعي فتظهر عندما تكون الأشياء التي تُجدول أزواجًا من العناصر الموجودة فعليًّا.

2.1.7. مثال: التلوين الضلعي لـ K_{2n}. نريد جدولة مباريات في بطولة تتكون من $2n$ فريقًا، بحيث يلعب كل زوج من الفرق لعبة واحدة، على أن يلعب كل فريق مرة واحدة في الأسبوع على الأكثر. بما أن كل فريق يجب أنْ يلعب $(2n -1)$ مباراة مع الفرق الأخرى، فإن الموسم يستمر $(2n -1)$ أسبوعًا على الأقل. ويجب أن تشكل مباريات كل أسبوع مواءمة. لاحظ أننا نستطيع جدولة الموسم في $(2n -1)$ أسبوعًا إذا وفقط إذا استطعنا تجزئة $E(K_{2n})$ إلى $(2n -1)$ مواءمة. وبما أن K_{2n} بيان منتظم من الدرجة $(2n - 1)$، فإن هذه المواءمات يجب أن تكون مواءمات تامة.

والشكل أدناه يصف الحل. ضع رأسًا واحدًا في المركز. رتب الـ $(2n - 1)$ رأسًا المتبقية حلقيًّا، بحيث تُعرض كصفوف متطابقة للأساس $(2n - 1)$. كما في النظرية 16.2.2، فإن الفرق بين صفين متطابقين هو 1 إذا كانا متتاليين، و 2 إذا وُجد صفٌّ بينهما، وهكذا حتى تصل إلى الفرق $n - 1$. لاحظ أنه يوجد $(2n - 1)$ ضلعًا مع كل فرق i لكل $1 \leq i \leq n -1$.



تتكون كل مواءمة من ضلع واحد من كل صفٍّ مختلف، بالإضافة إلى ضلع واحد يصل إلى الرأس المركزي. ونعرض واحدة من المواءمات بالخط السميك. إنَّ تدوير الصورة (لنحصل على مواءمة رفيعة) يعطي n ضلعًا

جديدًا. مرة أخرى، هؤلاء هم واحد لكل طول زائد واحد للمركز. إن الـ $(2n - 1)$ دورانًا للشكل يعطي المواءمات المطلوبة؛ لأن هذه المواءمات تأخذ أضلاعًا منفصلة من كل صف اختلاف، وأضلاعًا منفصلة أخرى تتضمن الرأس المركزي. ■

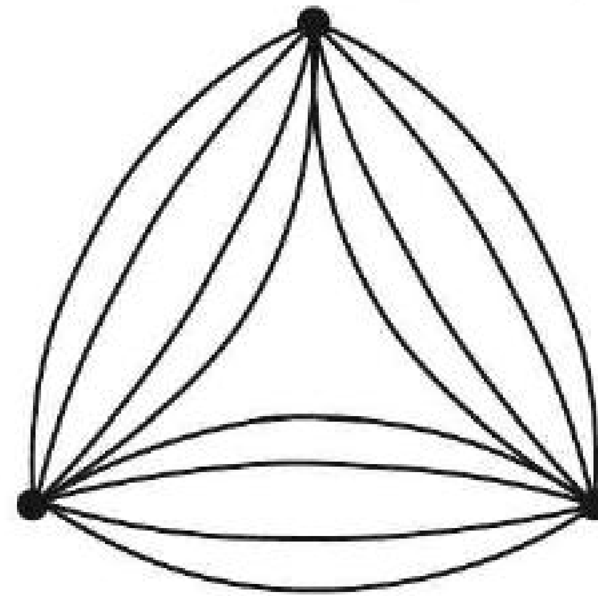
3.1.7. تعريف: التلوين الضلعي من الدرجة k (k- edge - coloring) للبيان G هو دالة أوسمة $f: E(G) \rightarrow S$، حيث $|S| = k$ (نستخدم عادة $S = [k]$). الأوسمة هي الألوان (colors)؛ والأضلاع التي من لون واحد وتشكل **صفًا لونيًا** (color class). يسمى التلوين الضلعي من الدرجة k **تلوينًا فعليًا** (proper) إذا كان للأضلاع الواقعة على الرأس نفسه أوسمة مختلفة؛ أي أن كل صفّ لوني هو مواءمة. **ويكون البيان قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة k** (k- edge colorable) إذا كان يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة k. **والعدد اللوني الضلعي** $\chi'(G)$ (edge - chromatic number) للبيان العديم العرى G هو أصغر k بحيث يكون G قابلًا للتلوين الضلعي من الدرجة k.

الدليل اللوني (Chromatic index) هو اسم آخر لـ $\chi'(G)$. بما أن الأضلاع التي تتشارك برأس تحتاج إلى ألوان مختلفة، لذلك $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. لقد أثبت كل من Vizing [1964] و Gupta [1966] على حدى أن $\Delta(G) + 1$ من الألوان تكون كافية عندما يكون البيان G بسيطًا؛ وهذا هو هدفنا الرئيس. لاحظ أن العصبة في $L(G)$ هي مجموعة أضلاع لـ G متقاطعة زوجًا زوجًا. وعندما يكون G بسيطًا، فإن مثل هذه الأضلاع تشكل نجمة أو مثلثًا في G (التمرين 9). لاحظ أن نظرية فايزنج للصفّ الوراثي في البيانات الخطية للبيانات البسيطة تنص على أن $\chi(H) \leq \omega(H) + 1$؛ وعليه، فإن البيانات الخطيةَ بياناتٌ تامةٌ تقريبًا.

وعلى النقيض لـ $\chi(G)$ في الفصل الخامس، فإن تأثير الأضلاع المتكررة يكون كبيرًا على $\chi'(G)$. لاحظ أن البيان الذي يحتوي على عروة لا يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا. والصفة "عديم العرى" تستثني العرى، ولكنها تسمح بالأضلاع المتكررة.

4.1.7. تعريف: في بيان G مع أضلاع متكررة، نقول إن زوج الرؤوس x,y هو ضلع مضاعفته m (multiplicity) إذا وجد m من الأضلاع التي نقاطها الطرفية y,x. ونكتب $\mu(xy)$ للتعبير عن تضاعف الزوج، في حين نكتب $\mu(G)$ للتعبير عن المضاعفة الكبرى للأضلاع في G.

5.1.7. مثال: "المثلث السمين" (Fat Triangle). في البيانات العديمة العرى التي تحوي أضلاعًا متكررة، نجد أن $\chi'(G)$ ربما تتعدى $\Delta(G) + 1$. لقد أثبت شانون [1949] أن الحد الأعلى لـ $\chi'(G)$ بدلالة $\Delta(G)$ وحدها هو $3\,\Delta(G)/2$ (انظر النظرية 13.1.7). ثم أثبت فايزنج وجيتا أن $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$، حيث إن $\mu(G)$ هي مضاعفة الضلع الكبرى. إن البيان أدناه يحقق كلا الحدين. حيث تتقاطع الأضلاع زوجًا زوجًا، وعليه فإنها تحتاج إلى ألوان مختلفة. لذلك فإن $\chi'(G)=3\,\Delta(G)/2 = \Delta(G) + \mu(G)$. ■



6.1.7. ملاحظة: لاحظنا دائمًا أن $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. إضافة إلى أن الحد العلوي $\chi'(G) \leq 2\,\Delta(G) - 1$ يتبع أيضًا بسهولة. إن تلوين الأضلاع بترتيب ما، يعطي الدليل اللوني الأقل للضلع الحالي دائمًا، وهو يختلف عن

الألوان التي ظهرت سابقًا على الأضلاع التي تشترك بالرأس نفسه مع الضلع الحالي. وبما أنه لا يوجد ضلع يقع على أكثر من $2(\Delta(G) - 1)$ ضلعًا أخرى، فإنه لا يستعمل أكثر من $2(\Delta(G) - 1)$ لونًا. لذلك، فإن الإجراء هو التلوين الشره لرؤوس $L(G)$ تمامًا.

$$\chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta\ (L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1.$$ ■

لاحظ أنه إذا اشترك ضلعان بالرأس نفسه، فإننا نقول إنهما واقعان على بعض الرأس أو على الرأس نفسه.

للبيانات الثنائية الفرع في الفصل الثالث، نجد أنَّ النتائج تحسن الحد العلوي لملاحظة 6.1.7، وتحقق الحد الأدنى الواضح حتى عند السماح بوجود الأضلاع المتكررة. فضلًا عن ذلك، توجد خوارزمية مناسبة لإعطاء تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $\Delta(G)$ في البيان الثنائي الفرع G.

7.1.7. نظرية : ([Konig [1916]). إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع، فإن $\chi'(G) = \Delta(G)$.

الإثبات. تنص النتيجة 13.1.3 على أن كل بيان ثنائي الفرع منتظم H له معامل من الدرجة 1. وبالاستقراء على $\Delta(H)$، فإن هذا يؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $\Delta(H)$. لذا، يكفي إثبات أنه لكل بيان ثنائي الفرع G مع درجة كبرى k، يوجد بيان ثنائي الفرع H منتظم من الدرجة k يحتوي على G.

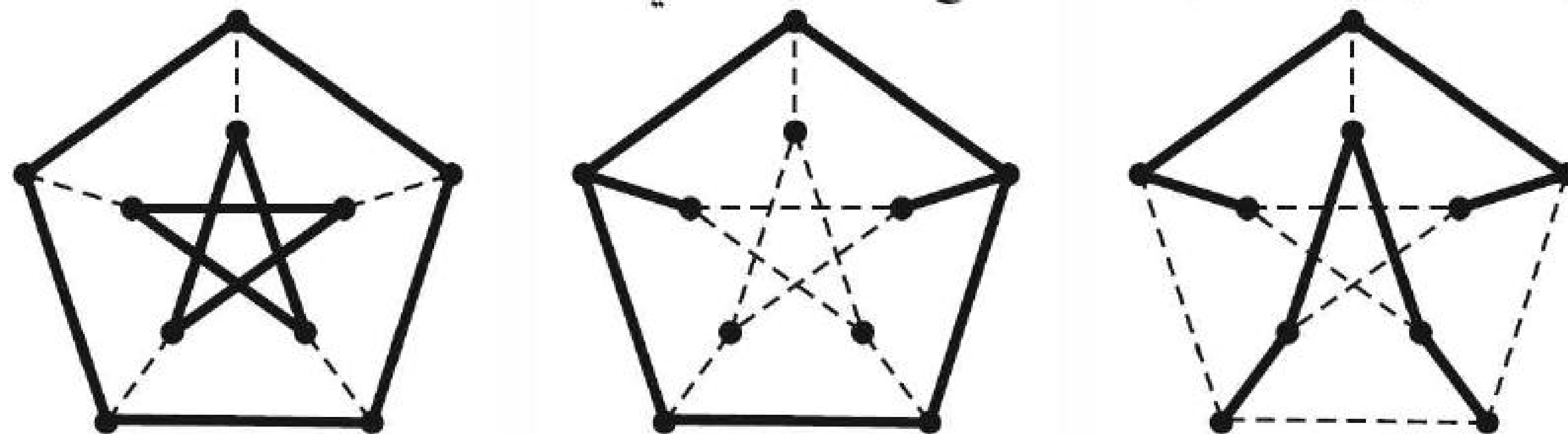
ولإنشاء مثل هذا البيان، نضيف أولاً رؤوسًا إلى المجموعة المجزأة الأصغر لـ G إذا كان ضروريًا؛ حتى نعادل الحجمين. إذا كان الناتج G' ليس منتظمًا، فإن كل مجموعة مجزأة تملك رأسًا درجته أقل من k. لذا، أضف ضلعًا مع هذين الرأسين بوصفه نقاطًا طرفية. استمر في إضافة مثل هذه الأضلاع حتى يصبح البيان منتظمًا من الدرجة k؛ إن البيان الناتج سوف يكون H. ■

للبيان المنتظم G، لاحظ أن التلوين الضلعي الفعلي بـ $\Delta(G)$ من الألوان يكافئ التفكيك إلى معاملات من الدرجة 1.

8.1.7. تعريف : إن التفكيك للبيان المنتظم G إلى معاملات من الدرجة 1 هو تحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (1-factorization) لـ G. يسمى البيان الذي له تحليل من الدرجة 1 بيانًا **قابلًا للتحليل إلى عوامل من الدرجة 1** (1 - factorable).

لاحظ أن الحلقة الفردية غير قابلة للتحليل إلى العوامل من الدرجة 1، وأن $\chi'(C_{2m} + 1) = 3 > \Delta(C_{2m} + 1)$.
كما أن بيان بيترسون يتطلب لونًا إضافيًا واحدًا فقط .

9.1.7. مثال : إن العدد اللوني الضلعي لبيان بيترسون يساوي 4 ([Peterson [1898]). نعلم أن بيان بيترسون منتظم من الدرجة 3. وقابلية التلوين الضلعي من الدرجة 3 تتطلب تحليلاً من الدرجة 1. إن حذف مواءمة تامة يخلِّف معاملاً من الدرجة 2. و المركبات جميعها حلقات. وأن التحليل من الدرجة 1 يمكن أن يتم فقط إذا كانت هذه الحلقات جميعها زوجية. لذلك، فإنه يكفي تبيان أن كل معامل من الدرجة 2 يشاكل $2C_5$. الآن، خذ في الحسبان الرسم الذي يحتوي على حلقتين من الدرجة 5 ومواءمة (**الأضلاع المتقاطعة** cross edges) بينهما. ونأخذ في الحسبان حالات بعدد الأضلاع المتقاطعة التي استعملت.



تستخدم كل حلقة عددًا زوجيًّا من الأضلاع المتقاطعة؛ لهذا فإن معاملاً H من الدرجة 2 يمتلك عددًا زوجيًّا m من الأضلاع المتقاطعة. إذا كان $m = 0$ (الشكل عن اليسار)، فإن $H = 2C_5$.

إذا كان $m = 2$ (الشكل بالوسط)، فإن للضلعين المتقاطعين نقاطًا طرفية غير متجاورة على الحلقة الداخلية أو على الحلقة الخارجية. فعلى الحلقة التي عليها أضلاع متقاطعة والتي نقاطها الطرفية غير متجاورة، فإن الرؤوس الثلاثة المتبقية تجبر الأضلاع الخمسة جميعها لهذه الحلقة لتكون في H، وهذا يخالف متطلب المعامل من الدرجة 2.

إذا كان $m = 4$ (الشكل عن اليمين)، فإن أضلاع الحلقة تجبر على الدخول إلى H من خلال الأضلاع المتقاطعة غير المستخدمة لتشكل $2P_5$ والتي تكملتها الوحيدة هي لمعامل من الدرجة 2 في H هو $2C_5$. لاحظ أنه بما أن C_5 قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3، فإن البيان قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 4. الآن، سوف نأخذ البيانات البسيطة جميعها في الحسبان. نجعل $\Delta(G) + 1$ لونًا في المتناول، ونبني تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من خلال دمج الأضلاع واحدًا بعد الآخر حتى يصبح لدينا تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $(\Delta(G) + 1)$ للبيان G. وتسير هذه الخوارزمية بسرعة مذهلة.

10.1.7. نظرية: (Gupta [1966], Vizing [1964, 1965]) إذا كـان G بيانًا بسيطًا، فإن $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

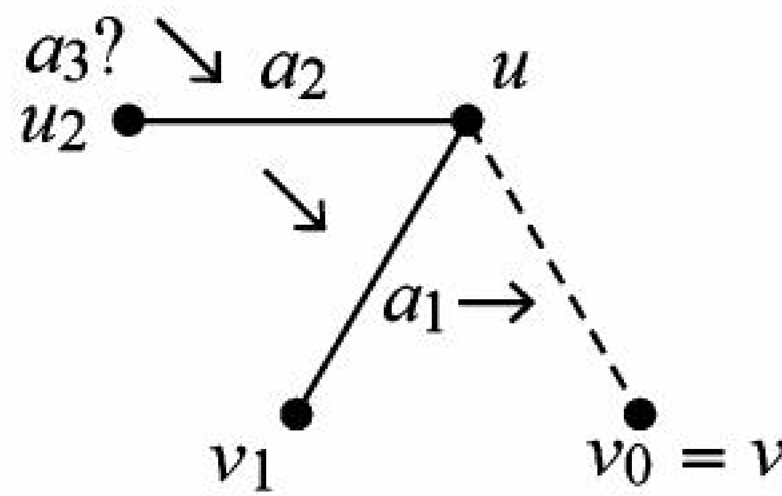
الإثبات: ليكن f تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة $(\Delta(G) + 1)$ للبيان الجزئي G' من البيان G. إذا كان $G' \neq G$، فإنه يوجد ضلع uv لم يلون من قبل f. ومن الممكن بعد إعادة تلوين بعض الأضلاع توسيع التلوين ليشمل uv؛ أن ندعو هذه موسعة أو توسعة (augmentation). وبعد $e(G)$ من الموسعات، نحصل على تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $(\Delta(G) + 1)$ للبيان G.

بما أن عدد الألوان تجاوز $\Delta(G)$، فيوجد لكل رأس لون لم يظهر على الأضلاع الواقعة على مثل هذا الرأس. ليكن a_0 لونًا لم يظهر عند u. نولد قائمة من الجيران لـ u وقائمة متشابهة من الألوان. ابدأ مع $v_0 = v$.

ليكن a_1 لونًا مفقودًا عند v_0. نستطيع افتراض أنَ a_1 يظهر عند u على ضلع ما مثل uv_1. وبخلاف ذلك، نستطيع استعمال a_1 على uv_0.

ليكن a_2 لونًا مفقودًا عند v_1. نستطيع افتراض أنَّ a_2 يظهر عند u على ضلع ما مثل uv_2. وبخلاف ذلك، نستطيع استبدال اللون a_1 مع a_2 على uv_1، ثمّ نستعمل a_1 على uv_0 لنوسع التلوين.

افترض أنه تم اختيار الضلع uv_{i-1} مع اللون a_{i-1}، وليكن a_i لونًا مفقودًا عند v_{i-1}. إذا كان a_i مفقودًا عند u، فإننا نستعمل a_i على uv_{i-1}، وننقل اللون a_j من uv_j إلى uv_{j-1} لكل $1 \leq j \leq i - 1$ لنكمل الموسعة. وهذا ما يدعى الإزاحة السفلية من (i) downshifting from i. إذا ظهر a_i عند u (على ضلع ما مثل uv_i)، فإن العملية تستمر.



بما أنه يوجد فقط $(\Delta(G) + 1)$ لونًا لنختار منها، فإن قائمة الألوان المختارة سوف تتكرر أخيرًا (أو نكمل الموسعة بالإزاحة السفلية). ليكن l هو الدليل الأصغر بحيث يكون اللون المفقود عند v_l هو في القائمة $a_1, \ldots, a_l$، وليكن هذا اللون هو a_k. بدلاً من توسيع القائمة، نستخدم هذا التكرار لعمل الموسعة بإحدى الطرائق المتعددة.

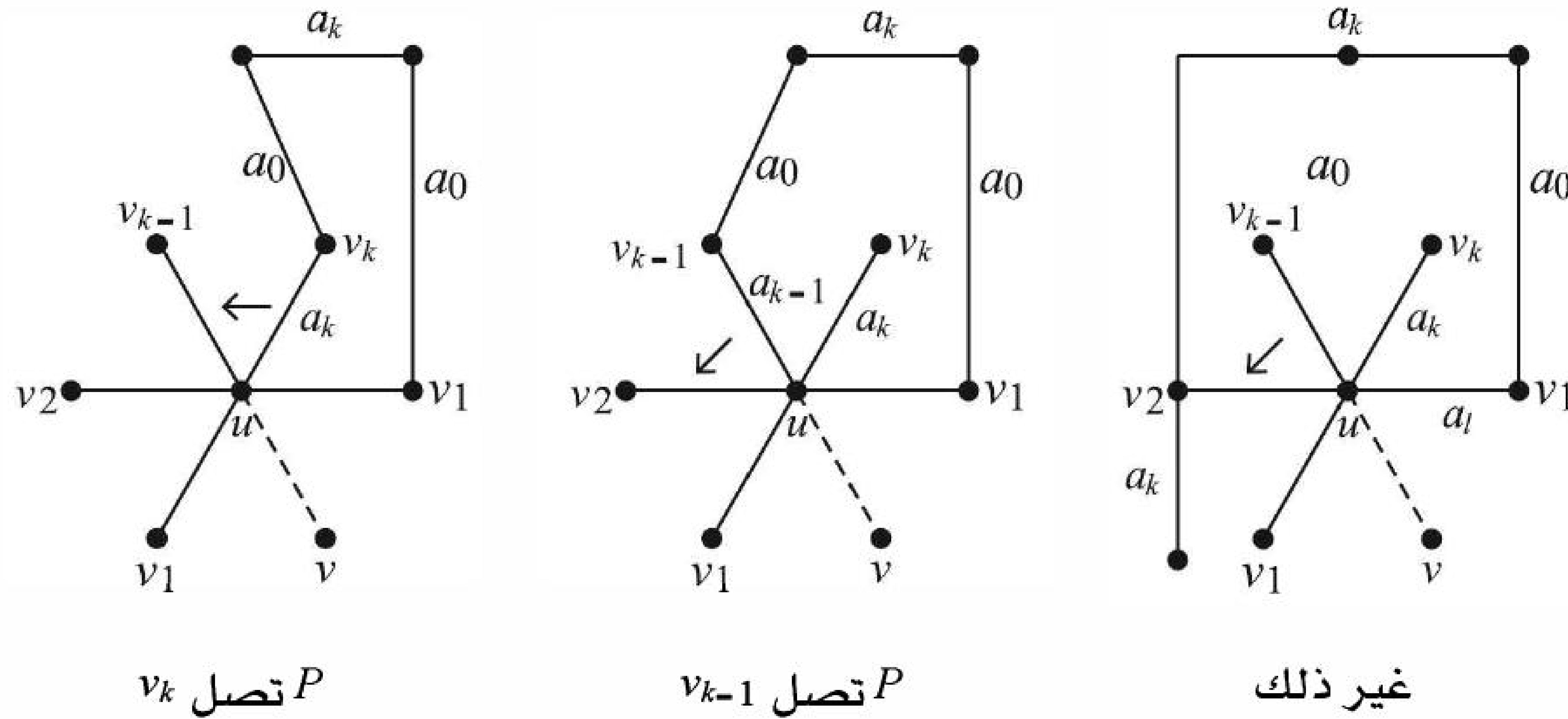
اللون المفقود a_k عند v_l يكون مفقودًا أيضًا عند v_{k-1}، ويظهر على uv_k. إذا لم يظهر a_0 عند v_l ، فإننا نقوم بالإزاحة السفلية من v_l، ونستعمل اللون a_0 على uv_l لإكمال الموسعة. لذلك نستطيع افتراض أن a_0 يظهر عند v_l.

ليكن P هو المسار المتناوب الأعظم بأضلاع ألوانها a_0 و a_k تبدأ عند v_l على طول اللون a_0. يوجد فقط مسار واحد مثل هذا؛ لأن كل رأس يقع على الأكثر على ضلع واحد في كل لون (نهمل الأضلاع التي لم تلوَّن بعد). لإكمال الموسعة، سوف نبدل اللونين a_0 و a_k على P، ونقوم بالإزاحة السفلية من الجار المناسب لـ u، بالاعتماد على مكان ذهاب P. إذا امتد P إلى v_k، فإنه يصل إلى v_k على طول ضلع ما مع لون a_0، ويتبع $v_k u$ في لون a_k، ويتوقف عند u الذي ينقصه اللون a_0. في هذه الحالة، نقوم بالإزاحة السفلية من v_k ونحوِّل الألوان على P (الصورة أسفل اليسار).

ولكن، إذا امتد P إلى v_{k-1}، فإنه يصل إلى v_{k-1} على اللون a_0 ويتوقف هناك؛ لأن a_k لا يظهر عند v_{k-1}. في هذه الحالة، نقوم بالإزاحة السفلية من v_{k-1}، ونعطي اللون a_0 إلى uv_{k-1}، ونبدِّل الألوان على P (الصورة الوسطى).

أما إذا لم يمتد P إلى v_k أو v_{k-1}، فسوف ينتهي عند رأس خارج المجموعة $\{u, v_l, v_k, v_{k-1}\}$ في هذه الحالة، نقوم بالإزاحة السفلية من v_l، ثم نعطي اللون a_0 إلى uv_l، ونبدّل الألوان على P (الصورة أقصى اليمين)

وفي كل حالة، فإنّ التغيرات الموصوفة تؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $\Delta(G) + 1$ لـ $G' + uv$، وهكذا نكون قد أكملنا الموسعة المطلوبة. ■



P تصل v_k P تصل v_{k-1} غير ذلك

وأما فيما يتعلق بالبيانات البسيطة، فإنه يوجد لدينا الآن احتمالان فقط لـ χ'.

11.1.7. تعريف: البيان البسيط G هو صنف من النوع 1 (أو صنف Class 1) (1) إذا كان $\chi'(G) = \Delta(G)$. وهو صنف من النوع 2 أو صنف (Class 2) إذا كان $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

يعدُّ تحديد ما إذا كان البيان هو صنف 1 أو صنف 2 عمومًا صعبًا (Holyer [1981] انظر الملحق B)؛ لذلك نبحث عن شروط تمنع أو تضمن التلوين الضلعي من الدرجة $\Delta(G)$. وهناك أمثلة على مثل هذه الشروط متضمنة في التمارين 24 - 27.

12.1.7. ملاحظة : يوجد شرط ضروري واضح لبيانٍ ما ليكون صنف 1، والذي خُمِّن ليكون شرطًا كافيًا عندما $\Delta(G) > \frac{3}{10}n(G)$. يلاحظ من التمرين 27 فرع (a) أن بيانًا جزئيًا من G مع درجة فردية هو عائق لقابلية التلوين الضلعي من الدرجة $\Delta(G)$ إذا كان يحوي أضلاعًا كثيرة جدًا. وأنَّ بيانًا جزئيًا H من بيان بسيط G هو **بيان جزئي فوق الممتلئ** (overfull subgraph) إذا كان $n(H)$ فرديًا وكان $2e(H) / (n(H) - 1) > \Delta(G)$.

تنص **مخمنة فوق الممتلئ** (Overfull Conjecture) – Chetwynd- Hilton [1986] انظر أيضًا Hilton [1989]) على أنه إذا كان $\Delta(G) > n(G)/3$، فإن البيان البسيط G هو صنف 1 إذا وفقط إذا كان G

لا يملك بيانًا جزئيًّا فوق المتلئ. لاحظ أن بيان بيترسون مع رأس محذوف يبين أن الشرط غير كافٍ عندما يكون $\Delta(G) = n(G)/3$ (تمرين 28).

لاحظ أن مخمنة فوق المتلئ تؤدي إلى مخمنة التحليل إلى عوامل من الدرجة 1 (1- factorization Conjecture): إذا كان $r \geq m$ (أو $r \geq m - 1$ إذا كان m زوجيًّا)، فإن كل بيان بسيط منتظم من الدرجة r ورتبته $2m$ هو صنف 1. وهذا أيضًا حاد (التمرين 29).

تتحقق الاستنتاجات لهاتين المخمنتين عندما يكون $\Delta(G)$ كبيرًا بما فيه الكفاية.
Chetwynd- Hilton [1989], Niessen- Volkmann [1990], Perkovic – Reed [1997], Plantholt [2001].

عندما يملك G أضلاعًا متكررة، فإن لـ $\chi'(G) \leq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor$ (Shannon [1949]) و $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ (Gupta [1966], Vizing [1964, 1965]). تتبع هذه الحدود (التمرين 35) حدود أندرسين (Andersen) [1977] وجولدبيرج (Goldberg) [1977, 1984].

$$\chi'(G) \leq \max\{\Delta(G), \max_P \lfloor 1/2(d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z)) \rfloor\}$$

حيث $\mathbf{P} = \{x,y,z \in V(G): y \in N(x)) \cap N(z)\}$. إن إثبات هذا الحد يستخدم الطرق في النظرية 10.1.7. إضافة إلى حجج العد. لتوضيح استخدام حجج العد؛ نثبت نظرية شانون من تلك التي في Vizing و Gupata.

13.1.7.* نظرية: (Shannon [1949]) إذا كان G بيانًا، فإن $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

الإثبات: ليكن $k = \chi'(G)$، وافترض أن $k \geq (3/2)\ \Delta(G)$. وليكن G' بيانًا جزئيًّا أصغريًّا لـ G مع $\chi'(G') = k$. بما أن $k \leq \Delta(G') + \mu(G')$ (Vizing–Gupta)، فسنحصل على أن $\mu(G') \geq \Delta(G)/2$. ليكن e ضلعًا نقاطه الطرفية x, y مع مضاعفة (عدة مرات تكرار) $\mu(G')$.

ليكن f هو تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $(k - 1)$ لـ $G' - e$. في $G' - e$ كل من x و y له درجة على الأكثر $\Delta(G) - 1$؛ لذلك تحت f يكون على الأقل $(k-1) - (\Delta(G) - 1)$ لونًا مفقودًا عند x، و الشيء نفسه عند y. ولا يوجد أي لون مفقود عند كليهما؛ لأن G' غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة $k - 1$. وبحساب الـ $\mu(G') - 1$ لونًا المستخدمة على أضلاع نقاطها الطرفية y,x نجد أن:

$$2(k - \Delta(G) + (\Delta(G)/2) - 1 \leq 2\ (k - \Delta(G)) + \mu(G) - 1 \leq - 1)$$

وعليه فإن $k \leq (3/2)\ \Delta\ (G)$. ■

أخيرًا، توجد مخمنة عامة تماثل مخمنة فوق المتلئ.

14.1.7.* مخمنة: (Seymour [1979a], Goldberg [1973, 1984]) إذا كان $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$، فإن $\chi(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{e(H)}{n(H)/2} \right\rceil$. ■

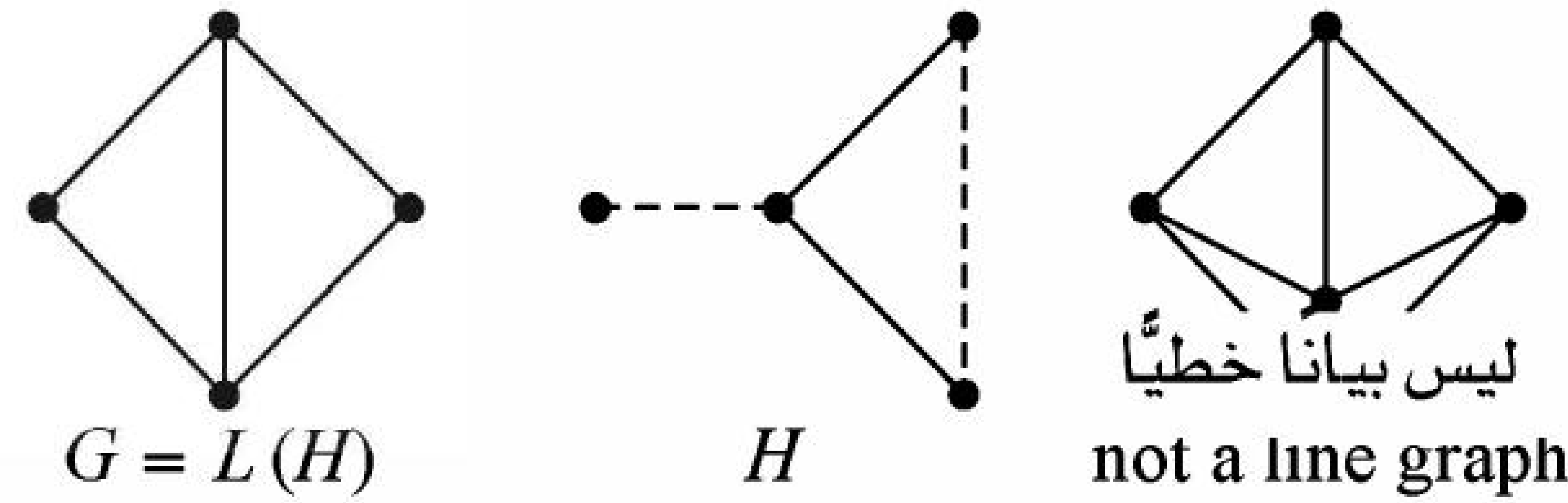
تمييز البيانات الخطية (الخطانية) (اختياري)
(Characterization of Line Graphs (Optional))

إن تمييزات البيانات الخطية يمكن أن تقود إلى خوارزميات ملائمة لفحص فيما إذا كان بيان ما مثل G بيانًا خطيًّا، وإذا كان كذلك، فللحصول على H بحيث يكون $L(H) = G$.

15.1.7. مثال: لتوضيح هذه الأفكار، نثبت أن البيان الموجود على أقصى اليمين أدناه ليس بيانًا خطيًّا لبيان بسيط. إن بيان الطائرة الورقية G (مثلثان مع ضلع مشترك) هو البيان الخطي للكف H (مخلب زائد ضلع).

وبتحليل الوضع، نجد أن H هو البيان البسيط الوحيد الذي بيانه الخطي هو G، والأضلاع التي أصبحت رؤوسًا في G درجتها 2 ، يجب أن تكون الأضلاع المنقطة.

إن البيان الموجود أقصى اليمين يضيف رأسًا إلى G جيرانه فقط الرؤوس التي درجتها 2. والنتيجة أن هذا ليس بيانًا خطيًّا للبيان G؛ بسبب عدم وجود طريقة لإضافة ضلع إلى H بحيث يتشارك بنقطة طرفية مع كل ضلع متقطع دون أن يتشارك بنقطة طرفية مع ضلع متصل. ■



يوضح تمييزنا الأول عملية أخذ البيان الخطي من بيان ما. إذا كان $G = L(H)$ و H بيانًا بسيطًا، فإن كل $v \in V(H)$ بحيث $d(v) \geq 2$، يولد عصبة $Q(v)$ في G تقابل أضلاعًا واقعة على v. إن هذه العصب تجزئ $E(G)$. وفضلًا عن ذلك، فإن كل رأس $e \in V(G)$ ينتمي فقط إلى العصب المولدة من خلال النقاط الطرفية لـ $e \in V(H)$.

على سبيل المثال، عندما يكون G طائرة ورقية، فإننا نستطيع تجزئة $E(G)$ إلى ثلاث عصب (مثلث زائد ضلعين)، ويكون كل رأس مغطى على الأكثر مرتين. وهذه العصب الثلاث تقابل الرؤوس التي درجتها 2 على الأقل في الكف. لاحظ أن البيان الموجود أقصى اليمين في الأعلى ليس له مثل هذه التجزئة.

16.1.7. نظرية: (Krausz [1943]) للبيان البسيط G، يوجد حل للمعادلة $L(H) = G$ إذا وفقط إذا كان G يتفكك إلى بيانات جزئية تامة، بحيث يظهر كل رأس في G على الأكثر في اثنين من هذه البيانات الجزئية التامة.

الإثبات: أثبتنا أعلاه أن الشرط ضروري. لاحظ أنه عندما $G = L(H)$، فإن الرؤوس في G التي تنتمي فقط إلى واحدة من هذه العصب التي عرفناها سابقًا هي تلك التي تقابل أضلاعًا في H والتي تقع على الأوراق.

للكفاية، لتكن $S_1, \ldots, S_k$ هي مجموعات الرؤوس للبيانات الجزئية التامة المعينة. نكون H بحيث يكون $G = L(H)$. إن الرؤوس المعزولة في G تصبح أضلاعًا معزولة في H؛ لذلك يمكن أن نفترض أن $\delta(G) \geq 1$. لتكن $v_1, \ldots, v_l$ هي الرؤوس في G (إذا وجدت) التي تظهر بالضبط في واحدة من المجموعات $S_1, \ldots, S_k$. أعط H رأسًا واحدًا لكل مجموعة في القائمة $\mathbf{A} = S_1, \ldots, S_k, \{v_1\}, \ldots, \{v_l\}$، ولتكن الرؤوس في H متجاورة فقط إذا كانت المجموعات المقابلة تتقاطع.

يظهر كل رأس في G في مجموعتين تمامًا في A، فضلًا عن أنه لا يوجد رأسان يظهران في هاتين المجموعتين نفسيهما. لذا، فإن H بيان بسيط مع ضلع واحد لكل رأس في G. إذا كانت الرؤوس متجاورة في G، فإنها تظهر معًا في واحدة من المجموعات S_i، والأضلاع التي تقابلها في H تتشارك الرأس لـ S_i. لذا، فإن $G = L(H)$. ■

إن تمييز كروسز (Krausz) لا يعطي مباشرة اختبارًا فاعلًا للبيانات الخطية؛ لأنه يوجد الكثير من التفككات المحتملة للاختبار. والتمييز الآتي يختبر التراكيب الجزئية ذوات الحجم الثابت، وعليه، فإنه يعطي خوارزمية حسنة. ونقول إن كل مثلث T في G يكون فرديًّا أو زوجيًّا كما هو معرَّف أدناه.

a) يكون T **فرديًّا** (odd) إذا كان $|N(v) \cap V(T)|$ فرديًّا لبعض $v \in V(G)$.

b) في حين يكون T **زوجيًا** (even) إذا كان $|N(v) \cap V(T)|$ زوجيًا لكل $v \in V(G)$.

لاحظ أن الطائرة الورقية المُحدثة هي **مثلث ثنائي** (**مزدوج**) (double triangle)، حيث تتكون من مثلثين يشتركان بضلع، والرأسان اللذان ليسا على الضلع المشترك غير متجاورين.

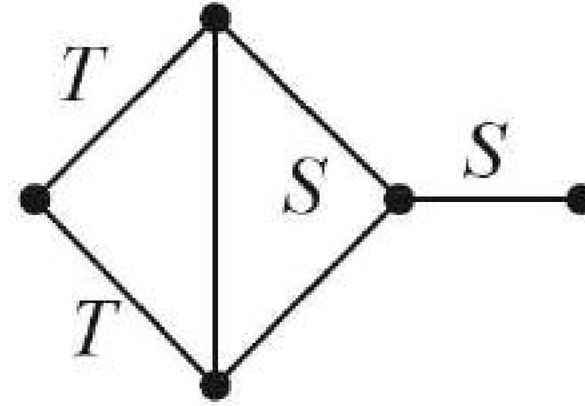
17.1.7. نظرية: (van Rooij and Wilf [1965]) للبيان البسيط G، يوجد حل لـ $L(H) = G$ إذا وفقط إذا كان G يخلو من المخالب، ولا يوجد فيه مثلث ثنائي له مثلثان فرديان.

الإثبات: الضرورة. افترض أن $G = L(H)$. إنَّ الرأس e في G الذي جيرانه x,y,z يقابل ضلع e في H يقع على الأضلاع x,y,z. بما أنه توجد لـ e نقطتان طرفيتان فقط في H، فإن اثنتين من x,y,z تقعان على إحدى هذه النقاط الطرفية؛ لذا تكون هذه الأضلاع متجاورة في G. وهذا يمنع أن يكون المخلب بيانًا جزئيًا محدثًا لـ G.

الشرط الآخر، شاهدنا في المثال 15.1.7 أن رؤوس المثلث الثنائي في G يجب أن تقابل الأضلاع لكف في H. وخصوصًا أن رؤوس أحد هذه المثلثات في G تقابل أضلاع مثلث في H. وهذا المثلث يجب أن يكون زوجيًا؛ لأن كل ضلع في H يقع بالضبط على أحد رؤوس مثلث يتشارك بنقطة طرفية واحدة بالضبط مع ضلعين من أضلاع المثلث. لذا، فإنه لكل مثلث ثنائي في G، يجب أن يكون أحد مثلثاته على الأقل زوجيًا.

الكفاية: افترض أن G يحقق الشروط المعينة. نستطيع افتراض أن G مترابط؛ وبخلاف ذلك، نطبق البناء لكل مركبة. لاحظ أن الحالة التي يخلو فيها G من المخالب، ويمتلك مثلثًا ثنائيًا حيث كل من المثلثين زوجي هو حالة خاصة جدًا؛ وهناك ثلاثة فقط من مثل هذه البيانات (التمرين 38). وهنا سنأخذ في الحسبان الحالة العامة فقط، والتي يكون فيها لكل مثلث ثنائي في G مثلث فردي واحد بالضبط.

من النظرية 16.1.7، يكفي أن نفكك G إلى بيانات جزئية تامة باستخدام كل رأس في اثنين منهما على الأكثر. لتكن $S_1, \ldots, S_k$ بيانات جزئية تامة عظمى في G والتي لا تكون مثلثات زوجية، ولتكن $T_1, \ldots, T_l$ هي الأضلاع التي تنتمي إلى مثلث زوجي واحد ولا تنتمي إلى مثلث فردي؛ حيث تشكل معًا التفكيك المطلوب $\mathbf{B}$.



يظهر كل ضلع في بيان جزئي تام أعظم، ولكن كل مثلث في بيان جزئي تام على أكثر من ثلاثة رؤوس يكون فرديًا. لذا، فإن كل ضلع T_j في القائمة غير موجود في أي S_i. وأيضًا لا يتشارك كل من S_i و S_i' بأي ضلع؛ لأن G لا يملك مثلثات ثنائية بحيث يكون المثلثان فيها فرديين. لذلك، فإن البيانات الجزئية في $\mathbf{B}$ منفصلة ضلعيًا زوجًا زوجًا.

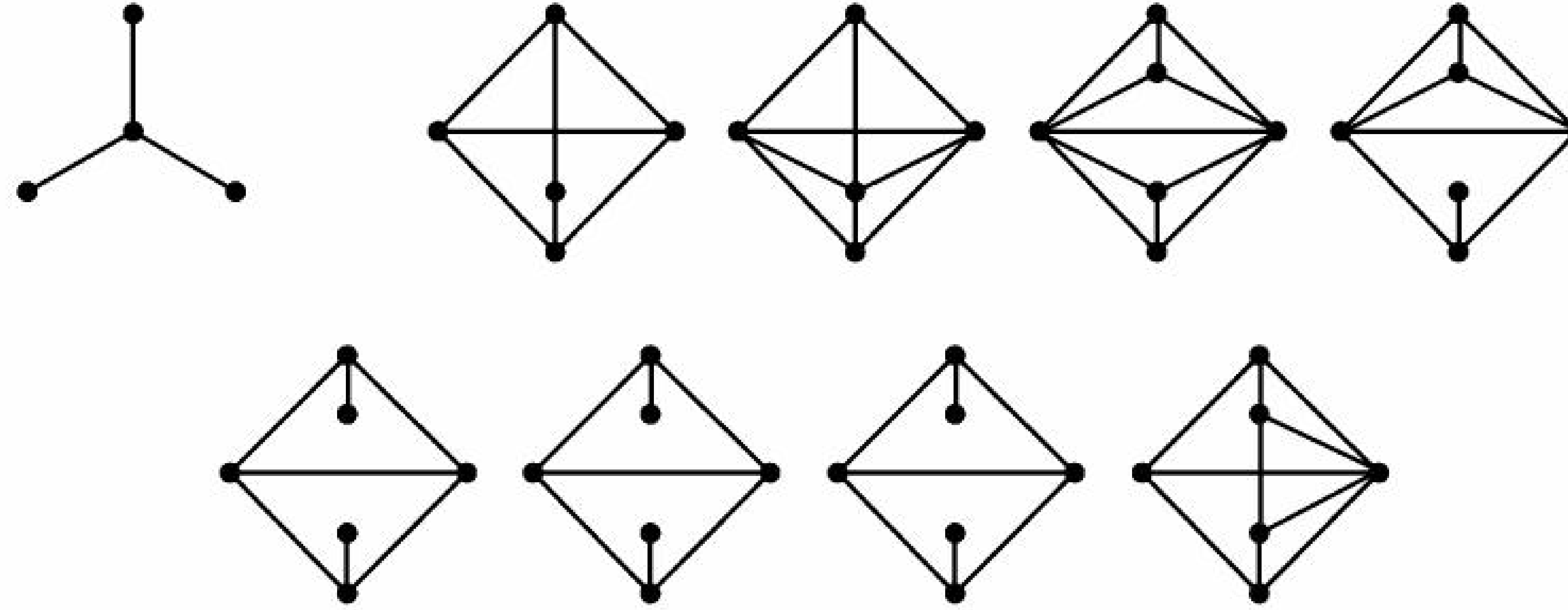
إذا كان $e \in E(G)$، فإن e ينتمي إلى بعض S_i ما لم تكن العصبة العظمى الوحيدة التي تحتوي e مثلثًا زوجيًا. ويكون e في هذه الحالة T_j؛ لأننا منعنا وجود المثلثات الثنائية التي يكون مثلثًا كل منها زوجيين. لذلك يكون $\mathbf{B}$ تفكيكًا.

بقي إثبات أن $v \in G$ كله يظهر في بيانين من هذه البيانات الجزئية على الأكثر. افترض أن v تنتمي إلى $A,B,C \in \mathbf{B}$. إن خاصية الانفصال الضلعي تعطي أن لـ v جيرانًا x,y,z حيث ينتمي كل منهم إلى واحد فقط من $\{A,B,C\}$. وبما أن G لا يملك مخلبًا محدثًا، فيمكن افتراض أن $x \leftrightarrow y$. وباستخدام خاصية الانفصال الضلعي، فإن المثلث vxy لا يمكن أن ينتمي إلى عضو في $\mathbf{B}$. لذلك، يجب أن يكون مثلثًا زوجيًا. وعليه، فإن z يجب أن يمتلك بالضبط ضلعًا آخر للمثلث vxy، فلنقل $z \leftrightarrow x$ و $z \not\leftrightarrow y$. ولكن الحجة نفسها تبين أن zvx هو مثلث

زوجي، وعليه أصبح لدينا مثلث ثنائي بحيث يكون مثلثاه زوجيين. ■

إن النظرية 17.1.7 قريبة من خاصية تمييز البيانات الجزئية المحظورة.

18.1.7. نظرية : (Beineke [1968]) يكون البيان البسيط G بيانًا خطانيًّا لبيان بسيط ما إذا وفقط إذا كان G لا يملك أيًّا من البيانات التسعة المبينة في الأسفل بوصفها بيانًا جزئيًّا محدثًا.



الإثبات: باستخدام النظرية 17.1.7، يكفي أن نبين أن قائمة البيانات الثمانية التي تختلف عن $K_{1,3}$ هي البيانات التي تخلو من المخالب الأصغرية الرأس، وتحتوي على مثلث ثنائي يكون مثلثاه فرديين. يملك كل بيان مثل هذا مثلثًا ثنائيًّا ورأسًا أو رأسين إضافيين بحيث تجعل هذه الرؤوس المثلثات فردية بسبب امتلاك جار أو ثلاثة جيران في المثلثات. التفاصيل التي تبين أن هذه هي القائمة التامة مطلوبة موجودة في التمرين40. ■

إن التمييزات في المثبتات 17.1.7 – 18.1.7 تعطي خوارزميات لفحص ما إذا كان G بيانًا خطيًّا، والتي تنفذ في زمن في صورة كثير حدود في $n(G)$. في الحقيقة، يوجد مثل هذه الخوارزمية التي تنفذ في زمن خطي (Lehot [1974]) وتنتج بيان H حيث $G = L(H)$ عندما يكون G بيانًا خطيًّا. ويكون هذا البيان H وحيدًا إذا كان G لا يملك مركبة في صورة مثلث (التمرين 39).

تمارين (Exercises)

1.1.7. (-) لكل بيان G من البيانات أدناه، احسب $\chi'(G)$ وارسم $L(G)$.



2.1.7. (-) أعطِ تلوينًا ضلعيًّا صريحًا لإثبات أن $\chi'(Q_k) = \Delta(Q_k)$.

3.1.7. (-) حدد العدد اللوني الضلعي للبيان $C_n \square K_2$.

4.1.7. (-) احصل على متباينة لـ $\chi'(G)$ بدلالة $e(G)$ و $\alpha'(G)$.

5.1.7. (-) أثبت أن بيان بيترسون هو المتممة لـ $L(K_5)$.

6.1.7. (-) حدد عدد المثلثات في البيان الخطي لبيان بيترسون.

7.1.7. (-) حدد ما إذا كان $\overline{P_5}$ بيانًا خطيًّا. وإذا كان كذلك، فجد H بحيث $L(H) = \overline{P_5}$.

8.1.7. (-) أثبت أن $L(K_{m,n}) \cong K_m \square K_n$.

• • • • •

9.1.7. ليكن G بيانًا بسيطًا. أثبت أن رؤوسًا تشكل عصبة في $L(G)$ إذا وفقط إذا كانت الأضلاع المقابلة لها في G تملك نقطة طرفية واحدة مشتركة، أو أنها تشكل مثلثًا. (تعليق: وعليه $\omega(L(G)) = \Delta(G)$ إلا إذا كان $\Delta(G) = 2$ وبعض المركبات لـ G هي مثلث).

10.1.7. ليكن G بيانًا بسيطًا يخلو من الرؤوس المعزولة. أثبت أنه إذا كان $L(G)$ مترابطًا ومنتظمًا، فإما أن يكون G منتظمًا، أو أن يكون بيانًا ثنائي الفرع بحيث تكون درجات الرؤوس في كل مجموعة مجزأة متساوية. (Ray – Chaudhuri [1967])

11.1.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا:

a) أثبت أن عدد الأضلاع في $L(G)$ هو $\sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{2}$.

b) أثبت أن G يتشاكل مع $L(G)$ إذا وفقط إذا كان G منتظم من الدرجة 2.

12.1.7. ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا. استخدم فرع (a) في التمرين 11.1.7 لتحدد متى يكون $e(L(G)) < e(G)$.

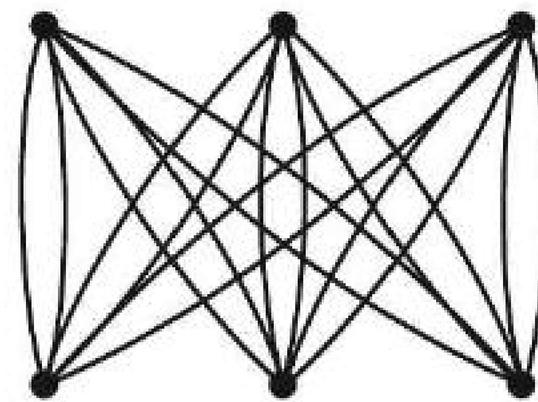
13.1.7. (+) أثبت أن المتممة للبيان عن اليسار في التمرين 1.1.7 هو البيان البسيط الوحيد G بحيث $L(G) \cong \overline{G}$ (Albertson).

14.1.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة k. أثبت أن $L(G)$ مترابط من الدرجة k، ومترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k - 2$. (مساعدة: للقطع الضلعي الأصغر $[S,\overline{S}]$ في $L(G)$، صِفْ ماذا يقابل القطع في G، واحسب عدد أضلاعه بدلالة الرؤوس في G).

15.1.7. (!) استخدم نظرية توت للمعاملات من الدرجة 1؛ لتثبت أن لكل بيان خطي مترابط زوجي الدرجة مواءمةً تامةً. استنتج من هذا أن الأضلاع للبيان البسيط المترابط التي حجمها زوجي يمكن تجزئتها إلى مسارات طولها 2. (تعليق: يبين التمرين 22.3.3 أن كل بيان مترابط يخلو من المخالب يملك مواءمة تامة، إلا أن النتيجة الأقوى أكثر صعوبة من هذه) (Chartrand – Polimei – Stewart [1973]).

16.1.7. (*) ليكن G بيانًا بسيطًا. أثبت أن $\gamma(L(G)) \geq \gamma(G)$، حيث $\gamma(G)$ يرمز إلى جنس G (تعريف 20.3.6). (D. Greenwell)

17.1.7. احسب عدد التلوينات الضلعية الفعلية التي درجتها 6 للبيان أدناه.



18.1.7. (!) أعطِ تلوينًا ضلعيًّا صريحًا لتثبت أن $\chi'(K_{r,s}) = \Delta(K_{r,s})$.

19.1.7. (!) أثبت أنه يوجد لكل بيان ثنائي الفرع بسيط G بيان H ثنائي الفرع بسيط منتظم من الدرجة $\Delta(G)$ يحوي G.

20.1.7. (!) ليكن D بيانًا موجهًا (العرى مسموح بها) بحيث $d^+(v) \leq d$ و $d^-(v) \leq d$ لكل $v \in V(D)$. أثبت أنه يمكن تلوين $E(D)$ باستخدام d لونًا على الأكثر، بحيث يكون للأضلاع الداخلة على كل رأس ألوان

مختلفة، وكذلك تكون ألوان الأضلاع الخارجة من كل رأس مختلفة. (مساعدة: حول البيان الموجه إلى شيء آخر مدرك بالحواس حيث يمكن تطبيق نتيجة معروفة).

21.1.7. إثبات خوارزمي للنظرية 7.1.7. ليكن G بيانًا ثنائي الفرع مع درجة كبرى تساوي k. وليكن f تلوينًا ضلعيًا فعليًا من الدرجة k لبيان جزئي H من G. وليكن uv ضلعًا ليس في H. باستخدام مسار يتناوب في لونين، أثبت أن f يمكن أنْ يبدَّل، ثَمَّ يوسَّع إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة k لـ $H + uv$. استنتج أن $\chi'(G) = \Delta(G)$.

22.1.7. استخدم نظرية بروكس في بيان ملائم لتثبت أنهَ إذا كان G بيانًا بسيطًا له $\Delta(G)= 3$، فإنه قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 4. (تعليق: النتيجة هي حالة خاصة من نظرية فايزنج؛ لا تستخدم نظرية فايزنج لإثبات هذا).

23.1.7. (+) ليكن $K(p,q)$ بيانًا ثنائي الفرع تامًّا من الدرجة p، له q رأسًا في كل مجموعة مجزأة. ولترمز $G[H]$ إلى عملية التركيب، بحيث يوسع كل رأس في G إلى نسخة من H. لاحظ أن $K(p,q) = K(p,d)[\overline{K}_{q/d}]$ عندما d يقسم q:

a) أثبت أنه إذا كان لـ G تفكيك إلى نسخ من F، فإن لـ $G[\overline{k},m]$ تفكيكًا إلى نسخ من $F[\overline{k},m]$. أثبت أيضًا أن العلاقة "G يتفكك إلى نسخ مولدة من F" هي متعدية.

b) تتفكك العصب التي درجتها زوجية إلى معاملات من الدرجة 1. أما العصب التي درجتها فردية فتتفكك إلى حلقات مولدة. استخدم هاتين العبارتين وفرع (a) لتثبت أن $K(p,q)$ يتفكك إلى معاملات من الدرجة 1 عندما يكون pq زوجيًّا. (Hartman [1997])

24.1.7. (!) ليكن G و H بيانين بسيطين غير تافهين. استخدم نظرية فايزنج لتثبت أن $\chi'(H) = \Delta(H)$ يؤدي إلى أن $\chi'(G \square H) = \Delta(G \square H)$.

25.1.7. نظرية كوتزج للضرب الديكارتي للبيانات البسيطة:

a) استخدم نظرية فايزنج لتثبت أن $\chi'(G \square K_2) = \Delta(G \square K_2)$.

b) ليكن G_1، G_2 بيانين منفصلين ضلعيًّا مع مجموعة رؤوس V، وليكن H_1، H_2 بيانين منفصلين ضلعيًّا مع مجموعة رؤوس W. أثبت أن $(G_1 \cup G_2) \square (H_1 \cup H_2) = (G_1 \square H_2) \cup (G_2 \square H_1)$.

c) استخدم كلًّا من فرع (a) و (b) لتثبت أن $\chi'(G \square H)=\Delta(G \square H)$ إذا كان كل من G و H يملك معاملات من الدرجة 1. (تعليق: بوصفها نتيجة، ضرب بيان بيترسون في نفسه هو من الصنف الأول الذي لا يتبع من التمرين 24.1.7. وهنا، ليس بالضرورة أن يكون أي معامل من الصنف الأول يوجد بيان G لا يملك معاملاً من الدرجة 1). (Kotzig [1979]، J. George [1991])

26.1.7. (!) ليكن G بيانًا منتظمًا له رأس قطع. أثبت أن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

27.1.7. شروط الكثافة لـ $\chi'(G) > \Delta(G)$:

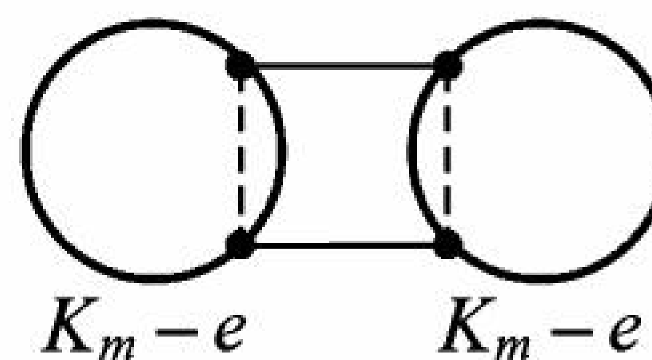
a) أثبت أنه إذا كانَ $n(G) = 2m + 1$ و $e(G) > m. \Delta(G)$، فإن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

b) أثبت أنه إذا حصلنا على G من بيان منتظم من الدرجة k على $2m + 1$ من الرؤوس بحذف أقل من $k/2$ من الأضلاع، فإن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

c) أثبت أنه إذا حصلنا على G بتقسيم جزئي لضلع بيان منتظم على $2m$ من الرؤوس درجة كل رأس منها على الأقل 2، فإن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

28.1.7. (-*) أثبت أن بيان بيترسون لا يملك بيانًا جزئيًّا فوق المتلئ.

29.1.7. ليكن G البيان المترابط المنتظم من الدرجة $m - 1$ المتشكل من $2K_m$ بحذف ضلع من كل مركبة، وإضافة ضلعين بين المركبات ليعيد الانتظام. أثبت أن G غير قابل للتحليل إلى العوامل من الدرجة 1 إذا كان m فرديًّا وأكبر من 3. (تعليق: يبين هذا أن مخمنة التحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (الملاحظة 12.1.7) هي مخمنة حادة.



30.1.7. (*!)مخمنة فوق الممتلئ ⇐ مخمنة التحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (الملاحظة 12.1.7):

a) أثبت أنه في البيان المنتظم الذي درجته زوجية، يكون البيان الجزئي المُحدث فوق ممتلئ إذا وفقط إذا كان البيان الجزئي المُحدث من بقية الرؤوس فوق ممتلئ.

b) ليكن G بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدرجة k درجته $2m$، ويملك بيانًا جزئيًّا فوق ممتلئ. أثبت أن $k < m$ إذا كان m فرديًّا، و $k < m - 1$ إذا كان m زوجيًّا.

31.1.7. إذا أعطيت تلوينًا ضلعيًّا للبيان G، إجعل $c(v)$ يرمز إلى عدد الألوان المختلفة التي تظهر على الأضلاع الواقعة على v. من بين التلوينات الضلعية جميعها التي درجتها k للبيان G، يكون تلوينٌ ما هو **الأمثل** (optimal) إذا كان يعظِّم $\sum_{v\in V(G)} c(v)$:

a) أثبت أنه إذا لم تكن أي مركبة لـ G حلقة فردية، فإن G يملك تلوينًا ضلعيًّا من الدرجة 2 حيث يظهر كلا اللونين عند كل رأس درجته 2على الأقل. (مساعدة: استخدم الحلقات الأويلرية).

b) ليكن f تلوينًا ضلعيًّا أمثل من الدرجة k، بحيث يظهر اللون a على الأقل مرتين عند الرأس $u \in V(G)$، أما اللون b فلا يظهر عند u. وليكن H هو البيان الجزئي من G الذي يتكون من الأضلاع الملونة باللون a أو اللون b. أثبت أن المركبة لـ H التي تحوي u هي حلقة فردية.

c) ليكن G بيانًا ثنائي الفرع. استنتج من فرع (b) أن G قابل للتلوين الضلعي من الدرجة $\Delta(G)$. (تعليق: تقود هذه الأفكار لإثبات نظرية فايزنج.) (Fournier [1973])

32.1.7. ليكن G بيانًا ثنائي الفرع له درجة صغرى k. أثبت أن G يملك تلوينًا ضلعيًّا من الدرجة k بحيث يتحقق عند كل رأس أن كل لون يظهر $\lfloor d(v)/k \rfloor$ أو $\lceil d(v)/k \rceil$ مرة. (مساعدة: استخدم تحويلًا للبيان) (Gupta [1966]).

33.1.7. استخدم نظرية فايزنج لتثبت أن كل بيان بسيط ذي درجة كبرى Δ يملك تلوينًا ضلعيًّا "عادلًا" (equitable) من الدرجة $\Delta + 1$: أي أنه يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا بحيث يكون كل لون مستخدمًا $\lceil e(G) / (\Delta + 1) \rceil$ أو $\lfloor e(G) / (\Delta + 1) \rfloor$ مرة [De Werra [1971]، McDiarmid [1972].

34.1.7. استخدم نظرية بيترسون (كل بيان منتظم من الدرجة $2k$ يملك معامل من الدرجة 2- النظرية 9.3.3) لتثبت أن $\chi'(G) \le 3\lceil \Delta(G) / 2 \rceil$ عندما يكون G بيانًا خاليًا من العرى.

35.1.7. (-) الحدود على $\chi'(G)$. ضع $\mathbf{P} = \{x,y,z \in V(G): y \in N(x) \cap N(z)\}$. أثبت أن الحد الأخير أدناه (Andersen [1977]، Goldberg [1977, 1984]) يعطي الحدود السابقة.

$\chi'(G) \le \lfloor 3\,\Delta(G)/2 \rfloor$. (Shannon [1949])

$\chi'(G) \le \Delta(G) + \mu(G)$. (Vizing [1964, 1965], Gupta [1966])

$\chi'(G) \le \max \{\Delta(G), \max_P \lfloor \frac{1}{2}(d(x) + d(y) + d(z)) \rfloor\}$. (Ore [1967a])

$\chi'(G) \le \max \{\Delta(G), \max_P \lfloor \frac{1}{2}(d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z))\}$.

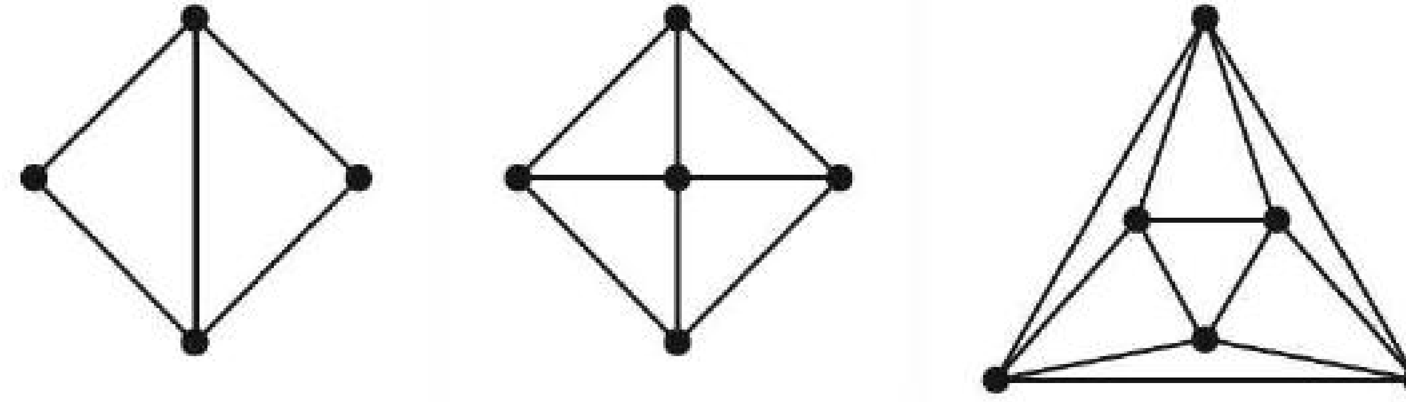
36.1.7. (+) لـ $n \neq 8$، أثبت أن $L(K_n)$ هو البيان البسيط المنتظم من الدرجة $(2n - 4)$ الوحيد الذي رتبته $\binom{n}{2}$ بحيث تملك الرؤوس غير المتجاورة أربعة جيران مشتركة، في حين تمتلك الرؤوس المتجاورة $n - 2$ جارًا مشتركًا. (تعليق: عندما $n = 8$، فإن ثلاثة بيانات استثنائية تحقق الشروط).

(Chang [1959]، Hoffman [1960]).

37.1.7. (+) لـ n,m بحيث لا يكون كلاهما يساوي 4، أثبت أن $L(K_{m,n})$ هو البيان البسيط المنتظم من الدرجة $(n + m - 2)$ الوحيد الذي رتبته mn بحيث تملك الرؤوس غير المتجاورة فيه جارين مشتركين، و $n\binom{m}{2}$ زوجًا من الرؤوس المتجاورة تملك $(m - 2)$ جارًا مشتركًا، و $m\binom{n}{2}$ زوجًا من الرؤوس المتجاورة تملك $(n - 2)$ جارًا مشتركًا.

(تعليق: عندما $n = m = 4$، يوجد بيان استثنائي واحد.
(Shrikande [1959]، Moon [1963]، Hoffman [1964])

38.1.7. (*) ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا خاليًا من المخالب، ويملك مثلثًا ثنائيًّا H بحيث يكون كل مثلث من مثلثيه زوجيًّا. أثبت أن G هو أحد البيانات الثلاثة المرسومة أدناه، واستنتج أن G بيان خطي.
(تعليق: يكمل هذا الإثبات لنظرية 17.1.7)



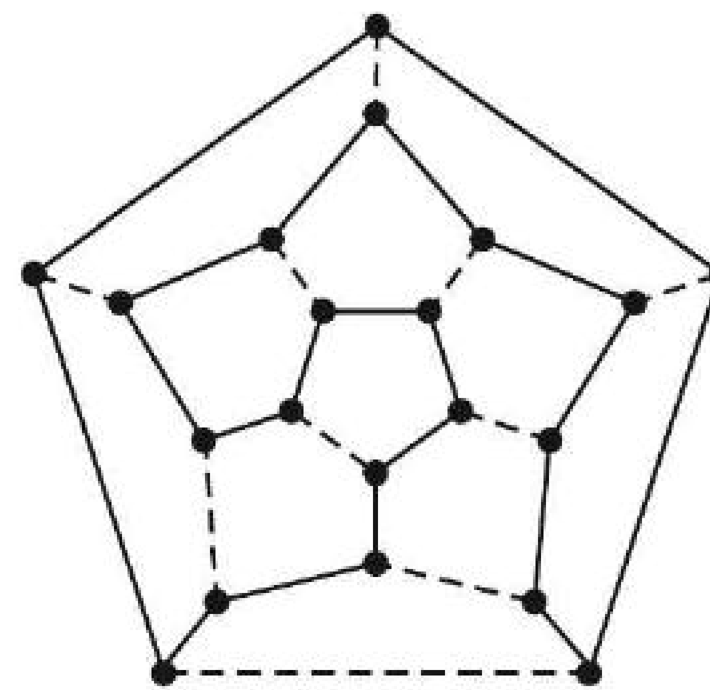
39.1.7. (*) **تفكيك كروسز** (Krausz decomposition) للبيان البسيط H هو تجزئة $E(H)$ إلى عصب، بحيث يظهر كل رأس لـ H على الأكثر في عصبتين من هذه العصب:

a) أثبت أن للبيَان البسيط المترابط H تفكيكين من تفكيك كراسوز لـِ H بحيث تكون بينهما عصبة مشتركة يكونان متطابقين:
b) جد تفكيكات كروسز مختلفة للبيانات الموجودة في التمرين 38.1.7.
c) أثبت أنه لا يوجد بيان بسيط مترابط غير K_3 بحيث يملك تفكيكين مختلفين من تفكيكات كروسز (استخدم التمرين 38.1.7 والإثبات في النظرية 17.1.7).
d) استنتج أن $K_{1,3}$ و K_3 هو الزوج الوحيد من البيانات البسيطة المترابطة غير المتشاكلة التي تكون بياناتهما الخطية متشاكلة. (Whitney [1932a])

40.1.7. (*) أكمل الإثبات للنظرية 18.1.7 بإثبات أن البيان البسيط الذي ليس فيه مخالب يملك مثلثًا ثنائيًّا، بحيث يكون كل من مثلثيه فرديًّا إذا وفقط إذا كان يحوي بيانًا جزئيًّا مُحدثًا من بين البيانات الثمانية الأخرى التي تضمنها نصُّ النظرية.

2.7. الحلقات الهاملتونية (Hamitonian Cycles)

دُرِسَت الحلقات الهاملتونية أولاً من قِبَلِ كيركمان [1856] (Kirkman) والتي سمّيت باسم السيد وليام هاملتونَ (Sir William Hamilton) الذيَ وصف لعبة على البيان ذي الاثني عشر وجهًا، حيث يعين فيها أحد اللاعبين مسارًا على 5 رؤوس، أما اللاعب الآخر، فيجب أن يوسعه إلى حلقة مولدة. سُوِّقَت اللعبة باسم "المسافر ذي الاثني عشر وجهًا" (Traveller's Dodecahedron)، حيث وُضعت نسخة خشبية، وسمّيت فيها الرؤوس بأسماء 20 مدينة مهمة.



1.2.7. تعريف: البيان الهاملتوني (Hamilton graph) بيان له حلقة مولدة تسمّى حلقة هاملتونية (Hamiltonian Cycles).

حتى سبعينيات القرن العشرين، كان الاهتمام بالحلقات الهاملتونية مركزًا حول علاقتها بمسألة الألوان الأربعة (الجزء 3.7). أما الدراسة اللاحقة، فقد حُفِّزت بالتطبيقات العملية ومسألة التعقيد (الملحق B).

لا يُعرف تمييز سهل قابل للاختبار للبيانات الهاملتونية، وسوف ندرس الشروط الضرورية والشروط الكافية، لاحظ أنّ العرى والأضلاع المتكررة لا علاقة لها بالموضوع. إذ إنَّ البيان يكون هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان البيان البسيط الذي نحصل عليه بالاحتفاظ بنسخة واحدة لكل ضلع ليس عروة يكون هاملتونيًّا. وعليه، **ففي هذا الجزء، حصرنا اهتمامنا بالبيانات البسيطة**؛ وهذا مناسب عند مناقشة شروط تتضمن درجات الرؤوس.

لمزيد من المعلومات حول الحلقات الهاملتونية؛ انظر [1985a] (Chv'atal).

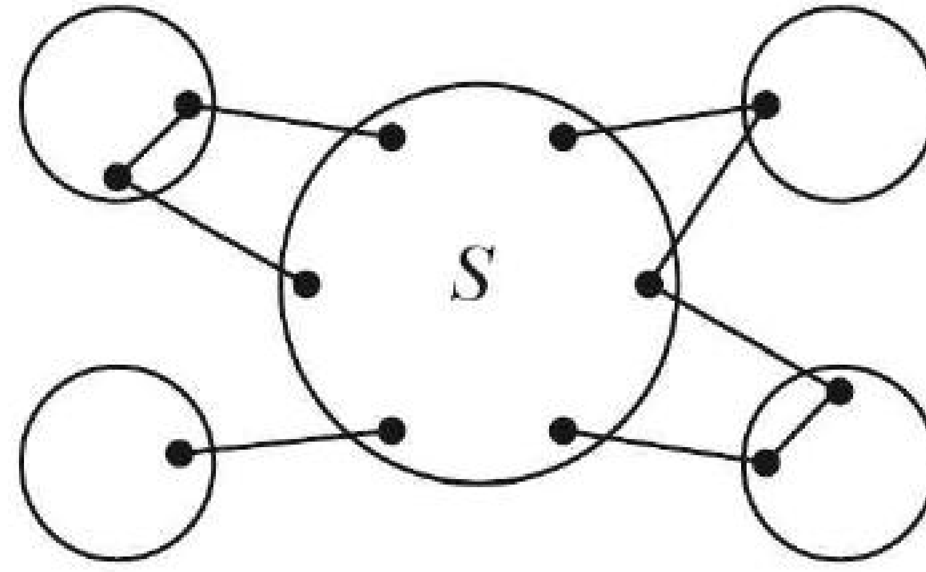
الشروط الضرورية (Necessary Conditions)

كل بيان هاملتوني يكون مترابطًا من الدرجة 2؛ لأن حذف رأس يخلف بيانًا جزئيًّا يمتلك مسارًا مولدًا. والبيانات الثنائية الفرع تقترح طريقة لتقوية هذا الشرط الضروري.

2.2.7. مثال: البيانات الثنائية الفرع. تمرُّ الحلقة المولدة في بيان ثنائي الفرع على المجموعتين المجزأتين تبادليًّا، لذا، لا توجد مثل هذه الحلقة إلا إذا كانت المجموعات المجزأة لها الحجم نفسه. ولهذا السبب؛ فإن $K_{m,n}$ يكون هاملتونيًّا فقط إذا كان $m = n$. تبادليًّا، نستطيع مناقشة أن الحلقة ترجع إلى رؤوس مختلفة في مجموعة مجزأة ما بعد كل مرور بالمجموعة المجزأة الأخرى. ■

3.2.7. قضية: إذا امتلك G حلقة هاملتونية، فإن لكل مجموعة غير خالية $S \subseteq V$، فإن البيان $G - S$ يملك $|S|$ مركبة على الأكثر.

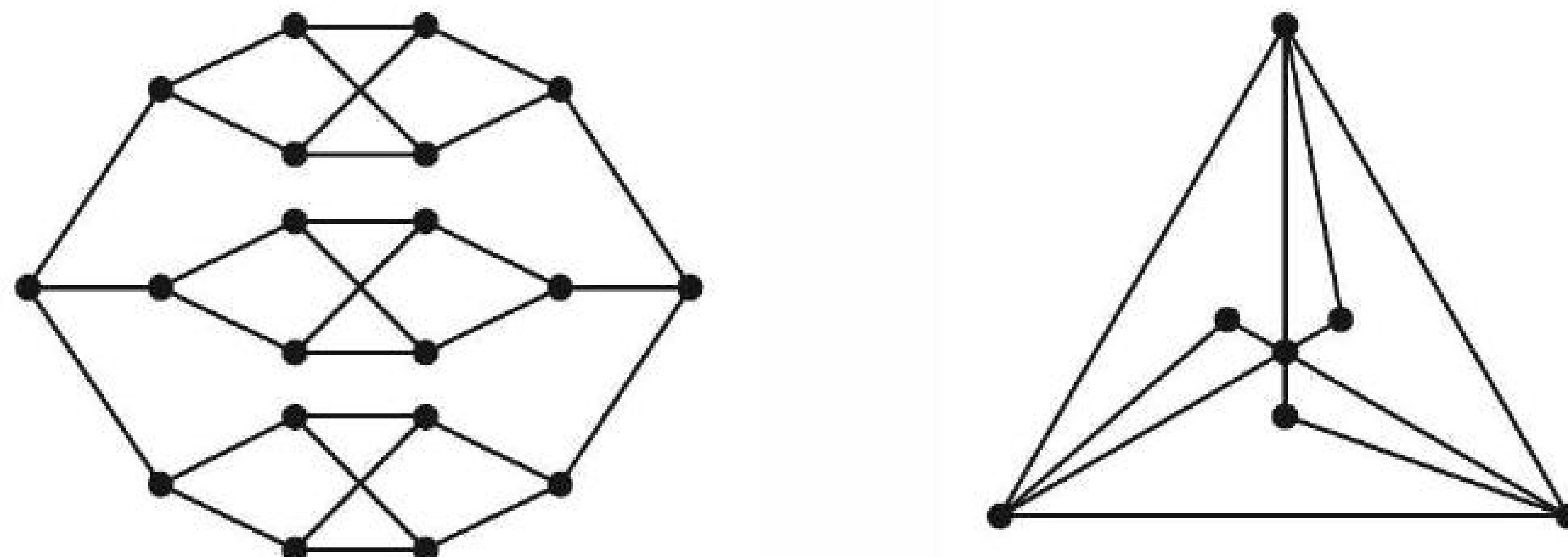
الإثبات: عندما نترك مركبة لـ $G - S$، فإن الحلقة الهاملتونية يجب أن تذهب إلى S، والحلقات التي تصل إلى S يجب أن تستخدم رؤوسًا مختلفة في S. لذا، يجب أن تملك S من الرؤوس مثلما تملك $G - S$ من المركبات على الأقل. ■



4.2.7. تعريف: ليكن $c(H)$ يرمز إلى عدد المركبات في البيان H.

وهكذا، فإن الشرط الضروري هو $c(G\text{-}S) \le |S|$ لكل $\emptyset \ne S \subseteq V$. هذا الشرط يضمن أن G مترابط من الدرجة 2 (إنَّ حذف رأس واحد يترك مركبة واحدة على الأكثر)، ولكنه لا يضمن حلقة هاملتونية.

5.2.7. مثال: البيان عن اليسار أدناه هو ثنائي الفرع مع مجموعات مجزأة لها أحجام متساوية. على أي حال، هذا لا يحقق الشرط الضروري في القضية 3.2.7. لذلك، فهو ليس بيانًا هاملتونيًّا.



إن البيان الموجود عن اليمين يبين أن الشرط الضروري غير كاف، حيث إن هذا البيان يحقق الشرط ولكنه لا يملك حلقة مولدة. الأضلاع التي تقع على رؤوس درجتها 2 جميعها يجب أن تستخدم. ولكن يتطلب هذا البيان ثلاثة أضلاع تقع على الرأس المركزي.

بيان بيترسون هو بيان غير هاملتوني آخر يحقق الشرط. وقد أثبتنا في المثال 9.1.7 أن $2C_5$ هو المعامل الوحيد من الدرجة 2 لبيان بيترسون. لذا، فإنه لا يملك حلقة مولدة.

6.2.7.* ملاحظة: إن تقوية شرط ضروري يمكن أن يعطي شرطًا كافيًا. وربما إذا اشترطنا أن $|S| \geq 2c(G\text{-}S)$ لكل مجموعة قطع S، فإننا نضمن وجود حلقة مولدة. يعدُّ البيان G بيانا **متينًا** من الدرجة t (t-Tough) إذا كان $|S| \geq tc(G - S)$ لكل مجموعة قطع $S \subset V$. **والمتانة** (toughness) لـ G هي t الكبرى بحيث يكون G متينًا من الدرجة t. فعلى سبيل المثال، تساوي المتانة في بيان بيترسون 4/3 (التمرين 23).

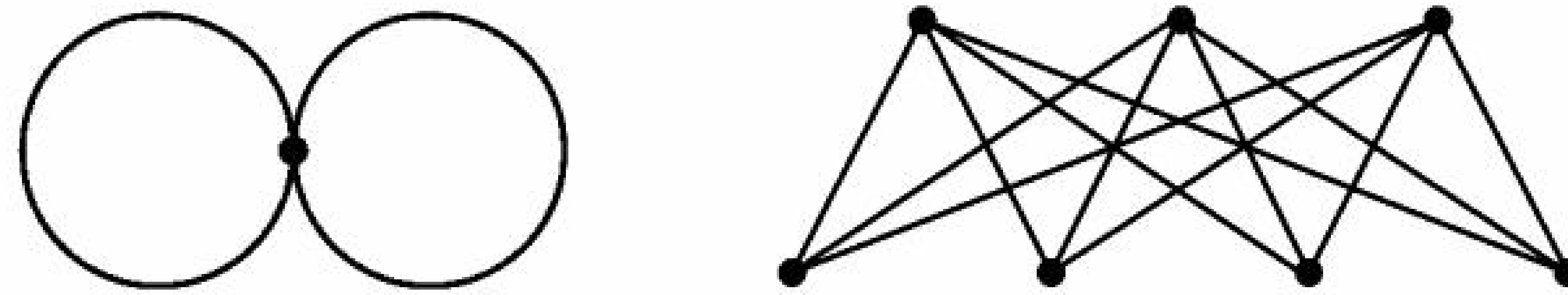
من القضية 3.2.7، نجد أن الحلقات المولدة تتطلب متانة مقدارها 1 على الأقل. لقد ضمن كفتال (Chvátal) في العام [1973م] أنّ المتانة التي تكون كبيرة بما فيه الكفاية تكون شرطًا كافيًا. لا توجد قيمة للمتانة أكبر من 1 ضرورية؛ بسبب أن C_n نفسها فقط متينة من الدرجة 1. ولبضع سنوات، كان يعتقد أن المتانة من الدرجة 2 يمكن أن تكون كافية. لاحظ أن إنوموتو – جاكسون – كاتريتز – سايتو [1985] (Enomoto – Jachson – Katerinis – Saito) ركبوا بيانات غير هاملتونية متانتها من الدرجة $2 - \epsilon$ لكل $\epsilon > 0$. وأخيرًا، لاحظ أن باور وبرورسما وفيلدمان [2000] (Bauer –Broersma – Veldman) ركبوا بيانات غير هاملتونية درجة متانتها تقترب من 9/4. و تنصُّ مخمنة كفتال التي لا تزال غير مثبتة على أن بعض قيم المتانة تكفي كشرط كِفاي. ■

شروط الكفاية (Sufficient Conditions)

إن عددَ الأضلاع التي نحتاج إليها لنجبر بيانًا على n رأسًا ليكون هاملتونيًّا كبيرٌ جدًّا. (التمارين 26 - 27). وتحت الشروط التي تنثر الأضلاع بعيدًا، نستطيع تقليص عدد الأضلاع في حين أن الحلقات الهاملتونية ما تزال مضمونة وأبسط هذه الشروط هو حد أدنى على الدرجات الصغرى؛ لاحظ أن الشرط $\delta(G) \geq n(G)/2$ يكفي. نلاحظ أولاً أنه لا توجد أصغر من الدرجة الصغرى تكون كافية.

7.2.7. مثال: للبيان الذي يتكوّن من العصب التي رتبتها $\lfloor (n + 1)/2 \rfloor$ و $\lceil (n + 1)/2 \rceil$ وتتشارك برأس ذي درجة صغرى تساوي $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ ولكنه ليس هاملتونيًّا (حتى أنه ليس مترابطًا من الدرجة 2). وللرتبة الفردية، هناك بيان آخر غير هاملتوني له هذه الدرجة الصغرى وهو العصبة الثنائية مع المجموعات المجزئة التي أحجامها $(n - 1)/2$ و $(n + 1)/2$.

يجبر إثبات أن $\delta(G) \geq n(G)/2$ وجود حلقة مولدة، وهذا يبيّن أنّ $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ هي القيمة الأكبر للدرجة الصغرى من بين البيانات غير الهاملتونية على n من الرؤوس. ■



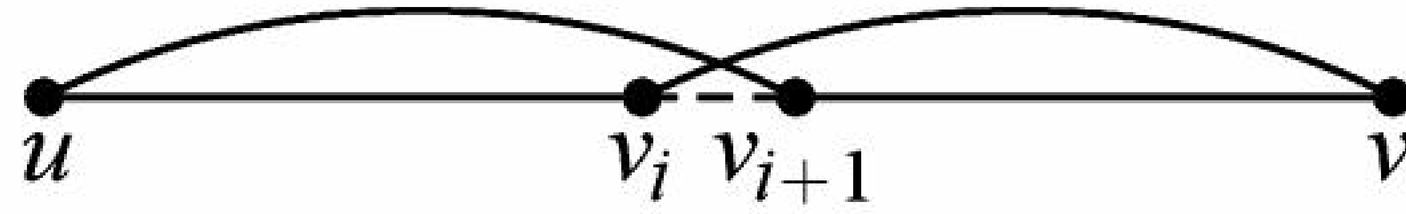
8.2.7. نظرية: (Dirac [1952b]) إذا كان G بيانًا بسيطًا على ثلاثة رؤوس على الأقل وكانت $\delta(G) \geq n(G)/2$، فإن G بيان هاملتوني.

الإثبات: على الرغم من أن الشرط $n(G) \geq 3$ مزعج، إلا أنه يجب أن يكون موجودًا؛ لأن K_2 غير هاملتوني، ولكنه يحقق أن $\delta(K_2) = n(K_2)/2$.

يستخدم إثبات التناقض ومبدأ القيم القصوى. إذا وُجدَ بيان غير هاملتوني يحقق الفرضيات، فإن إضافة الأضلاع لا يمكن أن تقلل الدرجة الصغرى. وهكذا يمكن أن نحصر اهتمامنا على البيانات غير الهاملتونية العظمى التي درجتها الصغرى تساوي على الأقل $n / 2$، حيث يعني وصف "عظمى" إن إضافة أي ضلع يربط رؤوسًا غير متجاورة ينشئ حلقة مولدة.

عندما يكون $u \nleftrightarrow v$ في G، فإن شرط العظمى لـ G يؤدي إلى أن G يملك مسارًا مولدًا $v_1, \ldots, v_n$ من $u = v_1$ إلى $v = v_n$؛ لأن كل حلقة مولدة في $G + uv$ تحوي الضلع الجديد uv. لإثبات النظرية؛ يكفي إجراء تغيير بسيط في هذه الحلقة لتجنب استخدام الضلع uv؛ وهذا سوف يبني حلقة مولدة في G.

إذا وُجد جار لـ u يتبع مباشرة جارًا لـ v على المسار، مثل $u \leftrightarrow v_{i+1}$ و $v \leftrightarrow v_i$، فإن $(u, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_2)$ حلقة مولدة.



ولبرهنة أن مثل هذه الحلقة موجودة، سوف نبيّن أن هناك دليلًا مشتركًا في المجموعتين S و T المعرفتين بـ $S=\{i: u \leftrightarrow v_{i+1}\}$ و $T = \{i: v \leftrightarrow v_i\}$. وجمع الأحجام لهذه المجموعات يعطي

$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = d(u) + d(v) \geq n.$$

لاحظ أن كلًّا من المجموعتين S و T لا يحتويان على الدليل n. لذا، فإن $|S \cup T| < n$، ولهذا السبب، فإن $|S \cap T| \geq 1$. وعليه نكون قد بنينا تناقضًا بإيجاد حلقة مولدة في G. لذا، فإنه لا يوجد بيان غير هاملتوني (أعظم) يحقق الفرضيات. ■

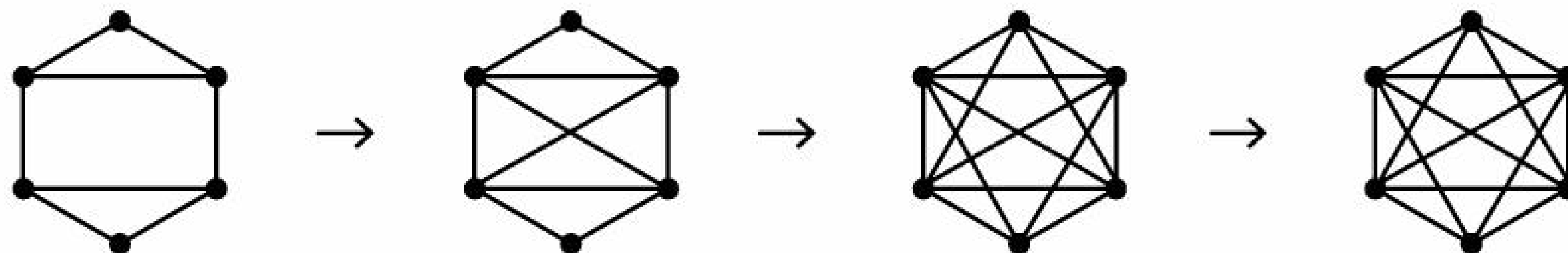
لقد لاحظ أور (Ore) أن هذه الحجة تستخدم $\delta(G) \geq n(G)/2$ فقط لإثبات أن $d(u) + d(v) \geq n$. لذلك، نستطيع أن نُضعِّف المطلوب للدرجة الصغرى $n/2$ ليصبح المطلوب هو $d(u) + d(v) \geq n$ فقط عندما يكون $u \nleftrightarrow v$. وأيضًا فإننا لسنا بحاجة إلى أن يكون G بيانًا غير هاملتوني أعظم، وقد احتجنا إلى أن يكون $G + uv$ هاملتونيًّا . وبذلك زودتنا بمسار مولد من u إلى v.

9.2.7. تمهيدية : ([Ore [1960) ليكن G بيانًا بسيطًا. إذا كان u و v رأسين غير متجاورين في G بحيث إن $d(u) + d(v) \geq n(G)$، فإن G يكون هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان $G + uv$ هاملتونيًّا.

الإثبات: أحد الاتجاهين واضح، وإثبات الاتجاه الآخر مشابه لإثبات النظرية 8.2.7. ■

لاحظ أن بوندي وكفتال (Bondy – Chva'tal) [1976] قد عبرا عن جوهر حجة (أور) بصورة أكثر عمومية بحيث يعطي شروطًا كافية للحلقات التي طولها l ولبيانات جزئية أخرى. وهنا سوف نناقش التطبيق للحلقات المولدة فقط. باستخدام التمهيدية 9.2.7 لإضافة أضلاع، نستطيع فحص ما إذا كان G هاملتونيًّا من خلال اختبار ما إذا كان البيان الأكبر هاملتونيًّا.

10.2.7. تعريف: الإغلاق (الهاملتوني) (Closure) للبيان G، ويرمز إليه بالرمز $C(G)$، ويعرف على أنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V(G)$ والذي نحصل عليه من G بإضافة الأضلاع التي تربط أزواج الرؤوس غير المتجاورة التي يكون مجموع درجاتها على الأقل n واحدًا تلو الآخر، حتى لا يبقى مثل هذه الأزواج.



إن البيان الموجود في الأعلى يبدأ برؤوس درجتها 2، لكن إغلاقه هو K_6. وتمهيدية (أور) تعطي النظرية الآتية:

11.2.7. نظرية : (Bondy – Chvátal [1976]) يكون البيان البسيط على n من الرؤوس هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان إغلاقه هاملتونيًّا. ■

لحسن الحظ أن الإغلاق لا يعتمد على الترتيب في إضافة الأضلاع المتوافرة.

12.2.7. تمهيدية : الإغلاق لـ G حسن التعريف.

الإثبات : لتكن $e_1, \ldots, e_r$ و $f_1, \ldots, f_s$ متتاليتين من الأضلاع المضافة في تشكيل $C(G)$، حيث تعطي الأولى G_1 في حين تعطي الثانية G_2. إذا وُجد في أي من المتتاليتين رأسان u و v غير متجاورين مجموع درجتيهما $n(G)$ على الأقل، فيجب إضافة الضلع uv قبل أن تنتهي المتتالية.

وهكذا، بما أنَّ f_1 قابل للإضافة مبدئيًّا لـ G، فإنه يجب أن ينتمي إلى G_1. وبالمثل، إذا كانت $f_1, \ldots, f_{i-1} \in E(G_1)$، فإن f_i تصبح قابلة للإضافة لـ G_1، وعليه فإنها تنتمي إلى G_1. لذا، فإن كلًّا من المتتاليتين لا تحتوي على الضلع الأول المحذوف من المتتالية الأخرى، لذا أصبح لدينا $G_2 \subseteq G_1$ و $G_1 \subseteq G_2$. ■

أصبح لدينا الآن شرط ضروري وكاف لاختبار الحلقات الهاملتونية في البيانات البسيطة. إلا أن ذلك لا يساعد كثيرًا؛ لأنه يطلب منا اختبار بيانٍ آخر فيما إذا كان هاملتونيًّا! ومع ذلك، فإنها تزودنا بطريقة لإثبات الشروط الكافية. لاحظ أن الشرط الذي يجبر $C(G)$ ليكون هاملتونيًّا فإنه أيضًا يجبر وجود حلقة هاملتونية في G.

وعلى سبيل المثال، فإن الشرط يمكن إعطاء أن $C(G) = K_n$. ولقد استخدم كفتال هذه الطريقة ليثبت أفضل شرط على متتالية الدرجات للحلقات الهاملتونية. حيث يمكن أن تكون بعض درجات الرؤوس صغيرة إذا كانت درجات رؤوس أخرى كبيرة بما فيه الكفاية.

13.2.7. نظرية : (Chvátal [1972]) ليكن G بيانًا بسيطًا مع درجات الرؤوس $d_1 \leq \ldots \leq d_n$، حيث $n \geq 3$. إذا كان $i < n/2$ يعطي أن $d_i > i$ أو $d_{n-i} \geq n - i$ **شرط كفتال** (Chvátal's condition)، فإن G يكون هاملتونيًّا.

الإثبات : إن إضافة أضلاع لتشكيل الإغلاق لا يقلل أي مدخلة من مدخلات متتالية الدرجات. وكذلك، يكون G هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان $C(G)$ هاملتونيًّا، لذلك يكفي الأخذ في الحسبان الحالة حيث $C(G) = G$، والذي نَصِفه بقولنا أن G مغلق. في هذه الحالة، نثبت أن شرط كفتال يؤدي إلى أن $G = K_n$.

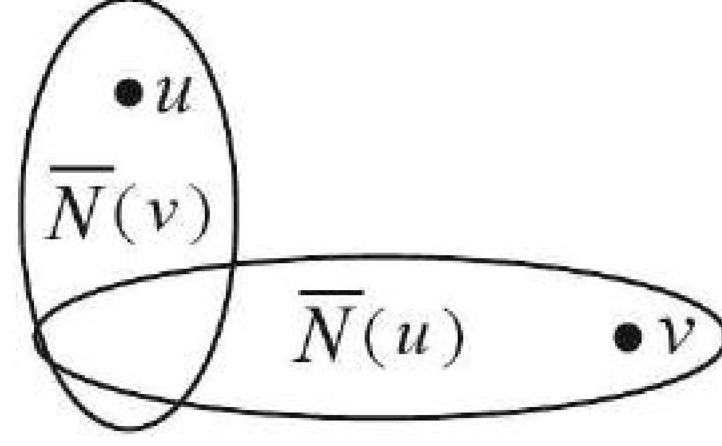
وسنثبت الآن المكافئ العكسي: إذا كان G بيانًا مغلقًا على n من الرؤوس وليس بيانًا تامًّا، فإننا سنجد قيمة لـ i أقل من $n/2$ لا تخالف شرط كفتال. إن المخالفة تعني أنه على الأقل i من الرؤوس درجتها على الأكثر i وعلى الأقل $n - i$ من الرؤوس درجتها أقل من $n - i$.

بافتراض أن $G \neq K_n$، فإننا نختار من بين أزواج الرؤوس غير المتجاورة زوجًا u، v بحيث يكون مجموع درجات هذا الزوج قيمة كبرى. ولأن G مغلق، فإن $u \not\leftrightarrow v$ يعطي أن $d(u) + d(v) < n$. نختار الأوسمة على u، v بحيث إن $d(u) \leq d(v)$. بما أن $d(u) + d(v) < n$، لذلك نكون قد حصلنا على أن $d(u) < n/2$. ضع $i = d(u)$.

نحتاج إلى إيجاد i رأسًا درجاتها i على الأكثر. ولأننا اخترنا زوجًا غير متجاور له مجموع درجات كبرى، فإن درجة كل رأس في $V - \{v\}$ غير متجاور مع v تساوي $d(u)$ على الأكثر، وهذا يساوي i. ويوجد $n - 1 - d(v)$ رأسًا مماثلاً، و $d(u) + d(v) \leq n - 1$ تعطي أن $n - 1 - d(v) \geq i$.

وكذلك نحتاج إلى $n - i$ رأسًا درجاتها أقل من $n - i$. إن درجة كل رأس في $V - \{u\}$ لا يجاور u تساوي $d(v)$ على الأكثر، ويكون لدينا $d(v) < n - d(u) = n - i$. لاحظ أنه يوجد $n - 1 - d(u)$ رأسًا مماثلاً. وبما أن $d(u) \leq d(v)$، فإننا نستطيع أيضًا إضافة u نفسها إلى مجموعة الرؤوس التي درجتها $d(v)$ على الأكثر. وهكذا نحصل على $n - i$ رأسًا درجتها أقل من $n - i$.

لقد أثبتنا أن $d_i \leq i$ و $d_{n-i} < n - i$ لـ i المختارة بصورة خاصة، وهذا يناقض الفرق. ■



14.2.7. مثال: بيانات غير هاملتونية لها درجات رؤوس "كبيرة". إن النظرية 13.2.7 تميز متتاليات الدرجات للبيانات البسيطة التي تُجبر وجود الحلقات الهاملتونية. إذا فشلت متتالية الدرجة في تحقيق شرط كفتال عند i، فإن أكثر ما نستطيع فعله هو جعل الحدود في $d_1, \ldots, d_n$ على الشكل:

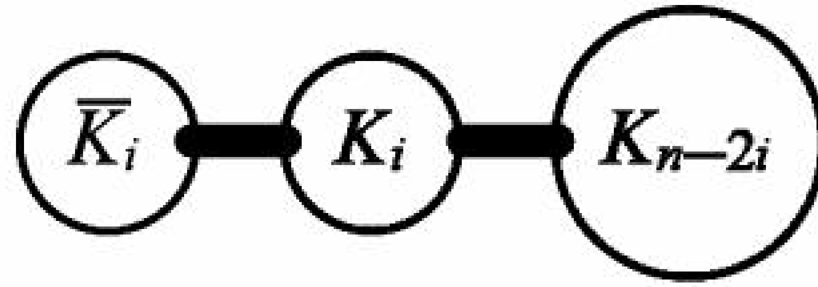
$$d_j = i \quad \text{لـ } j \leq i$$

$$d_j = n - i - 1 \quad \text{لـ } i + 1 \leq j \leq n - i$$

$$d_j = n - 1. \quad \text{لـ } j > n - i$$

ليكن G بيانًا بسيطًا يحقق متتالية الدرجة هذه (إذا وُجِدَت). تكون الرؤوس التي عددها i ودرجتها $n - 1$ متجاورة مع الرؤوس الأخرى جميعها (العصبة المركزية في الشكل). إن هذا يعطي i جارًا إلى الـ i رأسًا التي درجة كل منها i، لذلك فهي تشكل مجموعة مستقلة وليس لها أي جار إضافي. مع درجة $n - i - 1$، فإن كلًّا من الـ $n - 2i$ رأسًا المتبقية يجب أن يكون مجاورًا للرؤوس جميعها ما عدا نفسه والمجموعة المستقلة. لذلك، فإنَّ هذه الرؤوس تشكل عصبة. والبيان الوحيد الذي يحقق هذا هو $(\overline{K}_i + K_{n-2i}) \vee K_i$، كما هو مبين أدناه.

إن هذا البيان ليس هاملتونيًّا؛ لأن حذف i من الرؤوس التي درجتها $n - 1$ يخلف بيانًا جزئيًّا له $i + 1$ مركبة. إذا كان البيان البسيط H ليس هاملتونيًا، ودرجات رؤوسه $d'_1 \leq \ldots \leq d'_n$، فإن نتيجة كفتال تؤدي إلى أنه يوجد i بحيث يحقق البيان $(\overline{K}_i + K_{n-2i}) \vee K_i$ الذي درجات رؤوسه $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ أن $d_j \geq d'_j$ لكل i. ■



15.2.7. تعريف: يعرَّف المسار الهاملتوني (**Hamiltonian path**) على أنه مسار مولد.

كل بيان يملك حلقة مولدة يملك مسارًا مولدًا، ولكن P_n يبين أن العكس غير صحيح. نستطيع عمل تعليلات مشابهة للتعليلات في الأعلى لإثبات شروطٍ كافية للمسارات الهاملتونية، ولكن من الأسهل أن نستخدم عملنا السابق ونثبت النظرية الجديدة باستدعاء نظرية حول الحلقات. ولعمل ذلك، نستخدم تحويلاً قياسيًّا (معياريًّا).

16.2.7. ملاحظة: يملك البيان G مسارًا مولدًا إذا وفقط إذا كان البيان $G \vee K_1$ يملك حلقة مولدة.

تطبق الملاحظة 16.2.7 في العديد من التمارين. ونستخدمها هنا لاشتقاق شرط للمسارات المولدة يماثل شرط كفتال للحلقات المولدة.

17.2.7. نظرية : ليكن G بيانًا بسيطًا درجات رؤوسه $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. إذا كان $i < (n + 1) / 2$ يعطي ($d_i \geq i$ أو $d_{n+1-i} \geq n - i$)، فإن G يملك مسارًا مولدًا.

الإثبات : ليكن $G' = G \vee K_1$، وليكن $n' = n + 1$، ولتكن $d'_1, \ldots, d'_{n'}$ هي متتالية الدرجات لـ G'. بما أن أي حلقة مولدة في $G \vee K_1$ تصبح مسارًا مولدًا في G عندما يحذف الرأس الإضافي، لذا يكفي أن نثبت أن G' تحقق شرط كفتال الكافي للحلقات الهاملتونية.

بما أن الرأس الجديد يكون مجاورًا للرؤوس جميعها في $V(G)$، فإنه يصبح لدينا $d'_{n'} = n$ و $d'_j = d_j + 1$ لكل $j < n'$. لكل $i < n'/2 = (n + 1)/2$، فإن الفرضية على G تعطى أن $d'_i = d_i + 1 \geq i + 1 > i$ أو $d'_{n'-i} = d_{n+1-i} + 1 \geq n - i + 1 = n' - i$. وهذا هو شرط كفتال الكافي تحديدًا. لذا، فإن G' يملك حلقة مولدة، وحذف الرأس الإضافي يخلف مسارًا مولدًا في G. ■

18.2.7.*ملاحظة : يمكن تخفيف متطلبات الدرجة تحت شروط مثل الانتظام أو المتانة القصوى. كل بيان بسيط منتظم G درجات رؤوسه على الأقل $n(G)/3$ هو هاملتوني (Jackson [1980]). لاحظ أن بيان بيترسون فقط يمنع تقليل الحد عن $(n(G) - 1)/3$ (Zhu-Liu- Yu [1985] وهو مبسّط بصورة جزئية في (Bondy – Kouider) [1988]؛ انظر التمرين 13أيضًا.

من الممكن تقليل شرط الدرجة أكثر عندما يكون الترابط عاليًا. فعلى سبيل المثال، لقد خمّن توت [1971] أن كل بيان ثنائي الفرع منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 يكون هاملتونيًّا. ووجد هورتون [1982] مثالا مناقضًا له 96 رأسًا، في حين أن أصغر مثال مناقض معروف يملك 50 رأسًا (Georges [1989])، ولكن شروطًا أقوى لهذا النوع ربما تكون كافية. ■

يستخدم شرطُنا الكافي الأخير للحلقات الهاملتونية الترابطَ والاستقلال وليس الدرجات. والإثبات يعطي خوارزمية حسنة تبني حلقة هاملتونية، أو تبين عدم صحة الفرضية.

19.2.7. نظرية : (Chvátal – Erdös [1972]) إذا كان $\kappa(G) \geq \alpha(G)$، فإن G يملك حلقة هاملتونية (إلا إذا كان $G = K_2$).

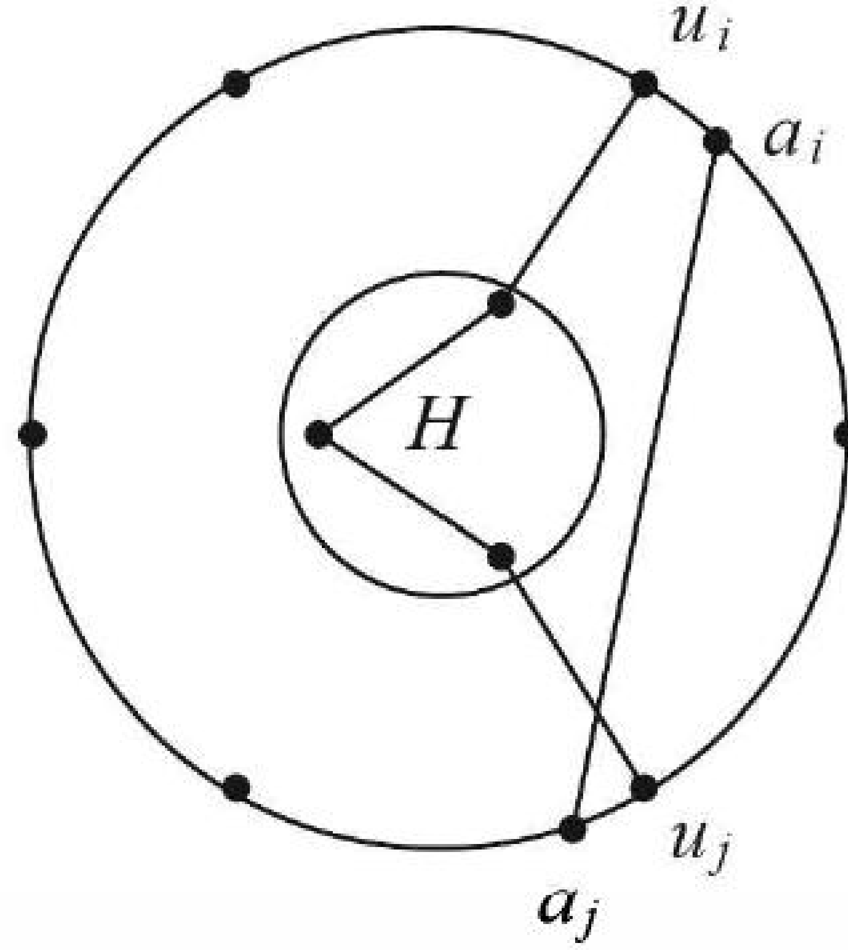
الإثبات : مع $G \neq K_2$، فإن الشروط تتطلب أن يكون $\kappa(G) > 1$. افترض أن $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. ليكن $k = \kappa(G)$، ولتكن C أطول حلقة في G. بما أن $\delta(G) \geq \kappa(G)$، وكل بيان G بحيث يملك $\delta(G) \geq 2$ حلقة طولها على الأقل $\delta(G) + 1$ (القضية 28.2.1)، فإن C تملك $k + 1$ رأسًا على الأقل.

لتكن H مركبة لـ $G - V(C)$. إن الحلقة C تملك k رأسًا على الأقل مع أضلاع تصلها بـ H، وبخلاف ذلك، فإن حذف رؤوس C مع الأضلاع التي تصلها بـ H يناقض أن $\kappa(G) = k$. لتكن $u_1, \ldots, u_k$ هي الـ k رأسًا في C التي تتصل بأضلاع مع أضلاع في H بترتيب مع اتجاه عقارب الساعة.

لكل $i = 1, \ldots, k$، ليكن a_i هو الرأس الذي يتبع u_i مباشرة على C. إذا كان أيّ رأسين من هذه الرؤوس متجاورين، لنقل $a_i \leftrightarrow a_j$، فإننا ننشئ حلقة أطول باستخدام a_ia_j، والأجزاء في C من a_i إلى u_j، ومن a_j إلى u_i، والمسار من u_i إلى u_j من خلال H (انظر التوضيح).

إذا كان a_i يملك جارًا في H، فإننا نستطيع أن نتحول إلى H بين u_i و a_i على C. لذلك، نستنتج أيضًا أنه

لا يوجد جار لـ a_i في H. لذا، فإن $\{a_1, ..., a_k\}$ بالإضافة إلى رأس في H تشكل مجموعة مستقلة حجمها $k + 1$.
وهذا التناقض يؤدي إلى أن C حلقةٌ هاملتونيةٌ. ■



20.2.7.*ملاحظة: معظم شروط الكفاية للحلقات الهاملتونية تعمم لشروط الحلقات الطويلة. المحيط (circumference) لبيان هو طول أطول حلقة فيه. إن شكلاً أضعف لشرط كاف للحلقات المولدة ربما يجبر وجود حلقة طويلة. لقد أثبت ديراك [1952b] أول نتيجة مشابهة: يملك البيانُ المترابط من الدرجة 2 وله درجة صغرى k محيطًا يساوي $\min\{n, 2k\}$ على الأقل. إن القضية 28.2.1 تضمن فقط حلقة طولها $k + 1$ على الأقل. فضلًا عن أنّ معظم نتائج الحلقات الطويلة هي أكثر صعوبة من الشروط الكافية المقابلة للحلقات الهاملتونية (انظر التمهيدية 36.4.8، والنظرية 37.4.8). ■

الحلقات في البيانات الموجهة (اختياري) ((Cycles in Directed Graphs(Optional))

تشبه نظريةُ الحلقات في البيانات الموجهة نظريةَ الحلقات في البيانات. للبيان الموجه G، ليكن $\delta^-(G) = \min d^-(v)$ و $\delta^+(G) = \min d^+(v)$. إن البراهين في الفصل الأولى التي تستخدم المسارات العظمى تضمن مسارات طولها k، وحلقات طولها $k + 1$، حيث $k = \max\{\delta^-(G), \delta^+(G)\}$.

إن كل بيان تام هو هاملتوني، إلا أن توجيهات البيانات التامة هي أكثر تعقيدًا. والشرط الضروري لخاصية الترابط من الدرجة 2 يصبح ضروريًا لخاصية الترابط القوية للحلقات المولدة في البيانات الموجهة. أما للدوري (دوري الألعاب)، فإن هذا الشرط الضروري هو أيضًا شرطٌ كافٍ (التمرين 45).

أما للبيانات الموجهة الاختيارية، فسنثبت نظرية مشابهة لنظرية ديراك (النظرية 8.2.7). في الحقيقة، هذه النظرية سوف تعطي نظرية ديراك بوصفها حالة خاصة (التمرين 49). وقد قام مينيل (Meyniel) [1973] بتقوية النظرية بصورة جوهرية بتخفيف الفرضيات (النظرية 42.4.8).

21.2.7. تعريف: يكون البيان الموجَّه صارمًا (Strict) إذا كان لا يملك عرى، وله نسخة واحدة على الأكثر من كل زوج مرتب بوصفها ضلعًا.

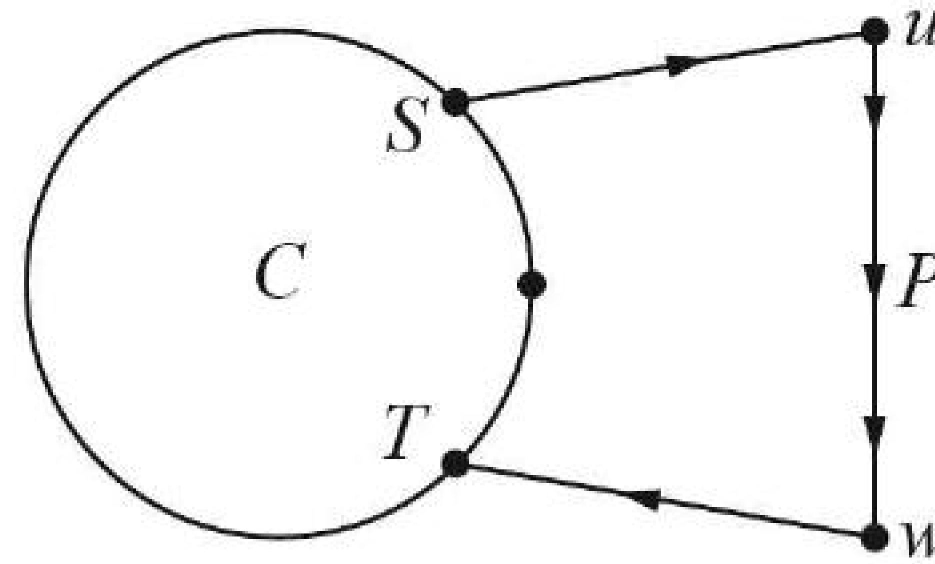
22.2.7. نظرية: ((Ghouila – Houri [1960]) إذا كان D بيانًا موجّهًا صارمًا وكان:
$\min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\} \geq n(D)/2$، فإن D يكون هاملتونيًا.

الإثبات: سنستخدم التناقض ومبدأ التطرفية مرة أخرى. في المثال المناقض D على n من الرؤوس، لتكن C أطول حلقة وطولها l. كما لاحظنا فإن $l > \max\{\delta^+, \delta^-\} \geq n/2$. ليكن P أطول مسار في $D - V(C)$، يبدأ

عند u، وينتهي عند w، وطوله $m \geq 0$. الآن، $l > n/2$ و $n \geq l + m + 1$ يؤديان إلى أن $m < \frac{n}{2}$.

لتكن S هي مجموعة الرؤوس في C التي تسبق الرأس u، ولتكن T هي مجموعة الرؤوس في C التي تلي w. باستخدام الأعظمية للمسار P، فإنَّ كلَّ سابق لـ u وكلَّ تالٍ لـ w يقع في $V(C) \cup V(P)$. لذلك، فإن كلًّا من حجم S و T يساوي على الأقل $\min\{\delta^-, \delta^+\} - m$، وهذا على الأقل $(\leq n/2 - m)$؛ ولهذا فهو موجب. وعليه، فإن S و T غير خاليتين.

تضمن الأعظمية لـ C أن المسافة على طول C من الرأس $u' \in S$ إلى الرأس $w' \in T$ يجب أن تزيد على $m + 1$. وبخلاف ذلك، فإن التحرك على طول P بدلاً من C من u' إلى w' يعطي حلقة أطول. لذا، من الممكن افتراض أنَّ كل رأس في S متبع على C بأكثر من m رأسًا ليس في T.



إذا كانت المسافة بين رأسين متتاليين في S على طول C هي دائمًا $m + 1$ على الأكثر، فلا يوجد مكان مسموح لنضع فيه رأسًا من T. وبما أن S و T غير خاليتين، لذا يمكننا افتراض وجود رأس في S متبع على C برؤوس ليست في S وعددها $m + 1$ على الأقل. وهذه ممنوعة من T، وكما هي الحال مع الرأس التالي مباشرة على C للرؤوس الأخرى جميعها في S. لذلك، يوجد $|S| - 1 + m + 1 \geq n/2$ رأسًا على الأقل في C ليست في T. ومع الرؤوس التي في T، فإن هذا يؤدي إلى $|V(C)| \geq n - m$، وهذا يناقض أن $l \leq n - m - 1$. ويؤدي هذا التناقض إلى أن C يجب أن تكون حلقة مولدة. ■

تمـــارين (Exercises)

.1.2.7 (-) لأيِّ القيم r يكون $K_{r,r}$ هاملتونيًّا؟

.2.2.7 (-) هل بيان جروتزتش (Grötzsch) (المثال 2.2.5) هاملتونيًّا؟

.3.2.7 (-) لـ $n > 1$، أثبت أن $K_{n,n}$ يملك $n!(n-1)!/2$ حلقة هاملتونية.

.4.2.7 (-) أثبت أن G يملك مسارًا هاملتونيًّا فقط إذا كان لكل $S \subseteq V(G)$، فإن عدد المركبات لـ $G - S$ هو $|S| + 1$ على الأكثر.

• • • • •

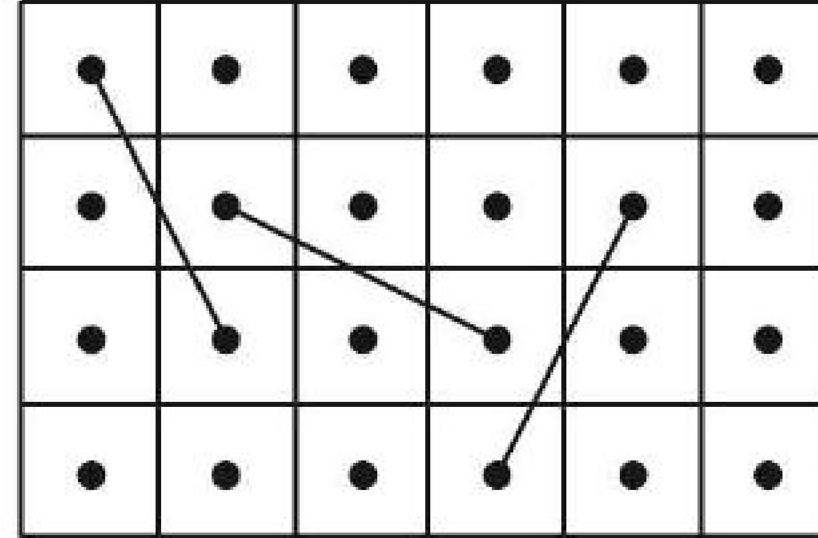
.5.2.7 أثبت أن كل مسار في ذي الاثني عشر وجهًا يقع في حلقة هاملتونية.

.6.2.7 (!) ليكن G بيانًا ثنائي الفرع هاملتونيًّا، واختر $x, y \in V(G)$. أثبت أن $G - x - y$ يملك مواءمة تامة إذا وفقط إذا كان كل من x و y على جهتين مختلفتين من التجزئة الثنائية لـ G. طبق هذا لتثبت أن حذف مربعي وحدة من لوحة الشطرنج (8×8) يبقي على لوحة يمكن أن تجزأ إلى مستطيلات 1 في 2 إذا وفقط إذا تحقق أن المربعين المحذوفين يملكان لونين مختلفين.

.7.2.7 يأكل فأر مكعب $3 \times 3 \times 3$ من الجبن بأكل المكعبات الجزئية $1 \times 1 \times 1$ جميعها. إذا بدأ عند زاوية

مكعب جزئي، وفي كل مرة يتحرك إلى مكعب جزئي مجاور (تتشارك بوجه مساحته 1)، هل يستطيع الفأر عمل هذا والانتهاء بأكل المكعب الجزئي الذي في المركز؟ هاتِ طريقة لعمل ذلك، أو أثبت استحالة ذلك (تجاهل الجاذبية).

8.2.7. (!) على لوحة الشطرنج، **يستطيع الحصان** (knight) أن يتحرك من مربع إلى آخر بحيث يختلف بمربع واحد في أحد الإحداثيين، وبمربعين في الإحداثي الآخر كما هو مبين أدناه. أثبت أنه لا توجد لوحة شطرنج $n \times 4$ تملك **جولة حصان**: وهي استعراض لحركات الحصان بحيث ينتقل على كل مربع مرة واحدة ويعود إلى البداية. (مساعدة: جد مجموعة مناسبة من الرؤوس في البيان المقابل من أجل مخالفة الشرط الضروري).



9.2.7. أنشئ عائلة مكونة من عدد لا نهائي من البيانات غير الهاملتونية التي تحقق الشرط الضروري لقضية 3.2.7.

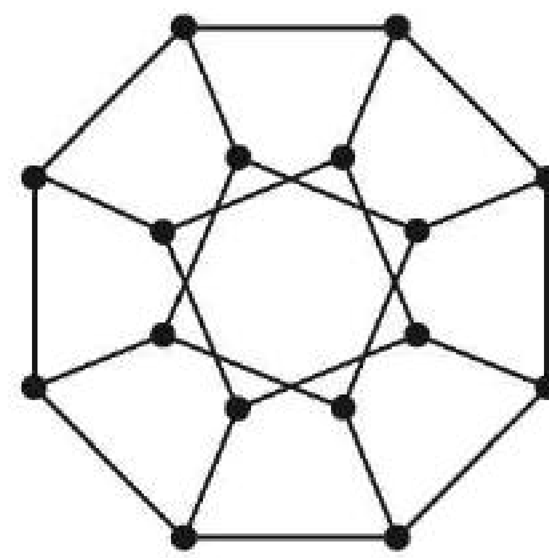
10.2.7. (!) هاملتوني مقابل أويلري:

a) جد بيانًا غير أويلري مترابطًا من الدرجة 2 بحيث يكون بيانه الخطي هاملتونيًا.

b) أثبت أن $L(G)$ يكون هاملتونيًا. إذا وفقط إذا كان G يملك مسربًا مغلقًا يحتوي على نقطة طرفية واحدة على الأقل من كل ضلع. (Harary, Nash – Williams [1965])

11.2.7. أنشئ بيانًا مترابطًا من الدرجة 3 ومنتظمًا من الدرجة 3 بحيث لايكون بيانه الخطي هاملتونيًا. (مساعدة: استبدل كل رأس في بيان بيترسون ببيان مناسب، وطبق التمرين 10.2.7).

12.2.7. حدّد ما إذا كان البيان أدناه هاملتونيًا.

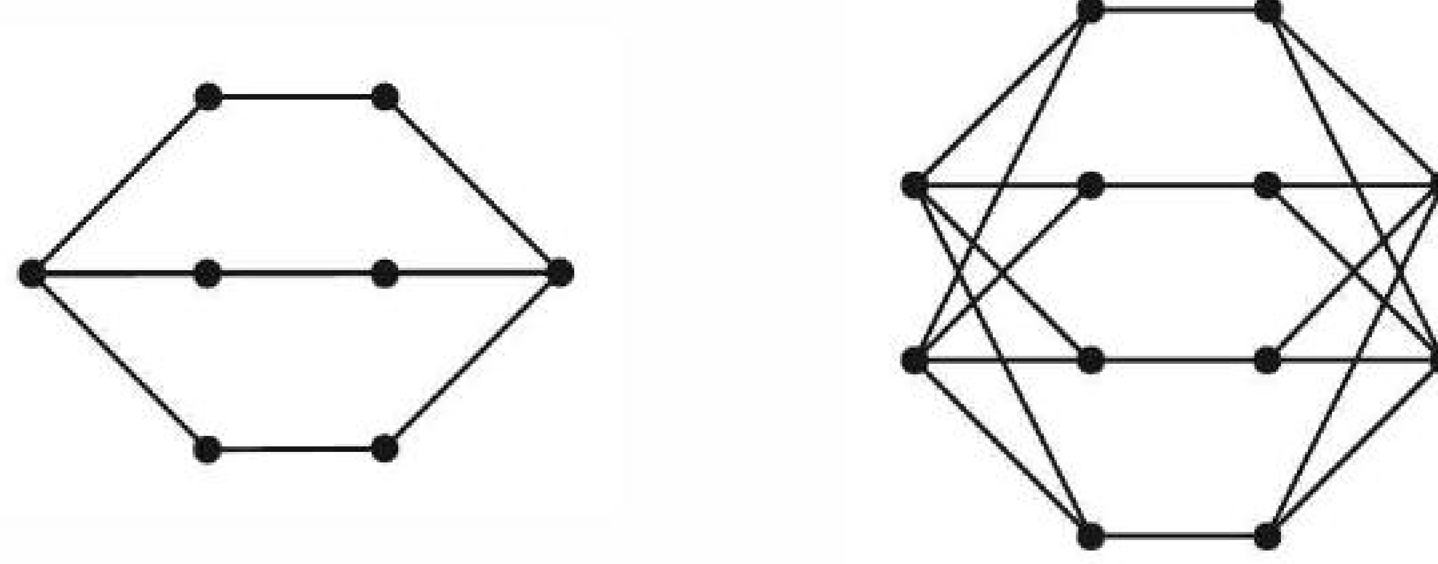


13.2.7. ليكن G البيانَ المنتظمَ من الدرجة 3 الذي نحصل عليه من بيان بيترسون باستبدال مثلث بأحد الرؤوس، ومن ثَمَّ مواءمة رؤوس المثلث مع جيران الرأس المحذوف. أثبت أن G ليس هاملتونيًا. (تعليق: ما عدا هذا البيان وبيان بيترسون، فإن كل بيان منتظم من الدرجة k، ومترابط من الدرجة 2 وله $3k + 3$ رأسًا على الأكثر يكون هاملتونيًا). (Hilbig [1986])

14.2.7. يكون البيان G قابلًا للتلوين الضلعي من الدرجة k **بصورة فريدة** (uniquely) إذا كانت التلوينات الضلعية الفعلية من الدرجة k للبيان G جميعها تُحدث التجزئة للأضلاع نفسها. أثبت أن كلَّ بيان منتظم من الدرجة 3 قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 **بصورة فريدة** يكون هاملتونيًا. (Greenwell – Kronk [1973])

15.2.7. ضع n نقطة حول دائرة. ليكن G_n هو البيان المنتظم من الدرجة 4 الذي نحصل عليه بضمِّ كل نقطة إلى أقرب نقطتين إليها في كل اتجاه. إذا كان $n \geq 5$، فأثبت أن G_n هو اتحاد لحلقتين هاملتونيتين.

16.2.7. لـ $k \geq 3$، ليكن G_k البيانَ الذي نحصل عليه من نسختين منفصلتين من $K_{k,k-2}$ بإضافة مواءمة بين "المجموعتيَن المجزأتين" بحجم k. حدد قيم k جميعها بحيث يكون G_k هاملتونيًّا.



17.2.7. (!) أثبت أن الجداء الديكارتي لبيانين هاملتونيين يكون بيانًا هاملتونيًّا. استنتج أن المكعبَ Q_k ذا البعد k هامتلونيٌّ لكل $k \geq 2$.

18.2.7. أثبت أن الجداء الديكارتي لبيانين غير تافهين لهما مسارات هاملتونية يفشل في امتلاك حلقة هاملتونية إذا وفقط إذا كان كلٌّ من البيانين ثنائيَّ الفرع ورتبته فردية. وعلى أي حال، فإن الجداء يملك مسارًا هاملتونيًّا.

19.2.7. (+) لكل عدد طبيعي فردي k، أنشئ بيانًا ثنائي الفرع بسيطًا منتظمًا من الدرجة k ومترابطًا من الدرجة $k-1$ ولا يكون هاملتونيًّا.

20.2.7. (!) **القوة** k (Power) لبيان بسيط G هو البيان البسيط G^k مع مجموعة الرؤوس $V(G)$ ومجموعة الأضلاع $\{uv : d_G(u,v) \leq k\}$:

a) افترض أن $G - x$ يملك ثلاث مركبات غير تافهة على الأقل، وحيث يملك x جارًا واحدًا فقط في كل منها. أثبت أن G^2 ليس هاملتونيًّا. (مساعدة: خذ في الحسبان البيان الثاني في المثال 5.2.7).

b) أثبت أن المكعب لكل بيان مترابط (له على الأقل ثلاثة رؤوس) يكون هاملتونيًّا. (مساعدة: اختزل هذه الحالة إلى حالة الأشجار، وأثبتها للأشجار بإثبات النتيجة الأقوى وهي أنه إذا كان xy ضلعًا في الشجرة T، فإن T^3 تملك حلقة هاملتونية تستخدم الضلع xy. تعليق: لقد أثبت فليشنر (Flechner) [1974] أن المربع لكل بيان مترابط من الدرجة 2 يكون هاملتونيًّا).

21.2.7. لتكن $n = k(2l+1)$. أنشئ بيانًا تامًّا له k فرعًا تامًّا غير هاملتوني على n من الرؤوس، ودرجته الصغرى تساوي $\frac{n}{2}\frac{k-1}{k}\frac{2l}{2l+1}$ (Snevily).

22.2.7. ليكن $\mathbf{G}(k,t)$ صفَّ البيانات التي لها k فرعًا والمترابطة بحيث تكون كل مجموعة مجزأة حجمها t، وكلُّ بيان جزئي محدث من مجموعتين مجزأتين هو مواءمة حجمها t. لـ $k \geq 4$ و $t \geq 4$، أنشئ بيانًا في $\mathbf{G}(k,t)$ بحيث يكون غير هاملتوني. (مساعدة: يوجد بيان في $\mathbf{G}(4,4)$ مع مجموعةٍ فيها 3 عناصر، وحذفها يخلف أربع مركبات؛ عَمِّمْ هذا المثال. تعليق: $\mathrm{G}(3,t) = \{C_{3t}\}$، وأيضًا كل بيان في $\mathbf{G}(k,3)$ يكون هاملتونيًّا) (Ayel [1982]).

23.2.7. (*) أثبت أن المتانة لبيان بيترسون هي $4/3$.

24.2.7. (*) ليكن $t(G)$ يرمز إلى المتانة لـ G:

a) أثبت أن $t(G) \leq k(G)/2$. (Chvátal [1973]).

b) أثبت أن المساواة تتحقق في فرع (a) للبيانات التي تخلو من المخالب. (مساعدة: خذ في الحسبان مجموعة S حيث $|S| = t(G).\ c(G-S)$ (Mattews – Sumner [1984]).

25.2.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا وليس غابة، ويملك خصرًا يساوي 5 على الأقل. أثبت أن $\overline{G}$ يكون هاملتونيًا. (مساعدة: إستخدم شرط أور (Ore's Condition) (N. Graham)

26.2.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس، حيث $n \geq 2$. أثبت أنه إذا كان G لا يحقق شرط كفتال، فإن $e(G) \geq n - 2$. استنتج أن العدد الأكبر للأضلاع في بيان بسيط غير هاملتوني على n من الرؤوس هو $\binom{n-1}{2}+1$ (Bondy [1972b], Ore [1961]).

27.2.7. لـ $n \geq 2$، أثبت بصورة مباشرة بالاستقراء على n أن العدد الأكبر للأضلاع في بيان بسيط غير هاملتوني على n من الرؤوس هو $\binom{n-1}{2}+1$.

28.2.7. تعميم لحد الأضلاع:

a) ليكن $f(i) = 2i^2 - i + (n - i)(n - i - 1)$، وافترض أن $n \geq 6k$. أثبت أن القيمة العظمى لـ $f(i)$ على الفترة $k \leq i \leq n/2$، هي $f(k)$.

b) ليكن G بيانًا بسيطًا مع درجة صغرى k. استخدم فرع (a) وشرط كفتال لتثبت أنه إذا كان G يملك $6k$ رأسًا على الأقل، ويملك أكثر من $\binom{n(G)-k}{2}+k^2$ ضلعًا، فإنه يكون هاملتونيًا ([1962] Erdös).

29.2.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا مع درجات رؤوس $d_1,\ldots,d_n$، دُلَّ عليها بحيث $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. ولتكن $d'_1,\ldots,d'_n$ هي درجات الرؤوس في $\overline{G}$ مع $d'_1 \leq \ldots \leq d'_n$. أثبت أنه إذا كان $d_i \geq d'_i$ لكل $i \leq n/2$، فإن G يملك مسارًا هاملتونيًا. استنتج أن كل بيان بسيط متشاكل مع متممته يملك مسارًا هاملتونيًا. (Clap*h*am [1974])

30.2.7. احصل على تمهيدية 9.2.7 (الكفاية لشرط أور) من النظرية 13.2.7 (الكفاية لشرط كفتال). (Bondy [1978])

31.2.7. (!) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا بسيطًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، وكان يملك $\alpha(G)$ رأسًا على الأقل درجاتها $n(G) - 1$، فإنه يكون هاملتونيًا.

32.2.7. (+) ليكن G بيانًا بسيطًا ثنائيًا بالتجزئة الثنائية X، Y حيث $|X| = |Y| = n/2 > 1$. ولتكن $d_1,\ldots,d_n$ هي درجات الرؤوس فيه، حيث $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. ليكن G' هو أصغر بيان حاوٍ للبيان (supergraph) G بحيث $G'[Y] = K_{n/2}$:

a) أثبت أن G يكون هاملتونيًا إذا وفقط إذا كان G' هاملتونيًا. وصِف العلاقة بين متتاليتي الدرجات لكلٍّ من G و G'.

b) افترض أن $d_k > k$ أو $d_{n/2} > n/2 - k$ عندما $k \leq n/4$. أثبت أن G يكون هاملتونيًا. (مساعدة: افترض أن متتالية الدرجة لـ G' لا تحقق شرط كفتال لبعض قيم $i < n/2$، واحصل على تناقض). (Chva'tal [1972]).

33.2.7. (!) يكون البيان **مترابطا هاملتونيًا** (Hamiltonian – connected) إذا وُجد لكل زوج من الرأسين u، v مسار هاملتوني من u إلى v. أثبت أن البيان البسيط G يكون هاملتونيًا إذا كان $e(G) \geq \binom{n(G)-1}{2}+2$ ومترابطا هاملتونيًا إذا كان $e(G) \geq \binom{n(G)-1}{2}+3$.
(يسمح إثبات الاثنين معًا بإثبات أبسط.) (Ore [1963]).

34.2.7. شرط ضروري لمترابط هاملتوني: (Moon [1965a]).

a) أثبت أن كل بيان مترابط هاملتوني على أربعة رؤوس على الأقل يملك $\lceil 3n(G)/2 \rceil$ ضلعًا على الأقل.

b) أثبت أن الحد في فرع (a) هو أفضل ما يمكن بإثبات أن $C_m \square K_2$ يكون مترابطا هاملتونيًا إذا كان m فرديًا.

7.2.35. (!) شرط الكفاية لمترابط هاملتوني: (Ore [1963])

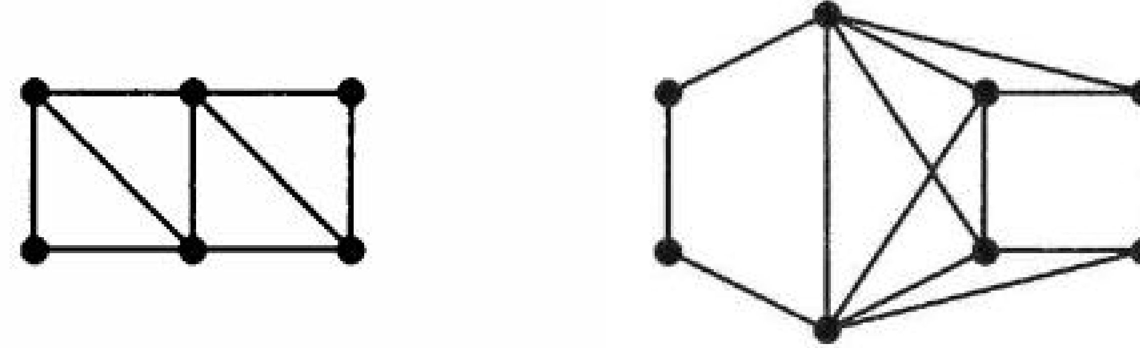
a) أثبت أن بيانًا بسيطًا G يكون مترابطا هاملتونيًّا إذا كان $x \nleftrightarrow y$ يؤدي إلى أن $d(x) + d(y) > n(G)$. (مساعدة: أثبت أن بيانات مناسبة ترتبط مع G هي هاملتونية بأخذ إغلاقها في الحسبان).

b) أثبت أن النتيجةَ في فرع (a) دقيقةٌ وحادةٌ ببناء بيان بسيط على n من الرؤوس مع درجة صغرى $n/2$ بحيث يكون غير مترابط وغير هاملتوني لكل عدد زوجي n أكبر من 2.

7.2.36. شرط لاس فيرجناس (Las Vergnas condition) لبيان بسيط على n من الرؤوس هو وجود ترتيب $v_1, \dots, v_n$ للرؤوس بحيث لا يوجد زوج v_i, v_j غير متجاور ويحقق أن $i < j$، و $d(v_i) \le i$، و $d(v_j) < j$، و $d(v_i) + d(v_j) < n$، و $i + j \ge n$. لقد أثبت لاس فيرجناس [1971] أن هذا الشرط كافٍ لوجود حلقة مولدة:

a) أثبت أن شرط كفتال (النظرية 7.2.13) يعطي شرط لاس فيرجناس، وهذا يعني أن نظرية لاس فيرجناس تقوي نظرية كفتال.

b) أثبت أن كل بيان من البيانين أدناه لا يحقق شرط كفتال، ولكنه يملك بيانًا تامًّا كإغلاقه الهاملتوني. أثبت أن البيان الأصغر أدناه يحقق شرط لاس فيرجناس، ولكن البيان الأكبر لا يحقق ذلك.



7.2.37. لـ $\emptyset \ne S \subset V(G)$، ضع $t(S) = |\overline{S} \cap N(S)|/|\overline{S}|$. وليكن $\theta(G) = \min t(S)$. لقد أثبت لو (Lu [1994]) أنه إذا تحقق أن $\theta(G)n(G) \ge \alpha(G)$، فإن G يكون هاملتونيًّا. أثبت أن $\kappa(G) \ge \alpha(G)$ تعطي أن $\theta(G)n(G) \ge \alpha(G)$. (تعليق: هذا يثبت أن نظرية (لو) تعطي نظرية كفتال وإيردوز، وهي نتيجة أقوى).

7.2.38. (!) مسارات وحلقات طويلة. ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا حيث $\delta(G) = k \ge 2$ و $n(G) > 2k$:

a) ليكن P مسارًا أعظميًّا في G (ليس بيانًا جزئيًّا من أي مسار أطول). إذا كان $n(P) \le 2k$، فأثبت أن البيان الجزئي المحدث $G[V(P)]$ يملك حلقة مولدة (ليس شرطًا أن يكون ترتيب رؤوس هذه الحلقة كالترتيب في P نفسه).

b) استخدم فرع (a) لتثبت أن G يملك مسارًا له $2k + 1$ رأسًا على الأقل. وأعطِ مثالاً لكل قيمة فردية n لتبين أنه ليس من الضروري أن يملك G حلقة لها أكثر من $k + 1$ رأسًا.

7.2.39. أثبت أنه إذا كان G بيانًا بسيطًا بحيث متتالية درجاته هي $d_1 \le \dots \le d_n$ وكان $d_1 + d_2 < n$، فإن G يملك مسارًا طوله على الأقل $d_1 + d_2 + 1$، إلا إذا كان G هو الرابط لـ $n - (d_1 + 1)$ رأسًا معزولاً مع بيانٍ على $d_1 + 1$ من الرؤوس، أو كان $G = pK_{d_1} \vee K_1$ لبعض قيم $p \ge 3$ (Ore [1967b]).

7.2.40. (!) لقد أثبت ديراك [1952b] أن كل بيان بسيط G مترابط من الدرجة 2 يملك حلقة طولها على الأقل $\min\{n(G), 2\delta(G)\}$. استخدم هذه في إثبات أن كل بيان منتظم من الدرجة $2k$ على $4k+1$ رأسًا يكون هاملتونيًّا. (Nash – Williams)

7.2.41. لقد خمَّن سكوت سميت أنه إذا أخذنا أي أطول حلقتين في بيان مترابط من الدرجة k دائمًا فإنهما تملكان k رأسًا مشتركًا على الأقل. إن طريق الحل أدناه يصلح لقيم k الصغيرة:

a) افترض أن G بيان منتظم من الدرجة 4 على n من الرؤوس بحيث إن G هي اتحاد لحلقتين (قد تظهر أضلاع متكررة). ليكن G' بيانًا منتظمًا من الدرجة 4 على $n + 2$ من الرؤوس، وبحيث نحصل عليه

من G بتقسيم جزئي لضلعين، وإضافة ضلع مزدوج بين الرأسين الجديدين. بين أن G' هو أيضًا اتحاد لحلقتين مولدتين إذا كان $n \leq 5$.

b) استخدم فرع (a) لتستنتج أن أي زوج من الحلقات الأطول في بيان مترابط من الدرجة k يتقاطع في k نقطة على الأقل إذا كان $k \leq 6$ (Burr, Smith).

42.2.7. (+) ليكن G بيانًا أويلريًّا. ولتكن V' هي مجموعة الحلقات الأويلرية في G، مع الأخذ في الحسبان أن حلقة ومعكوسها هما الشيء نفسه. افترض أن G' هو البيان على مجموعة الرؤوس V' بحيث تكون حلقتان متجاورتين إذا وفقط إذا كانت إحداهما تظهر من الأخرى بعكس الترتيب الضلعي على حلقة جزئية مغلقة فعلية. أثبت أن G' يكون هاملتونيًّا إذا كان $\Delta(G) \leq 4$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على الرؤوس التي درجتها 4، وهذا يثبت وجود حلقة هاملتونية لكل ضلع في G'. (تعليق: يتحقق الاستنتاج أيضًا دون تقييد على $\Delta(G)$ (Zhang – Guo [1986] Xia [1982])

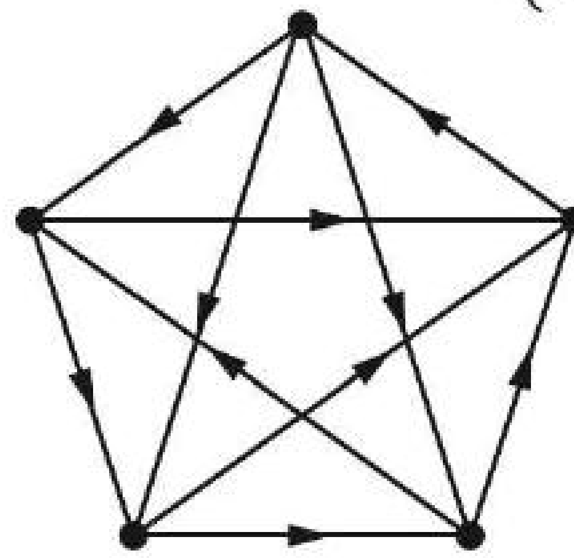
43.2.7. أثبت أن البيان الحلقي الأويلري G' في التمرين 42.2.7 يكون منتظمًا، واشتقّ صيغة لدرجة رؤوسه. قارن $\delta(G')$ و $n(G')$ عندما تكون $n(G) = 2$؛ لتبين أن المسألة السابقة لا يمكن حلها بتطبيق نتائج عامة على الخاصية الهاملتونية لبيانات منتظمة بدرجات معينة.

44.2.7. أثبت أن كل دوري يملك مسارًا هاملتونيًّا (مسار موجه مولد). (مساعدة: استخدم التطرفية). (Re'dei [1934])

45.2.7. ليكن T دوريًّا قويًّا. لكل $u \in V(T)$ ولكل k بحيث $3 \leq k \leq n$، أثبت أن u ينتمي إلى حلقة طولها k في T. (مساعدة: استخدم الاستقراء على (k) (Moon [1966]).

46.2.7. ليكن G دوريًّا على 7 رؤوس بحيث يملك كل رأس فيه درجة خروج 3. استخدم التمرين 45.2.7 لتثبت أن G يملك حلقتين منفصلتين رأسيًّا.

47.2.7. (+) أثبت أن كل دوري يملك مسارًا هاملتونيًّا غير محتوى في حلقة هاملتونية، ما عدا الدوري الحلقي على ثلاثة رؤوس، والدوري T_5 على خمسة رؤوس المرسوم أدناه كذلك. (مساعدة: الاستقراء عامل، لكن إثبات الادعاء لستة رؤوس يحتاج إلى بعض العناية. في الحالات جميعها، جد الشكل المطلوب أو $G = T_5$).
(Grunbaum, in Harary [1969, p211])



48.2.7. (*) أثبت أن النظرية 22.2.7 هي أفضل ما يمكن من خلال إثبات أن شرط الصرامة على البيان الموجّه لا يمكن إضعافه للسماح بالعرى. أنشئ لكل عدد زوجي h بيانًا موجهًا D على n من الرؤوس، بحيث لا يكون هذا البيان هاملتونيًّا، وعلى الرغم من أن نسخة واحدة من كل زوج مرتب هي ضلع، وأن $\min\{\delta^-(D), \delta^+(D)\} \geq n/2$.

49.2.7. (*) احصل على النظرية 8.2.7 (الكفاية لشرط ديراك في البيانات) من النظرية 22.2.7 (الكفاية لشرط غويلا وهوري على البيانات الموجهة). (مساعدة: حول بيانا بسيطا G إلى بيان موجه صارم باستبدال كل ضلع بزوج من الأضلاع الموجهة في اتجاهين متعاكسين).

3.7. المستويات والتلوينات والحلقات (Planarity,Coloring, and Cycles)

نعود إلى مسألة الألوان الأربعة لاستكشاف علاقتها القديمة مع المسائل المتعلقة بالتلوين الضلعي والحلقات الهاملتونية. ثَمَّ سنأخذ في الحسبان الطرق التي ستعمِّم المسألة.

نظرية تايت (Tait's Theorem)

في العام 1878م، أثبت تايت نظرية تربط بين التلوين الوجهي من جهة والتلوين الضلعي للبيانات المستوية من جهة أخرى، واستخدم هذا في الاقتراب لنظرية الألوان الأربعة. و قد نبه هذا إلى الاهتمام في التلوين الضلعي. سوف نعرف أولاً التلوين الوجهي بصورة دقيقة.

1.3.7. تعريف: نعرِّف التلوين الوجهي الفعلي (proper face – coloring) لبيان سوي مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 على أنه تخصيص ألوان لوجوهه بحيث تكون ألوانُ وجوهه التي تملك ضلعًا مشتركًا على حدودها مختلفةً.

نفكر أحيانًا في التلوين الوجهي بوصفه تلوينًا للبيان الثنوي. لذا، سنحصر اهتمامنا في التلوينات الوجهية للبيانات المترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2. عندما يملك البيان السوي ضلع قطع، فإن ثنوية يملك عروة. ونقول إن البيانات التي تملك عرى لا تملك تلوينات فعلية. ونلاحظ في البيان السوي الذي له ضلع قاطع أن الوجه يشارك ضلعًا مع نفسه، لذا يكون غير قابل للتلوين.

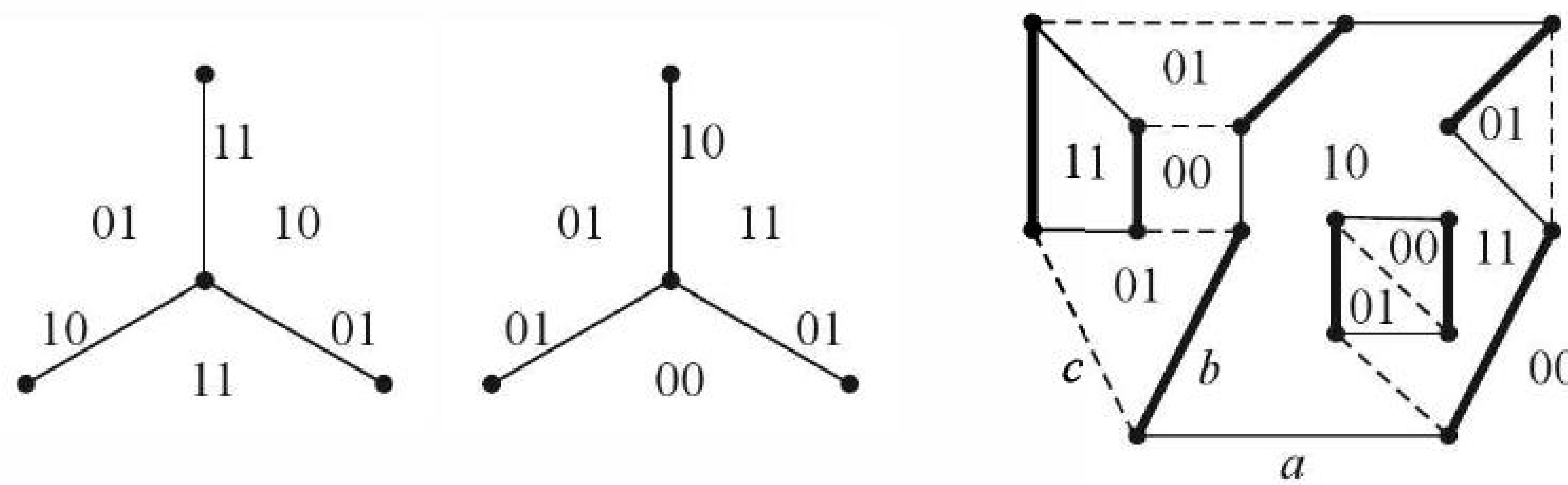
بما أن إضافة أضلاع لا تجعل التلوين العادي أسهل، فإنه لبرهنة نظرية الألوان الأربعة يكفي إثبات أن التثليثات جميعها قابلة للتلوين من الدرجة 4. وبصورة مكافئة، نستطيع تبيان أن ثنويات التثليثات جميعها قابلة للتلوين الوجهي من الدرجة 4. والثنوي G^* للتثليث السوي للبيان G هو بيان سوي مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 ومنتظم من الدرجة 3 (التمرين 11.1.6). لقد بين تايت أنه لمثل هذه البيانات، فإن التلوينات الوجهية من الدرجة 4 الفعلية مكافئة للتلوينات الضلعية من الدرجة 3 الفعلية.

2.3.7. نظرية: (Tait [1878]) إن البيان السوي المنتظم من الدرجة 3 المترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كان قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 4.

الإثبات: ليكن G مثل هذا البيان. افترض أولاً أن G قابلٌ للتلوين الوجهي من الدرجة 4؛ سوف نحصل على تلوين ضلعي من الدرجة 3. ارمز إلى الألوان الأربعة بأزواج ثنائية مرتبة: $c_0 = 00, c_1 = 01,\ c_2 = 10,\ c_3 = 11$. لوِّن $E(G)$ بتعيين اللون الناتج عن جمع اللونين c_i و c_j جمعًا إحداثيًّا بمقياس 2 للضلع الذي بين الوجهين اللذين لوناهما c_i و c_j. (لذلك $c_2 + c_3 = c_1$، على سبيل المثال). سوف نبين أن هذا هو تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3.

ولأن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، فإن كل ضلع يحد بوجهين مختلفين. لذا، فإن اللون 00 لن يكون حاصل جمع لونين. سوف نفحص أن الأضلاع تأخذ ألوانًا مختلفة عند كل رأس. فعند الرأس v، لاحظ أن ألوان الوجوه التي تحدها الأضلاع الثلاثة الواقعة على هذا الرأس تكون مختلفة. ولنقل إنها $\{c_i, c_j, c_k\}$، كما هو مبين أدناه. إذا كان اللون 00 لا ينتمي إلى هذه المجموعة، فإن مجموع أي لونين من هذه المجموعة يكون هو اللون الثالث، ولذلك تكون $\{c_i, c_j, c_k\}$ هي أيضًا مجموعة الألوان على الأضلاع. إذا كان $c_k = 00$، فإن c_i و c_j يظهران على ضلعين من هذه الأضلاع الثلاثة، ويكون لون الضلع الثالث $c_i + c_j$، وهذا اللون لا ينتمي إلى المجموعة

. $\{c_i, c_j, c_k\}$

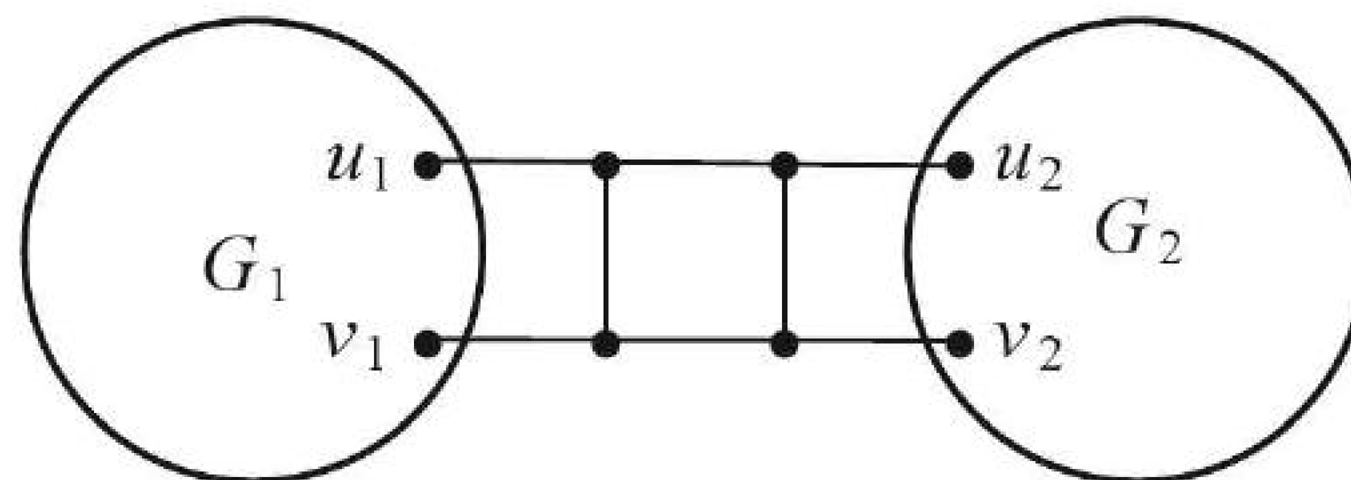


للاتجاه المعاكس، افترض أن G يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 باستخدام الألوان a,b,c (مبينة بخط غامق، ومتصل، ومتقطع). لتكن E_a، E_b، E_c مجموعات الأضلاع التي تملك الألوان الثلاثة على الترتيب. سوف ننشئ تلوينًا وجهيًّا من الدرجة 4 باستخدام الألوان الأربعة التي عُرفت سابقًا. بما أن G منتظم من الدرجة 3، فإن كل لون يظهر على كل رأس، والاتحاد لأي مجموعتين من E_a، E_b، E_c منتظم من الدرجة 2 والذي يجعلها كاتحاد من حلقات منفصلة. وكل وجه من هذا البيان الجزئي هو اتحاد لوجوه من البيان الأصلي. ضع $H_1 = E_a \cup E_b$ و $H_2 = E_b \cup E_c$. لكل وجه في G، افترض اللون الذي إحداثيه i ($i \in \{1,2\}$) هو النوعية لعدد الحلقات التي تحتويه في H_i (0 للزوجي، 1 للفردي).

ندعي أن هذا هو تلوين وجهي فعلي من الدرجة 4، كما هو موضح أعلاه. لاحظ أن الوجهين F،F' اللذين يشتركان في الضلع e مختلفان؛ لأن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2. ينتمي الضلع e إلى حلقة C موجودة في واحدة من المجموعتين H_1، H_2 على الأقل (وفي المجموعتين إذا كان لـ e اللون b). ومن نظرية جوردان للمنحنيات، فإن أحد الوجهين F، F' يكون داخل C والآخر خارجها. إضافة إلى أن الحلقات الأخرى في H_1 و H_2 جميعها تفشل في فصل F و F'، وتتركهما على الجانب نفسه. لذلك، إذا كان e يملك أحد اللونين a،c أو b، فإن النوعية لعدد الحلقات التي تحتوي على F و F' تكون مختلفة في كلٍّ من H_1 و H_2، أو في كليهما، على الترتيب. لذا، فإن F و F' يستقبلان ألوانًا مختلفة في التلوين الوجهي الذي أنشأناه. ■

واستنادًا إلى هذه النظرية، فإن تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 لبيان منتظم من الدرجة 3 يُسَمَّى **تلوينَ تايت** (Tait coloring). لاحظ أن المسألة لإثبات أنَّ كلَّ بيان سوي منتظم من الدرجة 3 ومرتبط ضلعيًّا من الدرجة 2 قابلٌ للتلوين الضلعي من الدرجة 3 - تُخَفَّف لإثبات أنَّ كلَّ بيان سوي منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 قابلٌ للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

3.3.7.* تمهيدية: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة 3، وترابطه الضلعي يساوي 2، فإنه يملك بيانين جزئيين G_1، G_2، والرؤوس $u_1,v_1 \in V(G_1)$ ، و $u_2,v_2 \in V(G_2)$ بحيث $u_1 \nleftrightarrow v_1$، وكذلك $u_2 \nleftrightarrow v_2$، و G يتلون من G_1، G_2، وسلم بطول ما يربط G_1 بـ G_2 عند الرؤوس u_1,v_1,u_2,v_2 كما هو مبين أدناه.



الإثبات: إذا كان G يملك مجموعة قطع ضلعية حجمها 2، والتي يقع الضلعان فيها أحدهما على الآخر، فإن الضلع الثالث الواقع على رأسهما المشترك هو ضلع قطع، وهذا يناقض أن $K' = 2$. لذلك، يمكن افتراض أن

النقاط الطرفية الأربعة في المجموعة القاطعة الصغرى xy, uv تكون مختلفة. إذا كان $y \nleftrightarrow x$ و $v \nleftrightarrow u$، فإن هذه الرؤوس الأربعة هي الرؤوس المطلوبة؛ والسلم يملك هذين الضلعين فقط.

عندما يكون $x \leftrightarrow y$، فإننا نوسع السلم (تعليل مشابه ينطبق عندما $u \leftrightarrow v$). ليكن w هو الجار الثالث لـ x و z هو الجار الثالث لـ y. إذا كان $w = z$، فإن الضلع الثالث الواقع على هذا الرأس يكون ضلع قطع. لذا، فإن $w \neq z$ والسلم يوسّع. إذاَ كان $z \nleftrightarrow w$، فنكون قد أنهينا هذا الاتجاه. وبخلاف ذلك، نعيد التعليل حتى نحصل على زوج غير متجاور عند قاعدة السلم. ■

4.3.7.* نظرية : تكون البياناتُ المستوية المنتظمة من الدرجة 3 والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2 جميعُها قابلةً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كانت البياناتُ المستويةُ البسيطة المنتظمة من الدرجة 3 والمترابطة من الدرجة 3 جميعُها قابلةً للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

الإثبات: العائلة الثانية محتواة في الأولى. لذلك، فإنه يكفي لإثبات أن قابليةَ التلوين الضلعي من الدرجة 3 للبيانات جميعها في العائلة الأصغر تعطي النتيجةَ للعائلة الأكبر نفسَها أيضًا. وهنا نستخدم الاستقراء على $n(G)$.

خطوة الأساس ($n(G) = 4$): إن البيان السوي البسيط المنتظم من الدرجة 3 والمترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 والذي له 4 رؤوس على الأكثر هو K_4 فقط، وهو قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

خطوة الاستقراء ($n(G) > 4$): بما أن $K(G) = K'(G)$ عندما يكون G منتظمًا من الدرجة 3 (النظرية 11.1.4)، فنستطيع حصرَ اهتمامنا بالبيانات المنتظمة من الدرجة 3 التي ترابطها الضلعي 2. تعطينا تمهيدية 3.3.7 تفكيكًا لـ G إلى G_1، G_2، وسلمًا يربط بينهما. وطول السلم هو المسافة من G_1 إلى G_2.

لاحظ أن كلًّا من $G_1 + u_1v_1$ و $G_2 + u_2v_2$ منتظمٌ من الدرجة 3 ومترابطٌ ضلعيًّا من الدرجة 2. ومن فرضية الاستقراء، فإنهما قابلان للتلوين الضلعي من الدرجة 3؛ ليكن f_i تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 لـ $G_i + u_iv_i$. بدِّلْ أسماء الألوان بحيث يكون $f_1(u_1v_1) = 1$، وبحيث يكون $f_2(u_2v_2)$ مختارًا من $\{1,2\}$ ليكون لهمَا النوعية نفسها مثل طول السّلّم.

وبالرجوع إلى G، لون كل G_i كما في f_i. مبتدئًا من نهاية السلم عند G_1، لون درجات السلم باللون 3، ولون المسارات التي تشكل جوانب السلم تبادليًّا باللونين 1 و 2. الآن، لاحظ أن أضلاع السلم عند u_i و v_i تملك اللون $f_i(u_iv_i)$. وهكذا نكون قد ركبنا تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 لـ G. لذا، فإن نظرية الألوان الأربعة تختزل لإيجاد تلوينات (تايت) للبيانات المستوية المنتظمة من الدرجة 3 والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة 3. العبارة التي تُعنى بوجود هذه التلوينات معروفة بِ**مخمِّنة تايت** (Tait's conjecture) وهي مكافئة لنظرية الألوان الأربعة.■

نظرية جرينبرج (Grinberg's Theorem)

يوجد تلوين (تايت) لكل بيان هاملتوني منتظم من الدرجة 3 (التمرين 1). وقد اعتقد تايت أن هذا يكمل إثبات نظرية الألوان الأربعة؛ لأنه افترض أن كل بيان سوي منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 يكون هاملتونيًّا. وعلى الرغم من أن الفجوة في الإثبات لوحظت باكرًا، إلا أنه لم يُعطَ مثال مناقض بصورة صريحة إلا في العام 1946. فيما بعد، اكتشف جرينبرج [1968] شرطًا ضروريًّا بسيطًا أسهم في إيجاد الكثير من البيانات المستوية غير الهاملتونية المترابطة من الدرجة 3 والمنتظمة من الدرجة 3. إضافة إلى أن بيان جرينبرج متضمن في التمرين (16).

5.3.7. نظرية : (Grinberg [1968]) إذا كان G بيانًا سويًّا يخلو من العرى ويملك حلقة هاملتونية C، وله f_i' وجهًا بطول i داخل C، و f_i'' وجهًا بطول i خارج C، فإن $\sum_i (i-2)(f_i' - f_i'') = 0$.

الإثبات: آخذين في الحسبان الوجوه داخل C وخارجها بصورة منفصلة، فإننا نريد بيان أن $\sum_i (i-2)(f_i') = \sum_i (i-2)(f_i'')$.

f_i لاحظ عدم وجود تغييرات على أحد جانبي المعادلة تؤثر في المجموع على الجانب الآخر. علاوة على ذلك، نستطيع أن نتحول من الداخل والخارج بإسقاط الغمس على كرة وثقب وجه داخل C.

لذلك نحتاج – فقط– إلى إثبات أن $\sum_i(i-2)f_i'$ ثابت. وفي حال عدم وجود أضلاع داخلية، فإن المجموع هو $n-2$. ومع هذا بوصفها خطوة أساس، فإننا نثبت بالاستقراء على عدد الأضلاع الداخلية التي مجموعها $n-2$ دائمًا.

افترض أن $\sum_i(i-2)f_i' = n-2$ عندما يوجد k ضلعًا داخل C. نستطيع الحصول على أي بيان له $k+1$ ضلعًا داخل C بإضافة ضلع لمثل هذا البيان. والضلع المضاف يقطع وجهًا طوله r إلى وجهين طولهما s و t. لدينا $s+t = r+2$؛ لأن الضلع الجديد يسهم في الوجهين الجديدين، في حين يسهم كل ضلع على الوجه القديم في أحد الوجوه الجديدة.

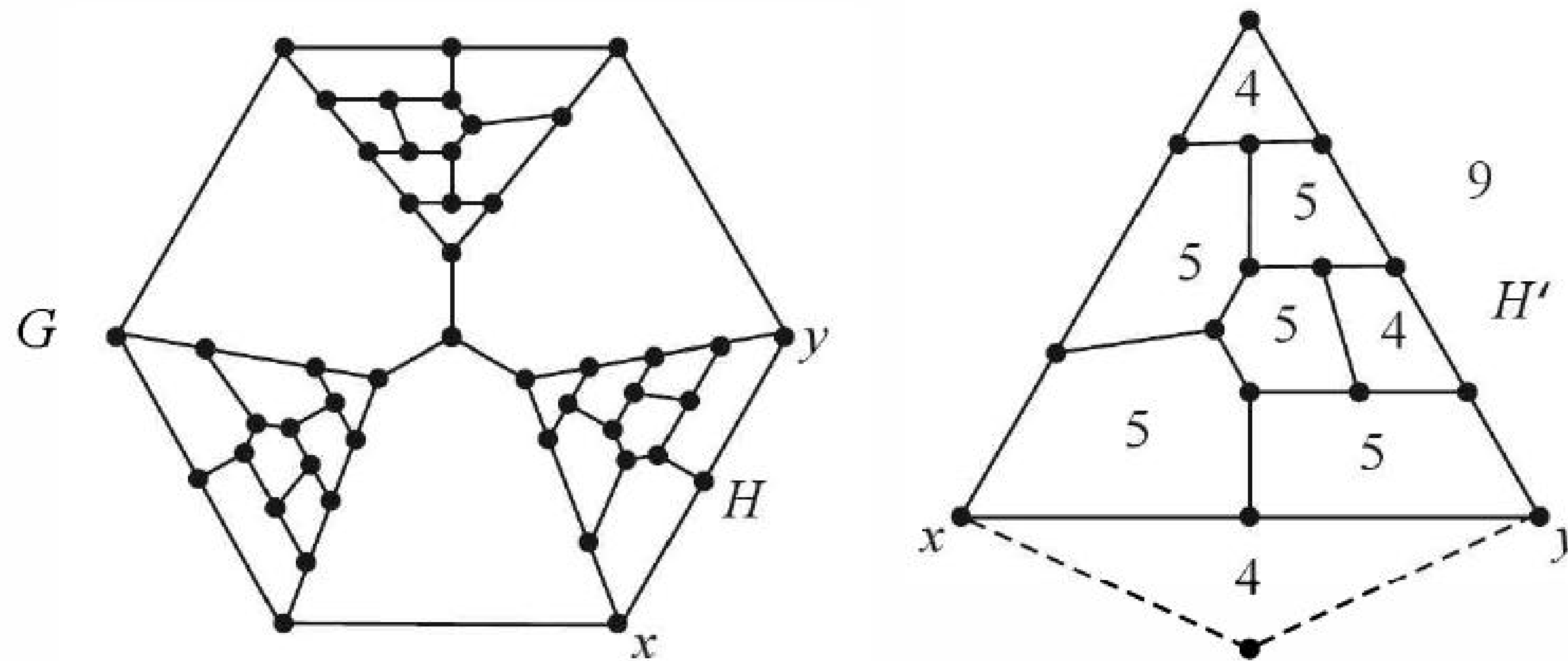
لا يوجد أي تغيير لأي مساهمات أخرى في المجموع. بما أن $(r-2) = (t-2) + (s-2)$، فإن المساهمات من هذه الوجوه تبقى كما هي. ومن فرضية الاستقراء، فإن المجموع هو $n-2$. ■

يعدُّ شرط جرينبرج ضروريًا؛ لذا يمكن استخدامه لإثبات أن البيانات غير هاملتونية. أحيانًا من الممكن أن تُبَسَّطَ التعليلات باستعمال الحساب المقياسي. إن أي عددين غير متطابقين بمقياس k يكونان غير متساويين.

نطبق هذا على أول بيان معروف بوصفه بيانًا سويًّا منتظمًا من الدرجة 3، ومترابطًا من الدرجة 3، وغير هاملتوني (Tutte [1946]). لقد استخدم توت تعليلاً لهذا الموضوع بالذات ليثبت أن هذا البيان غير هاملتوني. ولسنوات عديدة، كان هذا هو المثال الوحيد المعروف (انظر التمرين 17 لمعرفة المثال الأصغر المعروف الآن).

6.3.7. مثال: شرط جرينبرج وبيان توت. بيان توت G هو البيان الذي يظهر على اليسار أدناه. ليكن H رمزًا إلى كل مركبة نحصل عليها بحذف الرأس المركزي والأضلاع الثلاثة الطويلة. بما أنّ أيّ حلقة هاملتونية يجب أن تمر على الرأس المركزي في G، فعليها اجتياز نسخة واحدة من H على طول مسار هاملتوني يصل المدخلين الآخرين لـ H اللذين أسميناهما x و y.

وعليه، سوف ندرس أن بيانًا يملك حلقة هاملتونية إذا وفقط إذا كان H يملك مسارًا هاملتونيًّا من x إلى y. ويمكن الحصول على مثل هذا البيان H' (عن اليمين أدناه) بإضافة مسار من x إلى y طوله 2 من خلال رأس جديد.



يمتلك البيان السوي H' خمسة وجوه من الدرجة 5، وثلاثة وجوه من الدرجة 4، ووجهًا واحدًا من الدرجة 9. ولذلك يصبح شرط جرينبرج هو أن $2a_4 + 3a_5 + 7a_9 = 0$ ، حيث $a_i = f_i' - f_i''$ = 3. بما أن الوجه غير المحدود يبقى دائمًا في الخارج، فإن المعادلة تختزل بمقياس 3 إلى $2a_4 \equiv 7 \bmod 3$. وبما أن $f_4' + f_4'' = 3$، فإن الاحتمالات لـ a_4 هي 3+، 1+، 1-، 3-. إن الاختيارَ الوحيدَ الذي يحقق $2a_4 \equiv 7 \bmod 3$ هو $a_4 = -1$، والذي يتطلب أن يقع وجهان من الوجوه ذات الدرجة 4 خارج الحلقة الهاملتونية. على أي حال، تملك الوجوه من الدرجة

4 رأسًا درجته 2 لا يمكن أن يقع خارج الحلقة؛ بسبب أن الأضلاع الواقعة على الرأس الذي درجته 2 تفصل الوجه من الوجه الخارجي.

نستطيع أن نصل إلى تناقض أسرع بواسطة تقسيم جزئي لضلع ما لكل رأس درجته 2. وهذا لا يغير من وجود حلقة مولدة. إن البيان الناتج يملك سبعة وجوه من الدرجة 5، ووجهًا واحدًا من الدرجة 4، ووجهًا واحدًا من الدرجة 11. وتصبح المعادلة المطلوبة $3a_5 - 9 = (\pm 1).2$، والتي ليس لها حل؛ لأن الجانب الأيسر ليس من مضاعفات العدد 3. ■

لم نقدم خطوات منتظمة لنثبت عدم وجود حلول للمعادلات ذوات المتغيرات الصحيحة. إن تعليلاتنا التي تتضمن قابلية القسمة ما هي إلا خدع لتجنب سرد الحالات جميعها، على الرغم من أن مثل هذه الخدع تعطي النتيجة المرجوة غالبًا.

الترابط العالي يجعل تجنب الحلقات المولدة أمرًا صعبًا. لقد أثبت توت [1956] (وُسِّعَت بواسطة توماسن Thomassen [1983]) أن كل بيان سوي مترابط من الدرجة 4 هو هاملتوني. وكذلك خمَّن بارنت [1969] أن كل بيان سوي ثنائي الفرع منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 يكون هاملتونيًّا.

السناركات SNARKS (اختياري)

إن طريقًا آخر للاقتراب من فهم نظرية الألوان الأربعة هو دراسة أيّ البيانات المنتظمة من الدرجة 3 تكون قابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3. وفي المناقشة التي تسلِّط الضَّوء على البيانات المنتظمة من الدرجة 3 والبيانات التي ليس لها أضلاع قطع، فمن المناسب أن يكون لدينا صفات بسيطة لوصف هذه الخصائص.

7.3.7. تعريف: البيان الذي يخلو من الجسور (bridgeless graph) هو بيان ليس له أضلاع قطع. أما **البيان التكعيبي** (cubic graph) فهو بيان منتظم درجته 3.

8.3.7. مخمَّنة (مخمنة تلوين الأضلاع من الدرجة 3 – توت [1967]) يحتوي كلُّ بيان تكعيبي خالٍ من الجسور وغير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 على تقسيم جزئي لبيان بيترسون.

لقد أثبتت المخمنة 8.3.7 ؛ ومثلها مثل نظرية الألوان الأربعة، حيث إن إثباتها الذي تمَّ بمساعدة الحاسوب يستخدم طرق التفريغ. وسوف يظهر الإثبات في سلسلة مكونة من خمسة بحوث لكل من روبرتسن، وساندرز، وسيمور، وثوماس [2001].

بما أن كل تقسيم جزئي لبيان بيترسون ليس سويًّا، فإن المخمنة 8.3.7 تعطي مخمنة تايت، لذا تعطي نظرية الألوان الأربعة. حيث إن إحدى الطرق الطبيعية للاقتراب من هذه المخمنة، والتي هي مثل فكرة الاختزال لنظرية الألوان الأربعة، هي اشتقاق الخصائص التي يجب أن يمتلكها أصغر مثال معاكس. وفي هذه اللغة، تنصُّ النظرية 4.3.7 أن المثال المعاكس الأصغر يجب أن يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 3. وفي التمهيدية الآتية، سوف نجعل هذه العبارة دقيقة، ثمَّ نحصل على خصائص عديدة أخرى.

9.3.7. تعريف: القطع الضلعي التافه (trivial edge cut): قطع ضلعي بحيث إن حذفه يعزل رأسًا مفردًا، أما القواطع الضلعية الأخرى **فليست تافهة** (nontrivial).

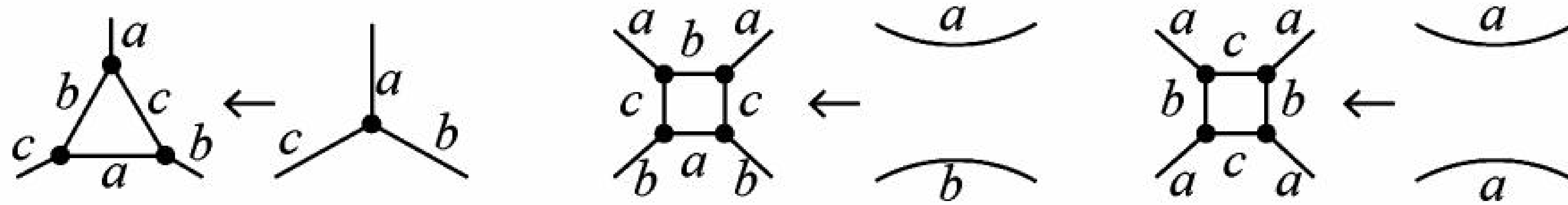
10.3.7. تمهيدية: إذا كان G بيانًا تكعيبيًّا غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 ، أو كان خصره أقل من 4 ، أو كان له قطع ضلعي غير تام من الدرجة 3، فإنه يحتوي على تقسيم جزئي لبيان تكعيبي أصغر غير قابل لتلوين ضلعي من الدرجة 3.

الإثبات: افترض أولاً أن G يملك قطعًا ضلعيًّا حجمه 2. كما نوقش في التمهيدية 3.3.7، فإن هذه الأضلاع لا تمتلك رؤوسًا مشتركة. إن حذف القطع الضلعي وإضافة ضلع لكل قطعة يعطي البيانات التكعيبية $G_1 + u_1v_1$

و $G_2 + u_2v_2$، وكما أسلفنا في تعليل النظرية 4.3.7، فإنه يوجد واحدٌ من هذه البيانات على الأقل يكون غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3. بما أنه يمكن تبديل الضلع المضاف بمسار من خلال القطعة الأخرى، فإن G يحتوي على تقسيم جزئي لهذا البيان الأصغر وغير القابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

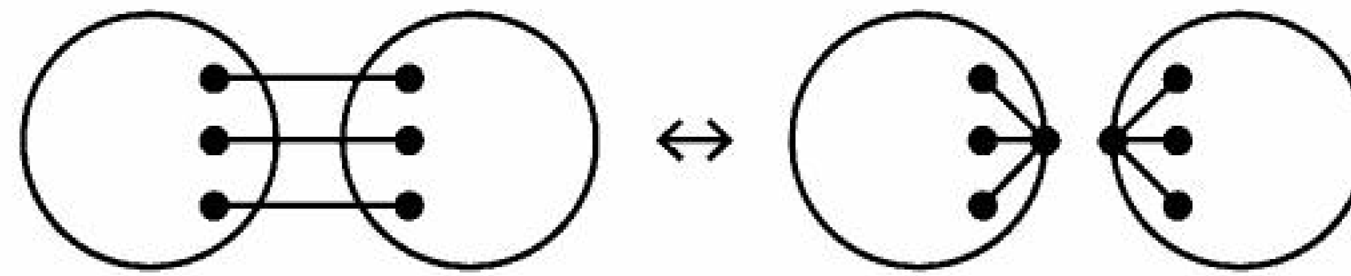
تاليًا، افترض أن G يحوي مثلثًا. ليكن G' هو البيان الذي نحصل عليه من G بتقليص المثلث إلى أحد الرؤوس. لاحظ أنّ أيّ تلوين ضلعي فعليٍّ من الدرجة 3 لـ G' يمكن أن يتوسع إلى تلوين ضلعي فعلي لـ G من الدرجة 3 كما هو مبين أدناه. فضلًا عن أنَّ G يحتوي على تقسيمٍ جزئي لـ G'، والذي حصل عليه بحذف ضلع من المثلث.

افترض أن G يحتوي على حلقة من الدرجة 4، ولكنه لا يحتوي على مثلث. ليكن G' البيانَ التكعيبيَّ الذي نحصل عليه من G بحذف ضلعين متعاكسين في الحلقة التي درجتها 4 وأن يستبدل بها المسارات الناتجة التي طولها 3 بأضلاع منفردة. بما أن G لا يملك مثلثًا، فإن الأضلاع الجديدة ليست عرى. إن أي تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3 لـ G' يؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3 لـ G من خلال الحالتين المبينتين أدناه. و يحتوي G أيضًا على تقسيم جزئي لـ G'. لذلك، فإن G' هو البيان الأصغر المنشود.



أخيرًا، افترض أن G يحتوي على قطع ضلعي من الدرجة 3 غير تافه $[S,\overline{S}]$. بما أننا نستطيع افتراض أنَّ G مترابط ضلعي من الدرجة 3، فإن الأضلاع الثلاثة للقطع تكون منفصلة زوجًا زوجًا. وكذلك البيانات H_1 و H_2 اللذان حصلنا عليهما بتقليص $G[S]$ أو $G[\overline{S}]$ إلى رأس مفرد منتظمان من الدرجة 3 أيضًا. إذا كان كلاهما قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3، فإنه يمكن إعادة تسمية الألوان لتتوافق على أضلاع القطع، وهذا يؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3 لـ G. وهكذا، فإن أحد هذين البيانين على الأقل غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

بقي فقط أن نبين أن G يحتوي على تقسيم جزئي لـ H_1 و H_2. لتكن a,b,c هي النقاط الطرفية في $\overline{S}$ للأضلاع في القطع. بما أن G مترابط ضلعيًا من الدرجة 3، فإن القطع هو رابطة، و $G[\overline{S}]$ مترابط (القضية 15.1.4). وهكذا فإن $G[\overline{S}]$ يحتوي على مسار P من a إلى b ومسار من c إلى P. إن إضافة هذه المسارات وأضلاع القطع إلى $G[S]$ يكمل تقسيم جزئي لـ H_1 (وتعامل H_2 بالطريقة نفسها). ■



11.3.7. تعريف: نعرِّف **السنارك** (Snark) على أنه بيان منتظم ثنائي الدرجة، ومترابط من الدرجة 3، ويكون غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3، وخصره 5 على الأقل، ولا يملك قطعًا ضلعيًا غير تافه من الدرجة 3. **والسنارك الأولي** (prime snark) هو سنارك لا يحتوي على تقسيم جزئي لسنارك أصغر.

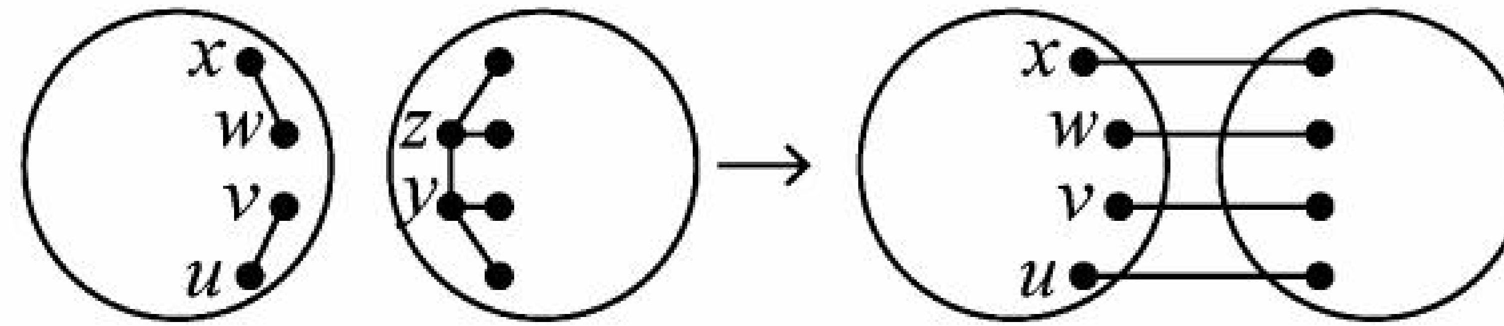
وبهذا نكون قد خففنا مخمنة التلوين الضلعي من الدرجة 3 لـ (توت) إلى العبارة التي تنصُّ على أن بيان بيترسون هو السنارك الأولي الوحيد. مرة أخرى، نلاحظ أن المخمنة قد أُثبِتَت. انظر (Robertson – Sanders – Seymour – Thomas [2001]).

بعد بيان بيترسون في عام 1898م، وُجِدَ 3 سناركات فقط حتى عام 1975م هي: سنارك بلانوسا (Blanuša) على 18 رأسًا [1946]، وسنارك ديسكارتس (Descartes) على 210 رؤوس [1948]، وسنارك

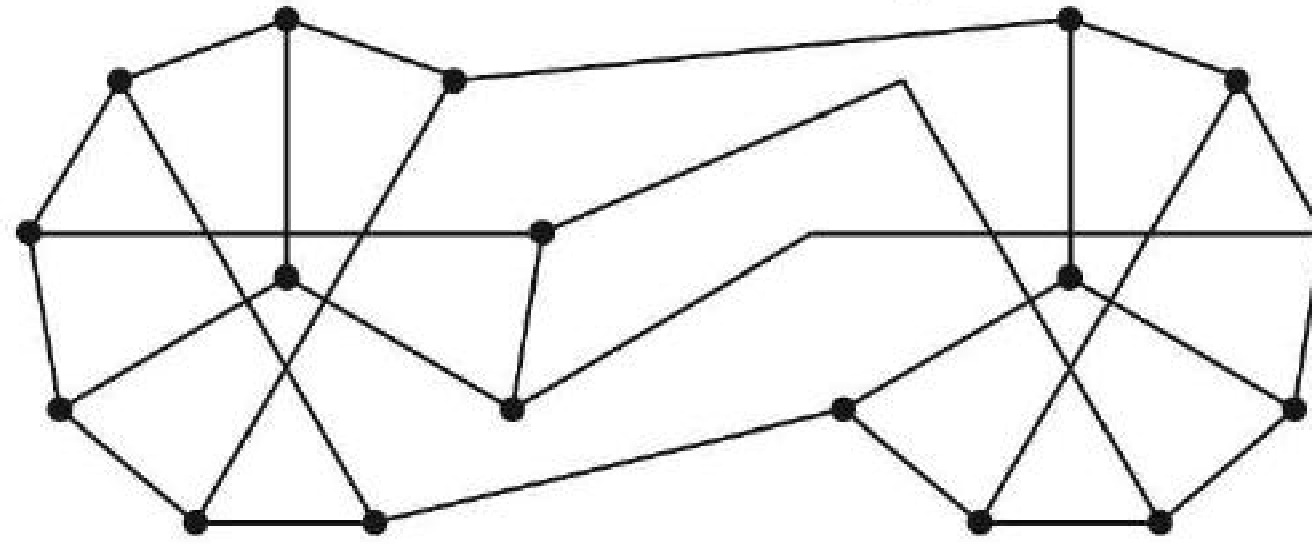
سزكرز (Szekeres) على 50 رأسًا [1973]؛ ممّا حثّ مارتن جاردنر [1976] على اقتراح مصطلح "سنارك"، ليستحضر الندرة للكائن في لويس كارول "صيد السنارك".

وقد بين إسحق [1975] أن السناركات السابقة قد ظهرت من بيان بيترسون من خلال عملية تولد عدد لانهائي من عائلات السناركات.

12.3.7. تعريف: الضرب النقطي (dot product) للبيانين التكعيبيين G و H هو البيان التكعيبي المتشكل من $G + H$ بحذف الضلعين المنفصلين uv و wx من G، وحذف الرأسين المتجاورين y و z من H، وإضافة أضلاع من u و v إلى $N_H(y) - \{z\}$، ومن w و x إلى $N_H(z) - \{y\}$.

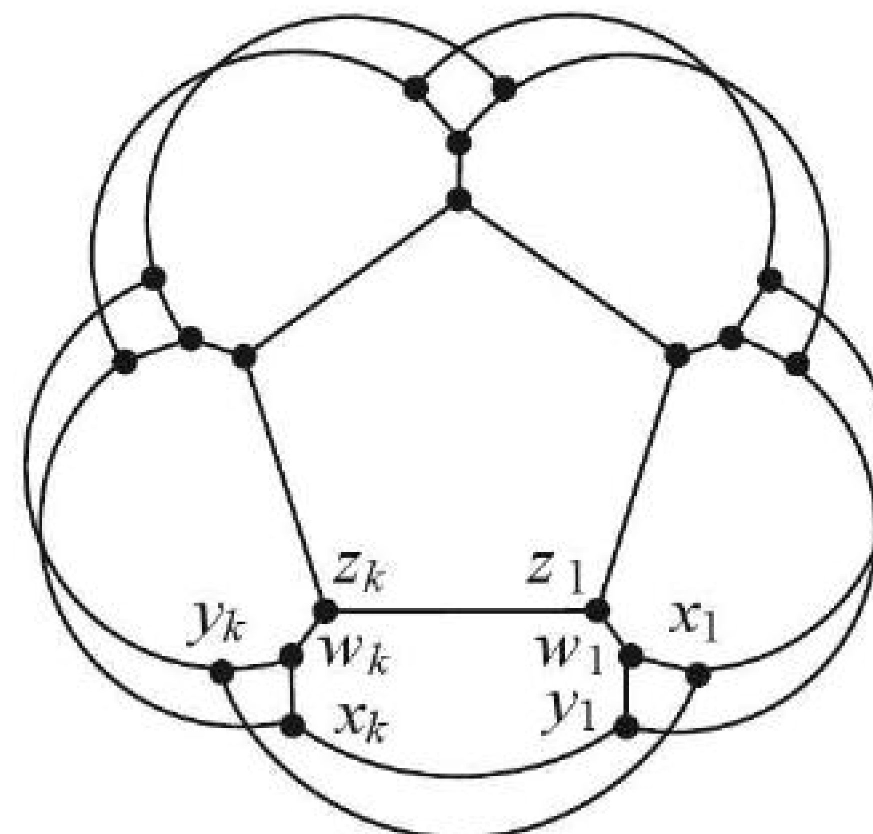


الضرب النقطي لسناركين هو سنارك (التمرين 23). إن تطبيق هذا على نسختين من بيان بيترسون يعطي سنارك بلانوسا المبين أدناه. وهذا البيان يملك قطعًا ضلعيًّا غير تافه من الدرجة 4. وقد قدم كوجول (Kochol) [1996] عملية أكثر عمومية تعطي سناركات ذات خصر كبير وخصائص ترابط عالية.



13.3.7. مثال: زهرة السناركات. لقد وجد إسحق أيضًا عائلة غير منتهية من السناركات لا تظهر من خلال الضرب النقطي (التمرين 21). وقد اكتشف جرينبرت بصورة مستقلة بأنها تملك $4k$ رأسًا، لـ k عدد فردي بحيث $k \geq 5$.

ابدأ مع ثلاث حلقات منفصلة من الدرجة k. ولتكن $\{x_i\}$، $\{y_i\}$، $\{z_i\}$ هي مجموعات الرؤوس الثلاثة، ضع لها دليلاً بصورة دائرية، ولكل i أضف رأسًا w_i مع $N(w_i) = \{x_i, y_i, z_i\}$. إن البيان الناتج G_k يكون قابلًا للتلوين الضلعي من الدرجة 3. ليكن H_k هو البيان الذي نحصل عليه باستبدال الأضلاع x_kx_1، و y_ky_1 مع x_ky_1 و y_kx_1. إذا كان k فرديًّا و $k \geq 5$، فإن H_k هو سنارك. وإذا كان k زوجيًّا، فإن H_k قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3. لاحظ أن الرسم لـ H_k بحيث تكون $\{z_i\}$ هي حلقة مركزية تقترح اسم "زهرة سنارك". ■



التدفق وأغطية الحلقات (اختياري) ((Flows and Cycle Covers (Optional))

تنص نظرية تايت (النظرية 2.3.7) على أن قابلية التلوين الضلعي من الدرجة 3 وقابلية التلوين الوجهي من الدرجة 4 هما متكافئان لثنويات التثليثات المستوية. وعندما نوسع هذا خارج إطار البيانات المستوية، فإننا نحتاج إلى مفهوم يصلح للبيانات جميعها، ويكون مكافئًا للتلوين الوجهي من الدرجة 4 على بيانات المستوى. وهناك معلومات إضافية حول هذا المفهوم، وكذلك حول السناركات تظهر في مقالة زانج [1997] (Zhang).

14.3.7. تعريف: نعرّف **التدفق** (flow) على البيان G على أنه زوج (D, f) حيث:

(a) D هي توجيه لـ G.

(b) f هي دالة وزن على $E(G)$.

(c) كل $v \in V(G)$ يحقق $\sum_{w\in N_D^+(v)} f(vw) = \sum_{u\in N_D^-(v)} f(uv)$

وتعرّف التدفق من الدرجة k على أنه تدفق قيمته صحيحة بحيث $|f(e)| \leq k - 1$ لكل $e \in E(G)$. يكون التدفق ليس صفرًا في أي مكان (nowhere – zero) أو **موجب** (positive) إذا كان $f(e)$ ليس صفرًا أو موجبًا على الترتيب، وذلك لكل $e \in E(G)$.

يختلف استعمال "تدفق" هنا بصورة ما عن استخدامه في الفصل 4. في كلا السياقين، تقترح الكلمة "تدفق" المحافظةَ على القيود المفروضة عند كل رأس، فضلًا عن أن الحد $k - 1$ على قيمة التدفق يستحضر مفهوم السّعة.

تنويه: لاحظ أننا نستطيع تبديل التوجيه لجعل الأوزان جميعها موجبة.

15.3.7. قضية: تكون العبارات الآتية متكافئة لبيان G:

(a) G يملك تدفقًا موجبًا من الدرجة k.

(b) G يملك تدفقًا من الدرجة k ليس صفرًا في أي مكان.

(c) G يملك تدفقًا ليس صفرًا في أي مكان من الدرجة k لكل توجيه لـ G.

الإثبات: إن تبديل التوجيه لضلع وتبديل إشارة وزنه في الوقت نفسه لا يؤثر في قيود المحافظة. ■

لاحظ أن وجود تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان لا يعتمد على اختيار التوجيه. ونستطيع أيضًا أن نأخذ التركيبات الخطية للتدفقات.

16.3.7. قضية: إذا كانت $(D, f_1), \ldots, (D, f_r)$ تدفقات على G و $g = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i$، فإنّ (D,g) تدفقٌ على G.

الإثبات: لكل $v \in V(G)$، لاحظ أنَّ محصلة التدفق الخارجة لِـ v تحت تأثير f_i هي صفرٌ، لهذا فإنها صفرٌ تحت تأثير g.

17.3.7. قضية: لتدفق على G، تكون محصلة التدفق الخارجة لأي مجموعة $S \subseteq V(G)$ هي صفرًا. لذلك، فإن البيان الذي تدفقه لا يساوي صفرًا في أي مكان لا يملك ضلعَ قطعٍ.

الإثبات: نجمع محصلة التدفق الخارجة من الرؤوس الموجودة في S. إن الأضلاع التي تخرج من S تسهم بوزن موجب، أما الأضلاع التي تدخل إلى S فتسهم بوزن بسالب، في حين تسهم الأضلاع التي في داخل S بعدد موجب عند ذيولها وبعدد سالب عند مقدمتها. لذلك، فإن محصلة التدفق الخارجة لـ S هي مجموع محصلة التدفقات الخارجة للرؤوسً في S، والتي تساوي صفرًا. وهذا يؤدي إلى أن محصلة التدفقَ عبر أي قطع ضلعي تكون صفرًا. لذلك، لا يمكن أنْ تتكون من ضلع واحد له وزن غير صفري. لذا، سوف نحصر اهتمامنا بالبيانات التي ليس لها

أضلاع قطع (بيانات تخلو من الجسور). ما يميز التدفقات هنا عن الدورانات في الجزء 4.3 هو أننا منعنا أن يكون الصفرُ وزنًا. إن التدفقات التي ليست صفرًا في أي مكان تمكننا من توسيع نظرية تايت. وسنبدأ بتفسير البيانات الأويلرية في السياق للتدفقات التي ليست صفرًا في أي مكان. لذا، فإن خاصية الترابط لم تعدْ مهمة. ■

18.3.7. تعريف: يسمى البيان **بيانًا زوجيًا** (even graph) إذا كانت درجةُ كل رأس زوجيةً.

19.3.7. قضية: يكون للبيان تدفق من الدرجة 2 لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان البيانُ زوجيًّا.

الإثبات: إذا أعطينا تدفقًا من الدرجة 2 ولا يساوي صفرًا في أي مكان، فإننا سنحصل على تدفق موجب من الدرجة 2. وبما أنه تمَّ تحديد الوزن 1 لكل ضلع، فعلى التوجيه تحقيق أنْ يكون عدد الأضلاع الداخلة إلى كل رأس يساوي عدد الأضلاع الخارجة منه. وهكذا، فإن درجة كل رأس فيه تكون زوجية.

وبالعكس، عندما تكون درجة كل رأس زوجية، فإن كل مركبة تملك حلقة أويلرية. وتوجيه الأضلاع لتتبع مثل هذه الحلقة وتحديد الوزن 1 لكل ضلع يؤدي إلى تدفق موجب من الدرجة 2. ■

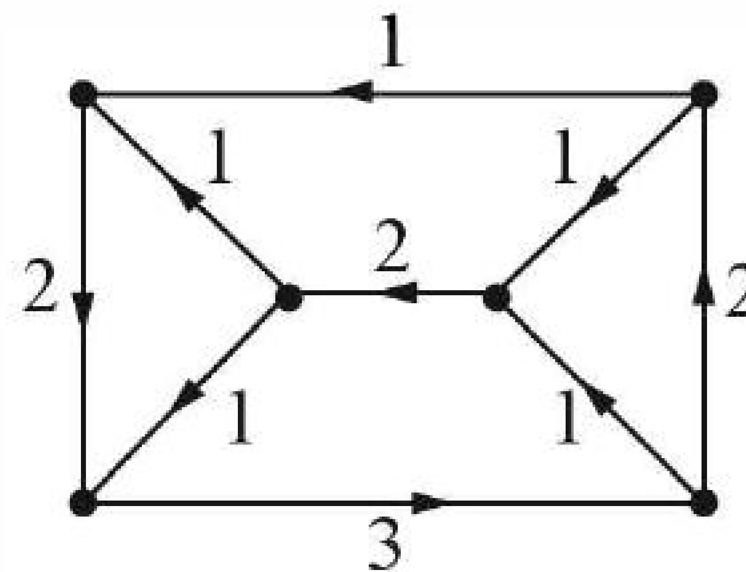
إن التدفقات من الدرجة 3 التي لا تساوي صفرًا في أي مكان هي أكثر دقة، حتى للبيانات المنتظمة من الدرجة 3.

20.3.7. قضية: (توت [1949] Tutte): يكون للبيان التكعيبي تدفق من الدرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان البيان ثنائي الفرع.

الإثبات: ليكن G بيانًا تكعيبيًا وثنائيًّا بالتجزئة الثنائية X، Y. إن كل بيان ثنائي الفرع منتظم يملك معاملاً من الدرجة 1. وَجِّه الأضلاع على المعامل من الدرجة 1 من X إلى Y، أعطِ كلًّا منها الوزن 2. ووجِّه الأضلاع المتبقية جميعها من Y إلى X، وأعطِ كلًّا منها الوزن 1. لاحظ أن التدفق في حالتي الدخول والخروج عند كل رأس يساوي 2. لذلك، فهو تدفق من الدرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان.

وبالعكس، ليكن G بيانًا تكعيبيًّا مع تدفق من الدرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان. بواسطة القضية 15.3.7، يمكن افتراض أن التدفق يكون 1 أو 2 على كل ضلع. وبما أن محصلة التدفق هي 0، فلا بدَّ أن يوجد ضلع تدفقه 2، وضلعان تدفقهما 1 على كل رأس. وهكذا فإن الأضلاع التي تدفقها 2 تشكل مواءمة. لتكن X مجموعةَ الذيول، و Y مجموعةَ المقدمات لهذه الأضلاع. بما أنَّ محصلةَ التدفق صفرٌ عند كل رأس، فإنَّ كلَّ ضلع تدفقه 2 يؤشِّر من X إلى Y، وكلّ ضلع تدفقه 1 يؤشِّر من Y إلى X. لذا، فإن X، Y تجزئتان ثنائيتان لـ G. ■

21.3.7. مثال: بما أنَّ بيان بيترسون تكعيبيٌّ وليس ثنائيَّ الفرع، فإنه لا يملك تدفقًا من الدرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان. وسوف نرى أنه لا يملك أيضًا تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان. سوف نعرض أدناه تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان، وذلك في البيان البسيط المنتظم من الدرجة 3 وهو $C_3 \square K_2$.

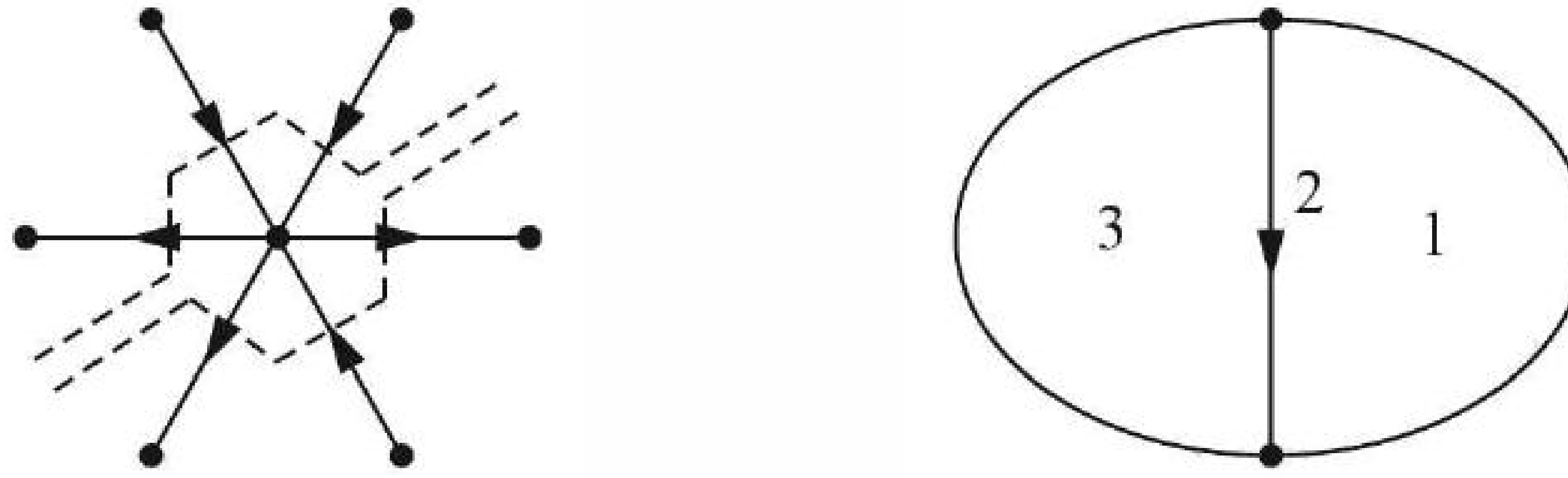


ولكي نفهم الثنوية بين التدفقات والتلوين؛ سوف نميز بيانات المستوى مع التدفقات من الدرجة k التي لا تساوي صفرًا في أي مكان.

22.3.7. نظرية : (توت ([Tutte [1954b]: يكون بيان المستوى الخالي من الجسور قابلاً للتلوين الوجهي من الدرجة k إذا وفقط إذا كان يملك تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان.

الإثبات: (ينجر [1983] Younger، حُسِّن من قبل سيمور (Seymour)) . ليكن f تدفقًا على بيان مستوى G. نعرف دالة g على مجموعة الوجوه بوضع $g(F)$ لتكون محصلة التدفق المجمعة بالتحرك من الوجه F خروجًا إلى الوجه غير المحدود. في كل مرة نقطع ضلع e سوف نعدّ $f(e)+$ إذا كان e موجهًا نحو اليمين،ونعدّ $f(e)-$ إذا كان e موجهًا نحو اليسار. والقيمة التي تُحدَّدُ للوجه الخارجي هي 0.

لاحظ أنَّ الدالةَ g حسنةُ التعريف؛ بمعنى أن $g(F)$ تكون مستقلة عن مسلكنا إلى الوجه الخارجي. حيث نستطيع تغيير مسلكنا إلى أي مسلك آخر بتغيير متتابع حيثما نذهب "بالطريق الآخر" حول رأس ما v (عن اليسار). إنَّ التغيير يزيد التراكم لهذا الجزء أو ينقصه بمقدار محصلة التدفق الخارجة لـ v التي تكون 0. ويكون الفرق بين القيم على الوجوه التي لها ضلع مشترك e هو $\pm f(e)$. لذلك، فإن الدالة g تكون مناسبة إذا وفقط إذا كان f لا يساوي صفرًا في أي مكان.



وبالعكس، سنحول العملية من تلوين وجهي g للحصول على تدفق (عن اليمين). بالنظر إلى وجه F' من وجه F عبر ضلع e، نضع $f(e) = g(F) - g(F')$ إذا كان e يشير إلى يميننا، أو نضع $f(e) = g(F') - g(F')$ إذا كان e يشير إلى يسارنا. إنَّ جمع هذه القيم على الأضلاع الواقعة على رأس v يبين أنَّ f تدفقٌ لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان g تلوينًا وجهيًّا فعليًّا.

لذلك، فإن التدفقات تقابل التلوينات الوجهية. والتلوين الوجهي يكون فعليًّا إذا وفقط إذا كان التدفق لا يساوي صفرًا في أي مكان. وإذا كان التدفُّقُ تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإن تخفيف الأوسمة في التلوين لصفوف تطابق في $\{0,1,\ldots,k-1\}$ يعطي تلوينًا فعليًّا من الدرجة k. وبالعكس، فإن تلوينًا وجهيًّا فعليًّا من الدرجة k يستخدم هذه الألوان لينتج تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان. ■

لاحظ أن الارتباط بين الوسم الوجهي والتدفقات في النظرية 22.3.7 يكون متحققًا عندما تأتي الأوسمة من أي زمرة أبيلية. مطبقًا باستخدام الزمرة للأزواج المرتبة الثنائية تحت عملية الجمع ((0,0) هو العنصر المحايد)، فإن العبارة المثبتة باستخدام هذه الحجة هي نظرية تايت نفسها.

بما أننا نستطيع دراسة التدفقات على البيانات جميعها، فإننا نستطيع افتراض أن مسألة التدفق مفهومًا ثنويًّا عامًّا للتلوين الرأسي. "لا يساوي صفرًا في أي مكان" مشابهة لـ "فعليّ". وبما أن كل تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرا في أي مكان هو تدفق من الدرجة $k+1$ لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإن المسألة الطبيعية هي تصغير k بحيث يملك G تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان. ويُسمَّى هذا العدد الأصغر **عددَ التَّدفُّق(flow number)** لـِ G بالتشابه مع "العدد اللوني". وبما أننا نقول إن G "قابلٌ للتلوين من الدرجة k" عندما يملك تلوينًا فعليًّا من الدرجة k، فإن التشابه الطبيعي يكون بقول إن G "**قابلٌ للتدفق من الدرجة k**" بدلاً من قولنا أنَّ G "يملك تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان". وبما أنَّ هذه الصياغة ليست شائعة بعد؛ لذا سوف نستعملها بصورة ضئيلة.

باستخدام نظرية تايت، فإن النظرية 22.3.7 تنص على أن البيان التكعيبي السوي الخالي من الجسور يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كان يملك تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرا في أي مكان. ونريد أن نوسِّع هذا الارتباط باسقاط الشرط على السَّويَّة. إنَّ ملاحظة بسيطة حول النوعية سوف تكون مفيدة.

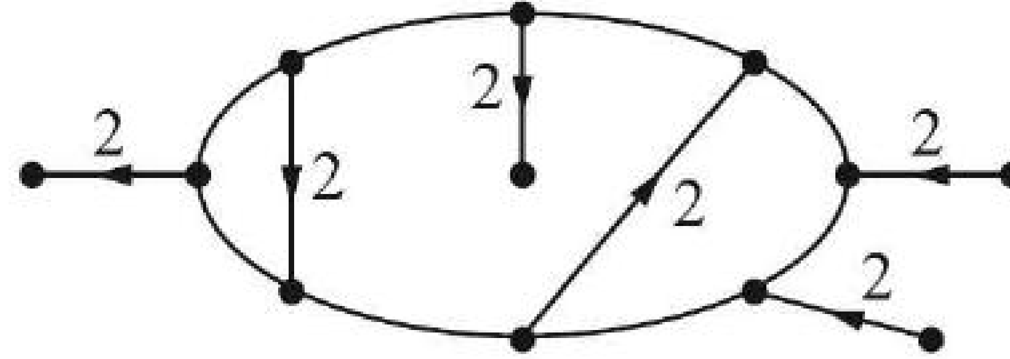
23.3.7. تمهيدية : في تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان، كلُّ رأس يقع على عدد زوجي من الأضلاع التي أوزانها فردية.

الإثبات: بما أنه عند كل رأس يكون المجموع الكلي للأوزان على الأضلاع الداخلة يساوي المجموع الكلي للأوزان على الأضلاع الخارجة، فإن مجموع الأوزان يكون زوجيًا. ■

24.3.7. نظرية : ليكن G بيانًا تكعيبيًا. إذا كان G يملك تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإنه يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

الإثبات: بواسطة القضية 15.3.7، نستطيع افتراض أن G يملك تدفقًا موجبًا من الدرجة 4 (D,f). وهكذا، فإن $f(e) \in \{1,2,3\}$ لكل ضلع e. ومن التمهيدية 23.3.7، فإن كل رأس يقع بالضبط على ضلع واحد فقط وزنه 2. لذلك، فإن الأضلاع التي وزنها 2 تشكل معاملاً من الدرجة 1 في G، و يخلف حذفها اتحادًا مكونًا من حلقات منفصلة. ولإكمال التحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (ولذلك تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3)، فإنه يكفي أن نبين أنَّ طول كل حلقة من هذه الحلقات زوجيٌّ.

لتكن C حلقة من هذه الحلقات. إن الأضلاع التي أوزانها 2 و تقع على رؤوس لـ C تكون أوتارًا، أو تربط $V(C)$ مع $\overline{V(C)}$. وهذه الأوتار تشغل مجموعة جزئية من $V(C)$ حجمها زوجي. لذلك، يكفي أن نبين أنَّ عددَ الأضلاع بين $V(C)$ و $\overline{V(C)}$ زوجيٌّ. إن وزن هذه الأضلاع جميعها يساوي 2. بما أن محصلة التدفق الخارجة لـ $V(C)$ يجب أن تكون 0، والأضلاع جميعها بين $V(C)$ و $\overline{V(C)}$ تملك تدفقًا 2، فإن عدد الأضلاع الخارجة من $V(C)$ يجب أن يساوي عدد الأضلاع الداخلة إليها. ■



بما أن بيان بيترسون غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3، فإن النظرية 24.3.7 تعطي أنه غير قابل للتدفق من الدرجة 4. إن وجود تدفقات من الدرجة k لا تساوي صفرًا في أي مكان محافظ عليها في أي تقسيم جزئي؛ فعندما يقسم ضلع e وزنه j في تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان بأن يستبدل به مسار طوله 2 موجه نحو الاتجاه نفسه مع وزن j على كلا الضلعين يعطي تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان في البيان الجديد. لذلك فإن التقسيمات الجزئية لبيان بيترسون أيضًا لا تملك تدفقات من الدرجة 4 لا تساوي صفرًا في أي مكان.

إن عكس النظرية 24.3.7 هو صحيح أيضًا ولكنه غير تافه؛ لأنه ليس بالإمكان معالجة صفوف الألوان بوصفها مجموعات أضلاع لوزن ثابت وتوجيه البيان لعمل هذا تدفقًا من الدرجة 4. مبدئيًا، يوجدُ في البيان $C_3 \square K_2$ في المثال 21.3.7 تلوينٌ ضلعيٌّ فعليٌّ واحدٌ فقط من الدرجة 3. وعند وسم صفوف الألوان بـ 1، 2، 3 فإنه من غير الممكن الحصول على تدفق من الدرجة 4. في التدفق الموجب من الدرجة 4 في المثال 21.3.7، لاحظ أن الأضلاع ذات الأوزان 1 لا تشكل مواءمة.

وعلى الرّغم من ذلك، فإن النظرية الآتية تضمن تدفقات من الدرجة 4 لا تساوي صفرًا في أي مكان في

البيانات التكعيبية القابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3. وهذا التمييز أكثر عمومًا؛ لأنه لا يتطلب انتظامًا.

25.3.7 نظرية : يملك البيان تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان البيانُ اتحادَ بيانين زوجيين.

الإثبات: ليكن G_1، G_2 بيانين زوجيين مع $G = G_1 \cup G_2$. وليكن D توجيهًا لـ G محصورًا على D_i في G_i. ومن القضيتين؛ 19.3.7 و 15.3.7، نجد أن G_i يملك تدفقًا $(D_i ، f_i)$ من الدرجة 2 لا يساوي صفرًا في أي مكان. وسِّع f_i إلى $E(G)$ بوضع $f_i(e) = 0$ لكل $e \in E(G) - E(G_i)$. واجعل $f = f_1 + 2f_2$. إنَّ دالةَ الوزن هذه فرديةٌ على $E(G_1)$، وتكون ± 2 على $E(G) - E(G_1)$، لذلك فهي لا تساوي صفرًا في أي مكان، ومقدارها يكون 3 على الأكثر دائمًا. وبواسطة القضية 16.3.7، فإن (D,f) يكون تدفقًا؛ وهكذا فإنه يكون تدفقًا من الدرجة 4 لا يساويًّا صفرًا في أي مكان.

وبالعكس، ليكن (D,f) تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان على G. وليكن $E_1 = \{e \in E(G)$:$f(e)$ فرديًّا$\}$. بواسطة التمهيدية 23.3.7، فإن E_1 تشكل بيانًا جزئيًّا زوجيًّا من G. لذا، يوجد تدفق (D_1, f_1) على E_1 من الدرجة 2 ليس صفرًا في أي مكان، حيث D_1 تتو افق مع D. وسِّع f_1 إلى $E(G)$ بوضع $f_1(e) = 0$ لكل $e \in E(G) - E_1$؛ الآن (D,f_1) هو تدفق من الدرجة 2 على G.

عرف f_2 على $E(G)$ بوضع $f_2 = (f - f_1)/2$. من قضية 16.3.7، فإن (D,f_2) يكون تدفقًا على G. بما أن $f(e) - f_1(e)$ يكون زوجيًّا دائمًا، فإنه يكون تدفقًا صحيحًا. وبواسطة التمهيدية 23.3.7، فإن المجموعة $E_2 = \{e \in E(G)$:$f_2(e)$ فردية$\}$ تشكل بيانًا جزئيًّا زوجيًّا من G. لكل $e \in E(G) - E_1$، فإن $f(e) = \pm 2$ و $f_1(e) = 0$، الذي يؤدي إلى أن $f_2(e) = \pm 1$؛ لذلك فإن $E(G) - E_1 \subseteq E_2$. الآن أصبح G اتحاد بيانين جزئيين زوجيين. ■

26.3.7. نتيجة . إذا كان G بيانًا تكعيبيًّا، فإنه يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كان يملك تدفقًا من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان.

الإثبات: كل بيان تكعيبي قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 هو اتحاد بيانين جزئيين زوجيين: الأضلاع باللونين 1 و 2، والأضلاع باللونين 1 و 3. ■

في ضوء النظرية 22.3.7، فإن النتيجة 26.3.7 تعمِّم نظرية تايت. ولقد رأينا أن التقسيمات الجزئية لبيان بيترسون غير قابلة للتدفق من الدرجة 4. من خلال البيانات التي تخلو من الجسور، فإن مخمنة توت التي تستثني مثل هذه البيانات الجزئية تعطي تدفقات من الدرجة 4 ليست صفرًا في أي مكان.

27.3.7. مخمنة : (مخمنة توت للتدفق من الدرجة 4 − توت Tutte [1966b]): كلُّ بيان يخلو من الجسور ولا يحتوي على تقسيم جزئي لبيان بيترسون يكون قابلًا للتدفق من الدرجة 4. ■

بما أن كل بيان يحتوي على تقسيم جزئي لبيان بيترسون يكون غير سوي، فإن مخمنة توت للتدفق من الدرجة 4 تعطي نظرية الألوان الأربعة. ولأنَّ التدفقات من الدرجة 4 التي ليست صفرًا في أي مكان مكافئة للتلوينات الضلعية من الدرجة 3 على البيانات التكعيبية، فإن مخمنة التدفقات من الدرجة 4 تعطي أيضًا مخمنة التلوين الضلعي من الدرجة 3 (بُرْهِنَتْ سابقًا) . أمل الباحثون في إيجاد إثبات مناسب لمخمنة التدفق من الدرجة 4 لتوت بوصفها طريقة للحصول على إثبات أقصر لنظرية الألوان الرابعة.

سوف ننهي هذا الجزء بمناقشة العديد من المخمنات المشهورة الأخرى التي تتعلق بالمخمنات التي ذُكِرَتْ. كل تدفق من الدرجة k ليس صفرًا في أي مكان هو تدفق من الدرجة $k + 1$ ليس صفرًا في أي مكان. لذلك، يجب

أن تكون شروط التدفقات من الدرجتين 3 و 5 أكثر تقييدًا أو أقل على الترتيب من شروط التدفق من الدرجة 4 الذي لا يساوي صفرًا في أي مكان. هناك نصوص لمخمنة التدفق من الدرجة 3 لتوت في شتاينبرج [1976] (Steinberg) وفي بوندي – مورتي [1976، مسألة دون حلّ رقم 48] (Bondy – Murt).

28.3.7. مخمنة: (مخمنة تدفق من الدرجة 3 لتوت): يملك كلُّ بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 4 تدفقًا من الدرجة 3 ليس صفرًا في أي مكان. ■

29.3.7. مخمنة: (مخمنة تدفق من الدرجة 5 لتوت Tutte [1954b]) يملك كلُّ بيان يخلو من الجسور تدفقًا من الدرجة 5 ليس صفرًا في أي مكان. ■

أثبت كلٌّ من كلباترك (Kilpatrick [1975]) وجايجر (Jaeger [1979]) أن كل بيان يخلو من الجسور يكون قابلاً للتدفق من الدرجة 8. في حين أثبت سيمور [1981] (Seymour) أن هذه البيانات تكون قابلة للتدفق من الدرجة 6. وسنضع الأفكار لنظرية التدفق من الدرجة 8 باختصار ؛ لأنَّ التفاصيل مطلوبة في التمارين.

لاحظ أن كلاً من الإثباتين يُخَفَّفُ إلى حالة الترابط الضلعي من الدرجة 3، بإثبات أن أصغر بيان يخلو من الجسور ولا يحتوي على تدفق من الدرجة k ليس صفرًا في أي مكان يكون بسيطًا ومترابطًا من الدرجة 2، ومترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 3 (تمرين 26). إنَّ الخطوة الرئيسة بعد ذلك تكون بالتعبير عن بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3 بوصفه اتحادًا لبيانات جزئية مع تدفقات حسنة. ثمَّ نطبق التعميم الآتي لنظرية 25.3.7: إذا كان G_1 يملك تدفقًا من الدرجة k_1 ليس صفرًا في أي مكان، و G_2 يملك تدفقًا من الدرجة k_2 ليس صفرًا في أي مكان، فإن $G_1 \cup G_2$ يملك تدفقًا k_1k_2 ليس صفرًا في أي مكان (التمرين 24). (يتحقق العكس أيضًا، ولكننا لا نحتاج إليه).

لنظرية التدفق من الدرجة 8، يكفي إثبات أن كل بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3 يمكن كتابته في صورة اتحاد لثلاثة بيانات جزئية زوجية. أولاً، إضافة نسخة إضافية لكل ضلع في G يعطي بيانًا G' مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 6. لذا، فإن نظرية الشجرة – والتعبئة (Tree – Packing Theorem) لـ ناش ووليامز (Nash – Williams) (النتيجة 59.2.8) تعطي ثلاث أشجار مولدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في G'. وهذه الأشجار تقابل ثلاث أشجار مولدة في G. وبما أننا حصلنا عليها كأشجار منفصلة ضلعيًّا في G'، فإن كل ضلع في G يظهر على الأكثر في شجرتين.

في داخل أي شجرة مولدة لـ G، نستطيع إيجاد **بيان جزئي نوعي** (parity subgraph) لـ G، يعني بيانًا جزئيًّا مولدًا H بحيث $d_H(v) \equiv d_G(v) \bmod 2$ لكل $v \in V(G)$ (تمرين 25). إنَّ المتممةَ في داخل $E(G)$ لمجموعة الأضلاع لبيان جزئي نوعي هي بيانٌ جزئيٌّ زوجيٌّ في G. وبما أن الشجرات المولدة الثلاث خاصتنا لا تملك ضلعًا مشتركًا، فإن المتممات لبياناتها الجزئية النوعية تعبر عن G بوصفه اتحادًا لثلاثة بيانات جزئية زوجية. ومن القضية 19.3.7، فإن كل واحدة تملك تدفقًا من الدرجة 2 ليس صفرًا في أي مكان. لذا، فإن G يملك تدفقًا من الدرجة 8 ليس صفرًا في أي مكان.

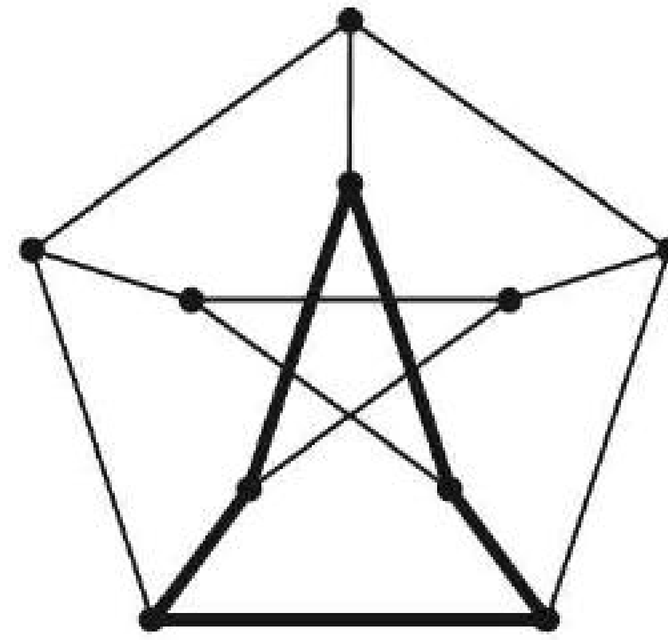
إن طريق الحل في سيمور [1981] (Seymour) مشابه؛ حيث يكون التعبير عن بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3 بوصفه اتحادًا لبيان زوجي، وبيان قابل للتدفق من الدرجة 3. وهذا يستخدم مفاهيم أكثر دقة، تتضمن مفهومًا "مقياسيًّا" (modular) للتدفقات التي قدمت أصلاً من قِبَل توت [1949]. إضافة إلى أن إثبات سيمور قد حُسِّنَ من قِبَل ينجر [1983] (Younger) وجايجر [1988] (Jaeger). لتفاصيل أكثر. انظر زانج [1997] (Zhang).

لقد أثبت كلمنز [1984] (Celmins) أنه إذا كانت مخمنة التدفق من الدرجة 5 غير صحيحة، فإن أصغر مثال مناقض هو سنارك الذي يملك خصرًا 7 على الأقل، ولا يملك قاطعًا ضلعيًّا غير تافه له أربعة أضلاع.

سنصف مخمنة إضافية أخرى ومدى علاقتها بالمواضيع السابقة. في البيان السوي المترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، فإنَّ الحدودَ الوجهيةَ جميعَها حلقاتٌ. وكل ضلع يقع في حد لوجهين. لذلك، فإن الحلقات الوجهية معًا تغطي كلَّ ضلع مرتين بالضبط. ومن المنطقي أن نسأل عما إذا كان يمكن الحصول على مثل هذا الغطاء لبيانات ليست سويَّة.

30.3.7. تعريف: **الغطاء** (cover) لبيان G هو قائمة من البيانات الجزئية التي يكون اتحادها G. أمّا **الغطاء المزدوج** (double cover) فهو غطاء يظهر كل ضلع في بيانين جزئيين بالضبط في القائمة. في حين يعرّف **الغطاء المزدوج الحلقي** (cycle double cover) (CDC) على أنه غطاء مزدوج يتكون من حلقات.

31.3.7. مثال: الحلقة الخارجية من الدرجة 5 مع الدورانات الخمسة للحلقة من الدرجة 5 كما هو مبين في الشكل أدناه يشكلان غطاءً مزدوجًا حلقيًّا لبيان بيترسون. وكذلك فإنَّ بيان بيترسون يملك غطاءات زوجية حلقية باستخدام حلقات بأطوال أخرى (التمرين 36). ■



بما أن أضلاع القطع لا تظهر في حلقات، فإن البيانات التي تخلو من الجسور هي وحدها التي تملك غطاءات مزدوجة حلقية.

32.3.7. مخمنة: مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي - سزكرز (Szekeres) [1973]، سيمور (Seymour) [1979b]: يملك كلّ بيان يخلو من الجسور غطاء مزدوجًا حلقيًّا.

قد يعتقد القارئ أن مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي تتبع مباشرة من استخدام الطمور على السطوح التي لها مقابض، ولكن مثل هذه الطمور يمكن أن تملك حدودًا وجهية تسير على الضلع نفسه مرتين. تشير **مخمنة الطمر القوي** (Strong Embedding Conjecture) إلى أن كل بيان مترابط من الدرجة 2 يملك طمرًا (على سطح ما) بحيث يكون حدُّ كل وجه حلقةً أحاديةً. وتطبيق هذا على كل قالب لبيان مترابط ضلعيًا من الدرجة 2 سيعطي مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي.

في مناقشة مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي، يجب أن ننبه القارئ إلى أن المصطلحات قد تتعارض معًا لسوء الحظ. في هذا الكتاب، نستخدم التعريف للحلقة الذي يكون مشتركًا في مناقشة كل من: الترابط، والخصر، والمحيط، والسَّويَّة.. إلخ. في هذه اللغة، الدارةَ صفٌّ تكافؤ لسرب مغلق (إهمال رأس البداية)، أما البيان الزوجي فهو بيان درجات رؤوسه جميعها زوجية. وتغير الدارة أو تجتاز بيانًا زوجيًّا مترابطًا.

الأدبيات حول الغطاءات الحلقية عمومًا تتناول هذه المصطلحات، فمثلاً، مصطلح "الدارة" يعني حلقة، ومصطلح "حلقة" يعني بيانًا زوجيًّا. بما أن مصطلح "بيان زوجي" يثير تعريفه بقوة، فإننا نأمل أن يكون استخدامنا واضحًا.

الاستخدام البديل يظهر في نصوص أخرى في الماترويد (الجزء 2.8)، حيث إنّ الدارات مجموعاتٌ مستقلة أصغرية، وفي الماترويد الحلقي لبيان ما، تكون هذه المجموعات هي المجموعات الضلعية لهذه الحلقات. والفضاء

الحلقي لبيان ما هو فضاء متجهي (باستخدام $\{1,0\}$) حيث تكون الإحداثيات مدلول عليها من خلال الأضلاع والمتجهات التي تقابل البيانات الجزئية الزوجية.

تنصُّ مخمنة غطاء مزدوج حلقيّ الأصلية على أن كل بيان يخلو من الجسور يملك غطاءً مزدوجًا من خلال بيانات جزئية زوجية. وهذا التعبير مكافئ لتعبيرنا: نظرًا إلى أن كل بيان زوجي هو اتحاد حلقات منفصلة ضلعيًّا.

وهكذا ربما نبحث عن غطاء مزدوج باستعمال عدد قليل من البيانات الجزئية الزوجية، إذ إن الحلقات في غطاء مزدوج حلقي هي بيانات جزئية زوجية. وعندما تكون الحلقات منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا، فمن الممكن ضمّها لتشكل بيانًا جزئيًّا زوجيًّا مفردًا. وهذا يقود إلى الترابط بين التدفقات الصحيحة والغطاءات المزدوجة الحلقية.

33.3.7. قضية: يملك البيان تدفقًا من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًّا مُشَكِّلاً ثلاثة بيانات جزئية زوجية.

الإثبات: تنصُّ النظرية 25.3.7 على أن بيانًا ما يملك تدفقًا من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان عبارة عن اتحاد بيانين جزئيين زوجيين E_1، E_2. ضع $E_3 = E_1 \Delta E_2$. تساوي الدرجة عند كل رأس v في E_3 مجموع الدرجات في E_1 و E_2 ناقص ضعفي عدد الأضلاع المشتركة الواقعة على هذا الرأس؛ لذلك فهذه الدرجة زوجية. وهكذا، فإن E_3 يكون بيانًا جزئيًّا زوجيًّا، ويحتوي بالضبط على الأضلاع التي تظهر في واحدة من $\{E_2,E_1\}$ فقط. وهكذا، فإن التفككات الحلقية لـ E_1، E_2، E_3 تُضَمُّ لتعطي غطاءً مزدوجًا حلقيًّا.

وبالعكس، إذا شَكَّلَ غطاءٌ مزدوج حلقيّ ثلاثة بيانات جزئية زوجية، فإن إهمال أحدها يخلف البيان الذي يمكن التعبير عنه بوصفه اتحادًا لبيانين جزئيين زوجيين. وهكذا، فإنه يوجد تدفق من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان ■

لتكن $\mathbf{P}$ تدل على عائلة البيانات التي لا تحتوي على تقسيم جزئي لبيان بيترسون. بواسطة القضية 33.3.7، فإن مخمنة التدفق من الدرجة 4 لتوت تؤدي إلى أن كل بيان في $\mathbf{P}$ يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًّا. لاحظ أن السباغ، وجودين، وزانج (Alspach – Goddyn – Zhang) [1994] قد أثبتوا نتيجة عميقة تعطي غطاءات مزدوجة حلقية لبيانات في P. (وقد أثبتوا أيضًا أن خاصية غطائية أقوى تتحقق لـ G إذا وفقط إذا كان $G \in \mathbf{P}$). وفي ضوء القضية 33.3.7، فإن هذه تعدُّ نتيجة جزئية في اتجاه مخمنة التدفق من الدرجة 4 لتوت. فضلًا عن أنَّ لمخمنة غطاء مزدوج حلقيّ أيضًا علاقة بالسناركات؛ حيث أثبت جودين (Goddyn) [1985] أنه إذا كانت مخمنة غطاء مزدوج حلقيّ غير صحيحة، فإن أصغر مثال مناقض هو سنارك ذو خصر يساوي 8 على الأقل.

تمـــارين (Exercises)

1.3.7. (-) أثبت أن كل بيان هاملتوني منتظم من الدرجة 3 يملك تلوينَ تايت.

2.3.7. (-) اعرض بيانات بسيطة منتظمة من الدرجة 3 تكون:

a) سوية، ولكنها غير قابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

b) مترابطة من الدرجة 2، ولكنها غير قابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

c) سوية مع ترابط 2، ولكنها ليست هاملتونية.

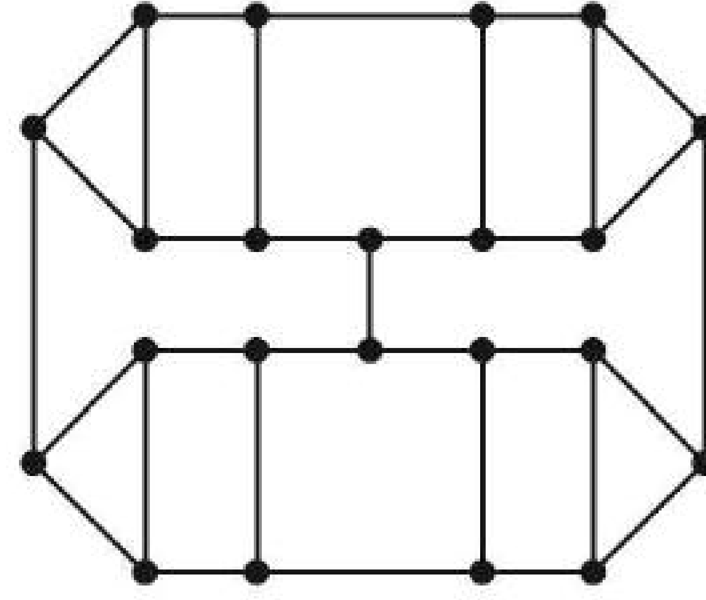
• • • • •

3.3.7. أثبت أن كل بيان مستوٍ أعظمي غير K_4 يكون قابلًا للتلوين الوجهي من الدرجة 3.

4.3.7. دون استخدام نظرية الألوان الأربعة، أثبت أن كل بيان مستوٍ هاملتوني يكون قابلاً للتلوين الوجهي من الدرجة 4 (دون أيّ افتراض حول درجات الرؤوس).

5.3.7. أثبت أنّ أي بيان مستوٍ مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 يكون قابلاً للتلوين الوجهي من الدرجة 2 إذا وفقط إذا كان أويلريًّا.

6.3.7. استخدم نظرية تايت (النظرية (2.3.7 لتثبت أن $\chi'(G) = 3$ للبيان G المبيّن أدناه.

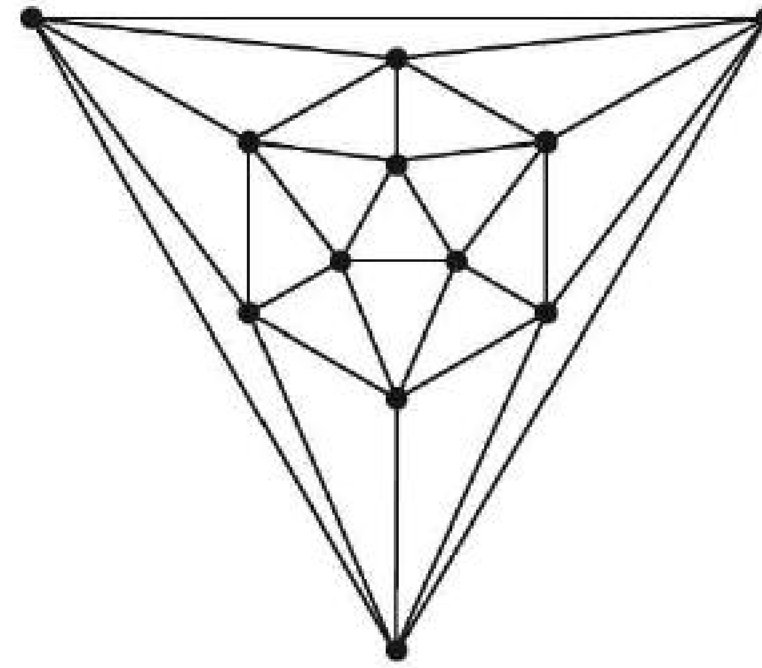


7.3.7. (!) ليكن G تثليثًا مستويًا:

a) أثبت أن الثنوي G^* يملك معاملاً من الدرجة 2.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أن الرؤوس في G من الممكن أن تُلَوَّن بلونين بحيث يملك كل وجه رؤوس كلا اللونين. (مساعدة: استخدم الفكرة في الإثبات لنظرية (2.3.7) Burstein [1974]، Penaud [1975]).

8.3.7. (+) لقد خُمِّنَ أن كل تثليث سوي يملك عددًا لونيًّا ضلعيًّا يساوي $\Delta(G)$، وقد أُثبت هذا عندما تكون $\Delta(G)$ كبيرة بما فيه الكفاية. أثبت أن $\chi'(G) = \Delta(G)$ للبيان ذي العشرين وجهًا، كما هو مبين أدناه.



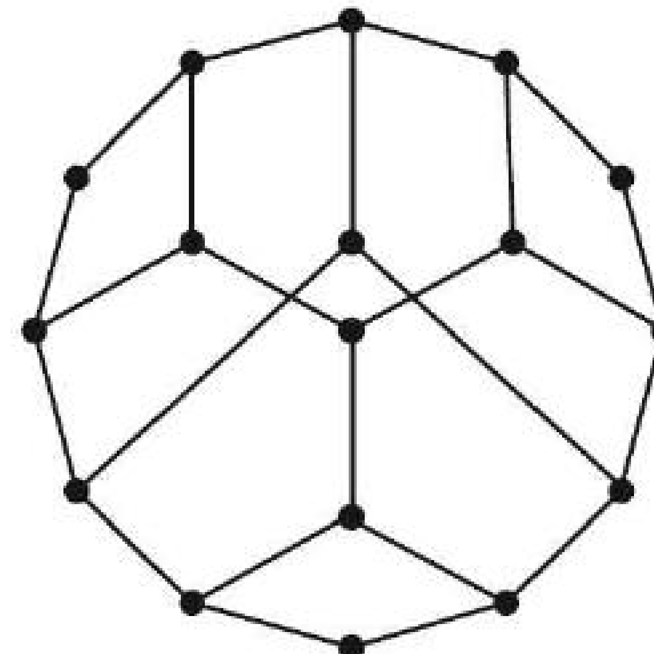
9.3.7. أثبت أن تلوينًا فعليًّا من الدرجة 4 للبيان ذي العشرين وجهًا يَستعمل كل لون 3 مرات بالضبط.

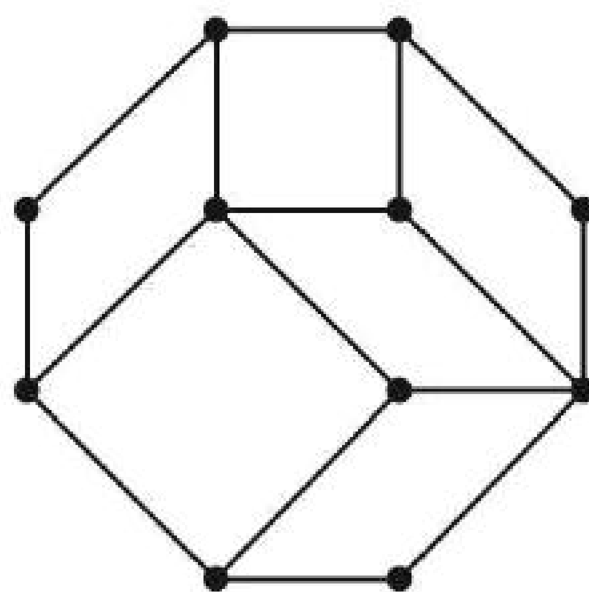
10.3.7. لقد أثبت ويتني [1931] أن كل تثليث سوي مترابط من الدرجة 4 يكون هاملتونيًّا. استخدم هذا لتُخَفِّفَ مسألة الألوان الأربعة إلى المسألة التي تثبت أنَّ كلَّ بيان سوي هاملتوني قابلٌ للتلوين من الدرجة 4.

11.3.7. جد بيانًا سويًّا مترابطًا من الدرجة 5. هل يوجد بيان سوي مترابط من الدرجة 6؟

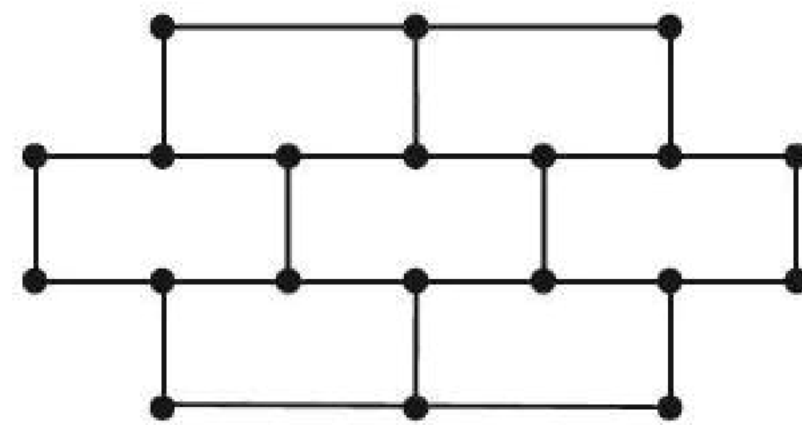
12.3.7. ليكن G تثليثًا مستويًا. أثبت أنه يملك تجزئة رأسية إلى مجموعتين محدثًا غابات إذا وفقط إذا كان G^* هاملتونيًّا. (Stein [1970])

13.3.7. (!) لكل من البيانين السويين أدناه، جد حلقة هاملتونية أو استعمل المستوية (شرط جرينبرج) لتثبت أنه ليس هاملتونيًّا.



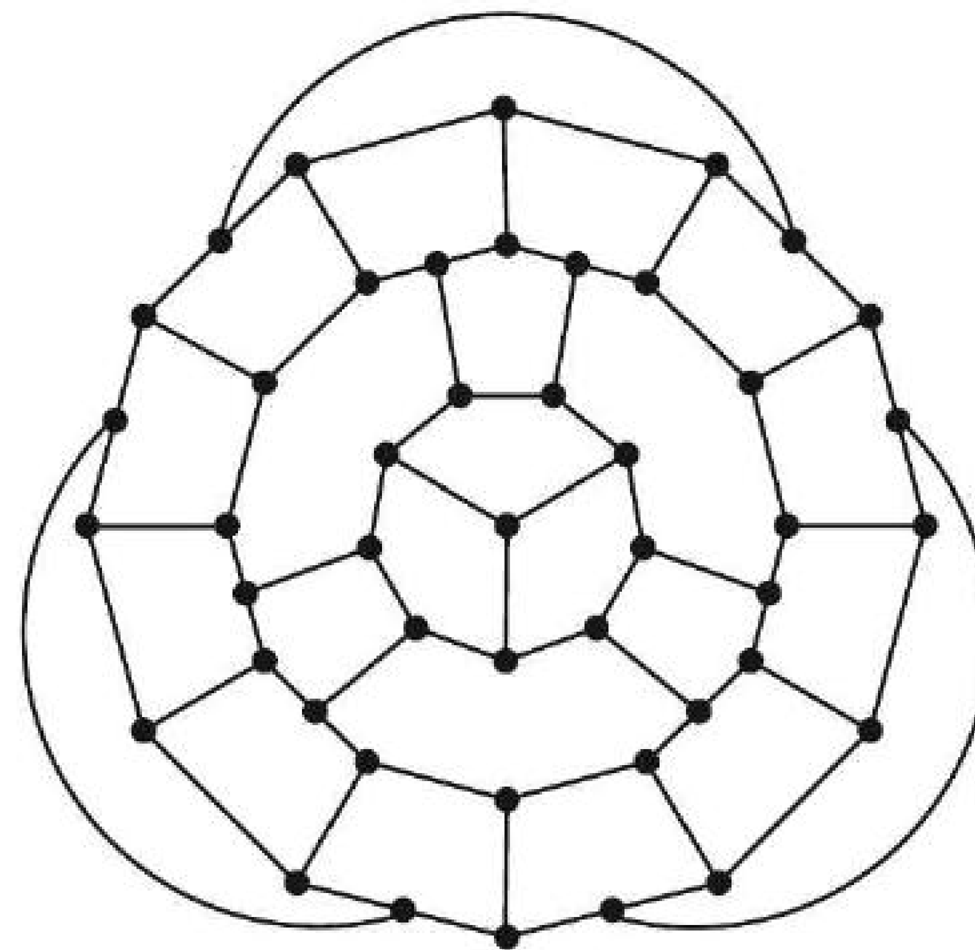


14.3.4. ليكن G البيانَ المرسوم أدناه. أثبت أنه لا يملك حلقة هاملتونية. فسّر لماذا لا نستطيع استخدام نظرية جرينبرج مباشرة لإثبات هذا.

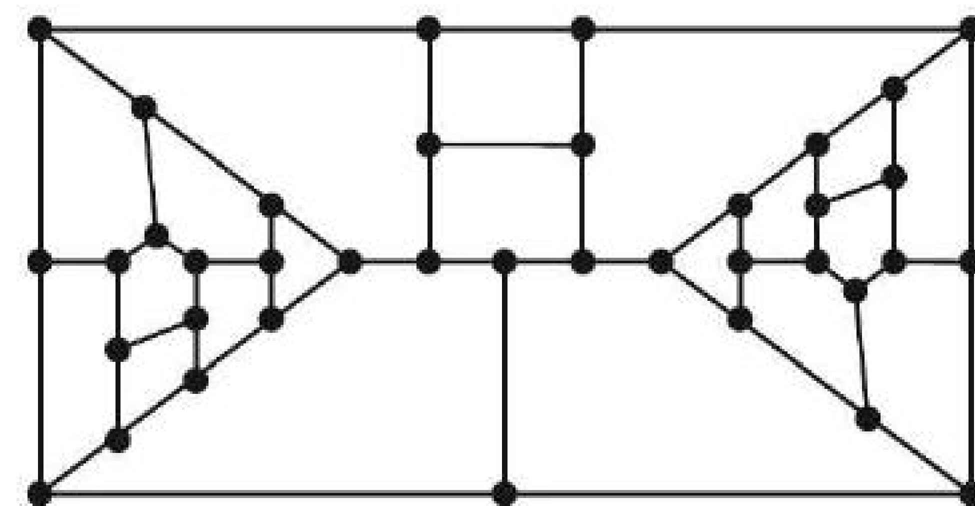


15.3.7. (!) أثبت نظرية جرينبرج باستخدام صيغة أويلر.

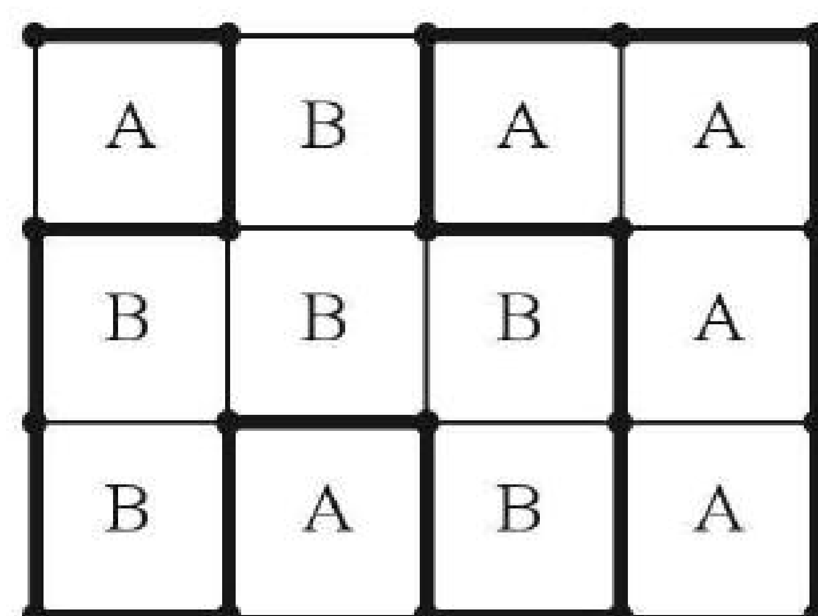
16.3.7. (!) استخدم شرط جرينبرج لتثبت أن بيان جرينبرج (أدناه) ليس هاملتونيًّا.



17.3.7. (!) أصغر بيان سوي مترابط من الدرجة 3 منتظم من الدرجة 3 معروف وليس هاملتونيًّا يملك 38 رأسًا ويظهر في الأسفل. أثبت أن هذا البيان ليس هاملتونيًّا. ([1966] Lederberg، Barnette, Bosa'k [1966]).



18.3.7. ليكن G البيان الشبكي $P_m \square P_n$. وليكن Q مسارًا هاملتونيًّا من الرأس الموجود على الزاوية اليسرى العلوية إلى الرأس الموجود على الزاوية اليمنى السفلية، كما هو مبين بخط سميك في الشكل أدناه. لاحظ أن Q يجزىء الشبكة إلى مناطق، والتي يكون بعضها مفتوحًا إلى اليسار أو إلى الاتجاه السفلي، في حين تكون المناطق الأخرى مفتوحة إلى اليمين أو إلى الاتجاه العلوي. أثبت أن المساحة الكلية التي عن اليمين فوق (B) تساوي المساحة الكلية للمناطق عن اليسار تحت (A). (Fisher Collins – Krompart – [1994]).

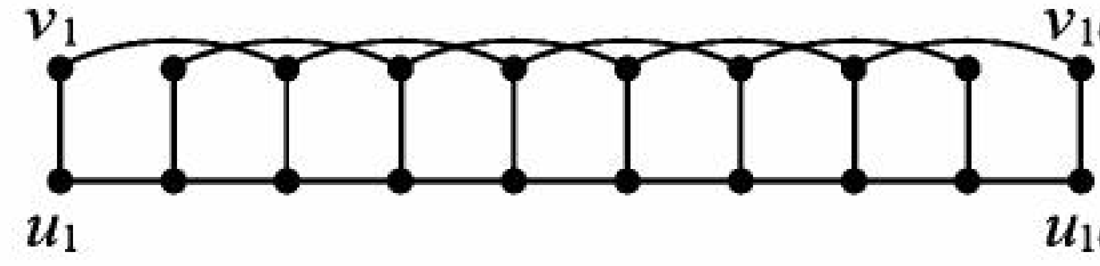


19.3.7. (!) **بيان بيترسون المعمم** (generalized Petersen Graph) $P(n,k)$ هو البيان الذي رؤوسه

$\{u_1, \ldots, u_n\}$ و $\{v_1, \ldots, v_n\}$، وأضلاعه $\{u_i\ u_{i+1}\}$، $\{u_i\ v_i\}$، و $\{v_i\ v_{i+k}\}$، حيث يكون الجمع بمقياس n. بيان بيترسون نفسه هو $P(5,2)$:

a) أثبت أن البيان الجزئي لـ $P(n,2)$ المحدث من خلال k زوجًا متتاليًا $\{u_i\ ,v_i\}$ يملك حلقة مولدة إذا كان $k \equiv 1 \bmod 3$ و $k \geq 4$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أن $\chi'(P(n,2)) = 3$ إذا كان $n \geq 6$.



20.3.7. (-) ليكن G بيانًا منتظمًا من الدرجة 3. أثبت أنه إذا كان G اتحادًا لحلقتين، فإنه يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

21.3.7. (+) "سناركات الزهرة" ليكن G_k و H_k، كما أنشئا في (المثال 13.3.7):

a) أثبت أن G_k قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

b) أثبت أن H_k غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 عندما يكون k فرديًا. (Isaacs [1975])

22.3.7. أثبت أن كل قطع ضلعي لـ $K_k \square C_t$ والذي لا يعزل رأسًا يملك $2k$ ضلعًا على الأقل.

23.3.7. (*) أثبت أن تطبيق عملية الجداء النقطي (التعريف 12.3.7) على سناركين يعطي سناركًا ثالثًا. ([1975] Isaacs).

24.3.7. (*!) ليكن G_1 و G_2 بيانين. أثبت أنه إذا كان G_1 يملك تدفقًا من الدرجة k_1 لا يساوي صفرًا في أي مكان، و G_2 يملك تدفقًا من الدرجة k_2 لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإن $G_1 \cup G_2$ يملك تدفقًا من الدرجة $k_2\ k_1$، وليس صفرًا في أي مكان.

25.3.7. (!) **بيان جزئي نوعي** (Parity subgraph) لـ G هو بيان جزئي H بحيث يكون $d_H(v) \equiv d_G(v) \bmod 2$ لكل $v \in V(G)$. أثبت أن كل شجرة مولدة لبيان مترابط G تحتوي على بيان جزئي نوعي لـ G. (Itai Rodeh -[1978]).

26.3.7. (*) لـ $k \geq 3$، أثبت أن أصغر بيان G مترابط ضلعيًا من الدرجة 2، وغير تافه، ولا يملك تدفقًا من الدرجة k، وليس صفرًا في أي مكان، يجب أن يكون بسيطًا ومترابطًا من الدرجة 2، ومترابطًا ضلعيًا من الدرجة 3. (مساعدة: أولاً، استثنِ العرى والرؤوس التي درجتها 2 واختزلها بافتراضها قوالب، ثُمَّ استثنِ الأضلاع المتكررة، وأخيرًا، استثنِ القواطع الضلعية التي حجمها 2. في كل حالة، قارن G ببيان محصول عليه من G من خلال حذف أضلاع أو تقليصها).

27.3.7. (*) أثبت أن كل بيان هاملتوني يملك تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان.

28.3.7. (*) أثبت أن كل بيان يخلو من الجسور، ويملك مسارًا هاملتونيًا، ويملك تدفقًا من الدرجة 5 ليس صفرًا في أي مكان (Jaeger [1978]).

29.3.7. (*) اغمس K_6 على الطارة، وليكن G هو البيان الثنوي. جد تدفقًا من الدرجة 5 على G بحيث لا يساوي هذا التدفق صفرًا في أي مكان.

30.3.7. (*) أثبت أن بيانًا G هو الاتحاد لـ r بيان جزئي زوجي إذا وفقط إذا كان G يملك تدفقًا من الدرجة 2^r ليس صفرًا في أي مكان (Matthews [1978]).

31.3.7. (*) ليكن G بيانًا يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًا مشكلاً 2^r بيانًا جزئيًا زوجيًا. أثبت أن G يملك تدفقًا من الدرجة 2^r ليس صفرًا في أي مكان (Jaeger [1988]).

32.3.7. (*!) عندما نقول إن **توجيهًا من الدرجة 3 مقياسي** (modular 3- orientation) لبيان G فإننا نعني توجيهًا D بحيث $d_D^+(v) \equiv d_D^-(v) \bmod 3$ لكل $v \in v(G)$. أثبت أن كل بيان يخلو من الجسور يملك تدفقًا من الدرجة 3 وليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان يملك توجيهًا من الدرجة 3 مقياسيًّا (Steinberg-Younger [1989]).

33.3.7. (*) تمييز للتدفقات من الدرجة k والتي ليست صفرًا في أي مكان. ليكن G بيانًا يخلو من الجسور، وليكن D توجيهًا لـ G، وليكن a و b عددين صحيحين موجبين. أثبت أن العبارات الآتية متكافئة. (Hoffman [1958]):

a) $\frac{a}{b} \le \frac{|[S,\bar{S}]|}{|[\bar{S},S]|} \le \frac{b}{a}$ لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية من الرؤوس S.

b) يملك G تدفقًا صحيحًا باستخدام أوزان في الفترة $[a,b]$.

c) يملك G تدفقًا قيمته عدد حقيقي باستخدام أوزان في الفترة $[a,b]$.

34.3.7. (*) جد غطاءات مزدوجة حلقية للبيانات $C_m \vee K_1$ و $C_m \vee 2K_2$ و $C_m \vee K_2$.

35.3.7. جد الغطاءات المزدوجة الحلقية بأقل عدد من الحلقات لكل بيان بسيط منتظم من الدرجة 3 على 6 رؤوس.

36.3.7. (*-) ليكن G بيان بيترسون. جد غطاءً مزدوجًا حلقيًّا له والذي عناصره ليست جميعها حلقات خماسية. وجد غطاءً مزدوجًا له كذلك يتكون من عوامل ذات الدرجة 1. (مساعدة: خذ في الحسبان رسمًا لـ G يملك حلقة خارجية على 9 رؤوس). (تعليق: لقد خمن فلكرسون (Fulkerson) [1971] أن كل بيان مكعب يخلو من الجسور يملك غطاءً مزدوجًا يتكون من 6 مواءمات تامة).

37.3.7. (*) أثبت أن أي حلقتين على 6 رؤوس في بيان بيترسون يجب أن تشتركا في ضلعين على الأقل. وإستنتج أن بيان بيترسون الذي لا يملك CDC يتكون من خمس حلقات على 6 رؤوس. استخدم هذا والتمرين 20.3.7 لتستنتج أن بيان بيترسون الذي لا يملك CDC يتكون من حلقات زوجية. (C.Q. Zhang)

38.3.7. (*!) يكون غطاءً مزدوجًا حلقيًّا **قابلاً للتوجيه** (orientable) إذا أمكن توجيه حلقاته كحلقات موجهة بحيث يكون كل ضلع محتوى في حلقتين، فإن الحلقتين اللتين تحويانه يجتازانه في اتجاهين متعاكسين. ويكون البيان الموجه زوجيًّا إذا كان $d^-(v) = d^+(v)$ لكل رأس v:

a) افترض أن G يملك تدفقًا من الدرجة k غير سالب (D, f). أثبت أنه يمكن التعبير عن f على الشكل $\sum_{i=1}^{k-1} f_i$، حيث إن كل (D, f_i) هو تدفق غير سالب الدرجة 2 على G. (مساعدة: استخدم الاستقراء على k) (Little – Tutte – Younger [1988])

b) يملك بيان G تدفقًا (D,f) موجبًا من الدرجة k إذا وفقط إذا كان D هو الاتحاد لـ $k - 1$ بيانًا موجهًا زوجيًّا بحيث يظهر كل ضلع e في D بالضبط في $f(e)$ منها (Little – Tutte – Younger [1988]).

c) أثبت أن بيانًا G يملك تدفقًا من الدرجة 3 ليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان G يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًّا قابلاً للتوجيه، ومُشَكّلاً ثلاثة بيانات جزئية زوجية (Tutte [1949]).

39.3.7. (*) ليكن G بيانًا يملك CDC مُشَكَّلاً من أربعة بيانات جزئية زوجية. أثبت أن G أيضًا يملك CDC مُشَكَّلاً من ثلاثة بيانات جزئية زوجية. (مساعدة: استخدم الفروقات التماثلية).

40.3.7. (*) في بيان بيترسون، أثبت أن الحل لمسألة ساعي البريد الصيني يملك طولاً كليًّا 20، لكن الطول الكلي الأصغر للحلقات التي تغطي بيان بيترسون هو 21.

41.3.7. (*) لتكن M مواءمة تامة في بيان بيترسون. أثبت عدم وجود قائمة من الحلقات في بيان بيترسون حيث إنها معًا تغطي كل ضلع في M بالضبط مرتين في حين تغطي الأضلاع الأخرى جميعها مرة واحدة بالضبط. (Seymour [1979b], Itai- Rodeh [1978]).

42.3.7. (*) ليكن G بيانًا يحوي ممرًّا غطائيًّا (بمعنى، حلّ أمثل لمسألة ساعي البريد الصيني) يتفكك إلى حلقات. أثبت أن G يملك غطاءً حلقيًّا طوله الكلي $e(G) + n(G) - 1$ على الأكثر. وحدد الطول الأصغر لغطاء حلقي لـ $K_{3,t}$ بدلالة عدد كل من الأضلاع و الرؤوس.

الفصل الثامن

مواضيع إضافية (اختياري) (Additional Topics (optional))

سنعرض في هذا الفصل مواضيع متقدمة ومتخصصة بصورة أكثر. وسيقدم كلّ جزء من هذا الفصل نبذة سريعة لموضوع يستحق أنْ يكون فصلًا قائمًا بذاته (أو كتابًا). أمّا في نهاية هذا الفصل فهناك عدة أجزاء تعالج بعض المواضيع الأكثر صعوبة.

1.8 البيانات الكاملة (Perfect Graphs)

لقد ناقشنا الحدّ الأدنى $\chi(G) \geq \omega(G)$ للعدد اللوني. إنّ رؤوس العصبة تحتاج إلى ألوان مختلفة. في الجزء (الجزء) 3.5، ناقشنا بيانات، بحيث إنّ بياناتها الجزئية المستحدثة جميعها تحقق المساواة في هذا الحدّ.

1.1.8. تعريف: يُسمّى البيان G **بيانًا كاملاً** إذا تحقق أن $\chi(H) = \omega(H)$ لكلّ بيان جزئيّ مستحدث H من G.

عند الحديث عن البيانات الكاملة، فإنَّ من الشائع استخدام المصطلح (مجموعة مستقرة) لتعني مجموعة مستقلة من الرؤوس. وكما في السابق، فإنَّ العصبة تعني مجموعة من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا. وكالعادة، فإنَّ (أكبر) تعني أكبر حجمًا.

بما أنّ تركيزنا منصب على تلوين الرؤوس، فإنَّنا نحصر اهتمامنا بالبيانات البسيطة مرة أخرى في هذا الجزء. لاحظ أن إجراء عملية التتام يحوّل العصب إلى مجموعات مستقرة، والعكس صحيح. لذا، فإنَّ $\omega(\overline{H}) = \alpha(H)$. إن تلوين $\overline{H}$ تلوينًا فعليًا يعني التعبير عن $V(H)$ بوصفه اتحاد عُصَب في H؛ وتسمَّى مجموعة هذه العصب في H غطاء عصبة (أو عصب) لـ H. وبناءً على ذلك، فإنَّ لكلّ بيان G هناك 4 وسائط ذات أهمية، هي:

عدد الاستقلال	$\alpha(G)$	أكبر حجم لمجموعة مستقرة.
عدد العصبة (العصب)	$\omega(G)$	أكبر حجم لعصبة.
العدد اللوني	$\chi(G)$	أصغر عدد من الألوان.
عدد غطاء العصب	$\theta(G)$	أصغر حجم لغطاء العصب.

عرَّف بيرج (Berge) نوعين من الكمال، هما:

G **كامل بالنسبة** إلى χ إذا كان $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$.

لكلّ $A \subseteq V(G)$. وG كامل بالنسبة إلى α إذا كان $\theta(G[A]) = \alpha(G[A])$ لكلّ $A \subseteq V(G)$.

تعريفنا للكمال هو تعريف كامل بالنسبة إلى γ نفسه (لقد استخدم بيرج الرمز $\gamma(G)$ للعدد اللوني). بما أنّ $\overline{G}[A]$ متمّمةُ $G[A]$، فيمكن صياغة نصّ كامل بالنسبة إلى α بدلالة $\overline{G}$ على الشكل "$\chi(\overline{G}[A]) = \omega(\overline{G}[A])$ لكلّ $A \subseteq V(G)$". لذا، فإنَّ المصطلح "كامل بالنسبة إلى α" له معنى أنّ "$\overline{G}$ كامل بالنسبة إلى γ" نفسه.

الآن، نستخدم تعريفًا واحدًا للكمال، وذلك لأنَّ لوفاس ([Lova'sz [1972 a) أثبت أنّ "البيان G يكون كاملاً بالنسبة إلى γ إذا وفقط إذا كان كاملاً بالنسبة إلى α". وبدلالة تعريفنا الأساس للكمال، فإنَّ التعريف يصبح: "يكون البيان G كاملاً إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ كاملاً".

هذه العبارة هي **نظرية البيانات الكاملة (*PGT*)**.

دائمًا $\chi(G) \geq \omega(G)$. و $\theta(G) \geq \alpha(G)$؛ بسبب اشتراك عصبة ما ومجموعة مستقلة في رأس واحد على الأكثر. لذا، فإنَّ عبارة الكمال لصنف من البيانات هي علاقة أصغر – أكبر تكاملية. لقد لاحظنا في المثال 21.3.5 أنّ عدة علاقات أصغر – أكبر معروفة هي عبارات تنصّ على أنّ البيانات الثنائية الفرع، وبياناتها الخطية. ومتمّمات هذه البيانات هي بيانات كاملة.

إذا كان $k \geq 2$ ، فإنَّ $\chi(C_{2k+1}) > \omega(C_{2k+1})$ و $\chi(\overline{C}_{2k+1}) > \omega(\overline{C}_{2k+1})$ (تمرين 1). لذا، فإنَّ الحلقات الفردية ومتمماتها (ما عدا C_3 و $\overline{C}_3$) تكون غير تامة.

2.1.8. مخمنة: مُخَمَّنَة البيان الكامل القوي (SPGC) – [1960] Berge.

يكون البيان G كاملاً إذا وفقط إذا خلا كلّ من G و $\overline{G}$ من بيان جزئيّ مستحدث يشكّل حلقة فردية طولها يساوي 5 على الأقل. ■

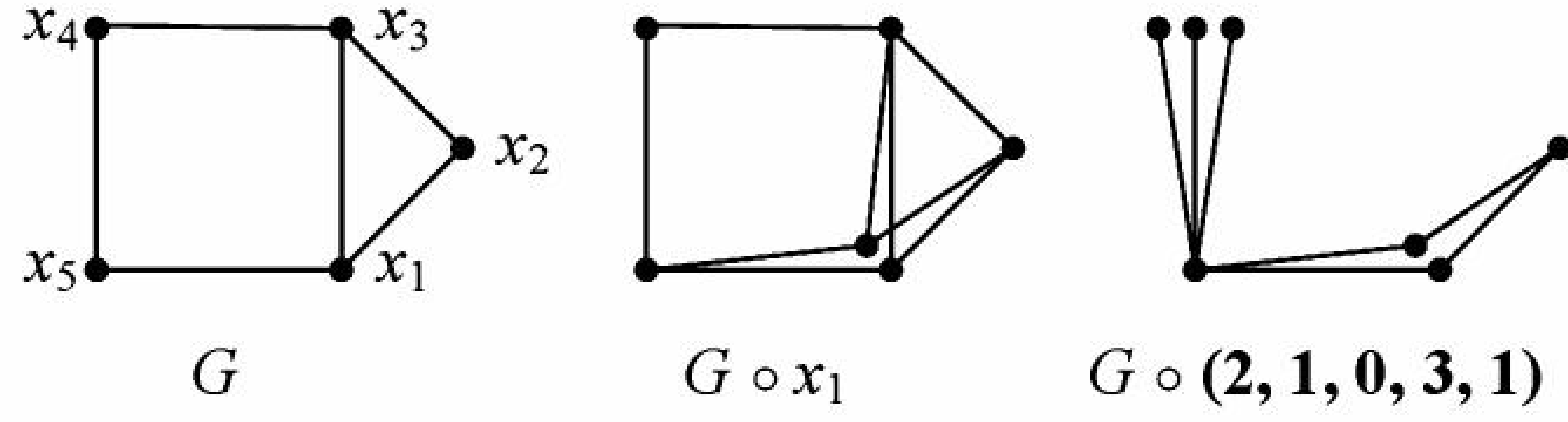
الـ SPGC تُبقي المسألة دون حلّ، وبما أنّ الشرط في المُخَمَّنَة ذاتيّ التتام، فإنَّ الـ SPGC تضمن الـ PGT.

بما أننا قد تعرضنا لعدة عائلات كلاسيكيّة من البيانات الكاملة في الجزء (الجزء) 3.5، فإنَّ هدفنا الآن هو أن نبرهن نظرية البيانات الكاملة. وفيما بعد، سندرس خصائص البيانات غير الكاملة الصغرى، وأصناف (صفوف) البيانات الكاملة. ولدراسة أعمق؛ يمكن الرجوع إلى ([Golumbic [1980) الذي يعطي تقديمًا شاملاً للموضوع، وكذلك إلى ([Berge – chvàtal [1984) الذي يجمع العديد من الأبحاث الكلاسيكيّة ويحدّثها.

نظرية البيان الكامل (The Perfect Graph Theorem)

في العام 1960م، خَمَّنَ بيرج أنّ الكمال بالنسبة إلى γ يكافئ الكمال بالنسبة إلى α (انظر Berge [1961]). وقد كان لوفاس ([Lovàsz [1972a) عالم الرياضيات التَّوافقيّة (التركيبية) مدهشًا من خلال إثباته لهذه المُخَمَّنَة المهمة والمعروفة وكان عمره حينها 22 عامًا. ودرس فولكرسون أيضًا هذه المُخَمَّنَة واختزلها في عبارة اعْتَقَدَ أنها قوية جدًّا لتكون صحيحة. وعندما أخبره بيرج أن لوفاس قد برهنها من قبل، أثبت خلال ساعات التمهيديّة المفقودة (التمهيديّة 4.1.8)، وهذا يوضِّح أن النظرية تصبح سهلة الإثبات إذا تأكدت صحتها ([Fulkerson [1971)، سنبرهن نظرية البيان الكامل باستخدام عملية توسع البيان دون أنْ تؤثّر في خاصية الكمال.

3.1.8. تعريف: مضاعفة الرّأس x للبيان G تنتج بيانًا جديدًا $G \circ x$، وذلك بإضافة رأس x' حيث إن $N(x') = N(x)$. إنّ ضرب رؤوس G في المتجه $h = (h_1, \ldots, h_n)$ الذي إحداثياته أعداد صحيحة غير سالبة هو البيان $H = G \circ h$ الذي تتكون مجموعة رؤوسه من h_i نسخة من كلّ $x_i \in V(G)$، حيث تكون نسختا x_i و x_j متجاورتين في H إذا وفقط إذا كان $x_i \leftrightarrow x_j$ في G.



4.1.8. تمهيدية : ضرب الرؤوس يحافظ على الكمال بالنسبة إلى γ، والكمال بالنسبة إلى α.

الإثبات: نلاحظ أولاً أنه يمكن الحصول على البيان $G \circ h$ من بيان جزئيّ مستحدث من G بإجراء عمليات متتابعة من مضاعفة الرؤوس.

إذا كان h_i كلّه يساوي 0 أو 1، فإنَّ $G \circ h = G[A]$ حيث $A = \{i = h_i > 0\}$. وبخلاف ذلك، ابدأ بـ $G[A]$، ثمّ أجرِ عمليات مضاعفة الرؤوس حتى يكون موجودًا لديك h_i نسخة من x_i (لكلّ i).

إنّ كلّ مضاعفة لرأس تحافظ على خاصية أنّ نسخًا من x_i و x_j تكون متجاورة إذا وفقط إذا تحقق أنّ $x_i x_j \in E(G)$. لذا، فإنَّ البيان الناتج هو $G \circ h$.

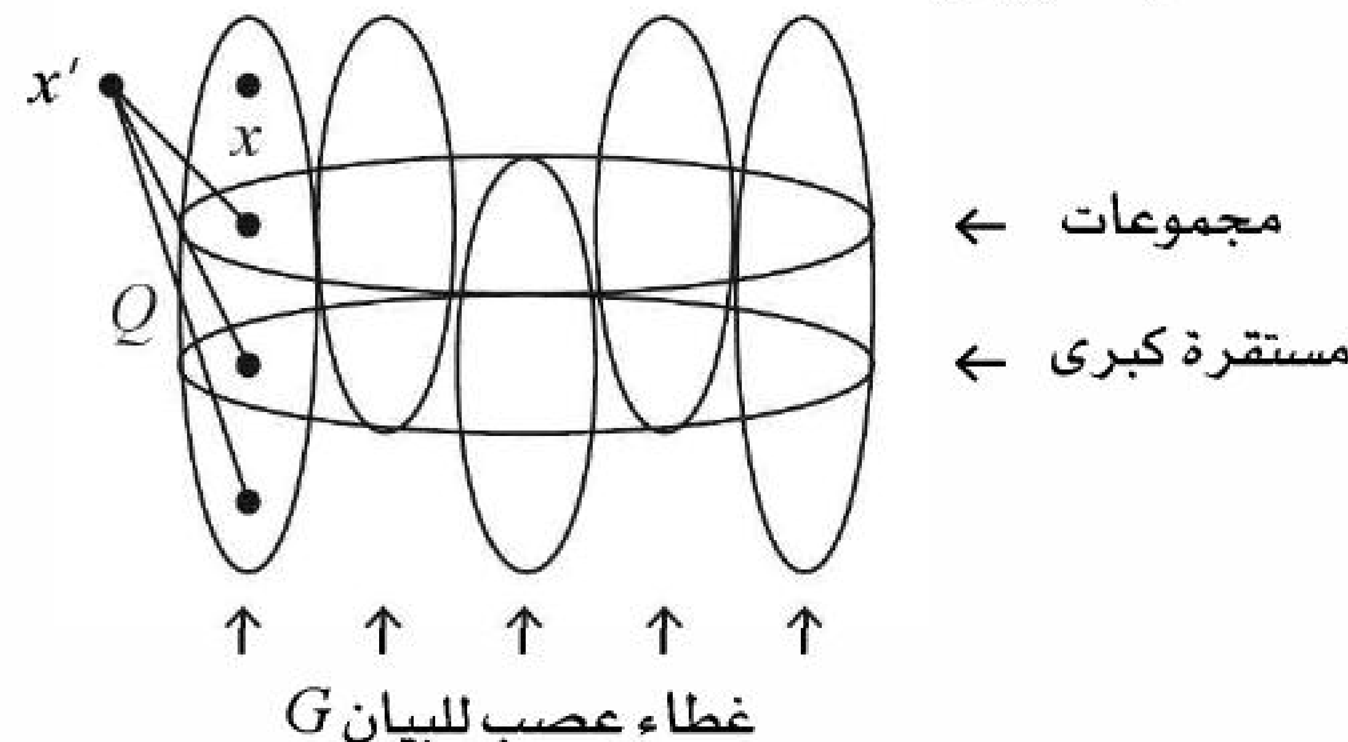
إذا كان G كاملاً بالنسبة إلى α ولم يكن $G \circ h$ كذلك، فإنَّ إحدى العمليات التي أُجريت للحصول على $G \circ h$ من $G[A]$ تنتج بيانًا غير كامل بالنسبة إلى α من بيانٍ كاملٍ بالنسبة إلى α. لذا، يكفي برهنة أنّ مضاعفة الرّأس تحافظ على الكمال بالنسبة إلى α.

الاختزال نفسه يتحقق للكمال بالنسبة إلى γ، وبما أنّ كلّ بيان جزئيّ فعليّ مستحدث من $G \circ x$ هو بيان جزئيّ مستحدث من G، أو مضاعفة رأس لبيان جزئيّ مستحدث من G، فإنّنا نختزل ادعاءنا لإثبات أنّ $\chi(G \circ x) = w(G \circ x)$ عندما يكون G كاملاً بالنسبة إلى γ، وأنّ $\alpha(G \circ x) = \theta(G \circ x)$ عندما يكون G كاملاً بالنسبة إلى α.

عندما يكون G كاملاً بالنسبة إلى α، نأخذ في الحسبان حالتين، هما: 1- إذا كان x ينتمي إلى مجموعة مستقرة كبرى في G، فإنَّ إضافة x' إلى هذه المجموعة يعطينا أنّ $\alpha(G \circ x) = \alpha(G) + 1$، وبما أنّ $\theta(G) = \alpha(G)$، فإنّنا نحصل على غطاء عصبة من هذا الحجم بإضافة الرّأس x' بوصفه عصبه برأس واحد إلى مجموعة $\theta(G)$ تشكل غطاء عُصَب لـ G.

2- إذا لم يكن x منتميًا إلى مجموعة مستقرة كبرى في G، فإنَّ $\alpha(G \circ x) = \alpha(G)$. افترض أنّ Q هي العصبة التي تحوي x في غطاء عُصب أصغر للبيان G. بما أنّ $\theta(G) = \alpha(G)$، فإنَّ Q تقطع كلّ مجموعة مستقرة كبرى في G، وبما أنّ x لا ينتمي إلى مجموعة مستقرة كبرى، فإنَّ $Q' = Q - x$ أيضًا تقطع كلّ مجموعة مستقرة كبرى. وهذا يعطينا أنّ $\alpha(G - Q') = \alpha(G) - 1$.

وبتطبيق كمال G بالنسبة إلى α على البيان الجزئي المستحدث $G - Q'$ (الذي يحوي x)، فإنّنا نحصل على $\theta(G - Q') = \alpha(G - Q')$. إنّ إضافة $\{x'\}$ $Q' \cup$ إلى مجموعة بها $\alpha(G) - 1$ غطاء عصبة لـ $G - Q'$ يعطينا مجموعة بها $\alpha(G)$ غطاء عصبة للبيان $G \circ x$. ■



5.1.8.تمهيدية : في البيان غير الكامل (الأصغر)، لا توجد مجموعة مستقرة تقطع كلّ عصبة كبرى.

الإثبات: إذا وُجِدَتْ مجموعة مستقرة S، بحيث تقطع S كلّ عصبة من الدرجة $\omega(G)$، فإنَّ كمال $G-S$ يعطينا أنّ $x(G-S) = \omega(G-S) = \omega(G)-1$، و$S$ تتمّم تلوينًا فعليًّا لـ G بـ $\omega(G)$ لونًا. وهذا يجعل G كاملاً. ■

6.1.8. نظرية : (نظرية البيان الكامل (PGT) – [1972a, 1972b] Lovàsz). يكون البيان كاملاً إذا وفقط إذا كان بيان متمّمته كاملاً.

الإثبات: يكفي أنْ نبرهن كمال G بالنسبة إلى α لكي يعطينا كمالاً لـ G بالنسبة إلى γ. وبتطبيق هذا على $\overline{G}$ فإنّه يعطينا إثباتًا للعكس. إذا فَشِل الادعاء، فسنأخذ في الحسبان أصغر بيان G. بحيث يكون هذا البيان كاملاً بالنسبة إلى α، وغير كامل بالنِسبة إلى γ. من التمهيديّة 5.1.8. نستطيع افتراض أن كلّ مجموعة مستقرة أعظمية S في G لا تقطع أحد العصب الكبرى $Q(S)$. سنصمّم ضرب رؤوس خاصًّا في G. افترض أنّ $\mathbf{S} = \{S_i\}$ هي قائمة بمجموعات G المستقرة الأعظمية، وسنزن كلّ رأس بعدد مرات تكراره في $\{Q(S_i)\}$، وذلك بجعل h_j تمثّل عدد المجموعات المستقرة $S_i \in \mathbf{S}$، بحيث إنّ $x_j \in Q(S_i)$. من التمهيديّة 4.1.8 نجد أنّ $H = Goh$ كامل بالنسبة إلى α، وهذا يعطي أنّ $\alpha(H) = \theta(H)$. سنستخدم تعليلات حسابية لـ $\alpha(H)$ و$\theta(H)$؛ للحصول على تناقض. افترض أنّ A مصفوفة، مدخلاتها 1,0، تمَثّل علاقة الوقوع بين $\{Q(S_i)\}$ و$V(G)$، حيث إنّ $a_{i,j} = 1$ إذا وفقط إذا كان $x_j \in Q(S_i)$. من هذا البناء، نعلم أنّ h_j عددُ الواحدات في العمود j للمصفوفة A، وأنّ $n(H)$ عددُ الواحدات الكلّي في A. وبما أنّ كلّ صفّ يحوي $\omega(G)$ من الواحدات، فإنَّ $n(H) = \omega(G)\,|\mathbf{S}|$.

وبما أنّ مضاعفة الرؤوس لا توسّع العصب، فإنَّ $\omega(G) = \omega(H)$. واستنادًا إلى ذلك، فإنَّ

$$\theta(H) \geq n(H)/\omega(H) = |\mathbf{S}|$$

سنحصل على التناقض إذا برهنّا أنّ $\alpha(H) < |\mathbf{S}|$. تتألف كلّ مجموعة مستقرة في H من نسخ العناصر الموجودة في مجموعة مستقرة من G. لذا، فإنَّ أيّ مجموعة مستقرة عظمى في H تتألف من النسخ للرؤوس جميعها الموجودة في مجموعة مستقرة أعظمية في G. لذا، فإنَّ $\alpha(H) = max_{T\in S} \sum_{i:x\in T} h_i$. إنّ هذا المجموع يحسب عدد الواحدات في A التي تظهر في الأعمدة التي دليلها T. وإذا حسبنا هذه الواحدات بحسب الصّفوف بدلاً من الأعمدة، فسنحصل على أنّ $a(H) = Max_{T\in S} \sum_{S\in S} |T \cap Q(S)|$. وبما أنّ T مجموعة مستقرة، فإنَّ لها على الأكثر رأسًا واحدًا في كلّ عصبة مختارة $Q(S)$. وأكثر من ذلك، فإنَّ T منفصلة عن $Q(T)$.

بما أنّ $|T \cap Q(S)| \leq 1$ لكلّ $S \in \mathbf{S}$، $|T \cap Q(S)| = 0$، فإنَّ $\alpha(H) \leq |\mathbf{S}|-1$ ■

$$V(G)$$

$Q(S_1)$	⋮	⋮	⋮
$Q(T)$	·	·	·
$Q(S_n)$	⋮	⋮	⋮
	↑ T	↑ T	↑ T

7.1.8. ملاحظة*. الأمثلية الخطية والثنويَّة. تظهر مصفوفات الوقوع بين الرؤوس والعصب عند تعبيرنا عن α وθ بوصفها مسائل أمثليّة (ذات أعداد صحيحة) صحيحة. يمكن كتابة البرنامج (تعظيم) الخطي كـ "عظِّم $c.x$ على المتجهات غير السالبة x بحيث إنّ $Ax \leq b$"؛ لأنَّ A مصفوفة وb وc متجهتان وأنّ كلّ صفّ لـ $Ax \leq b$ عبارة عن تقييد

خطّيّ $a_i x \le b_i$ على متجه المتغيرات x. المتجه x الذي يحقق القيود جميعها يكون **حلًّا ملائمًا** (عمليًا).

يتطلّب **البرنامج الخطّيّ الصحيح** أنْ يكون x_j كلّه أيضًا عددًا صحيحًا. افترض أنّ A هي مصفوفة الوقوع بين عصب أعظمية ورؤوس في بيان G. لدينا $a_{i,j} = 1$ عندما $V_j \in Q_i$. ومن التعريف، نعلم أنّ $a(G)$ هي الحلّ لـ "$\max 1_n . x$ حيث $Ax \le 1_m$" وذلك عندما نشترط أنْ تكون المتغيرات أعدادًا صحيحةً غير سالبة. في الحلّ، x_j تكون 1 أو 0 بالاعتمّاد على وجود v_j أو عدم وجوده في مجموعة مستقرة عظمى. إنّ القيود تمنع اختيار رؤوس متجاورة، وبالمثل عندما تكون B مصفوفة الوقوع بين المجموعة المستقرة الأعظمية والرؤوس، فإنَّ $w(G)$ الحلُّ لـ "$\max 1_n.x$ حيث $Bx \le 1_p$" وحيث إنّ المتغيرات أعداد صحيحة.

يوجد لكلّ برنامج تعظيم برنامج ثَنوي للتصغير، فعندما يكون برنامج التعظيم "$\max c . x$ حيث $Ax \le b$"، فإنَّ البرنامج الثنوي للتصغير يكون "$\min y . b$ حيث $y^T A \ge c$". لهذا البرنامج متغير لكلّ قيد أصلي، وقيد لكلّ متغير أصلي x_j، وتتبادل $c, \max, \le b, \min \ge$. وعندما يكون النصّ بهذا الشكل، فإنَّ المتغيرات في البرنامجين يجب أنْ تكون غير سالبة، حيث إنّ البرامج الصحيحة الثنويَّة لـ w و a تبحث عن أقلّ عدد من المجموعات المستقرة التي تغطي الرؤوس، فضلًا عن أنها تبحث عن أقلّ عدد من العصب التي تغطي الرؤوس، على الترتيب، وهذا يصف $\chi(G)$ و $\theta(G)$.

وباستخدام حقيقة أنّ المتغيرات غير سالبة، فإنَّ القيود تعطينا

$$c \cdot x \le y^T A x \le y \cdot b.$$

العبارة "$c \cdot x \le y \ b$" للحلول الملائمة (العملية) x و y هي **ثنويَّة ضعيفة**. وتنصّ **نظرية الثنويَّة (القويّة) للبرمجة الخطّيّة** على أنّ البرامج الثنويَّة التي لها حلول ملائمة لها حلول مُثلى بالقيمة نفسها عندما لا تكون الحلول الصحيحة (ذات الأعداد الصحيحة) هي الحلول المنشودة.

إنّ العبارتين $\chi \ge \omega$، و $\theta \ge a$ هما عبارتان ثنويّتان ضعيفتان لأزواج ثنويَّة من البرامج الخطّيّة، إضافة إلى أنّ الضمانة للثنويَّة القوية باستخدام حلول قيمها صحيحة فقط هي علاقة أصغر – أكبر توافقية (تركيبية). لقد عرضنا للعديد من هذه العلاقات، ولاحظنا أنها تضمن براهين سريعة للأمثلية، فضلًا عن أنها غالبًا ما تقود إلى خوارزميات سريعة لإيجاد الحلول المثلى؛ وهذا هو أحد دوافع دراسة عائلات البيانات الكاملة. ■

8.1.8.* مثال: الحلول الكسريّة للبيانات غير الكاملة. للحلقة الخماسيّة، لاحظ أنّ للبرامج الخطية لكلّ من ω و χ و α و θ القيمة المثلى $5/2$. هناك خمس عصب أعظمية، وخمس مجموعات مستقرة أعظمية حجم كلّ منها يساوي 2. وبوضع كلّ $x_j = 1/2$ نحصل على وزن قيمته تساوي 1 لكلّ عصبة ولكلّ مجموعة مستقرة، وبذلك تتحقق القيود لأيّ من مسألتي التعظيم هاتين. وبوضع $y_i = 1/2$ لكلّ y_i في البرنامج الثنوي، نحصل على غطاء لكلّ رأس بوزن كلّيّ يساوي 1، وبذلك، فإنَّ القيود تتحقق ثانيةً. لا يوجد لهذه البرامج حلول مثلى صحيحة. لذا، توجد "فجوة ثنويَّة" في البرامج الصحيحة: $\omega = 2 < 3 = \chi$ و $\omega = 2 < 3 = \theta$. ■

زيارة ثانية للبيانات الوتريّة (Chordal Graphs Revisited)

كالأشجار، يوجد للصّفّ الأعمّ من البيانات الوتريّة العديدُ من التّوصيفات المميزة، والتعريف بمنع الحلقات اللاوتريّة هو توصيف بنية جزئية ممنوعة، فضلًا عن أنّ قائمة منتهية من البنى الجزئية الممنوعة مثل البيانات الجزئية المستحدثة ينتج (يعطي) خوارزمية سريعة لاختبار العضوية في الصّفّ، ولكن القائمة غير منتهية للبيانات الوتريّة، لذا نحتاج إلى طرق أخرى.

يمكن بناء البيان الوتريّ من رأس منفرد بتكرار إضافة رأس مربوط (موصول) بعصبة، وهذه هي العملية العكسيّة لعملية ترتيب الحذف المبسطيّ. وقد رأينا أنّ التّلوين الجشع بالنسبة إلى مثل هذا الترتيب البنائي يؤدي إلى تلوين أمثل، حيث يتمتع العديد من صفوف البيانات الكاملة بمثل طريقة البناء هذه التي تنتج البيانات التي في الصّف، ولا تنتج أيّ شيء آخر، وربّما تقود إنّ طريقة البناء أو عكسها وهي طريقة التفكيك إلى خوارزميات سريعة لإجراء بعض الحسابات على البيانات في الصّفّ.

سنعرض فيما يأتي لنوعٍ آخر من التّوصيفات المميزة.

9.1.8. تعريف: نعرّف تمثيل التقاطع لبيان G على أنه عائلة من المجموعات $\{S_v : v \in V(G)\}$ حيث $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $S_u \cap S_v \neq Ø$. إذا كانت $\{S_v\}$ تمثيل تقاطع للبيان G، فإنَّ G **هو بيان التقاطع** لـ $\{S_v\}$.

بيانات الفترة (الفترات)، هي البيانات التي لها تمثيل تقاطع حيث تكون كلّ مجموعة في العائلة فترة على خطّ الأعداد، بالإضافة إلى أنّ البيانات الخطّانية كذلك تشكّل صفّ تقاطع؛ حيث إنّ المجموعات المسموحة أزواج من الأعداد الطبيعية ترتبط بأضلاع البيان H، بحيث إنّ $G = L\ (H)$. لقد وجد والتر (Walter [1972, 1978])، وقافرل (*Gavril* [1974]) وبونمان(*Buneman* [1974]). كلّ على حدة توصيفًا مميزًا للتقاطع للبيانات الوتريّة.

10.1.8. تمهيدية: إذا كانت $T_1, \ \dots\ , \ T_k$ مجموعة أشجار جزئية من شجرة T، بحيث إنّ هذه المجموعة متقاطعة زوجًا زوجًا، فإنَّ هناك رأسًا ينتمي إلى T_i لكلّ $i = 1, \ \dots\ , \ k$.

الإثبات: (Lenel) سنبرهن المكافئ العكسيّ لهذه العبارة؛ إذا كان كلّ رأس v غير موجود في مجموعة $T(v)$ من بين المجموعات $T_1, \ \dots\ , \ T_k$، فإنّنا نُعَلّم (نضع إشارة أو علامة) على الضلع الذي يغادر v على المسار الوحيد إلى $T\ (v)$. إذا T حوت n رأسًا، فإنّنا نعمل n علامة. لذا، يجب أنْ يكون أحد الأضلاع قد عُلِّم مرتين. الآن، لا يوجد رأس مشترك بين $T\ (u)$ و $T\ (w)$. ■

11.1.8. نظرية: يكون البيان وتريًّا إذا وفقط إذا كان له تمثيل تقاطع بواسطة أشجار جزئية لشجرة (تمثيل بأشجار جزئية).

الإثبات: سنبرهن أنّ هذا الشرط يكافئ وجود ترتيب حذف مبسطيّ، وسنستخدم الاستقراء، حيث تمثّل K_1 الأساس البديهي له. افترض أنّ $v_1, \ \dots\ , \ v_n$ تمثل ترتيب حذف مبسطيّ للبيان G. بما أنّ $v_2, \ \dots\ , \ v_n$ ترتيبُ حذف مبسطيّ للبيان $G - v_1$، فإنَّ فرضية الاستقراء تعطينا تمثيلاً بأشجار جزئية من شجرة مضيفة T للبيان $G - v_1$، وبما أنّ v_1 مبسطيّ في G، فإنَّ المجموعة $S = N_G\ (v_1)$ تولّد عصبة في $G - v_1$. لذا، فإنَّ الأشجار الجزئية المعينة لرؤوس S تكون متقاطعة زوجًا زوجًا.

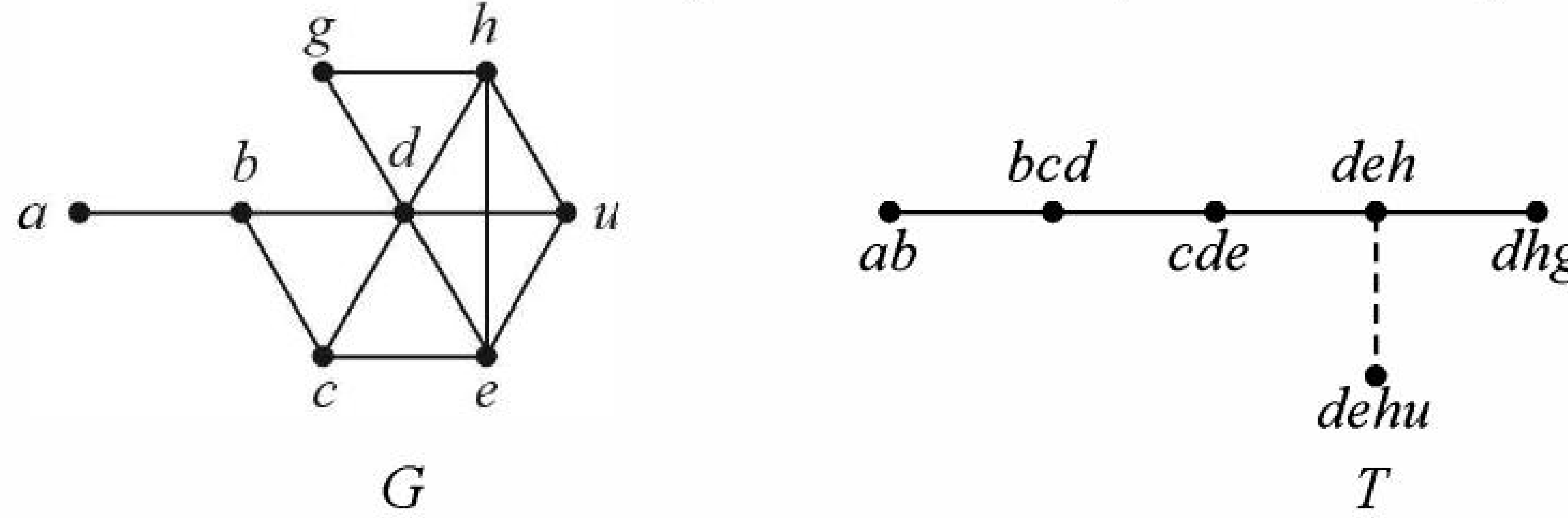
من التمهيديّة 10.1.8، نعلم أنّ لهذه الأشجار الجزئية رأسًا مشتركًا x. نُوسّع (نُكبِّر) T إلى شجرة T' بإضافة ورقة y تجاور x، ونضيف الضلع xy إلى الشجرة الجزئية الممثلة لرؤوس S. ونمثّل v_1 بالشجرة المكوّنة فقط من y. وهذا يتمّ تمثيل G بأشجار جزئيّة في T'.

عكس ذلك، افترض أنّ T أصغرُ شجرة مُضيفة للتمثيل بأشجار جزئية للبيان G، حيث إنّ $v \in V(G)$ كلّها قد مُثلت بـ $T\ (v) \subseteq T$. إذا كان $xy \in E\ (T)$، فيجب أنْ يكون لـ G رأس u بحيث تحتوي $T\ (u)$ على x، ولا تحتوي على y. وبخلاف ذلك، فإنَّ تقليص xy إلى y سيولّد تمثيلاً في شجرةٍ أصغر.

اجعل x ورقة في T، واجعل u رأسًا في G، بحيث تحتوي $T\ (u)$ على x، ولا تحتوي على جارها. إن الأشجار

الجزئية لجيران u في G يجب أنْ تحوي x، لذا، فهي متقاطعة زوجًا زوجًا.

وبناءً عليه، فإنَّ u يكون مبسطيًّا في G، وحذف $T(u)$ يعطي تمثيلاً بأشجار جزئية لـ $G-u$، ونقوم بإتمام ترتيب الحذف المبسطيّ في G باستخدام ترتيب $G-u$ الذي تعطيه فرضية الاستقراء. ■



بما أنّ صفّ البيانات الوتريّة وراثيّ، فإنَّ ترتيب الحذف المبسطي يمكن أنْ يبدأ من أيّ رأس مبسطيّ. لذا، فإنَّ استخدام طريق القوة الجبرية لإيجاد مثل هذا الترتيب يعني اختبار الجوارات حتى نحصل على رأس مبسطيّ، ثم نحذفه ونكرّر الخطوات السابقة نفسها.

لقد وجد روز، وترجان، ولوكر (Rose – Torjan – Lueker [1976]) طريقًا أسرع والتي سُهِّلت أكثر من قبَل ترجان (Tarjan [1976])، والفكرة هنا هي ما يأتي: بما أنه يوجد دائمًا رأس مبسطيّ من بين الرؤوس الأَبعَد عن رأس معين (إثبات النظرية 17.3.5)، فإنَّ ترتيب الحذف المبسطيّ يمكن أنْ ينتهي عند أيّ رأس. لذا، فإنّنا نبدأ عند أيّ رأس، ونضع قائمة بالرؤوس المتجّمعة حوله، وتكون النتيجةُ ترتيبَ بناء مبسطيّ (عكس ترتيب الحذف المبسطيّ) إذا وفقط إذا كان البيان وتريًّا. لقد نُشرت الخوارزمية مع العديد من التطبيقات في (Tarjan – yannakakis [1984])؛ و جولبك (Golumbic [1984]).

12.1.8. خوارزمية: البحث عن أكبر عد أصلي (كاردينالي) ((Maximum Cardilality Search (MCS))

المدخلات: بيان G.

المخرجات: ترقيم للرؤوس، بمعنى دالّة تناظر $f\colon V(G) \to \{1, 2, \dots, n(G)\}$.

الفكرة: لكلّ رأس v غير مرقّم، حافظ على علامة $l(v)$، وهي درجة هذا الرّأس من بين الرّؤوس التي تمَّ ترقيمها سابقًا، حيث إنّ الرّؤوس الموجودة في نهاية ترتيب حذف مبسطي هي الرؤوس المتجمعة حول الرّأس الأخير، لذا، يجب إضافة الرؤوس التي علاماتها الدالة أعلى أولاً في ترتيب البناء المبسطي.

البداية: عيّن العلامة 0 لكلّ رأس. وضع $i = 1$.

التّكرار: اختر أيّ رأس غير مرقّم علامته الدالة أكبر ما يمكن، وأعطِه الرقم i، وأضف 1 إلى العلامات الدالة الموجودة على جيرانه، ثم وسّع i، وكرّر الخطوات. ■

13.1.8. مثال: الرّأس الأول الذي نختاره في ترتيب MCS يكون اختياريًّا، ويمكن أنْ يبدأ تطبيق الـ MCS على البيان G الموضح للنظرية 11.1.8 بوضع $f(c) = 1$. واستنادًا إلى ذلك، فإنَّ $l(b) = l(d) = l(e) = 1$. بعد ذلك، اختر $f(e) = 2$، وحدِّث $l(h) = l(u) = 1$، $l(d) = 2$. عندها، d هو الرّأس الوحيد الذي علامته الدالة 2. لذا، فإنَّ $f(d) = 3$. والآن، حدِّث $l(b) = l(h) = l(u) = 2$، و $l(g) = 1$، سيقود الاستمرار بهذه العملية إلى الترتيب $c, e, d, b, h, u, g, a, u$ بترتيب متزايد للدّالة f. و هذا ترتيب بناء مبسطيّ، وبذلك يكون الترتيب $u, a, g, u, h, b, d, e, c$ ترتيب حذف مبسطيّ. ■

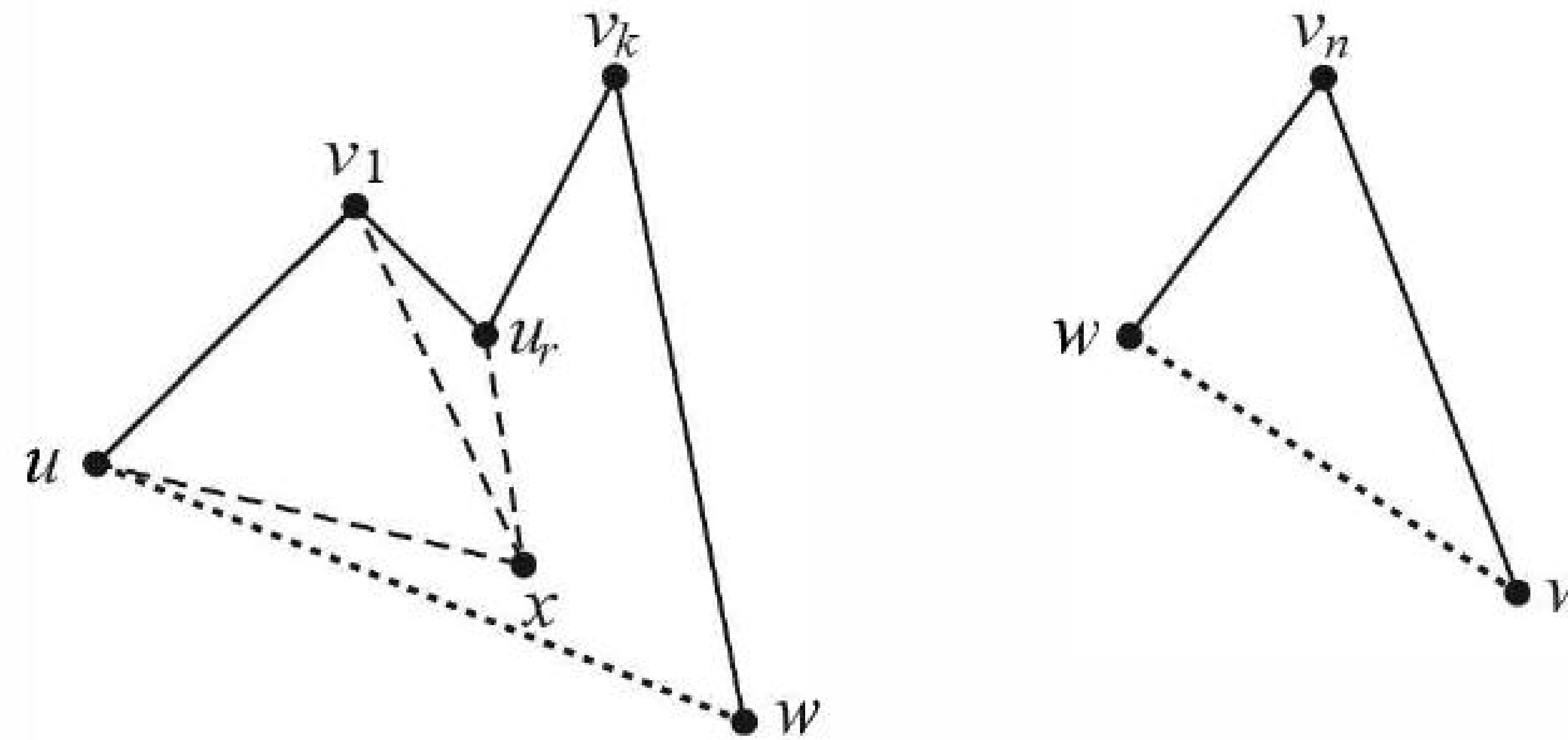
14.1.8. نظرية: (Tarjan [1976]) يكون البيان G وتريًّا إذا وفقط إذا كان التّرقيم $v_1, \dots, v_n$ الناتج عن

خوارزمية الـ MCS عبارة عن ترتيب بناء مبسطيّ للبيان G.

الإثبات: إذا أنتجت خوارزمية MCS ترتيب بناء مبسطيّ، فإنَّ G وتريّ. وبالعكس، افترض أنّ G بيان وتريّ، وافترض أيضًا أنّ $f{:}v(G)\to[n]$ الترقيمُ الناتج عن MCS. إنّ جسرًا لـ f يعني مسارًا غير وتريّ طوله يساوي 2 على الأقل تظهر أرقامه الصغرى عند طرفيه. سنبرهن أولاً عدم وجود جسر لـ f. وبخلاف ذلك، اجعل $P=u\,v_1,\ \dots\ ,\ v_k,\ w$ جسرًا يصغر $\max\{f(u), f(w)\}$. ومن التّماثل، يمكن افتراض أن $f(u) > f(w)$ (لقد استخدمت f كالإحداثي العموديّ لوضع الرّؤوس في التّوضيح).

بما أنه تمَّ ترقيم u بأفضلية على v_k عند زمن $f(u)$، وتمَّ سابقًا ترقيم w عند ذلك الزمن، فيوجد رأس x في $N(u)-N(v_k)$ حيث $f(x) < f(u)$. اجعل $v_0 = u$، وضع $r = \max\{j{:}\ x\leftrightarrow v_j\}$. إنّ المسار $P' = x,\ v_r,\ \dots\ ,\ v_k,\ w$ غير وتريّ؛ لأنَّ $x \leftrightarrow w$ يمكن أن تتمَّ حلقة وتريّة، وبما أنّ كلًّا من $f(x)$ و $f(w)$ أقل من $f(u)$، فإنَّ P' يكون جسرًا يناقض خيارنا لـ P. لذا، فإنَّ f تخلو من الجسور.

بهذا الادعاء، فإنَّ الإثبات يتبع بالاستقراء على $n(G)$. يكفي برهنة أنّ v_n مبسطيّ، ولأنَّ تطبيق الـ MCS على $G - v_n$ ينتج التّرقيم $v_1,\ \dots\ ,\ v_{n-1}$ نفسه والذي يترك v_n عند الطرف النهائيّ. إذا كان v_n غير مبسطيّ، فإنَّه يوجد لـ v_n جاران w، n غير متجاورين، وفي الحالات جميعها، فإنَّ u، v_n، w تشكّل جسرًا لـ f. ■



خوارزمية MCS تشتغل في زمن $O(n(G) + e(G))$ مع وجوب الحذر عند التنفيذ. لكلّ j نحافظ على قائمة من الرّؤوس الموصولة وصلاً مضاعفًا وعلامتها الدالة j، ونُخَزِّنُ العلامة الدّالة لكلّ رأس بالإضافة إلى تخزين المؤشّرات (الأسهم) التي تشير إلى موقع ذلك الرّأس وجيرانه في القائمة، فعند ترقيم v بزمن $O(1 + d(v))$، فإنَّنا نزيل v من قائمتها. ولإتمام اختبار الوتريّة؛ يجب أنْ نختبر ما إذا كان ترتيب الـ MCS ترتيب بناء مبسطيّ أم لا (التمرين 10)؛ حيث إنّ ترتيبات الحذف أو البناء المبسطيّ تعطينا نتائج مثلى بسرعة (أفضل ما يمكن) لكلّ من التّلوين والعصب، والمجموعات المستقرة، وأغطية العصب (التمرين 9).

الخوارزمية البديلة التي وجدها كلّ من روز، وترجان، ولوكر، والمعروفة باسم البحث الأفقي المعجمي أولاً نختصرها على الشكل (LBFS). بالنظر لقرب الـ (LBFS) من إثبات النظرية 17.3.5، فقد استُخدمت هذه الخوارزمية في العديد من تطبيقات اختبار خواص البيانات، وحساب وسطاء هذه البيانات. وهناك مقدمة جيدة عن هذا الموضوع في (Coneil – Olariu – Stewart [2000]).

إذا أُعطينا ترتيب حذف مبسطيّ، فإنّ النظرية 14.1.8 تحسب التمثيل بواسطة الأشجار الجزئية. وعند معرفتنا لقائمة العصب الأعظمية، فإنّنا نستطيع استخدام خوارزمية كروسكال (النظرية 3.3.2) لحساب التمثيل بأشجار جزئية دون معرفة ترتيب حذف مبسطيّ.

15.1.8. تعريف: تسمّى الشجرة T شجرة عصبة للبيان G إذا وُجِدَت دالّة تناظر بين $V(T)$ وعصب G الأعظمية، بحيث تولّد العصب التي تحوي v شجرة جزئيّة من T لكلّ $v \in V(G)$.

16.1.8. تمهيدية: كلّ شجرة رتبتها أقل ما يمكن بحيث يوجد فيها تمثيل بشجر جزئيّ لـ G تكون شجرة عصبة لـ G.

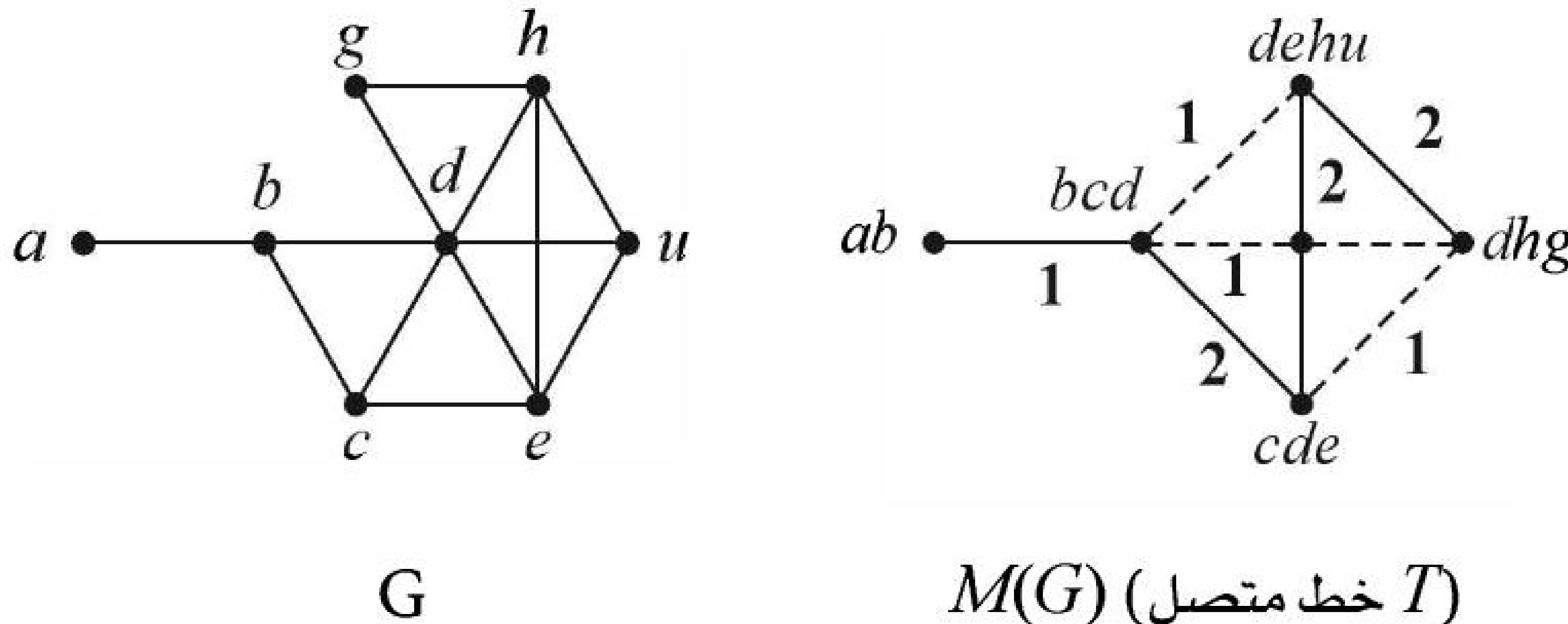
الإثبات: افترض أنّ T شجرة مضيفة لتمثيل البيان G بأشجار جزئيّة، بحيث إنّ لهذه الشجرة رتبة صغرى. من التمهيديّة 10.1.8، نعلم أنّ الرّؤوس لعصبة أعظمية Q في G تقع عند رأس مشترك q من رؤوس T. إذا كانت رؤوس G المعينة لرأس q' في $V(T)$ تشكل عصبة جزئية Q' من Q، فإنّ الأشجار الجزئية لهذه الرؤوس تحوي كامل المسار من q' إلى q في T. يمكن تقليص أول ضلع من أضلاع T على ذلك المسار دون تغيير بيان التقاطع، وهذا يعطينا شجرة مضيفة أصغر. ■

بيان التقاطع الموزون لمجموعة A من المجموعات المنتهية هو عصبة موزونة رؤوسها عناصر A، ووزن كلّ ضلع AA' هو $|A \cap A'|$.

17.1.8. نظرية: (Acharya – Las Vergnas [1982]). افترض أنّ $M(G)$ هو بيان التقاطع الموزون لمجموعة العصب الأعظمية $\{Q_i\}$ للبيان البسيط G. إذا كانت T شجرة مولدة لـ $M(G)$، فإنّ $w(T) \le \sum n(Q_i) - n(G)$، وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت T شجرة عصبة.

الإثبات: (Mckee [1993]). افترض أنّ T شجرة مولّدة لـ $M(G)$. وافترض أيضًا أنّ T_v هو البيان الجزئيّ الذي تولّده $\{Q_i : v \in Q_i\}$. إنّ كلّ رأس $v \in V(G)$ يسهم مرة واحدة في وزن T لكلّ ضلع لـ T_v. لذا، فإنّ $w(T) = \sum_{v \in V(G)} e(T_v)$.

Tv كلّه هو غابة. لذا، فإنّ $e(T_v) \le n(T_v) - 1$، حيث تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت T_v شجرة، الحدّ $n(T_v)$ يسهم بـ 1 في حجم كلّ عصبة تحوي v. وبجمع المتباينة على الرؤوس جميعها، فإنّنا نحصل على $w(T) \le \sum n(Q_i) - n(G)$. وتحصل المساواة إذا وفقط إذا كانت T_v جميعها شجرة، وهذا صحيح إذا وفقط إذا كانت T شجرة عصبة. ■



G M(G) (T خط متصل)

$w(T) = 7 = 15 - 8 = \sum n(Q_i) - n(G)$.

بوصفها نتيجة من النظرية 17.1.8، نستطيع اختبار ما إذا كان G بيانًا وتريًّا بإيجاد أكبر وزن لشجرة مولّدة في $M(G)$.

فضلًا عن ذلك، عندما يكون G وتريًّا، فإنَّ أشجار العصب هي بالضبط الأشجار المولدة لـ $M(G)$ التي وزنها أكبر ما يمكن (Bernstein – Goodman [1981], Shibata [1988])، انظر (Mc kee, [1993]) للاطلاع على مادة ذات صلة.

أصناف (صفوف) أخرى من البيانات الكاملة (Other Class of Perfect Graphs)

بيانات الفترة هي بيانات تقاطع لمجموعة من الفترات على خطّ مستقيم، وقد برهنّا مباشرة في القضيّة 16.1.5 أنّ هذه البيانات كاملة؛ لأنَّها صفّ جزئيّ من البيانات الوتريّة (التمرين 26). تظهر بيانات الفترة في مسائل الجدولة الخطية التي يوجد لها قيود على وقوع الأحداث المتزامنة (تذكر المثال 15.1.5).

18.1.8. مثال: تطبيق كلاسيكيّ لبيانات الفترة.

تحليل سلاسل الـ DNA. لقد تمَّ إيجاد بيانات الفترة من أجل دراسة الـ DNA. وقد قام بنزر (Benzer) في العام 1959م بدراسة خطّانيّة (خطّيّة) السلسلة لكائنات حيّة أرقى. وتمَّ تشفير (ترميز) كلّ جين في صورة فترة، عدا أنّ الفترة ذات الصلة يمكن أنْ تحوي اثنتي عشرة قطعة أو أكثر من قطع السقط (الخردة) تسمَّى إنترونات (introns) وتكون عادة موجودة بين القطع ذات الصلة التي تسمَّى إكسونات (exons). وعلى افتراض أنّ الطفرات الوراثيّة تحدث من تغيير القطع المستقيمة المترابطة، فيمكن دراسة تغييرات صفات الأحياء الدقيقة لتحديد ما إذا كانت مجموعات الأحماض الأمينية تتقاطع، وإنّ هذا يؤسّس لبيان تمثّل الصّفاتُ فيه الرؤوسَ، في حين تمثّل "التغييراتُ الشائعة" الأضلاعَ، وبافتراض الخطّيّة والتجاور، فإنَّ هذا البيان بيان فترة، وهذا يساعد على تحديد مواقع الجينات على سلسلة الـ DNA.

توقيت الإشارات الضّوئيّة: ليكن معطى لدينا كيفية حركة السير عند تقاطع معين، يستطيع مهندس السّير (أو أيّ شخص عنده حسّ عام عاديّ) أنْ يحدّد أيّ زوج من مسارب السّيارات يمكن أن يسير في الوقت نفسه. فإذا أعطينا لحظة في الحلقة تكون فيها حركة السّير متوقّفة في الاتجاهات جميعها، فإنَّ بيان التقاطع لفترات الضّوء الأخضر يجب أنْ يكون بيان فترة، أضلاعُه هي المجموعاتُ الجزئية من الأزواج المسموحة (أزواج المسارب التي تكون فيها حركة السّير في الوقت نفسه)، يمكن دراسة هذه الحالات للحصول على أمثلية لمقياس معين مثل معدّل وقت الانتظار. انظر (Roberts [1978]).

التّسلسل الزّمنيّ للآثار: إذا وُجدت لدينا عينات من الفخّار في موقع تنقيب عن الآثار، فإنَّنا نبحث عن الفترة الزمنية التي استخدمت فيها هذه النوعيات من الفخار. افترض أنّ نوعًا واحدًا قد استخدم خلال فترة زمنية معينة، وإذا ظهر نوعان من الفخّار في القبر نفسه، فإنَّنا نفترض أنهما استُخدما في الفترة الزمنية نفسها. وإذا ظهر نوعان من الفخار في الحفرة نفسها، فإنَّنا نفترض أنّ هذا يمثّل ضلعًا. وإذا كان هذا البيان بيان فترة، فإنَّ فترات الزمن الممكنة تعطي تمثيلاً بفترات لهذا البيان، وبخلاف ذلك، فإنَّ المعلومات تكون ناقصة، ويكون بيان الفترة المنشود بحاجة إلى أضلاع إضافية. ■

سنعرض لخاصيتين مميزتين لبيانات الفترة، علمًا بأنّ الخاصية B في النظرية 20.1.8 تعود إلى جلمور وهوفمان (Gilmor and Hoffman [1964])، أمّا الخاصية C، فتعود لكلّ من فلكرسون وجروس (Fulkerson and Gross [1965]).

19.1.8. تعريف: المصفوفة $0, 1$ - هي المصفوفة التي مدخلاتها جميعها إما صفر أو واحد، ونقول إنّ للمصفوفة $0, 1$ - خاصية تتابع الواحدات (للأعمدة) إذا أمكن تبديل صفوفها، بحيث تظهر الواحدات في

كلّ عمود بالتتابع. ونعرف مصفوفة وقوع الرّأس والعصبة على أنّها مصفوفة الوقوع التي دُلِّلَ على صفوفها بالعصب الأعظمية، وعلى الأعمدة بـ$V(G)$.

20.1.8. نظرية : الشروط المتكافئة الآتية على بيان G تعطي توصيفًا مُميزًا لبيانات الفترة:

a) يوجد تمثيل بفترات للبيان G.

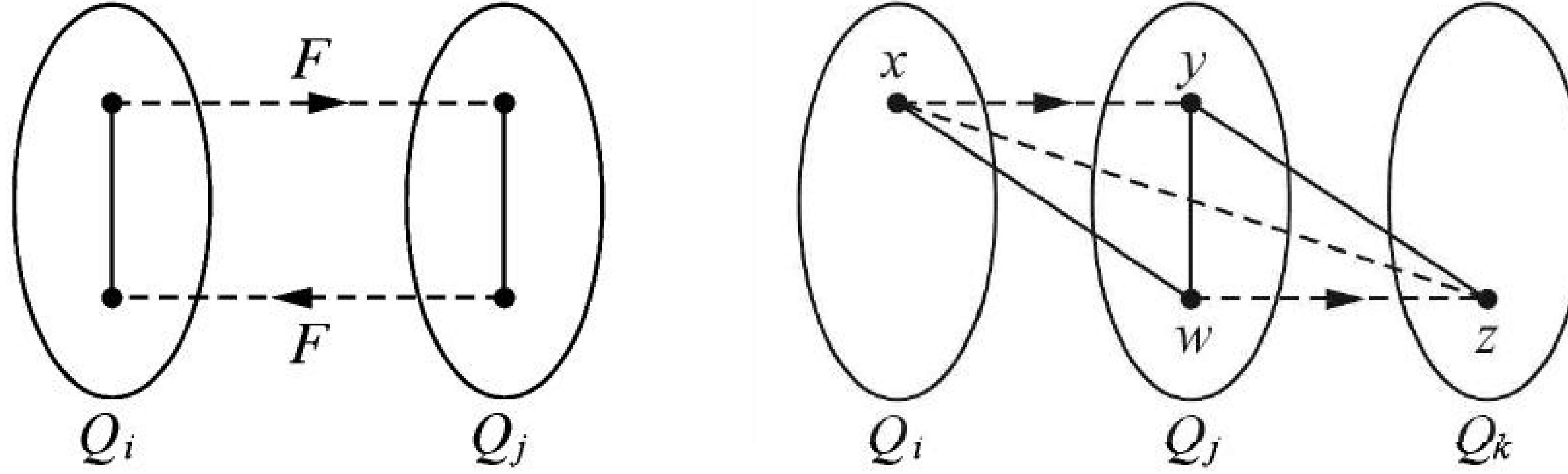
b) G بيان وتريّ، و $\overline{G}$ بيان مقارنة.

c) تمتلك مصفوفة وقوع الرّأس والعصبة خاصية تتابع الواحدات.

الإثبات: سنناقش $A \Rightarrow B$ و $A \Leftrightarrow C$ في التمرينين 27 – 26. أمّا هنا فسنبرهن أنّ $B \Rightarrow C$. افترض أنّ G بيان وتريّ بحيث يوجد لـ $\overline{G}$ توجيه متعدّ F. نستخدم كلًّا من F وغياب الحلقات اللاوتريّة في G لإثبات وجود ترتيب على العصب الأعظمية لـ G بحيث يعطي هذا الترتيب خاصية الواحدات المتتابعة لمصفوفة وقوع الرّأس والعصبة M.

افترض أنّ Q_i و Q_j عصبتان عظيمان في G. من الأعظمية، نعلم أنّ لكلّ رأس في أيّ عصبة رأسًا آخر في العصبة الآخرى لا يجاوره. افترض أنّه تحت تأثير F يوجد ضلع في $\overline{G}$ يؤشّر من Q_i إلى Q_j، وضلع آخر في $\overline{G}$ يؤشّر من Q_j إلى Q_i.

إذا وُجد رأس مشترك لهذه الأضلاع، فإنَّ خاصية التعدي لـ F تجبر ضلعًا من عصبة في G ليكون موجودًا في $\overline{G}$. لذا، فإنَّ الحالة تكون كما هي موجودة في الشكل أدناه عن اليسار، حيث إنّ للأضلاع المنقطة في F أربعة رؤوس مختلفة. إذا كانت الأزواج المتبقية من هذه الرّؤوس الأربعة تشكل أضلاعًا في G، فإنَّ لـ G بيانًا جزئيًّا مستحدثًا هو C_4. واستنادًا إلى ذلك، فإنَّ أحد القطرين على الأقل يكون موجودًا في $\overline{G}$. ولكن كلّ توجيه ممكن لهذا القطر في F يناقض خاصية التعدي. وبذلك نستنتج أنّ أضلاع $\overline{G}$ كلّها التي تربط بين مجموعتي رؤوس Q_i و Q_j تشير إلى الاتجاه نفسه في F.



نستطيع الآن تعريف دوري T حيث ترتبط رؤوسه بالعصب العظمي في G. نضع $Q_i \rightarrow Q_j$ في T عندما تكون أضلاع F جميعها بين Q_i و Q_j تشير من Q_i إلى Q_j. من الفقرة السابقة، نجد أنّ T توجيه لبيان تام. ندعي أن T متعدٍّ. ولإثبات هذا، يجب إثبات أنّه إذا تحقق $Q_i \rightarrow Q_j$، و $Q_j \rightarrow Q_k$، فإنَّ $Q_i \rightarrow Q_k$. افترض أنّ $x \rightarrow y$، و $w \rightarrow z$ في F حيث $x \in Q_i$، $y, w \in Q_j$ ، و $z \in Q_k$. إذا كان $y = w$، فإنَّ خاصية التعدي لـ F تعطينا مباشرة أنّ $x \rightarrow z$. بخلاف ذلك، افترض زوجًا xz كما يظهر في الشكل أعلاه عن اليمين. إنّ ربط x و z في G يُحدث C_4 في G. لذا، فإنَّ $x \nleftrightarrow z$. وبناءً على ذلك، فإنَّ هذا الزوج يظهر في F، ويجب أنْ يكون موجهًا من x إلى z $x \rightarrow z$؛ لتجنب انتهاك خاصية التعدي. لذا، نستنتج أنّ $Q_i \rightarrow Q_k$ في T.

الدوري المتعدي يحدّد ترتيبًا خطّيًّا للرؤوس منسجمًا مع الأضلاع. استخدم الدوري المتعدي T لترتيب صفوف M على الشكل $Q_1 \rightarrow \ldots \rightarrow Q_m$. افترض أنّه تحت هذا الترتيب يوجد عمود x حيث لا تظهر فيه

الواحدات بالتتابع، لذا فلدينا Q_i، و Q_j، و Q_k بحيث إنّ $x \notin Q_i$, Q_k , $x \in Q_i$، $i < j < k$، و $x \notin Q_j$. بما أنّ $x \notin Q_j$ ، فإنّ العصبة Q_i يجب أنْ تحوي رأسًا y لا يجاور x. وبغير ذلك، فإنَّ Q_j يمتص x ولا يكون أعظميًّا. ومن هنا فإنَّ، $x \in Q_i$ تعطينا أنّ $y \to x$ في F في حين تعطينا $x \in Q_k$ أنّ $x \to y$ في F، ولكن حدوث هذا في الوقت نفسه مستحيل. ■

تشكّل بيانات الفترة عائلة صغيرة نسبيًّا من البيانات الكاملة. وفيما يأتي، سنناقش صفًّا أكبر من البيانات التي تحافظ على بعض الخواص الجميلة للبيانات الوتريّة، وبيانات المقارنة.

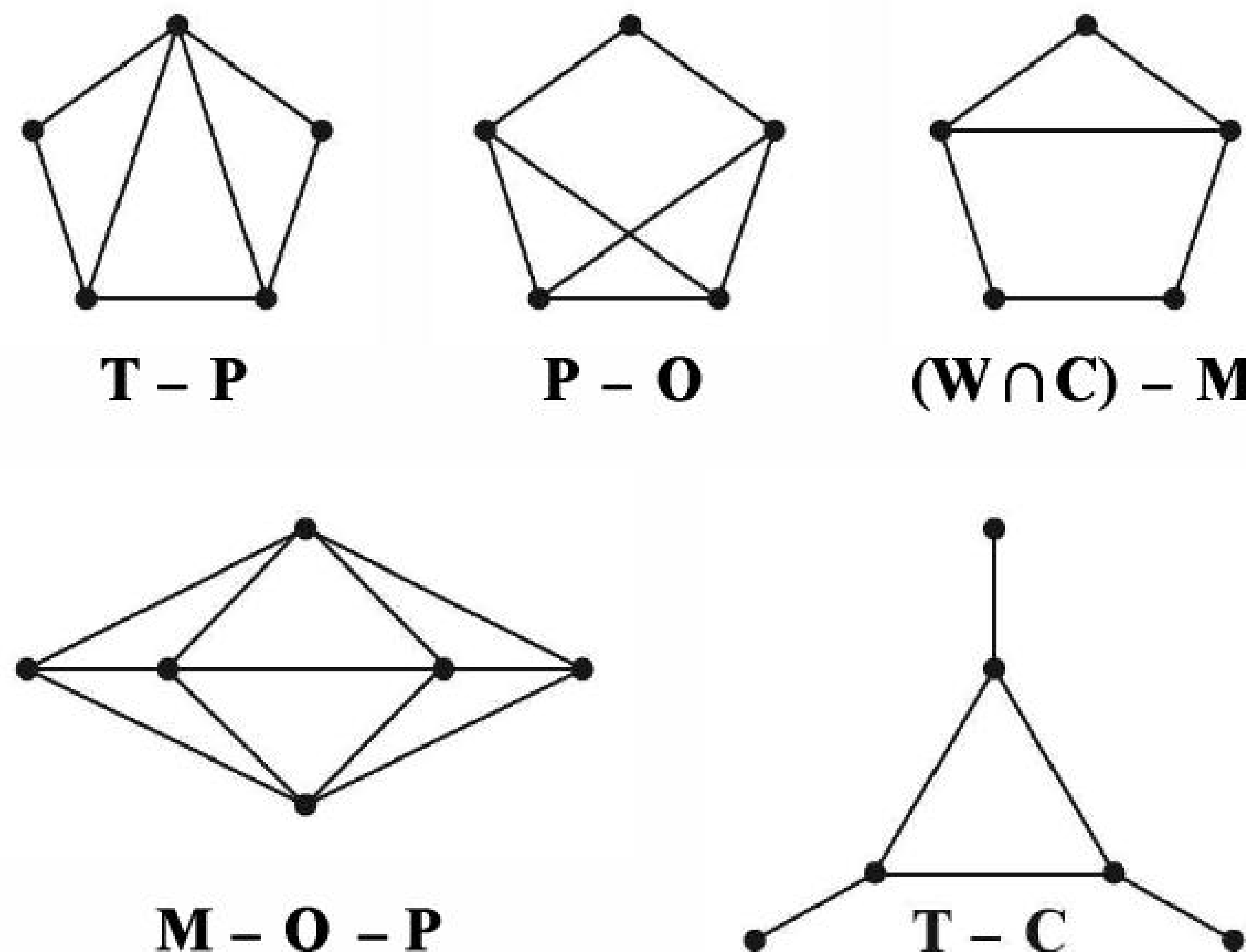
21.1.8. تعريف: صفوف (أصناف) البيانات الكاملة (تنطبق الشروط على الحلّقات الفردية إذا كان طول الحلقة يساوي 5 فقط على الأقل). **تثليث** $-\,o$: كلّ حلقة فردية لها وتران لا يتقاطعان. **نوعية:** لكلّ حلقة فردية وتران متقاطعان. **مينيل (Meyniel)**: يوجد وتران لكلّ حلقة فرديّة على الأقل **وتريّ ضعيف:** لا توجد حلقة مستحدثة طولها 5 على الأقل في G، أو في $\overline{G}$.**كامل بقوة:** توجد مجموعة مستقرة لكلّ بيان جزئيّ مستحدث تقطع كلّ عصبة أعظمية لهذا البيان الجزئيّ.

لقد أثبت جالاي (Gallai, [1962]) أنّ كلّ بيان من نوع تثليث $-\,o$ يكون بيانًا كاملاً. وكلّ بيان وتريّ هو تثليث $-\,o$ (التمرين 34) ووتريّ ضعيف (التمرين 40). وكلّ بيان تثليث $-\,o$، وكلّ بيان نوعية هو بيانات مينيل، وبيانات مينيل هي بيانات كاملة.

(Meyniel, [1976], Lova′sz, [1983]) وكذلك كاملة بقوة (Ravindra, [1982]).

لقد تمَّ إثبات أنّ البيانات النوعية بيانات كاملة من قِبَل كلٍّ من أولارو (Olaru, [1969]) وساشس (Sachs, [1970]). أمّا اسم البيانات النوعية الذي ينصُّ على أنّ البيان G بيان نوعية إذا وفقط إذا تحقق لكلّ زوج $x، y \in V(G)$، و أنّ المسارات اللاوتريّة من x إلى y كلّها زوجية أو كلّها فردية (التمرين 36)، فمأخوذ من التّوصيف المميّز لهذه البيانات من قِبَل كلٍّ من بورلت وأوري (Burlet and uhry, [1982]).

22.1.8. مثال: تبيّن البيانات الموضّحة في الشّكل أدناه الفروق بين هذه الأصناف. هنا T و C و O و P و M و W على الترتيب ترمز إلى أصناف البيانات الوتريّة (المثلثاتيّة)، والمقارنة وتثليث $-\,o$، والنوعية، ومينيل، وبيانات وتريّة ضعيفة. ■



لقد عُرفت البيانات الكاملة بقوة من قِبَلِ كلّ من بيرج ودكت عام (Berge and Duchet [1984]) 1984. حيث إنّ تغيير كلمة أعظمي إلى أكبر (أعظم) في التعريف يعطينا متطلبًا أضعف يكافئ الكمال بالنسبة إلى γ: يمكن استخدام المجموعة المستقرة التي تتقاطع مع كلّ العصب الكبرى كأول صفّ لونيّ في التّلوين بـ$w(G)$ لونًا الذي بُنِيَ استقرائيًّا. لذا، فإنّ البيانات الكاملة القوية تكون بيانات كاملة.

إنّ صفّ (تصنيف) البيانات الكاملة بقوة لا يحوي البيانات الوتريّة الضعيفة جميعها (التمرين 40)، إلا أنّه يحوي البيانات الوتريّة كلّها وكذلك بيانات المقارنة جميعها. (كما لاحظنا في القضية 25.3.5، عندما يكون للبيان G توجيه متعدٍّ، فإنّ كلّ بيان جزئيّ مستحدث يرث توجيهًا متعديًا، وتشكّل الرؤوس التي درجتها الداخلة O في هذا التوجيه مجموعة مستقرة تقطع العصب الأعظمية كلّها.

صفّنا التالي من البيانات يكون محتوى فعليًّا في صفّ البيانات الكاملة القوية (التمرينين 37 − 38). وما زال يحوي كلًّا من البيانات الوتريّة وبيانات المقارنة، ولكنه لا يحوي بيانات مينيل جميعها (التمرين 39)، لقد عُرِّف هذا الصّفّ من قِبَلِ كفتال (Chva'tal) العام 1984، حيث قام هذا الصّفّ بدور مهم في نظرية البيانات الكاملة.

23.1.8. نعرِّف الترتيب الكامل للبيان G على أنه ترتيب لرؤوس هذا البيان بحيث ينتج التّلوينُ الجشع بالنسبة إلى الترتيب الموروث من قبل كلّ بيان جزئي مستحدث تلوينًا أمثل لهذا البيان الجزئي. يُسمّى البيان الذي له ترتيب كامل بيانًا كامل الترتيب.

يُعَرَّف العائق (السد) لتوجيه للبيان G على أنه مسار مستحدث له أربعة رؤوس هي: a، و b، و c، و d بحيث إنّ أول وآخر ضِلع فيه يكونان موجهين نحو الأوراق. إنّ توجيه G المرتبط بترتيب L للرؤوس، يوجه كلّ ضلع نحو رأس يظهر أولاً في $L: u \to v$، إذا كان $u < v$. ونقول: إنّ ترتيب الرؤوس خالٍ من العائق، إذا خلا التوجيه المرتبط بذلك من العائق.



التوجيه المرتبط بترتيب كامل يخلو من العائق؛ لأنّ التّلوين الجشع يستخدم 3 ألوان على العائق بدلاً من 2. لقد أثبت كفتال أنّ البيان يكون كامل الترتيب إذا وفقط إذا وُجِدَ لهذا البيان ترتيبٌ خالٍ من العائق. يعطينا هذا التوصيف أنّ البيانات الكاملة الترتيب تكون بيانات كاملة، وكذلك فإنّ البيانات الوتريّة وبيانات المقارنة تكون كاملة الترتيب.

24.1.8. مثال: تكون البيانات الوتريّة وبيانات المقارنة كاملة الترتيب. وأنّ توجيه البيانات الوتريّة المرتبطة بترتيب بناء مبسطي لا يحوي مسارًا مستحدثًا $u \leftrightarrow v \to w$، بالإضافة إلى أنّ التوجيه المتعدي لبيان المقارنة يخلو من مسار مستحدث $u \to v \to w$.

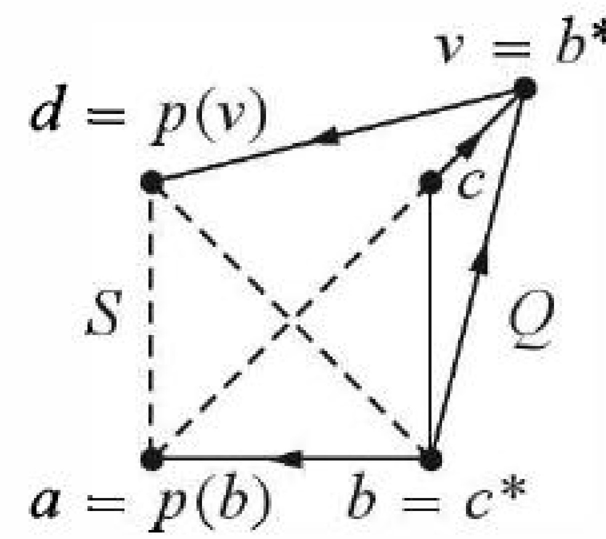
لكلّ توجيه يحوي إعاقةً مسارٌ مستحدثٌ $u \to v \to w$ ومسارٌ مستحدث $u \leftarrow v \to w$. ومن هنا، إذا كان G بيان مقارنة أو بيانًا وتريًّا، فإنّ له ترتيبًا يخلو من العائق. وباستخدام توصيف كفتال، نعلم أنّ هذه البيانات قابلة للترتيب الكامل. ■

25.1.8. تمهيدية: (Chva'tal [1984]) افترض أنّ للبيان G عصبة Q ومجموعة مستقرّة S بحيث إن $S \cap Q = \theta$، وافترض أنّ $w \in Q$ كلّه يجاور $p(w) \in S$. إذا كان L ترتيبًا لـ G خالٍ من عائق، بحيث إنّ

$p(w) < w$ لكلّ $w \in Q$، فيوجد $p(w) \in S$ يجاور Q كلّها.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $n(G)$. إذا كان $n(G) = 1$، فلا يوجد ما نبرهنه. لذا، افترض أنّ $n(G) > 1$. لاحظ أنّه لكلّ $w \in Q$، فإنّ البيان $G - w$ يحقّق الفرض باستخدام العصبة $Q - w$ والمجموعة المستقرّة $\{p(u) : u \in Q - w\}$. وباستخدام فرضية الاستقراء، يوجد رأس w^* في $Q - w$ بحيث إنّ $p(w^*) \leftrightarrow Q - w$. وبذلك نحصل على w^* في Q بحيث $p(w^*) \leftrightarrow Q$ إلا إذا تحقّق أنّ $p(w^*) \nleftrightarrow w$ لكلّ w في Q. إنّ هذا يحدد رأسًا وحيدًا w^* لكلّ w؛ لأنّ $p(w^*)$ لا يجاور w فقط من بين الرؤوس الموجودة في Q. إن إرسال w إلى w^* يعرِّف تبديلة على Q. وبما أنّ $p(w) \nleftrightarrow w$، فإنّه لا يوجد عنصر مثبت تحت هذه التبديلة.

نبحث عن عائق (سد) في التوجيه المرتبط بـ L. اجعل v أصغرَ رأس لـ Q في L. افترض أنّ b, c في Q هما الرّأسان بحيث إنّ $b^* = v$، و $c^* = b$ (يمكن أنْ يكون $c = v$). افترض أنّ $a = p(b)$، وأنّ $d = p(v)$. وبما أنّ $p(w^*) \nleftrightarrow w$، فلدينا $a \nleftrightarrow c$ و $d \nleftrightarrow b$، وهذا يعطينا أنّ $a \neq d$ في المجموعة المستقرّة S، ويعطينا الصورة الموضحة أدناه للتوجيه المرتبط بـ L.



بما أنّ $d = p(b^*)$، فإنّ الرّأس الوحيد من Q الذي لا يجاور d هو b. إذن، فإنّ $d \leftrightarrow c$. وبما أنّ $d = p(v) < v \le c$ في L، فسنحصل على أنّ $c \leftarrow d$. الآن، a، وb، وc، وd تحدث عائقًا، وهذا يناقض المفترض على L. لذا، فإنّ $w \leftrightarrow p(w^*)$ لبعض w. وبذلك يكون $p(w^*)$ هو رأس S المنشود. ■

26.1.8. نظرية: ([Chva'tal [1984]). يكون ترتيب الرؤوس لبيان G ترتيبًا كاملاً إذا وفقط إذا خلا G من العوائق. ويكون كلّ بيان بمثل هذا الترتيب بيانًا كاملاً.

الإثبات: لاحظنا أنّ هذا الشرط ضروريّ؛ لأنّ صفّ البيانات الذي له ترتيبات خالية من العوائق هو صفّ وراثيّ (يكون الترتيب الموروث للبيانات الجزئية المستحدثة خاليًا من العوائق أيضًا). لذا، يكفي برهنة أنّ التّلوين الجشع للبيان G بالنسبة إلى ترتيب خالٍ من العوائق L يكون أمثليًّا. افترض أنّ k عددُ الألوان المستخدمة في تلوين جشع بالنسبة إلى L.

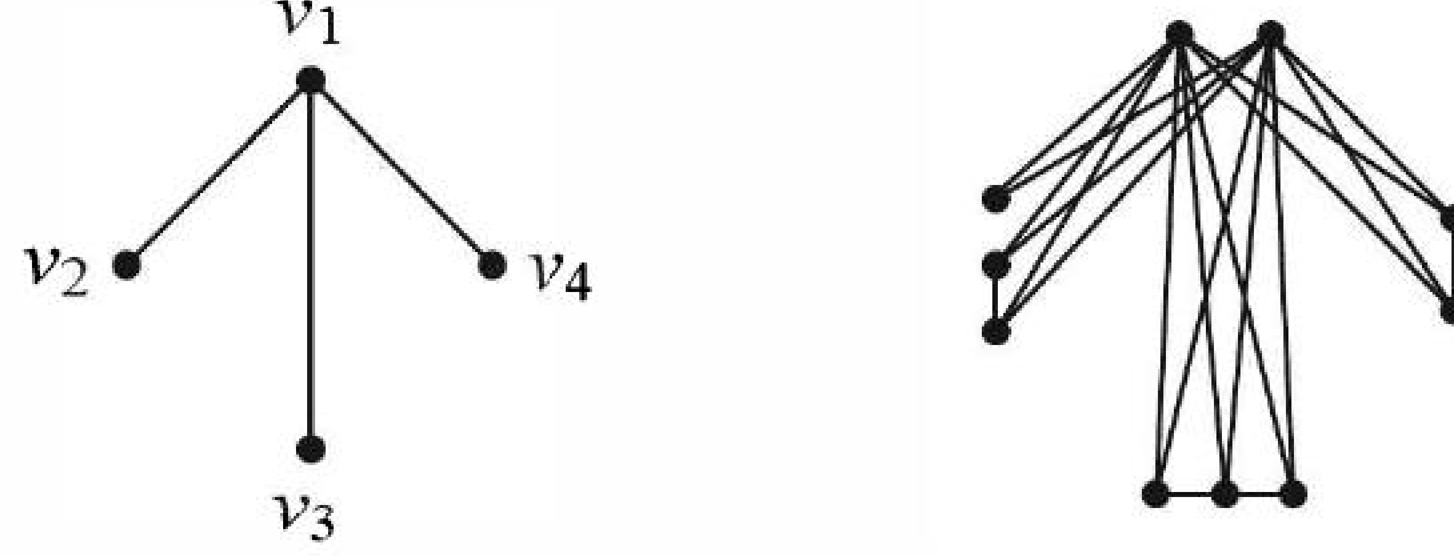
ولإثبات الأمثلية؛ سنبرهن وجودَ عصبة من الدرجة k للبيان G. ويبرهن هذا أيضًا صفة الكمال لهذه البيانات استقرائيًّا. افترض أنّ $f: V(G) \to [k]$ هو التّلوين الناتج، اجعل i أقلَ عدد صحيح بحيث يوجد للبيان G عصبة $w_{i+1}, \ldots, w_k$ بحيث إنّ $f(w_j) = j$ لـ $i < j \le k$. بما أنّ f تستخدم اللون k على رأس معين، فإنَّ i معرَّف جيدًا. إذا كان $i = 0$ فإن لـ G عصبة من الدرجة k.

إذا كان $i > 0$، فيوجد لكلّ w_j رأس $p(w_j)$، بحيث إنّ $p(w_j) < w_j$ في L و $f(p(w_j)) = i$، وبخلاف ذلك، فإنَّ التّلوين الجشع يستخدم لونًا أقل على w_j. اجعل $S = \{p(w_{i+1}), \ldots, p(w_k)\}$. بما أنّ كلّ رأس في S له اللون نفسه، فإنَّ S تشكّل مجموعة مستقرّة، وبذلك تتحقق شروط التمهيديّة 25.1.8 وهذا يعني أنه يمكن

إضافة أحد رؤوس S إلى العصبة ليصبح w_i، وهذا يناقض أصغرية i. ■

وسنأخذ فيما يأتي في الحسبان طريقة أخرى لتوليد البيانات الكاملة. إنّ العملية التي تحافظ على الكمال يمكن أنْ توسّع صفّ البيانات الكاملة. وأنّ عملية ضرب الرؤوس التي تمدّد الرّأس إلى مجموعة مستقلة هي مثال على هذه الخاصيّة. سنعمّم هذا، إذا كانت $V(G) = \{v_1, \dots , v_n\}$. وكانت $H_1, \dots , H_n$ بيانات منفصلة، فإنَّ التركيب $G[H_1, \dots , H_n]$ هو البيان $H_1 + \dots + H_n$ بالإضافة إلى المجموعة $\{xy: x \in V(H_i), y \in V(H_j), v_i v_j \in E(G)\}$.
إنّ الحالة الخاصّة $G[\overline{K}_{h_1}, \dots , \overline{K}_{h_n}]$ هي $G \circ h$.

يستخدم المثال الموضح أدناه $H_1 = 2K_1$، و $H_2 = K_2 + K_1$ ، $H_3 = P_3$ و $H_4 = K_2$ و $G = K_{1,3}$ مع رأسٍ مركزي v_1.

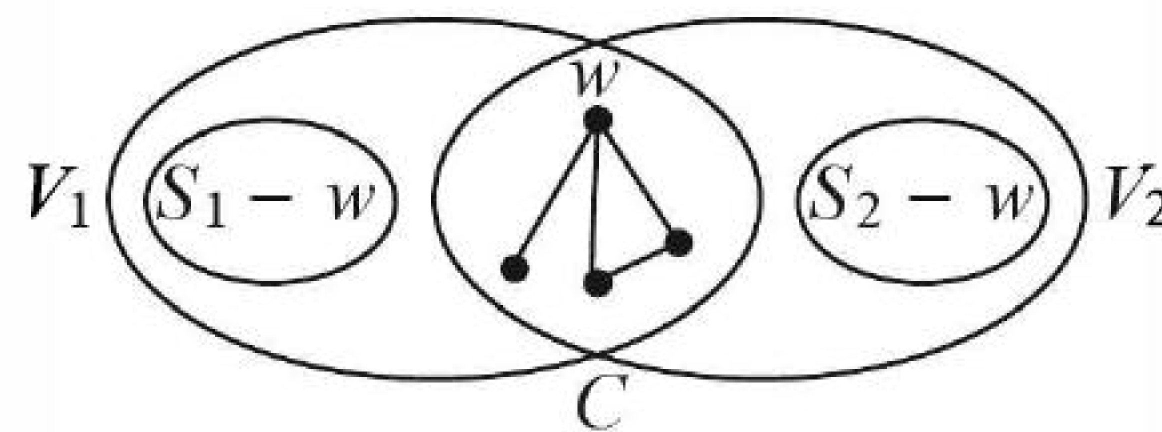


لقد أثبت لوفاز أنّ التركيب يحافظ على الكمال. و هذه إحدى النتائج التي تتبع من تمهيديّة كفتال المتعلقة بمجموعات قطع النجمة.

27.1.8. تعريف: نعرِّف مجموعة قطع النجمة على أنّها مجموعة قطع رؤوس S تحوي رأسًا x يجاور $S - \{x\}$ كلّها. ونعرّف **البيان الناقص (غير الكامل)** الأصغريّ على أنّه بيان غير كامل، بحيث تكون بياناته الجزئية المستحدثة جميعها بيانات كاملة.

28.1.8. تمهيدية: (تمهيديّة قطع النجمة). إذا خلا البيان G من المجموعات المستقرّة التي تقطع كلّ عصبة عظمى، وكان كلُّ بيان جزئيّ فعليّ مستحدث من G قابلاً للتلوين بـ $\omega(G)$ لونًا، فلا يوجد للبيان G أيّ مجموعة من قطع النجمة.

الإثبات: افترض أنّ C مجموعة قطع نجمة لـ G. بحيث يجاور الرّأس w $C - \{w\}$ كلّه. بما أنّ $G - C$ غير مترابط، فيمكننا تجزئة $V(G - C)$ إلى مجموعتين هما V_1 و V_2 حيث لا يربط بينهما أيّ أضلاع. اجعل $G_i = G[V_i \cup C]$، واجعل أيضًا f_i تلوينًا فعليًّا بـ $\omega(G)$ لونًا لـ G_i. افترض أنّ S_i هي مجموعة رؤوس G_i التي لها لون w نفسه في f_i. إنّ هذا يولّد w، ولكنه لا يولّد أيّ رأس آخر في C. وبما أنه لا يوجد أيّ ضلع من V_1 إلى V_2، فإنَّ $S = S_1 \cup S_2$ هي مجموعة مستقرّة.
إذا كانت عصبة في $G - S$، فإنَّها تكون محتواة في $G_1 - S_1$، أو أنها تكون محتواة في $G_2 - S_2$. وبما أنّ f_i يزودنا بتلوين بـ $\omega(G) - 1$ لونًا لـ $G_i - S_i$، فإنَّنا نحصل على أنّ $|Q| \le \omega(G) - 1$.
وبما أنّ هذا ينطبق على كلّ عصبة Q في $G - S$، فإنَّ المجموعة المستقرة S تقطع كلّ عصبة من الدرجة $\omega(G)$ في G، وهذا يناقض الافتراض. ■



29.1.8 نظرية: (تمهيديّة قطع النجمة، Chva'tal [1985b]) لا يوجد بيان كامل أصغريّ بحيث يحوي هذا

البيان مجموعة قطع نجمة.

الإثبات: إذا كان G بيانًا ناقصًا أصغريًّا، فإنَّ $\chi\,(G) > \omega\,(G)$، وحذف أيّ مجموعة مستقرّة S يترك بيانًا كاملاً. لذا، فإنَّ: $1 + \omega\,(G) \leq \chi\,(G) \leq 1 + \chi\,(G - S) = 1 + \omega\,(G - S) \leq 1 + \omega\,(G)$.

وهذا يعطينا أنّ $\omega\,(G - S) = \omega\,(G)$، مما يعني عدم وجود مجموعة مستقرة تتقاطع مع كلّ عصبة عظمى. وأبعد من ذلك، بما أنّ G بيان غير كامل أصغريّ، فإنَّ كلّ بيان جزئيّ فعليّ مستحدث G' يحقق أنّ $\chi\,(G') = \omega\,(G') \leq \omega\,(G)$، وهذا يجعل G قابلاً للتلوين بـ $\omega\,(G)$ لونًا. الآن، تعطينا التمهيديّة 28.1.8 أنّ G يخلو من مجموعة قطع النجمة ■

إنّ تمهيديّة الاستبدال تعمّم التمهيديّة 4.1.8.

30.1.8. نتيجة: (تمهيديّة الاستبدال – Lova′sz [1972b]). كلّ تركيب للبيانات الكاملة يكون بيانًا كاملاً.

الإثبات: يمكن بناء التركيب للبيانات بواسطة متتالية تعويضات، يستبدل فيها رأس واحد v في G_1 ببيان G_2، والأضلاع المضافة جميعها بين $V(G_2)$ و $U = N_{G1}\,(v)$ لتشكيل البيان G. لذا، يكفي أنْ نبرهن أنّ هذه العملية تحافظ على الكمال. إذا كان البيان الناتج ناقصًا (غير كامل)، فإنّه يحوي بيانًا جزئيًّا مستحدثًا F غير كامل أصغريًّا. إنّ مثل هذا البيان الجزئي لا يمكن أنْ يكون محتوى في G_1 أو في G_2، ومما يجبر هذا البيان ليكون له رأسان من G_2 على الأقل، ورأس واحد من G_1 على الأقل.

عند عدم احتواء F على أيّ رأس من رؤوس $G1$ خارج U، فإنَّ $F = F\,[U] \vee (F \cap G_2)$. إنّ عملية الوصل (Join) أو الضّم تحافظ على الكمال؛ لأنَّ $\chi(H \vee H') = \chi(H) + \chi(H')$ و $\omega(H \vee H') = \omega(H) + \omega(H')$ لكلّ H و H'. لذا، نستطيع أنْ نفترض وجود رأس في F من رؤوس G_1 غير الموجودة في U. في هذه الحالة، تشكّل $V(F) \cap U$ بالإضافة إلى رأس واحد من G_2 في F مجموعةَ قطع النجمة. لذا، فأن يحل G_2 محل U لا يعرف بيانًا جزئيًّا F غير كامل أصغريًّا. ■

تعطينا تمهيديّة مجموعة قطع النجمة كمالاً للبيانات الوتريّة الضعيفة. لقد أثبت هيوارد (Hayward [1985]) أنَّ G أو $\overline{G}'$ يحوي مجموعة قطع النجمة عندما يكون G بيانًا وتريًّا ضعيفًا مختلفًا عن العصبة وعن المجموعة المستقرّة أيضًا. يعطينا هذا بالإضافة إلى تمهيديّة مجموعة قطع النجمة، ونظرية البيانات الكاملة عدمَ وجود بيان وتريّ ضعيف بحيث يكون هذا البيان بيانًا ناقصًا أصغريًّا. وبما أنّ هذا الصّف وراثيّ، فإنَّ كلّ بيان وتريّ ضعيف يكون كاملاً.

البيانات الناقصة (غير الكاملة) (Imperfect Graphs)

البيانات الحرجة من الدرجة p هي بيانات ناقصة أصغرية. تنصّ مُخَمَّنَة البيانات الكاملة القوية (SPGC) على أنّ البيانات الوحيدة الحرجة من الدرجة p هي الحلقات الفرديّة (التي طولها على الأقل يساوي 5) ومتمماتها. ومع توافر كاف من الخصائص للبيانات الحرجة من الدرجة p، فلربما نستطيع برهنة أنّ الحلّقات الفرديّة فقط ومتمماتها هي التي تتمتّع بهذه الخصائص؛ وهذا سيبرهن الـ SPGC.

سنبدأ بملاحظات بسيطة عن البيانات الحرجة من الدرجة p، وقد استخدمت بعض هذه الملاحظات سابقًا عند مناقشة مجموعات قطع النجمة (لقد تمَّ نمذجة هذا العرض بالأصل بعد شمويس [1981] Shmoys).

31.1.8. تمهيدية : إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة p، فإنَّه يكون مترابطًا، و $\overline{G}$ يكون حرجًا من الدرجة p، و $\omega(G) \geq 2$، و $\alpha(G) \geq 2$، وأكثر من ذلك، لكلّ $x \in V(G)$، كون $\chi(G\text{-}x)=\omega(G)$، و $\theta(G-x) = \alpha(G)$.

الإثبات: يكون G بيانا كاملاً إذا وفقط إذا كانت كلّ مركبة من مركباته تشكّل بيانًا كاملاً. ويكون G كاملاً إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ كاملاً، الإضافة إلى أنّ العصب ومتمّماتها تكون كاملةً. وأخيرًا، لاحظنا عند إثبات النظرية 29.1.8 أنّ حذف مجموعة مستقلة من بيان حرج من الدرجة p لا ينقص عدد العصب. وبما أنّ $G-x$ كامل، فسنحصل على $\chi(G-x) = \omega(G-x) = \omega(G)$. إنّ الشرط $\theta(G-x) = \alpha(G)$ هو هذه العبارة لـ $\overline{G}$. ■

تتبع الخواص الدقيقة للبيانات الحرجة من الدرجة P من تعميم لوفاز لنظرية PGT.

32.1.8. نظرية : (Lova'sz [1972b]) يكون البيان G كاملاً إذا وفقط إذا كان $\omega(G[A])\,\alpha(G[A]) \geq |A|$ لكلّ $A \subseteq V(G)$. ■

اقتُرحت الخاصية "$\omega(G[A]\,\alpha(G[A]) \geq |A|$ لكلّ $A \subseteq V(G)$" من قِبَل فولكرسون، ونسميها كمالاً بالنسبة إلى β (**β - perfection**). من المتضمن في الكمال بالنسبة إلى α، أو بالنسبة إلى γ أنه إذا استطعنا تلوين G لـ $\omega(G)$ مجموعة مستقرة، فإنَّ إحدى هذهِ المجموعات المستقرة تحوي $n(G)/\omega(G)$ رأسًا على الأقل. ويشتمل عكس ذلك على تعليلات حسابية كالتي أُعطيت لنظرية PGT، إلا أنها أكثر دقةً وكياسةً. وبما أنّ الكمال بالنسبة إلى b لا يتغير بأخذ المتمّمة، فإنَّ النظرية 32.1.8 تعطينا **PGT** مباشرة.

33.1.8. نظرية : إذا كان البيان G حرجًا من الدرجة p، فإنَّ $n(G) = \alpha(G)\,\omega(G) + 1$ وأكثر من ذلك، لكلّ $x \in V(G)$، توجد تجزئة لـ $G-x$ إلى $\omega(G)$ مجموعة مستقرّة من الحجم $\alpha(G)$ وتجزئة إلى $\alpha(G)$ عصبة من الحجم $\omega(G)$.

الإثبات: عندما يكون البيان G حرجًا من الدرجة P، فإنَّ الشرط للكمال بالنسبة إلى b يفشل فقط لمجموعة الرؤوس الكليّة $A = V(G)$. لذا، فلكلّ $x \in V(G)$ نجد أنّ:

$n(G)-1 \leq \alpha(G-x)\,\omega(G-x) = \alpha(G)\,\omega(G) \leq n(G)-1$ لذلك، فإنّ $n(G) = \alpha(G)\,\omega(G) + 1$.

وبما أنّ $\chi(G-x) = \omega(G-x) = \omega(G)$ فيمكننا تغطية $G-x$ بـ $\omega(G)$ مجموعة مستقرّة. وبما أنّ حجم كلّ مجموعة من هذه المجموعات يساوي $\alpha(G)$ على الأكثر، فإنَّ هذه المجموعات تجزّئ الـ $\alpha(G)\,\omega(G)$ رأسًا لـ $G-x$ إلى $\omega(G)$ مجموعة مستقرّة، حجم كلّ منها يساوي $\alpha(G)$. وبالمثل، فإنَّ $\theta(G-x) = \alpha(G-x) = \alpha(G)$ يعطينا تجزئة لـ $V(G-x)$ إلى $\alpha(G)$ عصبة حجم كلّ منها يساوي $\omega(G)$. ■

إنّ دراسة البيانات الحرجة من الدرجة P قد استفادت من توسيع صفّ هذه البيانات ليشمل بيانات أخرى تحقق الخواص الموجودة في النظرية 33.1.8. إنّ الخواص البنيوية للصّف الأكبر تكون مفيدة عند إثبات الـ SPGC لصفوف خاصة من البيانات. لقد تمَّ اقتراح العديد من التعريفات لتوسيع صفّ البيانات الحرجة من الدرجة P، ولكن تبيّن أنّ هذه التعريفات ما هي إلا توصيفات بديلة للصفّ نفسه. لقد ظهر التعريف الذي نستخدمه في (Bland – Huang – Trotter [1979]).

34.1.8. تعريف: للأعداد الصحيحة $a,w \geq 2$، نقول: إنّ البيان G قابل للتجزئة من نوع $a\,,\,w$ إذا وُجد له $aw+1$ رأسًا، ولكلّ رأس $x \in V(G)$ يكون للبيان الجزئي $G-x$ تجزئة إلى a عصبة من الحجم w، وتجزئة إلى w مجموعة مستقرة من الحجم a.

35.1.8.نظرية: (Buckingham – Golumbic [1983]) يكون البيان G الذي رتبته $aw + 1$ قابلاً للتجزئة من نوع a, w إذا وفقط إذا كان $\chi(G - x) = w$ و $\theta(G\text{-}x)=a$ لكلّ $x \in V(G)$، وأكثر من ذلك، $\alpha(G)=a$ و $\omega(G)= w$ لمثل هذه البيانات، وأنّ المتباينات $\chi(G\text{-}x) \le w$ ، و $\theta(G - x) \le a$ تكفي للحصول على التّجزئة.

الإثبات: افترض أنّ G قابل للتجزئة. بما أنّ $G - x$ قابل للتلوين بـ w لونًا، وله عصبة من الدرجة w، فإنّ $\chi(G - x) = w = \omega(G - x)$. وبما أنّ $a \ge 2$، فإنّ G ليس بيانًا تامًّا. إنّ حذف رأس x خارج عصبة أكبر Q في G يعطي أنّ $\omega(G) = \omega(G - x) = w$. إنّ التعليل نفسه على $\overline{G}$ يعطي النتيجة لـ a.

وبالعكس، افترض أنّ $\chi(G - x) \le w$، و $\theta(G - x) \le a$ لكلّ x في $V(G)$. تعطي المتباينة الأخيرة أنّ $\alpha(H) \le a$. لذا، فإنّ تلوينًا أمثل لـ $G - x$ يستخدم w مجموعة مستقرة على الأكثر، حجم كلّ منها يساوي a على الأكثر. وبما أنّ $n(G - x) = aw$، فإنّ مثل هذا التّلوين يجزّئ $V(G - x)$ إلى w مجموعة مستقرّة من الحجم a. وبالمثل، فإنّ غطاء لـ $G - x$ بـ a عصبة يعطي تجزئة العصب المنشودة. ■

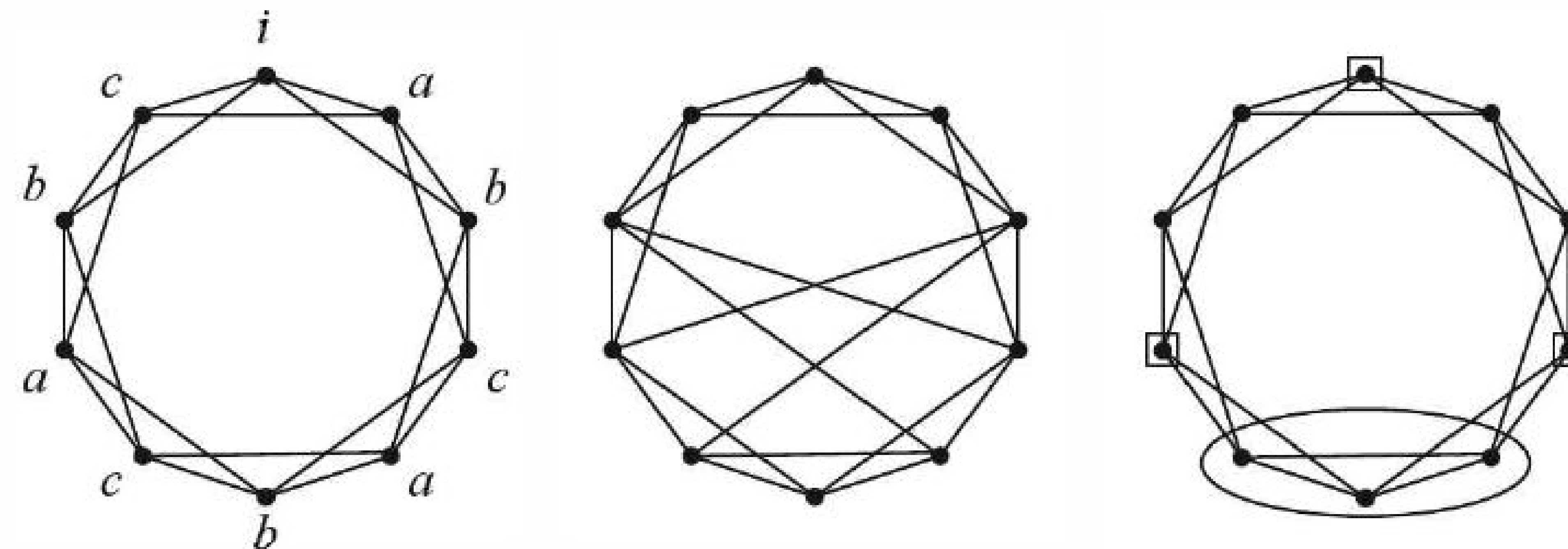
من المبرهنتين 33.1.8 و35.1.8. نعلم أنّ كلّ بيان حرجٍ من الدرجة p يكون قابلاً للتجزئة، وكلّ بيان قابل للتجزئة يكون بيانًا ناقصًا، زِدْ على ذلك، فإنّ G يكون قابلاً للتجزئة من نوع a, w إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ قابلاً للتجزئة من نوع a, w.

36.1.8. مثال: قوى (أسس) الحلقات. يمكن بناء البيان C_n^d بوضع n رأسًا على دائرة، وجعل كلّ رأس يجاور أقرب d رأسًا له في كلا الاتجاهين على الدائرة. عندما $d = 1$، فإنّ $C_n^d = C_n$.

نتعامل مع الرؤوس على أنها أعداد صحيحة بمقياس n، مرتبة بطريقة معينة. إنّ البيان C_{10}^2 الموضّح عن اليسار أدناه ليس بيانًا كاملاً وليس بيانًا حرجًا من الدرجة p أيضا (الرؤوس: 0، 2، 4، 6، 8 تولّد C_5، ولكن C_{10}^2 قابل للتجزئة من نوع 3، 3. وعندما نزيل i، فإنّ التجزئة الوحيدة للرؤوس التسعة المتبقية إلى ثلاثة مثلثات، هي: $\{(i + 1 , i + 2, i + 3)$ و $(i + 4, i + 5, i + 6)$ و $(i + 7, i + 8, i + 9)\}$.

والتجزئة الوحيدة إلى ثلاث مجموعات مستقرّة هي: $\{(i + 1, i + 4, i + 7)$، و$(i +2, i + 5, i + 8)$ و $(i + 3, i + 6, i + 9)\}$.

يكون C_{aw+1}^{w-1} دائمًا قابلاً للتجزئة من نوع a, w. إنّ كلّ w رأسًا متتابعًا في $G - x$ تشكّل عصبة، ويشكّل كلّ a رأسًا مجموعة مستقرة بحيث تساوي المسافة بين أيّ اثنين منهما w. إنّ إثبات C_{aw+1}^{w-1} يكون حرجًا من الدرجة P إذا وفقط إذا كان $w = 2$، أو $a = 2$ يختزل الـ $SPGC$ في عبارة: إن البيانات الحرجة من الدرجة p جميعها تكون قوى حلقات. ■



37.1.8. مثال: بيانات أخرى قابلة للتجزئة. تظهر البيانات الأخرى القابلة للتجزئة عن طريق إضافة أضلاع غير مهمة إلى البيان C_{aw+1}^{w-1}. في C_{10}^2. ونستطيع إضافة أيّ قطرٍ دون تغيير مجموعة العصب الكبرى أو مجموعة المجموعات المستقرة الكبرى. لذا، فإنّ البيان الناتج ما زال قابلاً للتجزئة. سنرى أنّ الـ SPGC تتبع إذا حصلنا

على البيانات القابلة للتجزئة جميعها من قوى حلقات عن طريق إضافة أضلاع غير مهمة من هذا النوع.

على الرّغم من ذلك، توجد بيانات أخرى قابلة للتجزئة، مثل البيان الموجود في وسط الشكل أعلاه. (Chva'tal – Graham – Perold – Whitesides [1979], Huang [1976]). ينتمي كلّ ضلع في هذا البيان إلى عصبة عظمى، ولكن يوجد له ضلعان أكثر من C_{10}^{2}. إنّ التجزئات تبرهن أنّ تجزئة هذا البيان تختلف عن تجزئة C_{10}^{2} (التمرين 42). ■

38.1.8. مثال: خواص إضافية للبيان C_{aw+1}^{w-1}. يوجد للبيان C_{aw+1}^{w-1} بالضبط n عصبة كبرى، كلّ منها يستخدم w رأسًا متتابعًا على الحلقة. وكلّ رأس يقع في w عصبة متتابعة من الدرجة w. وكذلك يوجد n مجموعة مستقرة كبرى تمامًا لكلّ منها $a - 1$ فجوة بطول w، وفجوة واحدة طولها $w + 1$ بين رؤوسها المتتابعة. يوجد للمجموعة المستقرة الكبرى التي تحوي x a مكانٌ للفجوة الكبرى. لذا، فإنَّ كلّ رأس يقع في a من المجموعات المستقرة الكبرى.

أخيرًا، يمكن للعصبة من الدرجة w أنْ تتفادى مجموعة مستقرة كبرى فقط من خلال وجودها في الفجوة التي طولها $w + 1$ (كما يظهر في المثال 37.1.8 على الصفحة السابقة). وبناءً على هذا، توجد مزاوجة $\{(Q_i , S_i)\}$ بين المجموعات المستقرة الكبرى والعصب الكبرى بحيث إنّ $Q_i \cap S_j = \emptyset$ إذا وفقط إذا كان $i = j$. ■

تشمل هذه الخواص الإضافية التوصيف الآتي: إنّ التعليلات تعود إلى بادبيرج (Padberg [1974])، الذي استخدمها في إعطاء وصف للبيانات الكاملة بوصفها كثيرات سطوح. لاحظ هنا أنّ الاستنتاجات التّوافقيّة (التّركيبيّة) تتبع من خواص المصفوفات في الجبر الخطّيّ، وقد ظهرت بعض التّوصيفات الأخرى للبيانات القابلة للتجزئة في (Bland – Huang–Trotter [1979]) وفي (Golumbic [1980, p 58 – 62]) وفي (Tuck-er [1977]) وفي (Chva'tal-Graham-perlod-whitesides [1979]) وفي (Buccigham [1980]).

39.1.8. نظرية : يكون البيان G الذي رتبته $n = aw + 1$ قابلاً للتجزئة من النوع a,w إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1) $\alpha (G) = a$، و $\omega (G) = w$، وكلّ رأس في G ينتمي بالضبط إلى w عصبة من الحجم w ولـ a مجموعة مستقرة من الحجم a.

2) يوجد لـ G بالضبط n عصبة كبرى $\{Q_i\}$، و n مجموعة مستقرة كبرى $\{S_j\}$، بحيث إنّ $Q_i \cap S_j = \emptyset$ إذا وفقط إذا كان $i = j$ (Q_i و S_j رفيقتان (**mates**)).

الإثبات: الضرورة، لقد برهنّا أنّ $\chi (G-x) = w = \omega (G)$، وأنّ $\theta (G-x) = a = a (G)$ لكلّ $\chi \in V(G)$. اختر عصبة Q حجمها يساوي w. لكلّ $x \in Q$، يوجد لـ $G - x$ تجزئة إلى a عصبة من الحجم w.

إن Q مع هذه الـ w تجزئة تشكل قائمة $n = aw + 1$ من العصب العظمى $Q_1 , \dots , Q_n$. ويظهر كلّ رأس خارج Q في عصبة واحدة في كلّ تجزئة. وكلّ رأس في Q يظهر في Q، ويظهر مرّة واحدة في $w - 1$ تجزئة. لذا، فإنَّ كلّ رأس يظهر في w عصبة بالضبط في هذه القائمة.

لكلّ Q_i، نحصل على مجموعة مستقرة كبرى S_i منفصلة عن Q_i. اختر $x \in Q_i$. إنّ الـ w من المجموعات المستقرة الكبرى التي تجزّئ $V(G - x)$ يمكن أنْ تقطع Q_i فقط عند الـ $w - 1$ رأسًا المختلفة عن x. لذا، فإنَّ إحدى هذه المجموعات المستقرّة لا تقطع Q_i، ولتكن المجموعة S_i. سنبرهن أنّ هاتين القائمتين تحويان العصب والمجموعات المستقلة جميعها، ولهما خواص التقاطع المنشودة.

افترض أنّ A مصفوفة الوقوع التي فيها $a_{i,j} = 1$ كان $x_j \in Q_i$ و $a_{i,j} = 0$ بخلاف ذلك. افترض أنّ B هي المصفوفة التي بها $b_{i,j} = 1$ إذا كان $x_j \in S_i$ و $b_{i,j} = 0$ بخلاف ذلك. المدخلة رقم i, j في المصفوفة $A\,B^T$ تساوي حاصل ضرب صفّ i من A في صف j من B والتي تساوي $|Q_i \cap S_j|$. بإثبات أنّ $A\,B^T = J - I$، حيث J هي مصفوفة الواحدات كلّها، نحصل على أنّ $Q_i \cap S_j \neq \emptyset$ إذا وفقط إذا كان $i \neq j$. وبما أنّ $J - I$ مصفوفة غير منفردة، فهذا يضمن أنّ A و B مصفوفتان غير منفردتين أيضًا. ونعلم أنّ للمصفوفات اللا منفردة صفوفًا مختلفة، وبذلك فإنَّ $Q_1, \ldots Q_n$ و $S_1, \ldots S_n$ تكون مختلفة.

من البناء، $|Q_i \cap S_i| = 0$. بما أنّ العصب والمجموعات المستقرّة تتقاطع مرة واحدة على الأكثر، فلإثبات أنّ $A\,B^T = J - I$ يلزمنا فقط برهنة أنّ مجموع عناصر كلّ عمود من $A\,B^T$ يساوي $n - 1$. وبالضرب في متجه الصفّ $\mathbf{1}_n^T$ عن اليسار، فإنَّنا نحصل هذه المجاميع. لقد بنينا A بحيث تحوي كلّ عمود w من الواحدات.

(لأنَّ كلّ رأس يظهر في w عصبة في القائمة) وبنينا B بحيث تحوي كلّ صفٍّ a من الواحدات (لأنَّ حجم كلّ مجموعة مستقرة يساوي a). ولذلك نجد أنّ:

$$\mathbf{1}_n^T\ (A\,B^T) = (\mathbf{1}_n^T\ A)B^T = w\mathbf{1}_n^T\ B^T = wa\mathbf{1}_n\ = (n-1)\mathbf{1}_n^T$$

ولبرهنة أنّ G لا يحوي عُصبًا كبرى أخرى، نجعل q متجهَ الوقوع لعصبة كبرى Q. ونبرهن أنّ q يجب أنْ يكون صفًّا في A. وبما أنّ A مصفوفة غير منفردة، فإنَّ صفوفها تولد $\mathbb{R}^n$، ونستطيع أنْ نكتب q كتركيب خطّيّ: $q = tA$. ولحلّ هذه المعادلة بالنسبة إلى t فإنَّنا بحاجة إلى A^{-1}. وبما أنّ مجموع كلّ صفّ في A يساوي ω، فسنحصل على أنّ: $A\,(\omega^{-1}J - B^T) = \omega^{-1}\,\omega J - (J - I) = I$، وبذلك فإنَّ $A^{-1} = \omega^{-1}J - B^T$ وبناءً عليه فإنَّ:

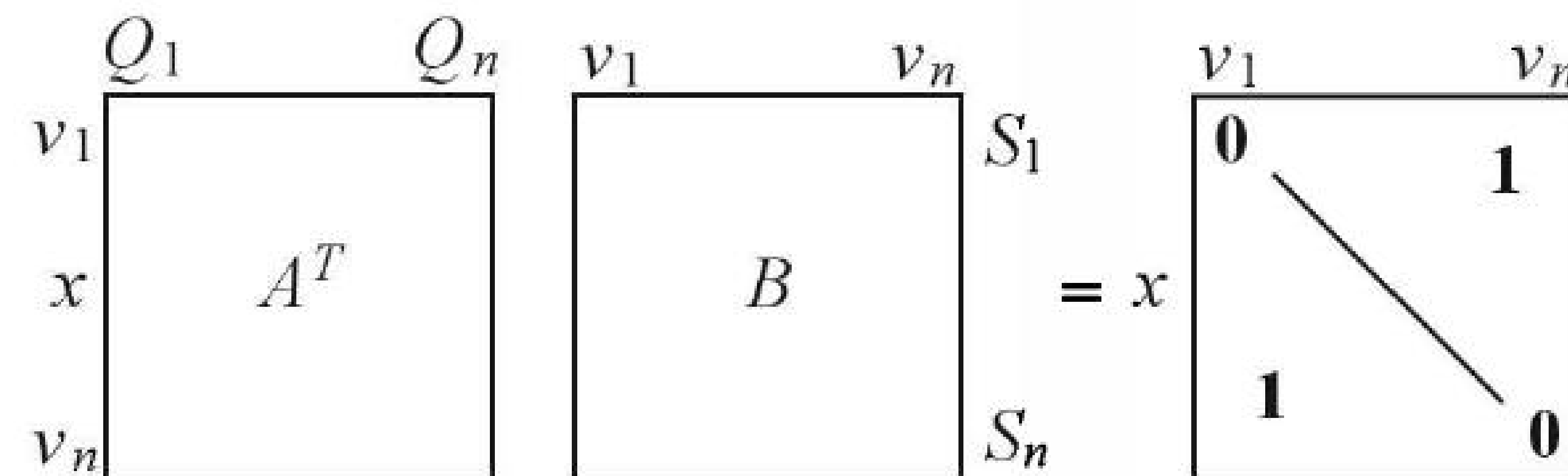
$$t = qA^{-1} = q\,(\omega^{-1}J - B^T) = \omega^{-1}qJ - qB^T = \omega^{-1}\omega\,\boldsymbol{I}^T{}_n - qB^T$$

العمود رقم i في B^T هو متجه الوقوع لـ S_i. لذا، فإنَّ الإحداثيّ i لـ $q\,B^T$ يساوي $|Q \cap S_i|$ والذي هو إما 0 أو 1. إذن، t متجه إحداثيّاه 0 و 1، أمّا q، فهو مجموع صفوف A. بما أنّ جمع q يساوي ω، عندها يمكن استخدام صفّ واحد فقط. لذا، فإنَّ q صفٌّ من صفوف A وأنّ $Q_1\ \ldots\ Q_n$، فقط هي العُصب العظمى. وتطبيق التعليل نفسه على $\overline{G}$ يثبت أنه يوجد للبيان G بالضبط n مجموعة مستقرة عظمى بحيث يظهر كلّ رأس في a من هذه المجموعات.

الكفاية: من النظرية 35.1.8 يلزمنا فقط برهنة أنّ $\chi\,(G - x) \leq w$، و $\theta\,(G - x) \leq a$ لكلّ $x \in V(G)$.
افترض أنّ العصب والمجموعات المستقرّة معطاة كما هو مضمون بالشّرط الثّاني، وعرِّفت مصفوفتا الوقوع A و B كما في الأعلى. نعلم من الشّرط رقم (1) أنّ كلّ عمود من B يحوي a من الواحدات، ولذلك فإنَّ $J\,B = a\,J = B\,J$. إنّ شرط التقاطع (2) يعطينا أنّ $A\,B^T = J - I$. إنّ هذه المصفوفة غير منفردة، لذا فإنَّ B غير منفردة وأنّ:

$$A^T\,B = B^{-1}\,B\,A^T B = B^{-1}\,(J - I)\,B = B^{-1}\,B\,J - I = J - I$$

في حاصل الضّرب $A^T\,B = J - I$، والصّفّ الذي يرتبط بالرّأس x في $V(G)$ ينصّ على أنّ $V(G - x)$ تُغطّى برفاق الـ w عصبة الكبرى التي تحوي x (موضّح في الرسم أدناه). لذا، فإنَّ $\chi(G - x) \leq w$. وبالمثل، فإنَّ العمود المرتبط بـ x ينصّ على أنّ $V(G - x)$ تُغطّى برفاق الـ a مجموعة المستقرة الكبرى التي تحوي x. لذا، فإنَّ $\theta\,(G - x) \leq a$. ■



40.1.8. نتيجة : إذا كان G قابلًا للتجزئة من نوع a, w، وكان $w = 2$، فإنَّ $G = G_{2a+1}$ ، إذا كان $a = 2$، فإنَّ $G = \overline{C}_{2\omega+1}$. لذا، فإنَّ الـ SPGC تختزل لإثبات أنّ $\omega = 2$، أو $\alpha = 2$ وذلك للبيانات الحرجة من الدرجة p.

الإثبات: إذا كان $\omega = 2$، فإنَّ كلّ رأس ينتمي إلى عصبتين من الحجم 2. لذا، فإنَّ G منتظم من الدرجة 2. وإضافة إلى ذلك، فإنَّ G مترابط وله رتبة فرديّة $(2\alpha + 1)$. لذا، فإنَّ G حلقة فرديّة. لـ $a = 2$، افترض $\overline{G}$. ■

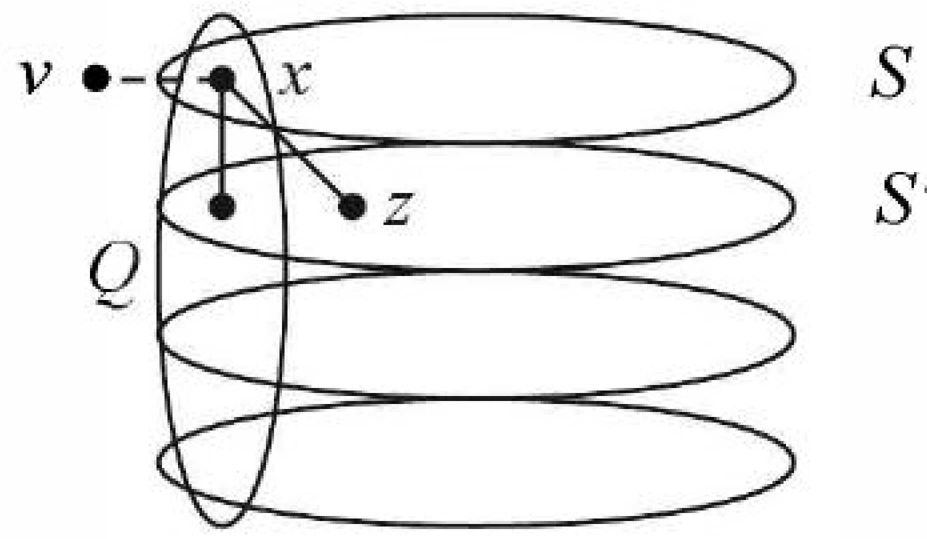
من الآن فصاعدًا، سنستخدم w، $\omega(G)$، ω بالتبادل، و a، $\alpha(G)$، و α بالتبادل وذلك للبيانات القابلة للتجزئة.

41.1.8. نظرية : (Tucker [1977]) افترض أنّ x رأس في بيان G قابل للتجزئة. يوجد للبيان الجزئي $G - x$ تلوين وحيد أصغر رُمز إليه بالرمز $X(G - x)$، ويتألف من رفقاء العُصَب العظمى التي تحوي x. وبالمثل، يوجد لـ $G - x$ غطاء عُصَب وحيد أصغر رُمز إليه بالرمز $(X(G - x))$، ويتألف من رفقاء المجموعات المستقرة العظمى التي تحوي x.

الإثبات: بما أنّ G قابل للتجزئة من نوع a, w، فإنَّ $G - x$ قابل للتلوين بـ w لونًا مستخدمًا w مجموعة مستقرة من الحجم a. إنّ كلّ عصبة من الدرجة w تفتقد صفًا لونيًا؛ لأنَّ للعصبة w - 1 رأسًا في $G - x$. لذا، يوجد للعصب من الدرجة w التي تحوي x كلّها رفقاء بوصفها صفوفًا لونيّة في التّلوين. وبالتحديد، يوجد w من هذه العصب تمامًا. لذا، فإنَّ التّلوين وحيد. إنّ العبارة الأخرى تتبع من أخذ المتمِّمة. ■

42.1.8. نظرية : (Buchkingham – Golumbic [1983]). إذا كان x رأسًا في بيان G قابل للتجزئة من نوع ω، α، فإنَّ $2\omega - 2 \leq d(x) \leq n - 2\alpha + 1$.

الإثبات: اختر رأسًا $x \nleftrightarrow v$ (انظر التّوضيح أدناه). اجعل S مجموعة مستقرة في $X(G - v)$ بحيث إن S تحوي x، واجعل S' مجموعة مستقرة أخرى في $X(G - v)$. اختر $z \in N(x) \cap S_2$. توجد عصبة Q في $\Theta(G - z)$ تحوي x. بما أنّ $x \nleftrightarrow v$، فإنّ لـ Q رأسًا في كلّ مجموعة مستقرة لـ $X(G - v)$، وهذا يعطي جارًا ثانيًا لـ x في S'. لذا، يوجد لـ x جاران على الأقل في كلّ مجموعة مستقرّة من الـ $\omega - 1$ مجموعة المحتواة في $X(G - v)$، وهذا يعطينا أنّ $d(x) \geq 2\omega - 2$. يعطي التعليل نفسه على $\overline{G}$ أنّ: $n - 1 - d(x) = |N_{\overline{G}}(x)| \geq 2\alpha - 2$. ■



إنّ الحدود على درجات الرّؤوس في البيانات القابلة للتجزئة من نوع ω, α حادّة، حيث تتحقّق بالمساواة لقوى الحلقات.

43.1.8. تعريف : نقول: إنّ ضلعًا في البيان يكون ضلعًا حرجًا إذا كان حذفه يؤدي إلى زيادة عدد الاستقلال. يُسمّى الرّأسان غير المتجاورين متحارجين **(co – critical)** إذا كانت إضافة ضلع يربط بينهما تؤدي إلى زيادة عدد العصب. إن التوصيف المميّز للأضلاع الحرجة في البيانات القابلة للتجزئة موجود ضمنيًّا في عمل العديد من الباحثين.

44.1.8. نظرية : إذا كان xy ضلعًا في بيانٍ قابلٍ للتجزئة G، فإنَّ العبارات الآتية متكافئة:

a) xy ضلع حرج.

b) $S \cup \{x\} \in X\,(G-y)$

c) xy ينتمي إلى $\omega - 1$ عصبة عظمى.

الإثبات: $B \Leftarrow A$. لاحظ أنّ $S \cup \{x, y\}$ هي مجموعة مستقرة عظمى حجمها $\alpha + 1$ في $G - xy$.

$A \Rightarrow C$. إذا كان xy حرجًا، فتوجد مجموعة S، بحيث إنّ $S \cup \{x\}$ و $S \cup \{y\}$ عبارة عن مجموعات مستقرّة عظمى في G. لذا، فإنَّ كلّ عصبة عظمى تحوي x ولا تحوي y تكون منفصلة عن $S \cup \{y\}$.

بما أنّه يوجد ω عصبة عظمى تحوي x، وعصبة عظمى واحدة فقط لا تتقاطع مع $S \cup \{y\}$، فإنَّ الـ $\omega - 1$ عصبة العظمى المتبقية والحاوية لـ x يجب أنْ تحويَ y أيضًا.

$C \Longrightarrow B$. إنّ المجموعات المستقرّة في التّلوين الوحيد لـ $G - x$ هي رفقاء العصب التي تحوي x. وبما أنّ xy موجود في $w - 1$ عصبة عظمى، فإنَّ رفقاء هذه الـ $\omega - 1$ عصبة تنتمي إلى كلّ من $X\,(G-x)$ و$X\,(G-y)$، وهذا يترك $\alpha + 1$ رأسًا فقط في البيان مؤلفة من الرؤوسx وy ومجموعة مستقرة S، بحيث إنّ $S \cup \{x\} \in X\,(G-y)$ و $S \cup \{y\} \in X\,(G-x)$ ■

45.1.8. نتيجة: افترض أنّ G بيان قابل للتجزئة. إذا كان xy ضلعًا لا يظهر في أيّ عصبة عظمى، فإنَّ $G - xy$ يكون قابلاً للتجزئة. وإذا كان x و y زوجًا غير متجاور لا يظهر في أيّ مجموعة مستقرّة عظمى، فإنَّ $G + xy$ يكون قابلاً للتجزئة.

الإثبات: من خواص المتمّمة (التتام)، فإنَّنا نحتاج إلى إثبات العبارة الأولى فقط. إذا حذفنا ضلعًا لا يظهر في أيّ عصبة عظمى، فباستخدام النظرية 44.1.8 نعلم أنّ هذا الضلع ليس ضلعًا حرجًا، ونحصل على أنّ $\omega\,(G-xy) = \omega\,(G)$ و$\alpha(G-xy) = \alpha(G)$. وبما أننا لم نُدمِّر أيّ عصبة عظمى ولم نُحدِث أيّ مجموعة مستقرة أكبر، فإنه يمكننا استخدام التّلوين الأمثل، وتجزئة العصب للبيان $G - u$ لاستنتاج أنّ$X\,(G-xy-u) \leq \omega$، وأنّ $\theta\,(G-xy-u) \leq \alpha$. ولهذا، فإنَّ $G - xy$ قابل للتجزئة باستخدام النظرية 35.1.8. ■

يقترح النقاش الذي ذُكِرَ في المثال 37.1.8 أنّ الأضلاع التي لا تظهر في أيّ عصبة عظمى أضلاع غير مهمة، وتؤكد النتيجة 45.1.8 لنا أن هذه الأضلاع هي "خردة" ولا يوجد أيّ خردة لقوى الحلقات القابلة للتجزئة.

مُخَمَّنَة البيان الكامل القوي (The Strong Perfect Graphs Conjecture)

كنا نبرهن خواص البيانات القابلة للتجزئة معتمدين طريقة الاقتراب من "أعلى إلى أسفل" لنظرية الـSPGC، محاولين إيجاد خواص كافية لحذف البيانات الحرجة جميعها من الدرجة P ما عدا الحلقات ومتمّماتها. وتعني هذه الطريقة إثبات أنّ الـ SPGC تتحقق لصفوف أكبر وأكبر من البيانات حتى تشمل هذه البيانات جميعها.

46.1.8. تعريف: الفجوة الفرديّة أو عكسها في البيان G بيان جزئيّ مستحدث من G بحيث يكون C_{2k+1} أو $\overline{C}_{2k+1}$ (لبعض $k \geq 2$) على الترتيب، إنّ البيان الذي يخلو من فجوة فرديّة أو عكسها يُسمّى بيان بيرج (Berge).

إحدى الطرق لإثبات أنّ الصّفّ G يحقق الـ SPGC، هي برهنة أنّ كلّ بيان بيرج في G يكون كاملاً، ويحقّق الصّفّ الوراثيّ G الـ SPGC إذا كانت الحلقات الفرديّة ومتمّماتها هي فقط البيانات الحرجة من الدرجة P في G.

تتحقق الـ SPGC لكلٍّ من البيانات السويّة (Tucker [1973])، و الطّاريّة (التي تقع على طارة دون تقاطعات) (Grinstead [1981])، وللبيانات التي لها (Grinstead [1978]) $\Delta\,(G) \leq 6$، أو التي لها

$\omega(G) \le 3$ (Tucker [1977])، فضلًا عن أنها تتحقق لصفوف مختلفة من البيانات المعرفة من خلال منع بعض البيانات الجزئية المستحدثة المثبتة (Meyniel [1976], Tucker [1977], Parthasarathy – Ravindra [1976, 1979], Chva'tal – shihi [1988], Olariu [1989], Sun [1991]).

سنأخذ في الحسبان ثلاث عائلات.

47.1.8. تعريف: نعرِّف بيان أقواس الدائرة على أنه بيان التقاطع لعائلة من بيانات الدائرة، أمّا بيان الدائرة، فهو بيان التقاطع لعائلة من أوتار الدائرة. ويُسمّى كلّ بيان خالٍ من $K_{1,3}$ بيانًا خاليًا من المخالب (انظر التعريف 22.3.1).

كلّ حلقة تكون بيانَ دائرة وبيانَ أقواس دائرة، إلا أنّ أيًّا من هذه الصّفوف غير محتوى في الآخر (التمرين 47).

وإحدى الطرق لإثبات الـ SPGC لصفّ G هي برهنة أنّ كلّ بيان قابل للتجزئة في G ينتمي إلى صفّ H تتحقق فيه الـ SPGC. ونستخدم العائلة $\{C_n^d\}$ للقيام بهذا الدور.

48.1.8. نظرية: (Chva'tal [1976]). قوى الحلقات تحقّق الـ SPGC. وبالتحديد، فإنَّ البيان C_{aw+1}^{w-1} يكون حرجًا من الدرجة p إذا وفقط إذا كانت $w = 2$، أو $a = 2$، ويكون البيانُ في الحالتين فجوةً فرديّة، أو عكسَ فجوةٍ فرديّة.

الإثبات: يكفي افتراض البيانات القابلة للتجزئة $G = C_{aw+1}^{w-1}$. يُعَدُّ هذا بيانًا حرجًا من الدرجة p عندما $a = 2$ ، أو $w = 2$. لذا، يمكن افتراض أنّ $a, w > 2$، لتكن الرّؤوس هي: $\{v_o, \dots, v_{aw}\}$، واجعل $S = \{v_{iw}+1, v_{(i+1)w}: 0 \le i \le a-1\}$. إنّ البيان الجزئي $G[S]$ هو حلقة، وبما أنّ أدلة الرؤوس المتتابعة في S تكون مفصولة بعضها عن بعض، إما بواحد أو بـ $w-1$ (ما عدا الرّأسين v_{aw} و v_1 المفصولين بـ 2)، فإنَّ أدلة الرؤوس غير المتتابعة تختلف على الأقل بـ w.

وللحصول على C_{2a-1} بوصفها بيانًا جزئيًّا فعليًّا مستحدثًا، فإنّنا نستبدل:
$\{v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w\}$ بـ $\{v_{(a-1)(w+2)}\, v_0, v_{w-1}\}$ في S.

وبذلك نستنتج أنّ G ليس حرجًا من الدرجة P. ■

49.1.8. نظرية: (Tucker [1975]). تتحقّق الـ SPGC لبيانات أقواس الدائرة.

الإثبات: تذكر أنّ $N(v) \cup \{v\}$ تعريف الجوار المغلق لـ v (**التعريف** 29.1.3). عندما يكون G بيانًا قابلاً للتجزئة ورؤوسه المختلفة x و y، فإنّنا ندعي أنّ $N[x] \nsubseteq N[y]$. خذ في الحسبان العصبة Q التي تحوي x في $\Theta(G-y)$، لدينا $Q \subseteq N[x]$. إذا كان $N[y]$ يحوي $N[x]$، فإنَّ $Q \cup \{y\}$ عصبة من الحجم $\omega(G)+1$.

الآن، إذا كان G بيان أقواس دائرة قابلاً للتجزئة، فيكفي برهنة أنّ $G = C_n^{\omega(G)-1}$؛ لأنَّ الـ SPGC تتحقق لقوى الحلقات (النظرية 48.1.8). افترض تمثيل أقواس دائرية تحدّد القوس A_x لـ $x \in V$. بما أنّ $N[y]$ لا يمكن أنْ يحوي $N[x]$، فإنَّ القوس A_x لا يمكن أنْ يقع ضمن قوس آخر A_y في هذا التمثيل. وإذا لم يوجد أيّ قوس يحوي قوسًا آخر، فإنَّ كلّ قوس يقطع A_x يحوي على الأقل نقطة طرفية واحدة لـ A_x. بما أنّ الرؤوس المرتبطة بالأقواس التي تحوي نقطة واحدة تستحدث عصبة، فيوجد على الأكثر $\omega - 1$ قوسًا آخر تحوي كلّ نقطة طرفية لـ A_x. تتحقق المساواة (ولا يوجد أيّ قوس آخر يحوي طرفي A_x) لأنَّ النظرية 42.1.8 تتطلب أنّ $\delta(G) \ge 2\omega - 2$.

بدءًا من نقطة معينة p على الدائرة، اجعل v_i تمثّل الرّأس المتمثّل بالقوس رقم i الذي نصادفه في أثناء حركتنا مع اتجاه عقارب الساعة بدءًا من P. وبما أنّ كلّ قوس يقطع بالضبط $\omega - 1$ قوسًا آخر عند كلّ نقطة طرفية، فإنَّ v_i تجاور v_{i+1} , ... , $v_{i+\omega-1}$ (جمع بمقياس n) لكلّ i. لذا فإنَّ $G = C_n^{\omega-1}$. ■

إن الإثبات الأصلي لنظرية الـ SPGC الخاص بالبيانات الخالية من المخالب ([Parthasarathy – Ravindra [1976]) كان معقّدًا وصعبًا جدًا. إن الدراسات للبيانات الحرجة من الدرجة p أسهمت في تقصير هذا الإثبات، إضافة إلى ذلك فقد أسهمت أيضًا في تقصير إثبات النظرية الآتية الذي سنطبّقه.

50.1.8. نظرية: ([Giles – Trotter - Tucker [1984]). إذا وُجد للبيان G القابل للتجزئة حلقة مؤلّفة من أضلاع حرجة، فإنَّ البيان الجزئيّ G' الذي نحصل عليه بحذف الأضلاع التي لا تنتمي إلى أيّ عصبة عظمى هو $C_n^{\omega-1}$.

الإثبات: ([Hartman [1995]) افترض أنّ G قابل للتجزئة من نوع a_1 w. إنّ حذف الأضلاع لا يدمّر المجموعات المستقرة، بالإضافة إلى أنَّ حذف الأضلاع من أيّ عصبة غير عظمى لا يدمّر أيّ عصبة عظمى. لذا، فإنَّ التّلوين وتغطية العصب لـ $G-x$ يعطينا أنّ $\chi(G'-x) \leq w$ وأنّ $\theta(G'-x) \leq a$ (بصرف النظر عما إذا كانت $\alpha(G') > \alpha(G)$). ومن النظرية 35.1.8، نجد أنّ G' قابل للتجزئة من نوع a, w. كذلك فإنَّ أعظمية العصب لـ $G' - x$ لقيم x المختلفة يجبر G' ليكون مترابطًا.

فيما يأتي سنبرهن أنه إذا وُجد لـ G مسارٌ من u إلى v يتألف من k ضلعًا حرجًا، فإنَّ u وv ينتميان إلى $\omega - k$ عصبة عظمى مشتركة على الأقل. نستخدم الاستقراء على k. حيث إنّ النظرية 44.1.8 تعطينا الخطوة الأساس $k = 1$. لـ $k > 1$، إذا كان y الرّأس قبل v على هذا المسار، فإنَّ فرض الاستقراء يضع u و y على $\omega - k + 1$ عصبة عظمى مشتركة. وبما أنّ y ينتمي إلى ω عصبة عظمى بالضبط (باستخدام النظرية 39.1.8)، وأنّ $\omega - 1$ من هذه العصب تحوي v (من النظرية 44.1.8)، فإنَّ واحدة على الأكثر من الـ $\omega - k + 1$ عصبة التي تحوي u و y يمكن ألا تحوي v. افترض أنّ C حلقة أضلاع حرجة في G. إنّ الأضلاع الحرجة تنتمي إلى عصبة عظمى. لذا، فإنَّ C تبقى في G'. كما برهنّا أعلاه أنّ أيّ ω رأسًا تشكّل مسارًا في G' تستحدث عصبة عظمى في G'. إذا كان طول C يزيد على ω، فإنَّ هذا يعطي ω عصبة عظمى متتابعة تحوي رأسًا معينًا x في C. ومن النظرية 39.1.8، فإنَّ هذه هي أضلاع G' جميعها التي تقع على x. إذن، تشكّل C مركبة من مركبات G'، وهذا يعبّر عن G' بـ $C_n^{\omega-1}$.

إذا كان طول C يساوي ω على الأكثر، فإنَّ $V(C)$ نفسها تكون عصبة. وإذا كان $x \in V(C)$، فإنَّ رؤوس $C - x$ تنتمي إلى مجموعات مستقرة مختلفة في التّلوين $X\,(G-x)$ المعرَّف في النظرية 41.1.8. افترض أنّ x_0 , ... , x_k هو ترتيب لرؤوس C، وافترض أيضًا أنّ S_1 , ... , S_k هي المجموعات المستقلة في $G - V(C)$ بحيث $Si \cup \{x_i\} \in X\,(G - x_0)$. بما أنّ $x_i\,x_{i+1}$ ضلع حرج، فإنَّ x_i و x_{i+1} ينتميان إلى $\omega - 1$ عصبة عظمى مشتركة (النظرية 44.1.8). لذا، وباستخدام النظرية 41.1.8، فإنَّ التّلوين $X\,(G - x_i)$ والتّلوين $X\,(G - x_{i+1})$ يشتركان في $\omega - 1$ مجموعة مستقرة. إنّ المجموعة المتبقية تختلف فقط من حيث احتواؤها لـ x_i أو x_i+1. لذا، فإنَّ $X\,(G - x_1)$ تحوي $S_i \cup \{x_i\}$ لكلّ $i \geq 2$، وكذلك فهي تحوي $S_1 \cup \{x_0\}$.

وبالاستمرار في هذه التعويضات في أثناء تتبعنا لأضلاع C، نجد أنّ $X\,(G - x_k)$ تحوي $S_i \cup \{x_i\text{-}1\}$ لكلّ $1 \leq i \leq k$. وبأخذ خطوة أخرى للعودة إلى x_0، نجد أنّ $X\,(G - x_0)$ تحوي $S_i \cup \{x_i\text{-}1\}$ لكلّ $2 \leq i \leq k$، وتحوي $S_1 \cup \{x_k\}$، بما أنّ $k \geq 2$ و $\alpha \geq 2$، فإنَّ هذه المجموعات تختلف عن المجموعات التي بدأنا بها في $X\,(G - x_0)$. وبما أنّ التّلوين $X\,(G - x_0)$ وحيد، فنكون قد حصلنا على تناقض. وبذلك، فإنَّ الحالة $n\,(C) \leq \omega$ لا تظهر. ■

51.1.8. نظرية: ([Chva'tal [1976]). إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة p، بحيث إنّ البيان الجزئي المولد G' الذي نحصل عليه بحذف أضلاع G التي لا تنتمي إلى أيّ عصبة عظمى هو قوة حلقة C_n^d، فإنَّ G يكون فجوة فردية أو عكس فجوة فردية (ويساوي G').

الإثبات: البيان الحرج من الدرجة p قابل للتجزئة. إنّ المجموعات المستقرة والعصب العظمى في G تكون مجموعات مستقرة وعصبًا في G'، ومن النظرية 35.1.8، نستنتج ثانيةً أنّ G' قابل للتجزئة وفيه $\alpha(G') = \alpha(G) = a$، و $\omega(G') = \omega(G) = w$. لذا، فإنَّ $G' = C^{w-1}_{aw+1}$.

نعيّن أدلّة للرؤوس بحيث تتألف العصب العظمى لـ G' (ولـ G) من w رأسًا متتابعة حلقيًا، وأنّ المجموعات العظمى المستقرة لها الشّكل $\{v_{i+jw}: 1 \leq j \leq a\}$ (حيث أُخذَت الأدلة بمقياس $aw + 1$). وعلى وجه الخصوص، فإنَّ الرؤوس المفصولة بعضها عن بعض بمضاعفات w على الحلقة $v_0, \ldots, v_{aw}$ تكون غير متجاورة في G' وفي كامل البيان G.

إذا كان $G = G'$، فإنَّ النظرية 48.1.8 تعطينا أنّ G فجوة فردية أو عكس فجوة فردية. وإذا كان $G' \neq G$، فإنّ $a, w > 2$؛ لأنّه بخلاف ذلك فإنّ حذف ضلع يزيد عدد المجموعات المستقرة العظمى، أو يقلل عدد العصب العظمى. إذا كان كلٌّ من $a, w \geq 3$، فسنعطي بيانًا جزئيًا مستحدثًا فعليًا H من G (إنّ الحلقة الفرديّة المستحدثة في G' التي تمَّ تحصيلها في النظرية 48.1.8 ربما يكون لها وترٌ في G).

افترض أنّ $S = \{v_{aw}, v_1, v_w, v_{w+2}\} \cup \{v_{iw+1}: 2 \leq i \leq a-1\}$.

وأنّ $T = \{v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w\} \cup \{v_{w+i}: 2 \leq i \leq w-1\}$. إنّ حجم S يساوي $a + 2$ وحجم T يساوي $w + 2$. لذا، فإذا كان كلّ من $a, w \geq 3$ فإنّهما يشتركان في خمسة رؤوس هي $\{v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w, v_{w+2}\}$ تمامًا. إضافة إلى أنَّ S تقطع كلّ عصبة عظمى في G' (وكذلك في G)، و T تقطع كلّ مجموعة مستقرة عظمى في G' (وكذلك في G) (التمرين 49). إجعل $H = G - (S \cup T)$، هذا يعطينا أنّ $\alpha(H) = a - 1$، و $\omega(H) = w - 1$ الآن، يتبع النقصان (عدم الكمال) من

$n(H) \geq n(G) - (a + w + 4 - 5) > (a-1)(w-1)$. ■

52.1.8. نتيجة: (Giles – Trotter - Tucker [1984]). إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة p بحيث إنه لكلّ $v \in V(G)$، يوجد للتلوين الأصغر $X(G - v)$ مجموعتان (على الأقل) بحيث تحوي كلّ منهما جارًا لـ v، فإنَّ G يكون فجوة فردية أو عكس فجوة فردية.

الإثبات: عندما توجد مجموعة في $X(G-v)$ تحوي جارًا واحدًا u لـ v بالضبط، فإنَّ الضلع uv يكون حرجًا. لذا، فإنَّ الفرض يضمن أنّ الدرجة الصغرى للبيان الجزئيّ للأضلاع الحرجة تساوي 2 على الأقل. ولذا، فإنَّ هذا البيان يحوي حلقة. من النظرية 50.1.8، نعلم أنّ البيان الجزئيّ G' الذي نحصل عليه بحذف الأضلاع التي لا تنتمي إلى أيّ عصبة عظمى هو $C^{\omega-1}_n$. ومن النظرية 51.1.8، نجد أنّ G فجوةٌ فردية أو عكس فجوة فردية. ■

53.1.8. نتيجة: (Parthasarathy - Tavindra [1976]). تتحقّق الـ SPGC للبيانات التي تخلو من $K_{1,3}$.

الإثبات: (Giles – Trotter – Tucker [1984]) افترض أنّ G بيان حرج من الدرجة p خالٍ من $K_{1,3}$. لكلّ $\omega \in V(G)$ لاحظ أنّ $N(v)$ يستحدث بيانًا جزئيًا كاملاً ليس له مجموعة مستقرة من الحجم 3، وهذا يعني أنّه يمكن تغطية $N(v)$ بعصبتين، ويعطينا أنّ $d(v) \leq 2\omega(G) - 2$. كلّ واحدة من المجموعات المستقرة التي عددها $\omega(G)$ والموجودة في $X(G-v)$ تحوي جارًا لـ v. وبغير ذلك، فإنَّ إضافة v تحدث مجموعة مستقرة أكبر. وبما أنّ $d(v) \leq 2\omega(G) - 2$، فعلى الأقل هناك مجموعتان من هذه المجموعات تحويان جارًا لـ v. لذا، فإنَّ G يحقق فرضيات النتيجة 52.1.8، وبذلك، فإنَّ G فجوة فردية أو عكس فجوة فردية. ■

لاحظ أنّ النتيجة 53.1.8 أيضًا تعطينا الـ SPGC لبيانات الدائرة (التمرين 50). إنّ الـ SPGC العامة تبقى مسألة دون حلّ، ولكن النتيجة المتوسطة بين الـ SPGC والـ PGT نتيجةٌ معروفة (حيث نحصل عليها مباشرة من الـ $SPGC$ وتعطينا الـ PGT مباشرةً أيضًا). لقد خمَّنَ كفتال (Chva'tal) المُخمَّنَة الآتية: إذا كان لـ G و H مجموعة الرؤوس نفسها، وكان لهما الرّباعيات المرتبة من الرّؤوس التي تستحدث P_4 نفسها أيضًا، فإنَّ G يكون

كاملاً إذا وفقط إذا كان H كاملاً. لقد أثبت ريد (Reed) هذه المُخَمَّنَة "نظرية البيانات الكاملة شبه القوية".

تمارين (Exercises)

1.1.8. (-) احسب $\chi(G)$ و $\omega(G)$ لمتمّمة الحلقة الفرديّة C_{2k+1}.

2.1.8. (-) جد أصغر بيان ناقص، G بحيث إنّ $\chi(G) = \omega(G)$.

3.1.8. (!) تُسمَّى البيانات التي تخلو من P_4 مرافقات البيانات (**Cographs**) والتي ترمز إلى "تصغير المتمّمة" نقول: إنّ البيان هو تصغير متمّمة إذا أمكن تصغير هذا البيان إلى البيان الخالي عن طريق أخذ متمّمات المركبات (مركبات البيان) بالتتابع:

a) أثبت أنّ البيان G يخلو من P_4 إذا وفقط إذا كان تصغير متمّمة.

b) استخدم الفرع (a) ونظرية البيان الكامل لتبرهن أنّ كلّ بيان خالٍ من P_4 يكون كاملاً. (Seinsche [1974])

4.1.8. تحديد العصب. افترض أنّ $G = G_1 \cup G_2$، وأنّ $G_1 \cap G_2$ عصبة، وأنّ G_1 و G_2 بيانات كاملة. أثبت أنّ G يكون بيانًا كاملاً دون استخدام تمهيديّة مجموعة قطع النجمة.

5.1.8. جد بيانًا ناقصًا G له مجموعة قطع النجمة C بحيث إنّ الفلق $-C$ للبيان G هو بيانات كاملة (تعليق: التحديد عند مجموعات قطع النجمة لا يحافظ على الكمال، على الرّغم من عدم وجود مجموعة قطع النجمة للبيانات الحرجة من الدرجة p).

6.1.8. افترض أنّ G حاصل الضرب الكارتيزي لبيانات تامّة. أثبت أنّ $\alpha(G) = \theta(G)$، وبرهن كذلك أن $k_2 \square k_2 \square k_3$ غير كامل.

7.1.8. أثبت أنّ $C_5 \vee k_1$ هو البيان الوحيد الحرج لونيًّا الذي درجته اللونية تساوي 4، وله ستة رؤوس.

8.1.8. (+) أثبت أنّ G حلقة فرديّة إذا وفقط إذا كان $\alpha(G) = (n(G) - 1)/2$ و $\alpha(G - u - v) = \alpha(G)$ لكلّ $u, v \in V(G)$ (Melnikov – vizing [1971], Greenwell [1978]).

9.1.8. افترض أنّ $v_1, \dots, v_n$ ترتيب حذف مبسطيّ للبيان G، وافترض أيضًا أنّ $Q(v_i) = \{v_j \in N(v_i) : j > i\}$. لاحظ أنّ $Q(v_i)$ عصبة جيران v_i عندما يتمّ حذف v_i خلال ترتيب الحذف. افترض أنّ $S = \{y_1, \dots, y_k\}$ هي المجموعة المستقرة التي نحصل عليها "بجشع" من الترتيب $v_1, \dots, v_n$، أيّ: ضع $y_1 = v_1$، أهمل $N(y_1)$ من بقية الترتيب، ثمّ واصل العمل بخطوات مكرّرة. وفي كلّ خطوة، أضف العنصر x الذي ترتيب دليله أقلّ ما يمكن من بين العناصر المتبقية للمجموعة المستقرة، وأهمل ما تبقى من $Q(x)$:

a) أثبت أنّ تطبيق خوارزمية التّلوين الجشع على بناء الترتيب $v_1, \dots, v_n$ يقود إلى الحصول على تلوين أمثل، وأنّ $\omega(G) = 1 + \max \sum_{x \in V(G)} |Q(x)|$ .Fulkerson – Gross [1965].

b) أثبت أنّ S مجموعةٌ مستقرة عظمى، وأنّ المجموعات $\{y_i\} \cup Q\{y_i\}$ تشكّل غطاء عصب أصغر. (Gavril [1972]).

10.1.8. أضف اختبارًا لخوارزمية الـ MCS؛ لتختبر ما إذا كان الترتيبُ الناتج ترتيبَ حذف مبسطيّ (Tarjan – Yannakakis [1984]).

11.1.8. أثبت مباشرة (دون استخدام ترتيب الحذف المبسطيّ) أنّ بيان التقاطع لعائلة أشجار جزئيّة من شجرة معينة لا يحوي حلقة غير وتريّة.

12.1.8. (-) أثبت أنّ كلّ بيان هو بيان التقاطع لعائلة من الأشجار الجزئيّة لبيان معيّن.

13.1.8. أثبت أنه يوجد لكلّ بيان وتريّ تمثّيلُ تقاطع بأشجار جزئية لشجرة مُضيفة درجتها الكبرى تساوي 3.

14.1.8. افترض أنّ Q عصبة عظمى في بيان وتريّ G، لكلّ $x \in V(G)$، أثبت أنه يوجد لـ Q رأسان، بحيث إنّ بُعدَ كلّ منهما عن x يكون مختلفًا عن بُعدِ الآخر. (Voloshin [1982]).

15.1.8. بيانات تقاطع الأشجار الجزئية لبيان. يعرَّف التوجيه الأخوي (الودي) لبيان على أنه توجيه للبيان، بحيث يكون كلّ زوج من الرؤوس التي لها تابع (خلف) مشترك متجاورًا:

a) (−) أثبت أنّ البيان يكون بيانًا وتريًّا إذا وفقط إذا وُجِدَ له توجيه أخوي غير حلقي.

b) (−) احصل على بيان ليس له توجيه أخوي.

c) تُعَدُّ عائلةٌ من الأشجار في بيان معين قابلةً للتجذير إذا أمكن تعيين جذور لهذه الأشجار بحيث يتقاطع زوج منها إذا وفقط إذا انتمى أحد الجذرين على الأقل إلى كلتا الشجرتين الجزئيّتين. أثبت أنّ للبيان G توجيهًا أخويًّا إذا وفقط إذا كان G بيان تقاطع لعائلة أشجار جزئية لبيان معين، وبحيث تكون هذه العائلة قابلة للتجذير.

16.1.8. (!) أثبت أنّ البيان البسيط G يكون غابة إذا وفقط إذا وجد رأس مشترك لكلّ عائلة مسارات متقاطعة زوجًا زوجًا في G. (مساعدة: لإثبات الكفاية؛ استخدم الاستقراء على عدد المسارات في العائلة).

17.1.8. (!) توصيف بيانات الانشقاق بمنع بعض البيانات الجزئية. نقول: إنّ البيان بيان انشقاق إذا أمكن تجزئة رؤوسه إلى عصبة ومجموعة مستقرة:

a) أثبت أنه إذا كان G بيان انشقاق فإنَّ G و $\overline{G}$ يكونان بيانين وتريّين. لاحظ أنه إذا كان كلّ من G و $\overline{G}$ بيانًا وتريًّا، فلا يوجد للبيان G بيانات جزئية مستحدثة ضمن المجموعة $\{C_4, 2K_2, C_5\}$.

b) أثبت أنه إذا كان G بيانًا بسيطًا بحيث لا يوجد له بيان جزئيّ مستحدث ضمن المجموعة $\{C_4, 2K_2, C_5\}$، فإنّه يكون بيان انشقاق. (مساعدة: من بين العصب ذات الحجم الأكبر، افترض أنّ Q أحدُ هذه العصب بحيث يكون عدد أضلاع $G-Q$ أقل ما يمكن. أثبت أنّ $G-Q$ تكون مجموعة مستقرة من خلال استخدام خيار Q، وشروط البيانات الجزئية الممنوعة)، ([Hammer – Simeone [1981]).

18.1.8. افترض أنّ $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ متتاليةُ الدرجات لبيان بسيط G، وافترض أيضًا أنّ m أكبرُ قيمة لـ k بحيث إنّ $d_k \geq k-1$. أثبت أنّ G يكون بيان انشقاق إذا وفقط إذا كان $\sum_{i=1}^{m} di = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} di$.

(تعليق: قارن بتمرين [Hammer – Simeone [1981]، (28.3.3).

19.1.8. (−) حدّد الأشجار التي تكون بيانات انشقاق، وابنِ زوجًا من بيانات الانشقاق غير المتشاكلة التي لها متتالية الدرجات نفسها.

20.1.8. تعرّف الأشجار من نوع k على أنّها البيانات التي تظهر من عصبة من الدرجة K بتكرار إضافة 0 أو أكثر من الرّؤوس الجديدة التي تربط بالعصبة في البيان القديم. أثبت أنّ G يكون شجرة من نوع K إذا وفقط إذا حقق الخواص الثلاث الآتية:

a) إذا كان مترابطًا.

b) إذا كانت له عصبة من الدرجة k، ولكن لا توجد له عصبة من الدرجة $k+2$.

c) إذا كان كلّ فاصل رؤوس أصغريّ له عصبةً من الدرجة k.

21.1.8. افترض أنّ G بيان وتريّ على n من الرؤوس ليس له عصبة من الدرجة $k+2$. أثبت أنّ $e(G) \leq kn - \binom{k+1}{2}$ حيث تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان G شجرةً من نوع k.

22.1.8. (+) عمّم النظرية 3.2.2 (صيغة كيلي) من خلال إثبات أنّ عدد الأشجار من نوع k التي رؤوسها المجموعة $[n]$ يساوي $\binom{n}{k}[k(n-k)+1]^{n-k-2}$. (مساعدة: عمّم شفرة برفر الخاصة بالأشجار المجذّرة التي تولّد قائمة تحوي $n-1$ مدخلة ولا تحذف الجذر مطلقًا. في الشجرة من نوع k، الرّؤوس التي تنتمي بالضبط إلى عصبة واحدة من الدرجة $k+1$ هي الأوراق. يمكن إنبات شجرة من نوع k باستخدام أيّ عصبة من الدرجة k التي تمّ تثبيت جذرها بحيث تمتلك 0 بوصفها رمزًا، ولها أزواج ij، حيث i تأتي من مجموعة عدد عناصرها k، أمّا j فتأتي من مجموعة عدد عناصرها $(n-k)$، ويوجد براهين أخرى في Bieneke – Pippent ،(Greene – Iba [1975]) [1969] و [1969] Moon).

23.1.8. افترض أنّ G بيان وتريّ حيث $\omega\ (G)= r$. أثبت أنه توجد للبيان $\binom{r}{j}+\binom{r-1}{j-1}(n-r)$ عصبة من الحجم j، حيث تتحقق المساواة (لـ j كلّها في الوقت نفسه) إذا وفقط إذا كان G شجرة من نوع $r-1$.

24.1.8. خاصية هيلي لخطّ الأعداد الحقيقية. افترض أنّ $I_1\ ,\ \dots\ ,\ I_k$ فتراتٌ حقيقية متقاطعة زوجًا زوجًا. أثبت أنه توجد نقطة مشتركة بين $I_1\ ,\ \dots\ ,\ I_k$.

25.1.8. أثبت مباشرة أنّ الشجرة تكون بيان فترة إذا وفقط إذا كانت جرارة (شجرة تحوي مسارًا يحوي الأقل رأسًا لكلّ ضلع).

26.1.8. (!) افترض أنّ G بيان فترة. أثبت أنّ $\overline{G}$ بيان مقارنة، وأنّ G بيان وتريّ. (مساعدة: جدْ ترتيب حذف مبسطيّ).

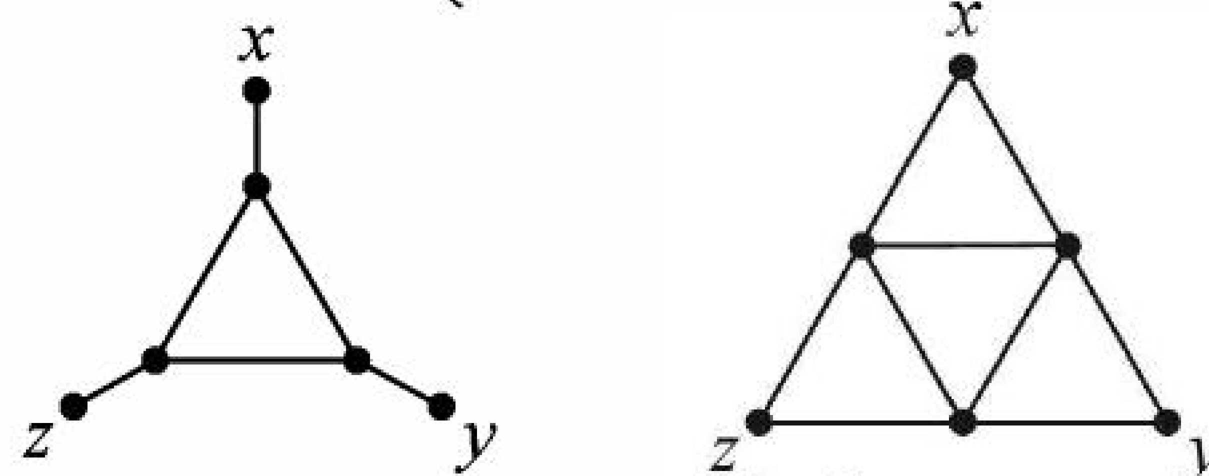
27.1.8. أثبت أنّه يوجد للبيان G تمثيلٌ بفترات إذا وفقط إذا كان لمصفوفة وقوع العصبة والرؤوس لـ G خاصية الواحدات المتتابعة.

28.1.8. أثبت أنّ البيان G بيان فترة إذا وفقط إذا أمكن ترتيب رؤوسه على الشّكل $v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_n$، حيث إنّ $v_i \leftrightarrow v_k$ تعطي $v_j \leftrightarrow v_k$ عندما $i<j<k$.

انظر (Jacobson – McMorris – Mulder [1991]) على سبيل المثال.

29.1.8. يُعرّف الثلاثيّ النجميّ في البيان على أنّه ثلاثة رؤوس هي: x، وy، وz، حيث يوجد مسار بين أي رأسين منها يتفادى جوار الثالث.

أثبت أنّه لا يوجد ثلاثيّ نجميّ في بيان الفترة. (تعليق: إنّ بيانات الفترة هي البيانات الوتريّة التي تخلو من ثلاثيّ نجميّ تمامًا)، (lekkerkerker – Boland [1962]).



30.1.8. دخل ستة أساتذة إلى مكتبة في يوم سُرِقَ فيه كتاب نادر، حيث دخل كلّ منهم مرة واحدة، فجلس في المكتبة بعضًا من الوقت ثمّ غادر. لأيّ اثنين كانا موجودين في الوقت نفسه، افترض أنّ أحدهما على الأقل قد رأى الآخر. قام التّحرّي باستجواب الأساتذة، وحصل منهم على الشهادات الآتية:

الأستاذ		ما أدعى رؤيته	
Abe	آب	Burt, Eddie	بيرت وإيدي
Burt	بيرت	Abe, Ida	آب وإيدا
Charlotte	شارلوت	Desmond, Ida	ديزموند وإيدا
Desmond	ديزموند	Abe, Ida	آب وإيدا
Eddie	إيدي	Burt, Charlotte	بيرت وشارلوت
Ida	إيدا	Charlotte, Eddie	شارلوت وإيدي

في هذه الحالة، فإنّ "يكذب" تعني إعطاء معلومات غير صحيحة، ولكن دون حذف معلومات. افترض أنّ المجرم حاول إلصاق التهمة بمشتبه آخر، فإذا علمت أنّ أحد الأساتذة كان كاذبًا، فمنْ هو؟ (Golumbic [1980, p 20]).

31.1.8. (+) أثبت أنّ G بيانَ فترة وحدة (يمكن تمثيله بفترات لها الطول نفسه) إذا وفقط إذا امتلك $A\ (G) + I$ خاصية الواحدات المتتابعة (Roberts [1968]).

32.1.8. (+) أثبت أنّ G يكون بيان فترات فعليّ (قابل للتمثيل بفترات بحيث لا توجد أي فترة تحوي فعليًّا فترة أخرى) إذا وفقط إذا كان لمصفوفة الوقوع للعصب والرؤوس له خاصية الواحدات المتتابعة لكلّ من الصّفّوف والأعمدة، (Fishburn [1985]).

33.1.8. (-) أثبت أنّ كلّ بيان خالٍ من P_4 يكون بيان مينيل.

34.1.8. أثبت أنّ كلّ بيان وتريّ يكوّن تثليثًا $-o$.

35.1.8. افترض أنّ C حلقة في بيان ليس له حلقة فردية مستحدثة. أثبت أنّ لـ $V(C)$ ثلاثة رؤوس متجاورة زوجًا زوجًا بحيث إنّ المسارات جميعها التي تربط بين هذه الرؤوس في C لها طول فردي.

36.1.8. (+) أثبت أنّ الشروط الآتية متكافئة:

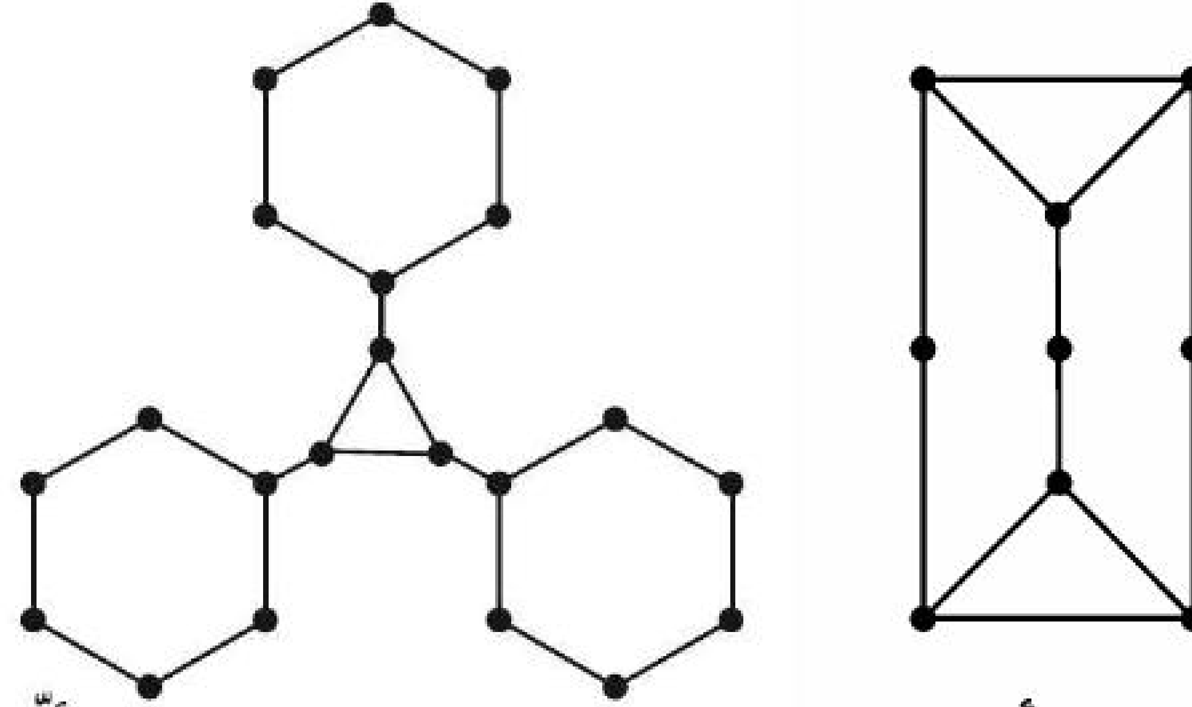
a) يوجد لكلّ حلقة فرديّة طولها 5 على الأقل زوج من الأوتار المتقاطعة.

b) لكلّ زوج $x, y \in V(G)$، تكون المسارات اللاوتريّة من x إلى y إما زوجية كلّها أو فردية كلّها.

(مساعدة: لـ $A \Leftarrow B$، خذ في الحسبان زوجًا P_1 و P_2 من المسارات من x إلى y لها نوعيات متضادة، بحيث يكون مجموع أطوالها أصغريّ)، ([Burlet – Uhry [1984]).

37.1.8. أثبت أنّ كلّ بيان قابل للترتيب ترتيبًا كاملاً يكون كاملاً بقوة (مساعدة: استخدم التمهيديّة **25.1.8**)، (Chva'tal [1984]).

38.1.8. (!) أثبت أنّ البيانات أدناه كاملة بقوة، إلا أنها غير قابلة للترتيب ترتيبًا كاملاً.

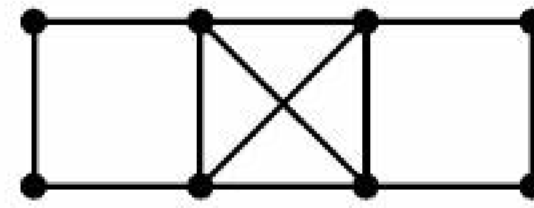


39.1.8. (-) أثبت أنّ البيان الموجود أعلاه عن اليسار هو بيان مينيل، إلا أنّه غير قابل للترتيب ترتيبًا كاملاً. أثبت أنّ $\overline{P_5}$ عن بيان قابل للترتيب ترتيبًا كاملًا إلا أنّه ليس بيان مينيل.

40.1.8. (!) البيانات الوتريّة الضعيفة. أثبت أنّ:

a) كلّ بيان وتريّ يكون وتريًّا ضعيفًا.

b) البيان أدناه وتريّ ضعيف، إلا أنه ليس كاملاً بقوة.



41.1.8. (-) نعرِّف التجزئة التخالفية (المتخالفة) للبيان G على أنها تجزئة لـ $V(G)$ إلى مجموعتين غير خاليتين X و Y. بحيث إنّ كلًا من $G[X]$، و $\overline{G}[Y]$ غير مترابط. لقد خَمَّنَ كفتال (Chva'tal [1985 *b*]) أنه لا توجد تجزئة تخالفية لأيّ بيان ناقص أصغريّ. أثبت أنّ هذا يعطي تمهيديّة مجموعة قطع النجمة وأنّ الـ SPGC تعطي هذه المُخَمَّنَة.

42.1.8. أثبت أنّ البيانَ ذا الرّؤوس العشرة الموجود في المثال 37.1.8 قابلٌ للتجزئة من النوع 3,3، (Chva'tal – Graham – Perlod - Whitesides [1979]).

43.1.8. (-) افترض أنّ x و v رأسان لبيان قابل للتجزئة G، أثبت أنه إذا كانت $x \not\leftrightarrow v$، فإنَّ كلّ عصبة عظمى تحوي x تتكون من رأس واحد من كلّ مجموعة مستقرة، بحيث تكون هذه المجموعة رفيقًا لعصبة تحوي v. أعطِ النصّ المتمّم عندما $x \leftrightarrow v$. (Buckingham – Golumbic [1983]).

44.1.8. (+) أثبت أنّه لا يوجد لأيّ بيان حرج من الدرجة p مضاد توائم؛ أيّ زوج من الرؤوس، بحيث يجاور أيُّ رأس آخر أحدَهما. (مساعدة: إذا أعطيت بيانًا حرجًا من الدرجة p، وكان الزوج $\{x, y\}$ مضاد توائم،

فاجعل S تمثل المجموعة المستقرة التي تحوي y في التّلوين الأمثل الوحيد لـ $G - x$. ثم جدْ من بين رؤوس البيان الجزئي $G - x - S$ القابل للتلوين بـ $\omega - 1$ لوناً عصبةً حجمها $\omega - 1$ في $N(x)$، بحيث لا تمتدّ (لا يمكن توسيعها) إلى $N(y)$. وبالمثل، جدْ مجموعة مستقرة في $N(y)$ لا تمتدّ إلى $N(x)$. الآن، ابن حلقة خماسيّة مستحدثة) (لاحظ: يوجد مضاد توائم للبيان القابل للتجزئة في المثال (Olariu [1988]) .(37.1.8).

45.1.8. نقول: يشكّل الرّأسان x و y زوجًا زوجيًّا إذا كان لكلّ مسار لا وتريّ من x إلى y طول زوجي (بمعنى أنّ عددَ أضلاع هذا المسار زوجيٌّ). تعدّ التوائم (الرّؤوس غير المتجاورة التي لها الجوار نفسه) حالة خاصة:

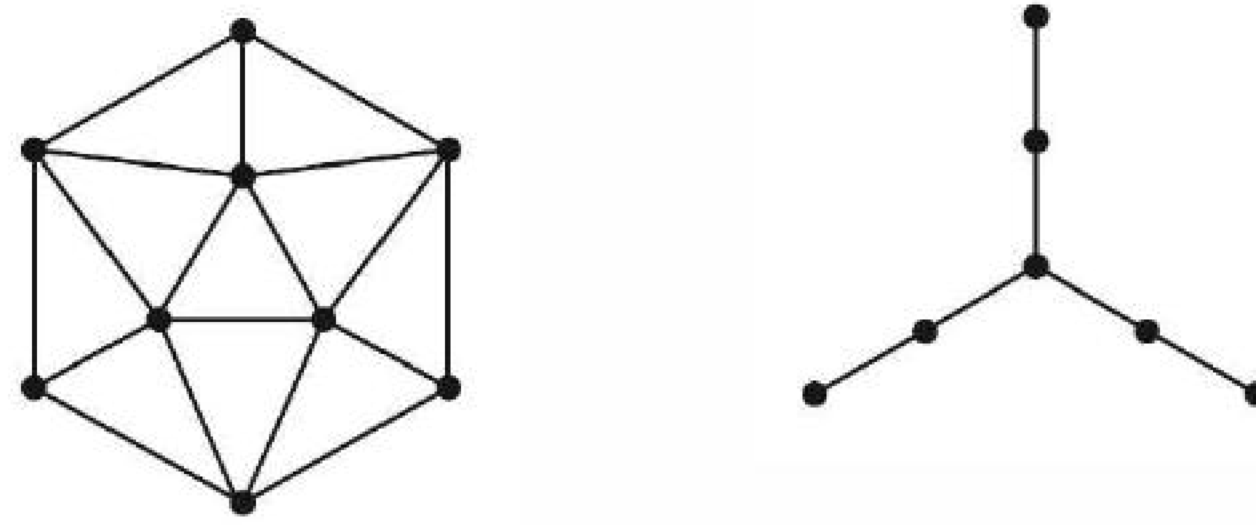
a) افترض أنّ S_1 و S_2 مجموعتان مستقرّتان كبريان في بيان قابل للتجزئة G. أثبت أنّ البيان الجزئيّ المولد من الفرق التماثلي لـ $S1$ و S_2 يكون مترابطًا. (Bland – Huang – Trotter [1979]).

b) استخدم فرع (a) لتبرهن أنّه لا يوجد زوج زوجيّ لأيّ بيان حرج من الدرجة p.

(تعليق: إذن، لا يوجد توائم لأيّ بيان حرج من الدرجة p، وهذا يبرهن ثانية أنّ مضاعفة الرّؤوس يحافظ على الكمال)، (Meyniel [1987], Bertschi – Reed [1988]).

46.1.8. افترض أنّ G بيان قابل للتجزئة، وأنّ S_1 و S_2 مجموعتان مستقرّتان في التّلوين الأمثل لـ $G - x$. استخدم فرع (a) من المسألة السابقة لتبرهن أنّ البيان الجزئيّ الذي تولّده $S_1 \cup S_2 \cup \{x\}$ يكون ثنائيّ التّرابط (مترابط من الدرجة 2). (Buckingham – Golumbic [1983]).

47.1.8. أثبت أنّ أحدَ البيانين أدناه بيانٌ دائرة، وليس بيانَ أقواس دائريّ، وأنّ الآخر بيان أقواس دائري، وليس بيان دائرة.



48.1.8. (!) إنّ البيان $K_{1,3} + e$ هو البيان الذي له أربعة رؤوس، ونحصل عليه بإضافة ضلع e إلى البيان $K_{1,3}$. باستخدام خاصية الكمال لبيانات مينيل، أثبت أنّ البيانات الخالية من $K_{1,3} + e$ تحقق الـ SPGC (Meyniel [1976]).

49.1.8. افترض أنّ $G = C_{aw+1}^{w-1}$. وافترض كذلك أنّ:
$S = \{v_{aw}, v_1, v_w, v_{w+2}\} \cup \{v_{iw+1}: 2 \leq i \leq a-1\}$، وأنّ:
$T = \{v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w\} \cup \{v_{w+i}: 2 \leq i \leq w-1\}$. أثبت أنّ S يتقاطع مع كلّ عصبة كبرى في G، وأنّ T تتقاطع مع كلّ مجموعة مستقرة كبرى في G،
(Chva'tal [1976]).

50.1.8. (!) SPGC لبيان الدائرة. (Buckingham – Golumbic [1983]):

a) استخدم التمهيديّة 28.1.8 لتبرهن أنّه إذا كان x رأسًا في بيان قابل للتجزئة G، فإنَّ $G - N[x]$ يكون مترابطًا حيث $N(x) = N[x] \cup \{x\}$:

b) استخدم فرع a لتبرهن أنّ بيانات الدائرة القابلة للتجزئة تكون خالية من $k_{1,3}$.

c) استنتج من فرع (b) والنتيجة 53.1.8 أنّ الـ SPGC تتحقق لبيانات الدائرة.

2.8 الماترويدات (Matroids)

العديد من نتائج نظرية البيان يُعَمَّمُ أو يُبَسَّطُ في نظرية الماترويدات. ويشمل هذا كلًّا من: الخوارزمية

الجشعة للأشجار المولدة الصغرى، والثنوية بين المواءمة الكبرى وغطاء الرؤوس الأصغر في البيانات الثنائية الفرع، وكذلك الثنوية الهندسية التي تربط بين البيان وبيانه الثنوي.

تظهر الماترويدات في العديد من السياقات، إلا أنها خاصة؛ لأنها غنية جدًا بخواص بنائية تركيبية (توافقية). عندما تُعمم نتيجة في نظرية البيانات إلى الماترويدات، يمكن تفسيرها والاستفادة منها في بعض الحالات الخاصة الأخرى. لقد وجدت براهين بسيطة للعديد من المبرهنات الصعبة في نظرية البيانات باستخدام الماترويدات.

عرّف ويتني (Whitney [1935]) الماترويدات وعرضها من أجل دراسة السّويّة والجوانب الجبرية للبيانات، وعرّفها ماكلين (Maclane [1936]) أيضًا لدراسة الشبكيات الهندسية، وكذلك فان ديرويردن (Van der waerden [1937]) لدراسة الاستقلال في فضاءات المتجهات. إن معظم اللغة المستخدمة تأتي من هذه السياقات. وسنركز هنا على تطبيقات الماترويدات على البيانات.

الأنظمة الوراثية، وأمثلة (Hereditary Systems and Examples)

نستخدم المجموعات في العديد من سياقات الرياضيات لتجنب أي تعارض؛ وغالبًا ما يُسَمَّى هذا استقلالًا. إنَّ الشيء المتأصل في هذا المفهوم هو أنَّ المجموعة الجزئية لمجموعة مستقلة تكون مستقلة، فضلًا عن أن المجموعة الخالية تكون مستقله أيضًا.

1.2.8. مثال: مجموعات الأضلاع اللاحلقية. افترض أن E مجموعة أضلاع في بيان G وافترض كذلك أن $X \subseteq E$ تكون مجموعة "مستقلة" إذا خلت من أي حلقة. لاحظ أن أي مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة تكون مستقلة، بالإضافة إلى أن المجموعة الخالية أيضًا مستقلة. وأنّ الحلقات هي المجموعات المستقلة الصغرى.

خذ في الحسبان الطائرة الورقية $K_4 - e$ التي لها خمسة أضلاع. بما أن للأشجار المولدة لهذا البيان ثلاثة أضلاع، فإن كل مجموعة لها أكثر من ثلاثة أضلاع تكون مجموعة غير مستقلة. وكذلك فإن المثلثين غير مستقلين، وهذا يعطينا ثماني مجموعات غير مستقلة، و 24 مجموعة مستقلة من بين المجموعات الجزئية لـ E. وهناك ثلاث مجموعات غير مستقلة أصغرية (الحلقات) وثماني مجموعات مستقلة أعظمية (الأشجار المولدة). ■

2.2.8. تعريف: نعرف العائلة الوراثية أو المثالية على أنها جمع من المجموعات $\mathbf{F}$، بحيث إن كل مجموعة جزئية من $\mathbf{F}$ تكون أيضًا موجودة في $\mathbf{F}$. أما في النظام الوراثي M على E، فإنه يتألف من مثالية غير خالية $\mathbf{I}_M$ لمجموعات جزئية من E والطرق المختلفة لتحديد هذه المثالية وتعيينها، والتي تُسمى أوجه M.

إن عناصر $\mathbf{I}_M$ هي مجموعات M المستقلة. أما المجموعات الجزئية الأخرى لـ E (التي تشكل العائلة $\mathbf{D}_M$) فإنها غير مستقلة. إن الأساسات هي المجموعات المستقلة الأعظمية، أما الحلقات فهي المجموعات المستقلة الأصغرية. ونرمز إلى هذه العائلات بالرمزين $\mathbf{B}_M$ و $\mathbf{C}_M$ على الترتيب.

نعرِّف رتبة المجموعة E على أنها حجم أكبر مجموعة مستقلة فيها. ونعرِّف دالة الرتبة r_M على الشكل $r(x) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \boldsymbol{I}\}$.

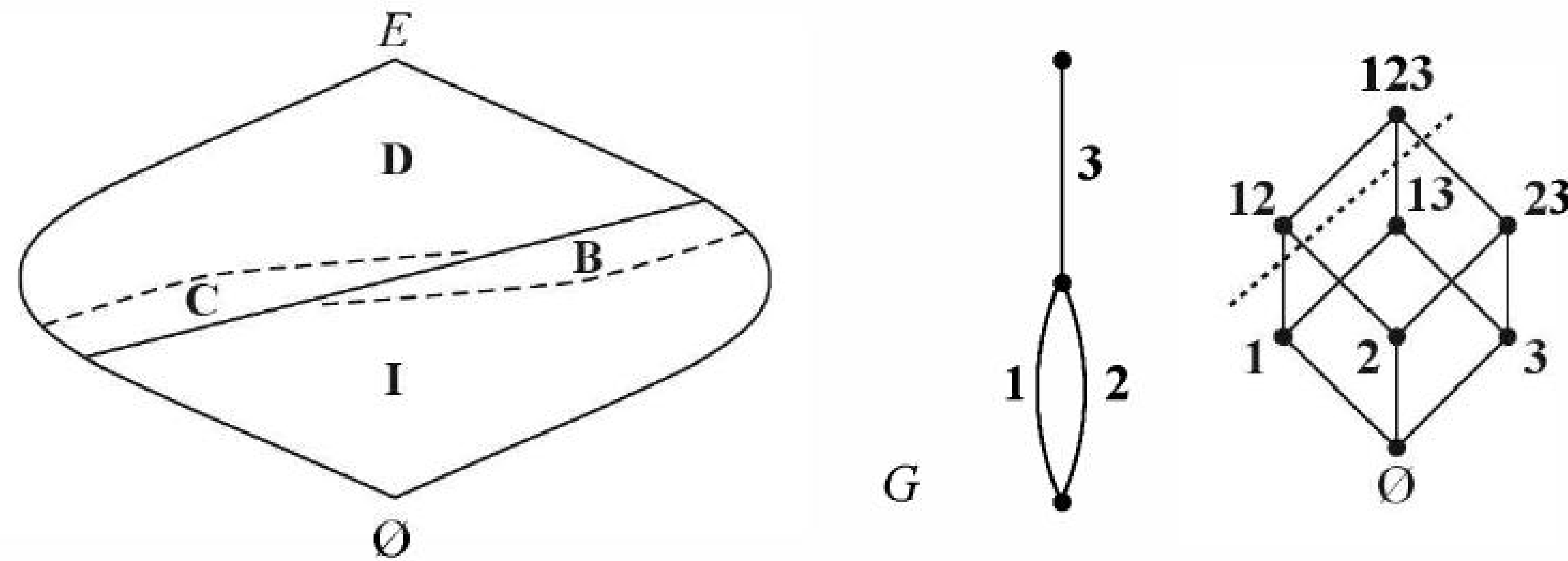
3.2.8. مثال: الأنظمة الوراثية.

ضع علامة دالة على كل رأس $a = (a_1, \ldots, a_n)$ من رؤوس المكعب الزائدي Q_n باستخدام المجموعة

المرتبطة $X_a = \{i : a_i = 1\}$. ارسم Q_n في المستوى، بحيث تكون الإحداثيات العمودية للرؤوس مرتبة بحسب حجم المجموعات المستخدمة لوضع العلامات الدالة على هذه الرؤوس.

يوضح الشكل أدناه العلاقات بين المجموعات المستقلة، والأساسات، والحلقات والمجموعات غير المستقلة لنظام وراثي. إن الأساسات هي المجموعات الأعظمية للعائلة $\mathbf{I}$، أما الحلقات فهي المجموعات الأصغرية غير الموجودة في $\mathbf{I}$. في كل نظام وراثي، تنتمي $\emptyset$ إلى $\mathbf{I}$. وإذا كانت كل مجموعة مستقلة، فهذا يعني عدم وجود حلقات، ولكن هناك أساسًا واحدًا على الأقل موجود دائمًا.

في المثال الذي عن اليمين، تجد أن المجموعات المستقلة هي مجموعات الأضلاع اللاحلقية في البيان الذي له ثلاثة أضلاع، وأن المجموعتين غير المستقلتين هما: $\{1, 2\}$ و $\{1, 2, 3\}$ فقط. وأن الحلقة الوحيدة هي: $\{1, 2\}$، أما الأساسات فهما: $\{1, 2\}$ و $\{2, 3\}$. إن رتبة المجموعة المستقلة هي حجمها. وللمجموعات غير المستقلة، نجد أن $r(\{1, 3\}) = 1$، و $r(\{1, 2, 3\}) = 2$. ■



4.2.8. ملاحظة. أوجه النظام الوراثي. يُحدَّدُ النظام الوراثي M بأي من: $\mathbf{I}_M$، و $\mathbf{B}_M$، و $\mathbf{C}_M$، و r_M .... إلخ؛ وذلك لأن كل سمة من هذه السمات تُحدد السمات الأخرى. لقد عبّرنا عن $\mathbf{B}_M$، و $\mathbf{C}_M$ و r_M بدلالة $\mathbf{I}_M$. وبالعكس، إذا عرفنا $\mathbf{C}_M$، فإن $\mathbf{I}_M$ تتألف من المجموعات التي لا تحوي عضوًا من $\mathbf{C}_M$. وإذا علمنا r_M، فإن $\mathbf{I}_M = \{X \subseteq E : r_M(X) = |X|\}$. ■

الأنظمة الوراثية عامة جدًّا. لذا، لا نتوقع منها سلوكًا جميلاً، إلا أننا نركز اهتمامنا على الأنظمة الوراثية التي لها خاصية إضافية أخرى، وهذا ما نطلق عليه اسم الماترويدات. يمكننا أن نترجم أي حصر على $\mathbf{I}_M$ إلى حصر مناظر على وجه من أوجه النظام الوراثي. يوجد لدينا العديد من التعريفات المتكافئة للماترويدات؛ لأنه يمكن تحديد الأنظمة الوراثية من خلال عدة طرق. وباستخدامنا للعديد من الأمثلة المحفزة، سنعطي نصوصًا للعديد من الخواص المميزة للماترويدات. وبعد ذلك، سنبرهن تكافؤ هذه النصوص. وسنبدأ بإعطاء مثال أساسي من البيانات.

5.2.8. تعريف: نعرِّف ماترويد الحلقة $M(G)$ للبيان G على أنه النظام الوراثي على $E(G)$، حيث إن حلقاته هي حلقات G. وأن النظام الوراثي الذي هو $M(G)$ لبيان G يسمى ماترويد بيانيًّا.

6.2.8. مثال: الأساسات في ماترويدات الحلقات. إن الأساسات لماترويد الحلقة $M(G)$ هي مجموعات أضلاع الغابات الأعظمية في G. وكل غابة منها تحوي شجرة مولدة من كل مركبة. لذا، يكون لكل منها الحجم نفسه. خذ في الحسبان $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ حيث $e \in B_1 - B_2$ إن حذف e من B_1 يجعل أحد مركبات B_1 غير مترابطة،

وبما أن B_2 يحوي شجرة مولدة لهذه المركبة لـ G ، فإن ضلعًا f في $B_2 - B_1$ يمكن أن يُضاف إلى $B_1 - e$ لإعادة ترابطها.

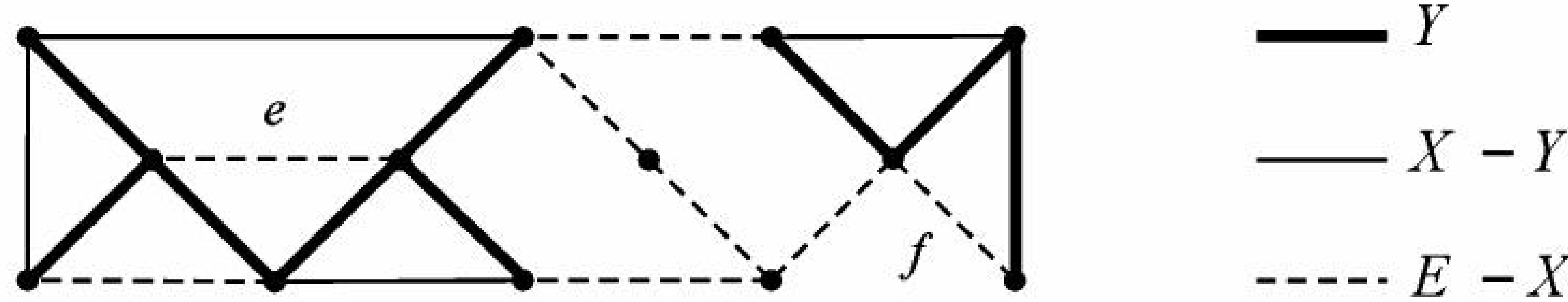
لنظام وراثي M، نعرف خاصية تبديل الأساس على الصورة الآتية: إذا كان $B_1,\ B_2 \in \mathbf{B}_M$، فإن لكل $e \in B_1\text{-}B_2$ ضلعًا f في $B_2\text{-}e$، بحيث $B_1 - e + f \in \boldsymbol{B}_M$. الماترويدات أنظمة وراثية تحقق خاصية تبديل الأساس. ■

7.2.8. ملاحظة. في هذا الموضوع، غالبًا ما نناقش إضافة عناصر منفردة من بعض المجموعات أو حذفها، وللتماثل والسهولة؛ فإننا نستخدم الرمزين + و − بدلاً من ∪ و -، وكذلك نُسقط الأقواس على المجموعات التي تحوي عنصرًا واحدًا فقط. ■

8.2.8. مثال: دالة الرتبة في ماترويدات الحلقات. افترض أن G بيان له n من الرؤوس. لـ $X \subseteq E(G)$، افترض أن G_X ترمز إلى البيان الجزئي المولد للبيان G الذي أضلاعه هي المجموعة X. في $M(G)$، المجموعة الجزئية المستقلة من X مجموعات أضلاع غابة في G_X وعندما يكون لـ G_X مركبة، فإن أكبر حجم لمثل هذه الغابة هو $n\text{-}k$. لذا، فإن $r(X) = n - k$. في الشكل أدناه تظهر الغابة y (اللون الغامق) داخل X (اللون الغامق المتصل)

إذا كانت $r(X+e) = r(X)$ لبعض $e \in E - X$، فإن أطراف e تقع في مركبة واحدة فقط من مركبات G_X. وأن إضافة e لا تربط بين المركبات. وإذا أضفنا ضلعين من هذه الأضلاع، فإننا لا نربط بين المركبات أيضًا. لذا، فإن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$ وهذا يعطينا أن $r(X+e+f) = r(X)$.

لنظام وراثي M على E، نعرف خاصية الامتصاص (الضعيفة) على الصورة الآتية: إذا كانت $X \subseteq E$، وكان $e, f \in E$، فإن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$ يضمن أن $r(X+e+f) = r(X)$. وتعرف الماترويدات على أنها أنظمة وراثية لها خاصية الامتصاص (اقتُرح الاسم من قبل كزدي (A.kézdy) . ■



نعلم أن البيانات يمكن أن تحوي عُرى أو أضلاعًا مكررة. وفي ماترويدات الحلقات، نجد أن هذا يقود إلى حلقات من الحجمين 1 و 2. ونستخدم هذه المصطلحات للأنظمة الوراثية عمومًا.

9.2.8. تعريف: في النظام الوراثي، نعرِّف العروة على أنها عنصر يشكل حلقة حجمها يساوي 1. وتعرف العناصر المتوازية على أنها عناصر مختلفة وليست عُرى، وتشكل حلقة حجمها 2. ويعدّ النظام الوراثي بسيطًا إذا خلا من العرى والعناصر المتوازية.

10.2.8. تعريف: نعرِّف الماترويد المتجه على مجموعة E من المتجهات في فضاء متجه على أنه نظام وراثي؛ لأن مجموعاته المستقلة هي مجموعات جزئية من متجهات في E، بحيث تكون هذه المجموعات مستقلة خطيًّا. إن الماترويد الذي نعبر عنه بهذه الطريقة يسمى ماترويد خطيًّا (أو ماترويد قابلًا للتمثيل)، وماترويد الأعمدة $M(A)$ للمصفوفة A هو الماترويد المتجه المعرّف على أعمدة هذه المصفوفة.

11.2.8. مثال: الحلقات في الماترويدات المتجهة. لاحظ أن المجموعة E ربما تحوي متجهات مكررة، وأن هذه المتجهات تشكل العناصر المتوازية، والحلقات هي مجموعات أصغرية $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq E$ بحيث إن $\sum c_i x_i = 0$ لأن المعاملات ليست أصفارًا كلها. إن الأصغرية تجبر أن $c_i \neq 0$ لكل i.

افترض أن C_1 و C_2 حلقتان مختلفتان تحويان x، وباستخدام معادلة عدم الاستقلال (الاعتماد) لـ C_1 و C_2 نستطيع كتابة x بوصفها تركيبًا خطيًّا بدلالة C_1-x، و بدلالة C_2-x. وبمساواة هذه التعابير، نحصل على معادلة الاعتماد $C_1 \cup C_2$-x. لذا، فإن $C_1 \cup C_2$-x يحوي حلقة.

لنظام وراثي على E، نعرِّف خاصية الحذف الضعيفة على الشكل التالي: عندما C_1 و C_2 حلقتان مختلفتان، و $x \in C_1 \cup C_2$ فإن عنصرًا آخر من C_M يكون محتوى في $C_1 \cup C_2$-x. والماترويدات أنظمة وراثية تحقق خاصية الحذف الضعيفة.

وماترويد الأعمدة للمصفوفة أدناه هو كذلك ماترويد الحلقة $M\left(k_4 - e\right)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

12.2.8. تعريف: الماترويد المستعرض المولد من قبل المجموعات $A_1, \ldots, A_m$ التي اتحادها E هو نظام وراثي على E، بحيث إن مجموعاته المستقلة هي أنظمة التمثيلات المختلفة للمجموعات الجزئية لـ $\{A_1, \ldots\ldots A_m\}$. مكافئًا لذلك، اجعل G البيانَ الثنائيَّ الذي أضلاعه E، ورؤوسه $[m]$، والمعرف على الشكل $e \leftrightarrow i$ إذا وفقط إذا كانت $e \in A_1$. إن المجموعات المستقلة هي المجموعات الجزئية من E المشبعة من خلال المواءمة في G.

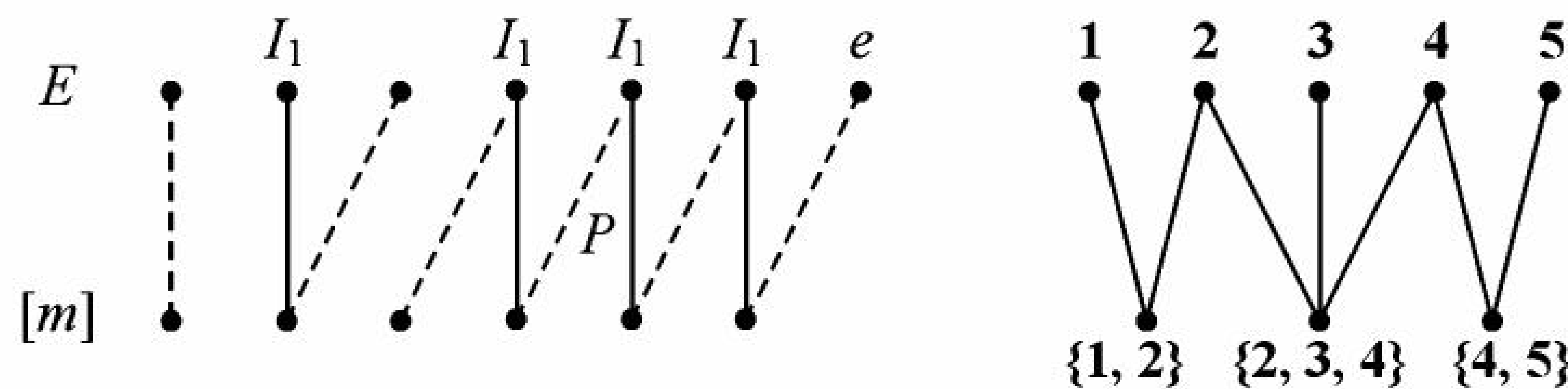
13.2.8. مثال: المجموعات المستقلة في الماترويدات المستعرضة. عندما تكون كلٌّ من M و M' متوائمتين في G بحيث إن $|M'| > |M|$، فإن الفرق التماثلي $M \Delta M'$ يحوي مسارًا موسعًا P بالنسبة إلى M (النظرية 10.1.3). وباستبدال $M' \cap P$ بـ $M \cap P$، فإننا نحصل على مواءمة من الحجم $|M| + 1$ والتي تشبع رؤوس M جميعها بالإضافة إلى طرفي P.

افترض المجموعتين المستقلتين I_1 و I_2 في الماترويد المستعرض الذي تولده $\{A_1, \ldots\ldots A_m\}$. وفي البيان الثنائي الفرع المرافق، اجعل M_1 و M_2 متوائمتين تشبعان I_1 و I_2 على الترتيب (عن اليسار أدناه، M_1 مرسومة بخط غامق، و M_2 مرسومة بخط متقطع). إذا كان $|I_2| > |I_1|$، فإن المواءمة التي تحصل عليها من M_1 باستخدام مسار موسع بالنسبة إلى M_1 في $M_2 \Delta M_1$ تشبع I_1 إضافة إلى عنصر $e \in I_2 - I_1$، وهذا "يوسع" I_1.

لنظام وراثي على E، نعرِّف خاصية التوسيع على الشكل التالي: إذا كانت $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ بحيث إن $|I_2| > |I_1|$، فإن $e \in I_2 - I_1$، بحيث $I_1 \cup \{e\} \in \boldsymbol{I}$. الماترويدات أنظمة وراثية تحقق خاصية التوسيع.

الماترويد المستعرض للعائلة $A = \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5\}$ موضح بواسطة البيان الثنائي الفرع في الشكل أدناه عن اليمين هو أيضًا $M\left(k_4 - e\right)$.

■



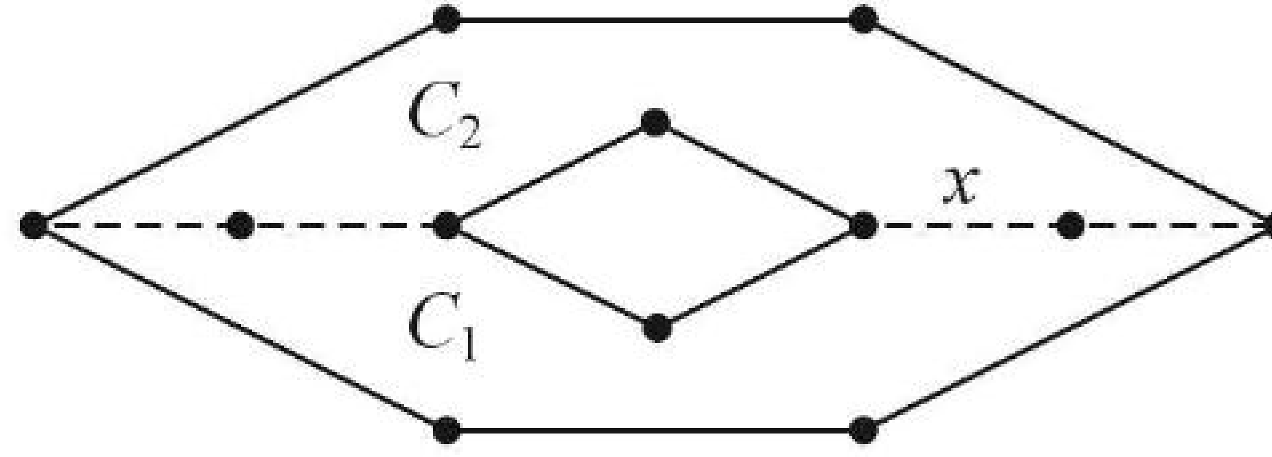
إن إسم ماترويد مستعرض يظهر من استخدام "مستعرض" في أنظمة التمثيلات المختلفة. ونعرف الـ SDR لمجموعة جزئية من $\{A_1, \ldots\ldots A_m\}$ على أنه مستعرض جزئي للنظام الكلي. والمجموعات المستقلة للماترويد المستعرض على $\cup A_i$ هي المستعرضات الجزئية $\{A_1, \ldots\ldots A_m\}$. وقد اكتُشفت هذه الماترويدات من

قبل إدموند وفولكرسون في العام 1965م وكذلك من قِبَل ميرسكي (Mirsky)، وبيرفكت (Perfect) في العام 1967م اللذين عمّما النتيجة لتشمل المجموعات اللامنتهية، علمًا بأن إسهام الآخرين كان مستقلاً تمامًا عن إسهامات من سبقوهم.

كل ماترويد يجب أن يحقق خواص الماترويدات جميعها، وعندما نثبت أن الخواص المعرفة أعلاه متكافئة للأنظمة الوراثية، يلزمنا عند ذلك أنْ نثبت أنَّ واحدة منها فقط متحققة لنستخدمها جميعًا، وسنختبر في البداية أنها جميعًا متحققة لماترويدات الحلقات.

14.2.8. مثال: التوسيع في ماترويدات الحلقات. خذ في الحسبان $I_1, I_2 \in \mathbf{I}_{M(G)}$. كما في المثال 8.2.8، يوجد للبيان الجزئي المولد G_{I_1} $k = n - |I_1|$ مركبة، بالإضافة إلى أنه يوجد $n-k = |I_1|$ ضلعًا لغابته الكبرى. لذا، فإنه يوجد للغابة I_2 ضلعًا، حيث يكون طرفاه في مركبتين من مركبات G_{I_1}. ويمكن أن يضاف هذا الضلع إلى I_1 للحصول على مجموعة مستقلة أكبر. لذا، تتحقق خاصية التوسيع. ■

15.2.8. مثال: الحذف الضعيف في ماترويدات الحلقات. الحلقات في $M(G)$ هي مجموعات أضلاع حلقات G، وتوجد للحلقات درجة زوجية عند كل رأس. فإذا كان $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$، فإن للفرق التماثلي $C_1 \Delta C_2$ أيضًا درجة زوجية عند كل رأس. وإذا كانت $C_1 \neq C_2$، فهذا يشير إلى أن $C_1 \Delta C_2$ يحوي حلقة (انظر القضية 27.2.1). وهذا أقوى من خاصية الحذف الضعيف؛ لأن $C_1 \Delta C_2 \subseteq C_1 \cup C_2 - X$. في الشكل أدناه، تجد أن C_1 و C_2 حدّان لوجوه طول كل منها 9، تشترك في الأضلاع غير المتصلة (المنقطة)، كما أن $C_1 \Delta C_2$ اتحاد لحلقتين غير متقاطعتين. ■



لاحظ أن خاصية تبديل الأساس في الماترويدات المستعرضة تشبه خاصية التوسيع. ويتناول تمرين 9 خاصية الحذف الضعيف. والتحقق مباشرة من خاصية كل من التوسيع أو تبديل الأساس في الماترويدات الخطية يتطلب النتيجة الجبرية التي تقول: إذا كان لدينا k من المتجهات المستقلة خطيًّا، فإنه لا يمكن كتابة كل منها بوصفها تركيبًا خطيًّا لمجموعة أصغر. وبدلاً من ذلك، نستطيع استخدام النظرية 20.2.8. وبما أن خاصية الحذف الضعيف تتحقق للمجموعات المستقلة من المتجهات، فإن العديد من مبرهنات الجبر الخطي تتبع من النظرية 20.2.8!

16.2.8. ملاحظة. اصطلاحات للرموز. تستخدم الحروف الغامقة **I, B, C** لعائلات المجموعات الجزئية من E، وهذا يسمح بكتابة $C \in \mathbf{C}$، $B \in \mathbf{B}$، $I \in \mathbf{I}$ للتدليل على أعضاء هذه العائلات أو عناصرها. ترمز الحروف الرومانية I,B,C,R إلى الخواص التي تعطينا ماترويدات. ونستخدم e, f, x, y بوصفها عناصر في E و $X, Y,$ F للتدليل على المجموعات الجزئية من E. ■

كل عائلة وراثية مع من المجموعات المستقلة لنظام وراثي. ونقول: إن الجمع **B** قابل للتحقق بوصفه مجموعة أساس لنظام وراثي إذا وفقط إذا كان **B** غير خالٍ، وكان كل عنصر في **B** لا يحوي أي عنصر آخر من عناصرها، إضافة إلى أن الجمع **C** يكون قابلاً للتحقق بوصفه مجموعة حلقات لنظام وراثي إذا وفقط إذا كانت عناصر هذا الجمع غير خالية، وكان كل عنصر فيه لا يحوي أي عنصر آخر من عناصره.

إن توصيف دالة الرتبة يكون أكثر دقةً؛ لأنه يشمل الخاصيتين ($r1$ و r2 أدناه) اللتين نحتاج إليهما، بالإضافة

إلى شرط تقني آخر يجبر r أن تكون دالة رتبة لنظام وراثي M معرف على $\{X \subseteq E : r(X) = |X|\}$ $I_M =$.

17.2.8. تمهيدية : لدالة الرتبة r على نظام وراثي E يكون:

$r(\emptyset) = 0$ (r1).

$r(x) \leq r(X+e) \leq r(X)+1$ (r_2) عندما $X \subseteq E$ و $e \in E$

الإثبات: من تعريف $r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathbf{I}\}$، نجد أن $r(\emptyset) = 0$. وبما أن $X+e$ تحوي كل مجموعة مستقلة من X، فإن $r(X+e) \geq r(X)$، وبما أن المجموعات الجزئية المستقلة من $X+e$ وغير المحتواة في X تتألف من e بالإضافة إلى مجموعة جزئية مستقلة من X، فإن $r(X+e) \leq r(X)+1$. ■

خواص الماترويدات (properties of Matroids)

لقد لاحظنا أن العديد من الشروط المتكافئة على الأنظمة الوراثية تعطي ماترويدات. وبإمكاننا أن نبرهن أن نظامًا وراثيًّا يكون ماترويد، من خلال إثبات تحقق أحد هذه الشروط، ونستطيع بعد ذلك استخدام هذه الشروط المتكافئة جميعها دون إعطاء أي براهين إضافية. ولقد حصلنا على الفائدة نفسها من التوصيفات المتكافئة للأشجار.

إن إضافة ضلع واحد إلى غابة يولد حلقةً واحدةً على الأكثر، وبعمومية أكثر، فإن إضافة عنصر واحد إلى مجموعة مستقلة في ماترويد يعطينا حلقة واحدة على الأكثر، ولبرهنة الخوارزمية الجشعة للأشجار المولدة (النظرية 3.3.2.)، استخدم هذه الخاصية فقط. إن خاصية «الحلقات المستحدثة» هي أحد الشروط المميزة للماترويدات، وذلك كما في تأثير الخوارزمية الجشعة نفسها! الخاصيتان تظهران في قائمتنا.

إذا أعطينا أوزانًا لعناصر الماترويد، فإن الخوارزمية الجشعة هي عبارة عن ضم عنصر له وزن أكبر غير سالب؛ لأن إضافة هذا العنصر إلى مجموعة مستقلة تم اختيارها سابقًا يعطينا مجموعة مستقلة أكبر. لقد أثبت رادو ((Rado (1957)) أن الماترويدات هي الأنظمة الوراثية تمامًا التي تختار فيها الخوارزمية الجشعة مجموعة مستقلة موزونة كبرى بصرف النظر عن اختيار الأوزان.

18.2.8. تعريف: يكون النظام الوراثي M على E ماترويد إذا حقق الخواص الإضافية الآتية، حيث تمثل I, B, C, وr مجموعات مستقلة، وأساسات، وحلقات، ودالة رتبة لـ M على الترتيب:

I: **التوسيع:** إذا كانت كلّ من $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ حيث $|I_2| > |I_1|$، فإن $I_1+e \in \mathbf{I}$ لبعض $e \in I_2 - I_1$.

U: **الانتظام** لكل $X \subseteq E$: إن المجموعات الجزئية الأعظمية من X التي تنتمي إلى $\mathbf{I}$ لها الحجم نفسه.

B: **تبادل الأساس:** إذا كانت كلّ من $B_1 B_2 \in \boldsymbol{B}$، فإن لكل $e \in B_1 - B_2$ يوجد $f \in B_2 - B_1$ بحيث إن $B_1 - e + f \in \boldsymbol{B}$.

R: **المقياسية الجزئية:** $r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \leq r(X) + r(Y)$ وذلك عندما $X, Y \subseteq E$.

A: **الامتصاص الضعيف:** إن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$ يعطي $r(X+e+f) = r(X)$ عندما $X \subseteq E$ و $e,f \subseteq E$.

A′: **الامتصاص القوي:** إذا كانت كلّ من $X,Y \subseteq E$ و $r(X+e) = r(X)$ لكل $e \in Y$، فإن $r(X \cup Y) = r(X)$

C: **الحذف الضعيف:** للحلقات المستقلة $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C}$ و $x \in C_1 \cap C_2$، عندها يوجد عضو آخر في C محتوى في $C_1 \cup C_2 - x$.

J: **الحلقات المستحدثة :** إذا كانت $I \in \mathbf{I}$، فإن $I + e$ تحوي حلقة واحدة على الأكثر.

G: **الخوارزمية الجشعة :** لكل دالة وزن غير سالب على E، تختار الخوارزمية الجشعة مجموعة مستقلة ذات وزن كلي أعظم. وتشير خاصية تبديل الأساس إلى أن الأساسات جميعها لها الحجم نفسه؛ فإذا كانت $|B_1| < |B_2|$ لبعض $B_1, B_2 \in \boldsymbol{B}$ ، فبإمكاننا القيام بتكرار خطوات لتبديل عناصر B_1-B_2 بعناصر B_2-B_1 للحصول على أساس حجمه $|B_1|$ محتوى في B_2 ، ولكن لا يوجد أي أساس محتوى في أساس آخر.

19.2.8.* ملاحظة. رتبة المجموعة X في ماترويد متجه هي بعد الفضاء الذي تولده X. وأن المقياسية الجزئية تتصل بصيغة البعد للفضاءات الجزئية: $\dim U \cap V + \dim W = \dim U + \dim V$، حيث إن W هي الفضاء الذي تولده $U \cup V$. عندما تكون X و Y مجموعتين مولدتين في U و V، فإن بعد الفضاءات الذي تولده $X \cap Y$ ربما يكون أقل من $\dim U \cap V$. وعلى الرغم من ذلك، فإن $\dim U \cap V + \dim W \leq \dim U + \dim V$ تتحقق لفضاءات المتجهات باستخدام إثبات $U \Leftarrow R$ أدناه. لاحظ أن التمرين العاشر يحصل على المقياسية الجزئية مباشرة لماترويدات الحلقات.

لقد استُخدم العديد من هذه الخواص (بالإضافة الى متطلبات الأنظمة الوراثية) بوصفها شرطًا معرفًا للماترويدات تشمل الأمثلة I. (حتى تظهر) Schrijver [1976] Welsh. و Edmonds 1965b,c، U و Bixby [1981] و Nemhauser– wolsey [1988] و A و Whitney [1935] و Tutte [1970] C و G. -Papadimitrious steiglitz [1982] وآخرون مثل Van der Waerden [1937] و Rota [1964] و Crapo-Rota [1970] و Aigner [1979]. ■

يضمُّ العديد من الكتاب الخواص الأساسية للأنظمة الوراثية في مجموعة الفرضيات التي تصف وجهًا معينًا للماترويد. قد يصرف هذا الذهنَ عن الخواص الإضافية للماترويدات، مما يؤدي إلى القيام بشغل إضافي. إن البدء بالأنظمة الوراثية يعطينا أدق البراهين، فضلًا عن أن خواص الأنظمة الوراثية متوافرة دائمًا.

20.2.8. نظرية: لنظام وراثي M، الشروط المعرِّفة للماترويدات في التعريف 18.2.8 متكافئة.

الإثبات : $U \Leftarrow B$. من خاصية الانتظام (الاتساق) لـ $X=E$، فإن للأساسات جميعها الحجم نفسه. الآن، طبق الانتظام على المجموعة $(B_1 - e) \cup B_2$ ، وهذا يؤدي إلى توسيع المجموعة المستقلة B_1-e من B_2 لتصل إلى حجم $|B_2|$.

$B \Leftarrow I$ إذا أعطينا مجموعتين مستقلتين $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ حيث $|I_2| > |I_2|$ ، فإننا نختار $\mathbf{B_1, B_2 \in B}$، بحيث إن $I_2 \subseteq B_2$ و $I_2 \subseteq B_2$. نستخدم تبديل الأساس بحيث تحلّ عناصر $B_1 - I_1$ خارج B_2 محلّ عناصر B_2. لذا، يمكننا أن نفترض أن $B_1 - I_1 \subseteq B_2$. إذا كانت $B_1 - I_1 \subseteq B_2 - I_2$ ، فإن $|B_2| < |B_1|$ ، وهذا ممنوع من قبل خاصية تبديل الأساس كما لاحظنا أعلاه. لذا يوجد لـ I_2 عنصر في $B_1 - I_1$ ، حيث نستخدم هذا العنصر لتوسيع I_1.

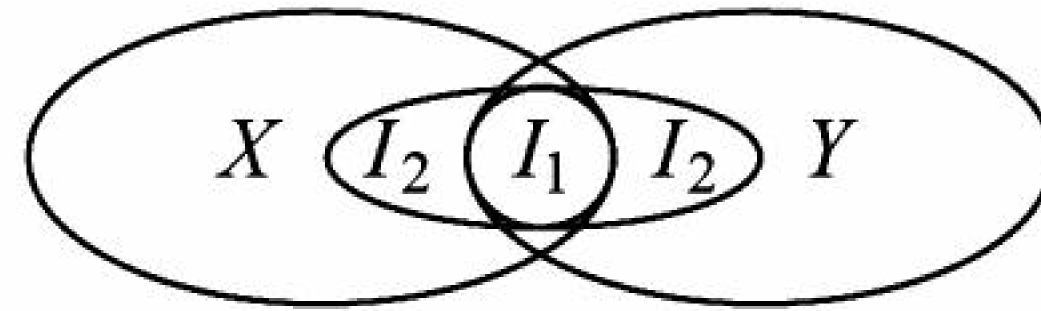
$I \Leftarrow A$. افترض أن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$. إذا كانت $r(X+e+f) > r(X)$ ، فافترض أن I_1, I_2 عبارة عن مجموعتين جزئيتين مستقلتين عظميين من X ومن $X+e+f$. الآن، $|I_2| > |I_1|$ ، وبإمكاننا توسيع I_1 من I_2. وبما أن I_1 مجموعة جزئية مستقلة عظمى من X، فإن التوسيع يمكن أن يضيف e أو f فقط، وهذا يناقض افتراض أن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$.

$A \Leftarrow A'$. نستخدم الاستقراء على $|Y - X|$. إن النتيجة تمهيدية عندما $|Y - X| = 1$. عندما $|Y - X| > 1$، اختر $e, f \in Y - X$، وافترض أن $Y' = Y - e - f$. وبتطبيق فرضية الاستقراء على المجموعات الجزئية الفعلية لـ Y ، نجد أن $r(X) = r(X \cup Y') = r(X \cup Y' + e) = r(X \cup Y' + f)$. الآن، لاحظ أن الامتصاص الضعيف يعطينا أن $r(X) = r(X \cup Y)$.

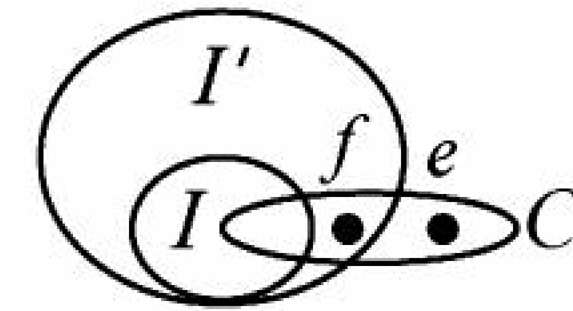
$A' \Leftarrow U$. وإذا كانت y مجموعة جزئية مستقلة عظمى من X، فإن $r(Y + e) = r(Y)$ لكل $e \in X - Y$ ومن الامتصاص القوي، نجد أن $|Y| = r(Y) = r(X)$. لذا، فإن كل مجموعةٍ مثل Y لها الحجم نفسه.

$U \Leftarrow R$. إذا أُعطيت $X, Y \subseteq E$، فاختر مجموعة مستقلة عظمى I_1 من $X \cap Y$ من الانتظام، يمكن تكبير I_1 لتكون مجموعة جزئية مستقلة كبرى من $X \cup Y$، ولتكن هذه المجموعة I_2، خذ في الحسبان $I_2 \cap X$ و $I_2 \cap Y$، وهذه مجموعات جزئية مستقلة من X و Y، وكل منها يحوي I_1. لذا، فإن:

$$r(X \cap Y) + r(X \cup Y) = |I_1| + |I_2| = |I_2 \cap X| + |I_2 \cap Y| \leq r(X) + r(Y).$$



U ⇒ R



J ⇒ G

$C \Leftarrow R$ لتكن $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C}$، و $x \in C_1 \cap C_2$. لدينا $r(C_1) = |C_1|-1$، و $r(C_2) = |C_2|-1$، وكذلك $r(C_1 \cap C_2) = |C_1 \cap C_2|$؛ لأن كل مجموعة جزئية فعلية من حلقة تكون مجموعة مستقلة. إذا خلت $(C_1 \cup C_2)-x$ من حلقة، فإن $r((C_1 \cup C_2) - x) = |C_1 \cup C_2| -1$. ولذلك فإن $r(C_1 \cup C_2) \geq |C_1 \cup C_2|-1$، وبتطبيق المقياسية الجزئية على C_1 و C_2 نحصل على التناقض:

$$|C_1 \cap C_2|+|C_1 \cup C_2|-1 \leq |C_1|+|C_2|-2$$

$C \Leftarrow J$. إذا كانت $I+e$ تحوي C_1، و C_2 في $\boldsymbol{C}$ لبعض $I \in \boldsymbol{I}$، فإن كلًّا من C_1 و C_2 تحوي $\boldsymbol{e}$. الآن، يضمن الحذف الضعيف وجود حلقة في $(C_1 \cup C_2)-e$. ومن جهة أخرى، فإن $(C_1 \cup C_2)-e$ تكون مستقلة لكونها محتواة في I.

$J \Leftarrow G$. لدالة الوزن w، افترض أن I هي مُخرَج الخَوارزمية الجشعة. من بين المجموعات المستقلة ذات أكبر وزن، اجعل I^* واحدة لها أكبر تقاطع مع I. إن الخوارزمية لا تنتهي بـ $I \subset I^*$. إذا كانت $I \neq I^*$، فافترض أن e هي أول عنصر في $I - I^*$ تم اختياره من قبل الخوارزمية. ومن خيار I^*، نجد أن I^*+e مجموعة غير مستقلة. لذا، توجد فيها حلقة وحيدة C. وبما أن $C \not\subseteq I$، فبإمكاننا اختيار $f \in C - I$. وبما أن I^*+e لا تحوي أي حلقة أخرى، فإن $I^* + e\text{-}f \in \boldsymbol{I}$. إن أمثلية $\boldsymbol{I^*}$ تعطينا أن $w(f) \geq w(e)$. وبما أن f وعناصر I التي تم اختيارها قبل e جميعها تقع في I^*، فإن f لا تُكمل حلقة مع هذه العناصر. وإذا كانت $\boldsymbol{f}$ متوافرة عند قيام الخوارزمية باختيار $\boldsymbol{e}$، فهذا يعطي أن $w(f) \leq w(e)$. الآن، $w(f) = w(e)$ و $w(I^* + e\text{-}f) = w(I^*)$. ومع $\big||I^* + e - f \cap I|>|I^* \cap I|\big|$، فإن هذا يناقض خيار I^*. لذا، فإن $I^* = I$.

$G \Leftarrow I$ افترض أن $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ حيث $k = |I_1|<|I_2|$.

سنصمّم دالة وزن بحيث إن نجاح الخوارزمية الجشعة بالنسبة إلى هذه الدالة يعطينا التوسعة المنشودة. افترض أن $w(e) = k + 2$ حيث $e \in I_1$، واجعل $w(e) = k + 1$ إذا كانت $e \in I_2\text{-}I_1$. واجعل $w(e) = 0$ إذا كانت $e \notin I_1 \cup I_2$. الآن $w(I_2) \geq (k + 1)^2 > k(k + 2) = w(I_1)$ لذا، فإن I_1 ليست مجموعة مستقلة ذات وزن أكبر. على أيّ حال، فإن الخوارزمية الجشعة تختار كل عنصر من عناصر I_1 قبل أي عنصر من عناصر $I_2 - I_1$. وبما أنها تجد مجموعة مستقلة لها وزن أكبر، فإنها تستمر بعد امتصاص I_1، وتضيف عنصرًا $e \in I_2 - I_1$، حيث $I_1 + e \in \mathbf{I}$. ■

تنويه: غالبًا ما نستخدم خاصية التوسيع في برهنة أن نظامًا وراثيًّا هو ماترويد.

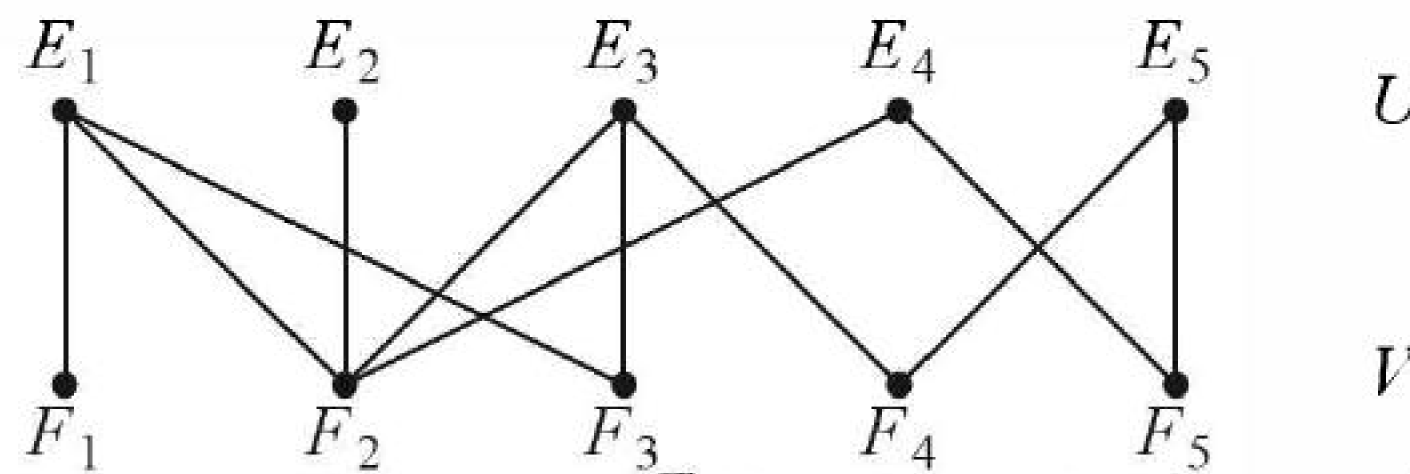
21.2.8. مثال: يعرف الماترويد الموحد الذي رتبته k، والذي يرمز إليه بالرمز $U_{k,n}$ عندما $|E| = n$ على الشكل $I = \{X \subseteq E: |X| \leq k\}$. هذا التعريف يحقق مباشرة خواص التوسيع وتبادل الأساسات، وتستخدم الماترويدات الموحدة في بناء ماترويدات ممتعة أكثر، وفي توصيف صفوف الماترويدات. تكون بعض الماترويدات الموحدة بيانية، وبعض الماترويدات البيانية تكون موحدة (تمرين 6). لاحظ أن لا $M(K_4 - e)$ ولا $M(K_4)$ ماترويد موحد (منتظم أو متسق).

الماترويد الخطي القابل للتمثيل على الحقل Z_2 أو على الحقل Z_3 يكون ثنائيًّا أو ثلاثيًّا على الترتيب. ويكون كل ماترويد بياني ثنائيًّا (التمرين 43) فضلًا عن أن $U_{2,4}$ هو ماترويد ثلاثي (التمرين 44) وليس ثنائيًّا. وبناءً على ذلك، فهو ليس بيانيًّا). ■

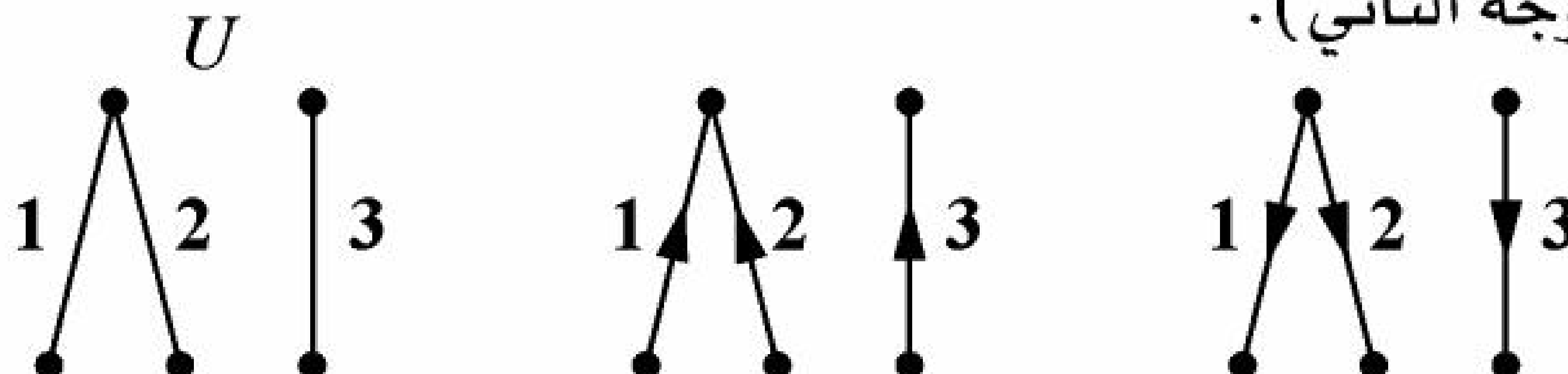
22.2.8. مثال: يعرف ماترويد التجزئة على E المستحدث عن طريق تجزئة E إلى قوالب $E_1, \ldots, E_k$ على الشكل $\mathbf{I} = \{X \subseteq E: |X \cap E_i| \leq 1, \forall\, i\}$.

وبما أن $\varnothing \in \mathbf{I}$ ، وأن $X \in \mathbf{I}$ عندما تقع عناصرها في قوالب مختلفة، فإن $\mathbf{I}$ عائلة وراثية. إذا أُعطينا $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ حيث $|I_2| > |I_1|$، فإن المجموعة I_2 يجب أن تتقاطع مع قوالب أكثر من القوالب التي تتقاطع معها I_1؛ لاحظ أننا نحصل على التوسعة المنشودة لـ I_1 عن طريق أحد عناصر I_2 الموجودة في قالب لا يتقاطع مع I_1. ومن جانب آخر، فإن $r(X)$ هي عدد القوالب التي لها عناصر في X، وهذا يحقق خاصية الامتصاص. (لاحظ أن $M(K_4 - e)$ ليس ماترويد تجزئة).

إذا أعطينا بيانًا ثنائيًّا G، مجموعتا رؤوسه هما: U, V، فإن الوقوعات (الأضلاع التي تقع) على $U = u_1, \ldots, u_k$ تُعرِّف ماترويد تجزئة على $E(G)$ (يختلف هذا عن الماترويد المستعرض على U المستحدث من قبل G). إن القوالب هي المجموعات $E_i = \{e \in E(G): u_i \in e\}$. وأن المجموعة $X \subseteq E(G)$ تكون متوائمة في G إذا وفقط إذا كانت X مستقلة في ماترويد التجزئة الذي تُحدثه U، وفي ماترويد التجزئة الذي تُحدثه V كذلك. وهذا هو الدافع لمناقشة ماترويد التقاطع فيما بعد.



وفي الحالة التي يكون فيها G حلقة فردية، فلا توجد لـ G مجموعة رؤوس، حيث إن مجموعات وقوعها تجزئ $E(G)$. وعلى أي حال، فإن لكل ضلع في البيان الموجه رأسًا وذيلاً. وبإمكاننا تعريف كلّ من ماترويد تجزئة الرؤوس، وماترويد تجزئه الذيول باستخدام تجزئة الأضلاع التي تُحدثها الوقوعات على كل من الرؤوس والذيول. (مثال: إن الماترويد الموجود في المثال 3.2.8. يظهر بوصفه ماترويد التجزئة على E الذي تحدثه U في البيان الثنائي الفرع الموضح أدناه، وبوصفه ماترويد تجزئة الرؤوس في البيان الموجه الأول، وبوصفه ماترويد تجزئة الذيول في البيان الموجه الثاني). ■



الدالة المولدة (The Span Function)

سَنُقدم فيما يأتي العديد من الجوانب الإضافية للأنظمة الوراثية وخواص الماترويدات المتعلقة بها. وسنستخدم هذه الجوانب لتوضيح ثَنوية الماترويدات التي تؤدي إلى توصيف البيانات السوية باستخدام الماترويدات.

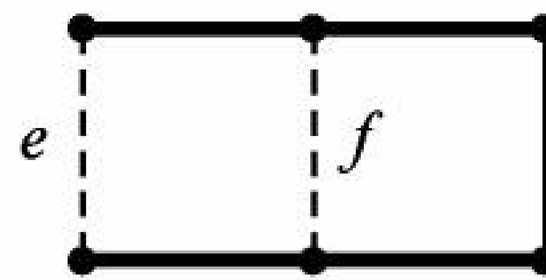
يعمم المفهوم الجبري للفضاء الذي "تولده" مجموعة من المتجهات على الأنظمة الوراثية. إن التعريف مستوحى من ماترويدات الحلقات؛ أيُّ مجموعة تولد نفسها، وتولد العناصر التي تُتم حلقات مع مجموعاتها الجزئية أيضًا.

23.2.8. تعريف: إن الدالة المولدة لنظام وراثي M هي عبارة عن الدالة σ_M المعرّفة على المجموعات الجزئية من E على الشكل الآتي:

$\sigma_M(X) = X \cup \{ e \in E : y + e \in C_M\}$ لبعض $Y \subseteq X$. إذا كان $e \in \sigma(X)$، فإن X تولد e

في نظام وراثي، تكون X غير مستقلة إذا وفقط إذا كانت تحوي حلقة، ومن التعريف **23.2.8**. تعلم أن هذا يتحقق إذا وفقط إذا تحقق أن $e \in \sigma(X - e)$ لبعض $e \in X$. لذا، نستطيع إيجاد المجموعات المستقلة من الدالة المولدة عن طريق $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E : (e \in X) \Rightarrow (e) \notin \sigma(X - e)\}$ إن خواص الدوال المولدة التي نستخدمها في دراستنا للماترويدات هي: (s1,s2,s3) أدناه (بالإضافة أننا نحتاج إلى شرط تقني إضافي لتوصيف الدوال المولدة للأنظمة الوراثية). سنوضح أولًا الخاصية s3 باستخدام البيانات.

24.2.8. مثال: في ماترويد الحلقات $M(G)$، إن معنى $e \notin \sigma(X)$ هو عدم وجود مسار في X بين طرفي e. وإذا كانت $e \in \sigma(X+f)$، فإن إضافة f تُتم مثل هذا المسار. ويُتم المسار حلقةً مع e، وكذلك فإن $f \in \sigma(X+e)$. في الشكل أدناه، تتألف X من أربعة أضلاع غامقة. ■



25.2.8. قضية. تتحقق الخواص الآتية إذا كانت σ هي الدالة المولدة لنظام وراثي على E، وكانت $X, Y \subseteq E$:

(a $X \subseteq \sigma(X)$ (σ قابلة للتمدد).

(b $Y \subseteq X$ تعطي أن $\sigma(Y) \leq \sigma(X)$ (σ تحافظ على الترتيب).

(c $e \notin \sigma(X)$ و $e \in \sigma(X + f)$ تعطي أن $f \in \sigma(X + e)$ (تبادل ستاينتز) **(Stintiz exchange).**

الإثبات: يعطينا التعريف 23.2.8. فورًا أن σ قابلة للتمدد، فضلًا عن أنها تحافظ على الترتيب. فإذا كان $e \in \sigma(X + f)$، فإن e ينتمي إلى حلقة C في $X+f+e$ وإذا كان $e \notin \sigma(X)$، فإن $f \in C$. إن هذه الحلقة تعطي أن $f \in \sigma(X + e)$. إذن، فإن σ تحقق خاصية تبادل ستاينتز. ■

إن خواص الدالة المولدة تقود إلى إثبات قصير لصورة أقوى من خاصية الحذف. وتنص خاصية الحذف الضعيف على أنه عندما تكون $e \in C_1 \cap C_2$، فهذا يعني وجود حلقة في $(C_1 \cup C_2)$-e. إن ماترويدات الحلقات

تتمتع بالخاصية الأكثر قوة التي تقول بأن $C_1 \Delta C_2$ يكون اتحادًا لحلقات منفصلة ضلعيًّا؛ لأن درجةَ كل رأس في $C_1 \Delta C_2$ زوجيةٌ. إن الماترويدات العامة تتمتع بالخاصية المتوسطة التي تقول إن عناصر الفرق التماثلي جميعها تنتمي إلى حلقات في $(C_1 \cup C_2)$-e عندما يكون $e \in C_1 \cap C_2$ (خاصية C' أدناه). ونحتاج إلى خاصية تربط بين الرتبة والتوليد في الأنظمة الوراثية. إن صحة العكس هي توصيفنا التالي للماترويدات.

26.2.8.* تمهيدية. في نظام وراثي، $[r(x + e) = r(x)] \Rightarrow e \in \sigma(x)$.

الإثبات: افترض أن Y مجموعة جزئية مستقلة كبرى من X. وبما أن $|Y| = r(X) = r(X + e)$، فإن Y تكون مجموعة جزئية مستقلة كبرى من $X + e$. لذا، فإن e تتم حلقة مع مجموعة جزئية من X محتواة في Y، و$e \in \sigma(X)$. ■

27.2.8. نظرية*. إذا كان M نظامًا وراثيًّا، فإن كل شرط من الشروط المعطاة أدناه شرط ضروري وكاف ليكون M ماترويد.

P: **الشراكة (الاندماج)** - $r(\sigma(X)) = r(X)$ لكل $x \subseteq E$

S: **جمود (حيود):** $\sigma^2(X) = \sigma(X)$ لكل $X \subseteq E$

T: **تعدي الاعتماد** (عدم الاستقلال): إذا كان $e \in \sigma(X)$ و $X \subseteq \sigma(Y)$، فإن $e \in \sigma(Y)$.

C': **الحذف القوي:** عندما $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$، و $e \in C_1 \cap C_2$، و $f \in C_1 \Delta C_2$ فإنه يوجد $C \in \mathbf{C}$ بحيث إن $f \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

الإثبات: $U \Leftarrow P$. يتم كل عنصر في $X - \sigma(X)$ حلقة مع مجموعة جزئية من X، وبذلك يقع في مُولِّد كل مجموعة بين X و $\sigma(X)$. لذا، يكفي أن نبرهن أن $r(Y + e) = r(Y)$ عندما $e \in \sigma(y)$. افترض أن Z مجموعة جزئية من Y، بحيث إن $C \in Z + e$. وسع Z إلى مجموعة جزئية I مستقلة كبرى من $Y + e$ من خاصية الانتظام $|I| = r(Y + e)$. وبما أن $C \in Z + e$، فإن $e \notin I$. لذا، $I \subseteq Y$، و $r(Y) \geq |I| = r(Y + e)$، (يمكن استخدام خاصية الامتصاص بدلاً من ذلك).

$P \Leftarrow S$. بما أن σ قابلة للتمدد، فإن $\sigma^2(X) \subseteq \sigma(X)$، ونحتاج فقط إلى برهنة تعطينا أن $e \in \sigma^2(X)$. من خاصية الاندماج (الشراكة) $r(\sigma(X) + e) = r(\sigma(X))$ و $r(\sigma(X)) = r(X)$. وبما أن المساواة تتحقق في كل ما سبق، فإن التمهيدية 26.2.8 تعطينا أن $e \in \sigma(X)$.

$S \Leftarrow T$. إذا كانت $X \subseteq \sigma(Y)$، فإن خواص الجمود والمحافظة على الترتيب لـσ تعطينا أن $\sigma(X) \subseteq \sigma^2(Y) = \sigma(Y)$.

$T \Leftarrow C'$. إذا أعطينا C_1 و C_2، في $\mathbf{C}$، بحيث إن $C_1 \neq C_2$، و $e \in C_1 \cap C_2$، و $f \in C_1 - C_2$، نريد أن تكون f في $\sigma(Y)$، حيث $Y = (C_1 \cup C_2) - e - f$. نعلم أن $f \in \sigma(X)$ حيث $X = C_1 - f$.

من T، يكفي أن نبرهن أن $X \subseteq \sigma(Y)$. وبما أن $X - e \subseteq Y \subseteq \sigma(Y)$، فإننا نحتاج فقط إلى برهنة أن $e \in \sigma(Y)$، وبما أن σ تحافظ على الترتيب، فإن $e \in \sigma(C_2 - e) \subseteq \sigma(Y)$.

$C' \Leftarrow C$ إن C أقل تقييدًا (حصرًا) من العبارة C'. ■

كمثل خاصية وحدانية الحلقات المستحدثة (J)، فإن خاصية الاندماج (P) تربط بين وجهين من أوجه الأنظمة الوراثية، وهذه الخواص معروفة للماترويدات، ومن خلال الاقتراب عن طريق الأنظمة الوراثية تصبح هذه الخواص توصيفات مُميزة. ويعدُّ لهمان (Lehman (1964)) أول من أثبت تكافؤ C و C'.

إن الجمود (الحيود) يحصل بصورة طبيعية للماترويدات الخطية والبيانية. وأن مولّد مجموعة متجهات لا يحوي أي شي إضافي فيما يولده. وبالمثل، فإنه يمكن إضافة كل ضلع لمولّد مجموعة أضلاع تربط بين مركبتين.

وهذا يقترح السماتِ المتقاربةَ للأنظمة الوراثية.

28.2.8. تعريف: المجموعات المولدة لنظام وراثي على E هي المجموعات $X \subseteq E$ بحيث إن $\sigma(X) = E$. أما المجموعات المغلقة، فهي المجموعات $X \subseteq E$ بحيث إن $\sigma(X) = X$ (تسمى أيضًا مُسطحات أو فضاءات جزئية). في حين تشير المستويات الزائدية إلى المجموعات الجزئية فعلاً المغلقة الأعظمية لـE.

29.2.8.* ملاحظة: تسمى الدالة المولدة لماترويد دالةَ غُلاقة، ومؤثر الغلاقة هو دالةَ قابلة للتمدد، ومحافظة على الترتيب، وجامدة من عائلة المجموعات الجزئية إلى نفسها. ويكون مؤثر الغلاقة دالة مولدة لماترويد إذا وفقط إذا كانت له خاصية تبادل ستاينتز.

في كل نظام وراثي، نعلم أن الدالة المولدة تحقق خاصية تبادل ستاينتز. لذا، فإن معاملة الماترويدات بوصفها أنظمة وراثية ذات خواص إضافية غير مناسبة لدراسة مؤثرات الإغلاق، حيث إن الدالة المولدة لنظام وراثي M تكون مؤثر إغلاق إذا وفقط إذا كان M ماترويد. لقد طُورت الماترويدات من نظرية الشبكيات من قبل ماكلين (Maclane[1936]) وروتا Rota [1964]) وإيجنر (Aigner [1979]).

لم نأخذ في الحسبان العلاقات جميعها بين سمات الماترويدات، وقد قدّم بريلاوسكي (Brylawski,[1986]) مصفوفة تصف التحويلات بين حوالي اثنتي عشرة سمة من سمات الماترويدات، وقد سمى هذه التطبيقات (Maps) باسم الاقترانات السرية (المشفرة) (Cryptomorphism). ■

ثنوي الماترويد (The Dual of a Matroid)

الثنوية (الازدواجية) في الماترويدات تُعمم هذه الصفة في البيانات السوية، يوجد لكل بيان مستوى مترابط G بيان ثنائي طبيعي G^*، بحيث إن $G = (G^*)^*$. يمكن تشكيل الثنوي G^* من خلال ربط رأس لـG^* أو تحديده مع كل وجه من أوجه G، وشمول ضلع ثنوي e^* لكل ضلع من أضلاع G. بحيث إن طرفي الضلع e^* هما الرأسان المرتبطان بالوجهين الموجودين على جانبي e.

إن مجموعة من الأضلاع في بيان مستوى G تشكل شجرة مولدة إذا وفقط إذا شكلت الأضلاع الثنوية للأضلاع المتبقية في G شجرة مولدة في G^* (التمرين 21.2.6.). لذا، فإن الأساسات في ماترويد الحلقات $M(G^*)$ هي متممات الأساسات في $M(\mathbf{G})$، نعرِّف الثنوية لكل من الماترويدات والأنظمة الوراثية بحيث يمكن تعميم هذه الخصائص على البيانات السوية.

30.2.8. تعريف: الثنوي لنظام وراثي M على E هو النظام الوراثي M^*، حيث أساساته متممات أساسات M، والسمات $\mathbf{B}^*(\mathbf{B}_{M^*})$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{I}^*$, r^*, σ^* لـ M^* هي مرافقات الأساسات، ومرافقات الحلقات ...إلخ لـM أيضًا.

الأساسات الجزئية S لـM هي المجموعات التي تحوي أساسًا. أما التحت أساسات (hybobases) H فهي مجموعات أعظمية لا تحوي أي أساس. ونكتب $\overline{X}$ للتدليل على $E - X$.

31.2.8. تمهيدية: إذا كان M نظامًا وراثيًّا، فإن:

a) $\mathbf{B}^* = \{\overline{B} : B \in \mathbf{B}\}$ و $(M^*)^* = M$.

b) $\boldsymbol{I}^* = \{\overline{S} : S \in \mathbf{S}\}$ و $\boldsymbol{S}^* = \{\overline{\mathrm{I}} : \mathrm{I} \in \mathbf{I}\}$

c) $\boldsymbol{C}^* = \{\overline{H} : H \in \mathbf{H}\}$ و $\boldsymbol{H}^* = \{\overline{C} : C \in \mathbf{C}\}$

الإثبات: العبارة حول $\mathbf{B}^*$ هي تعريف M^*، وهذا يعطينا فورًا أن $M = (M^*)^*$، وكذلك يبرهن فرعي الفرع (b). كذلك، فإن X تكون مجموعة جزئية (فعلية) أعظمية من E لا تحوي أي أساس (تحت أساس) إذا وفقط إذا كانت $\overline{X}$ مجموعة غير خالية أصغرية وغير محتواة في مرافق أساس، وهي حلقة في M^*. وبالمثل، فإن تحت الأساسات لـM^* هي متممات حلقات M. ■

لقد اخترنا "الأساس الجزئي" و "التحت أساسي" لتشترك في الأحرف الأولية من "مولدة" و "مستوى زائدي"؛ لأن المجموعات المولدة والأساسات الجزئية هي نفسها للماترويدات، وكذلك الأمر بالنسبة إلى المستويات الزائدية والتحت أساسات.

32.2.8. تمهيدية: إذا كان M ماترويد ، فإن الأساسات الجزئية هي الأشجار المولدة، والتحت أساسات هي المستويات الزائدية.

الإثبات: نعلم أن مجموعة X تكون مولدة إذا وفقط إذا تحقق أن $\sigma(X) = E$. ومن خاصية الاندماج، فإن هذا يكافئ $r(X)= r(E)$، وأما من خاصية الانتظام، فإن هذا يكافئ أن X تحوي أساسًا. بالنسبة إلى المستويات الزائدية؛ انظر التمرين 32.

افترض أن $B_1,B_2 \subseteq E$. إذا لم تكن أي من B_1 أو B_2 تحوي الأخرى، فإن الأمر ينطبق أيضًا على $\overline{B}_1$ و $\overline{B}_2$. لذا، فإن ثنوي النظام الوراثي يكون نظامًا وراثيًا، ويصبح مفهوم الثنوية مفيدًا عندما نبرهن أن ثنوي الماترويد هو ماترويد. وهذا يتبع بسهولة من نسخة الثنوية المتعلقة بخاصية تبديل الأساس.

33.2.8. تمهيدية: إذا كان M ماترويد، وكانت كلّ من $B_1,B_2 \in \mathbf{B}$، فلكل $e \in B_1\text{-}B_2$ يوجد $f \in B_2$ بحيث إن B_2+e-f أساس.

الإثبات: بما أن B_2 أساس، فإن B_2+e تحوي حلقة C. وبما أن B_1 مستقلة، فإن C تحوي عنصرًا $f \in B_2-B_1$. الآن، $B_2+e\text{-}f$ لا تحوي أي حلقة، وحجمها يساوي $r(E)$. ■

34.2.8. نظرية. (Whitney [1935]) الثنوي لماترويد M على E هو ماترويد دالة رتبته $r^*(X) = |X|-(r(E)-r(\overline{X}))$.

الإثبات: لقد لاحظنا أن M^* نظام وراثي. الآن، سنبرهن خاصية تبادل الأساس لـM^*. إذا كانت كل من $B^*_1 + B^*_2 \in \mathbf{B}^*$، و $e \in \overline{B}_1 - \overline{B}_2$، فإن $B_1 + B_2 \in \mathbf{B}$ حيث $e \in B_2 - B_1$. من التمهيدية 23.2.8، يوجد $f \in B_1 - B_2$، بحيث إن $B_1 + e - f \in \mathbf{B}$. الآن، $\overline{B}_1 - e + f \in \mathbf{B}^*$ تمثل التبادل المنشود.

لحساب $r^*(X)$، اجعل Y تساوي مرافق مجموعة جزئية مستقلة أعظمية من X. لذا، فإن $r^*(X) = r^*(Y) = |Y|$ من التمهيدية 31.2.8، نجد أن $\overline{Y}$ مجموعة أصغرية حاوية لـ$\overline{X}$ تحوي أساسًا لـM. وبما أن $\overline{Y}$ تظهر من $\overline{X}$ عن طريق توسيع مجموعة جزئية مستقلة أعظمية من $\overline{X}$ لتصبح أساسًا، فسنحصل على $|\overline{Y}| - |\overline{X}| = r(E) - r|\overline{X}|$. إن العبارة $|Y| - |\overline{X}| = |X| - |\overline{Y}|$ تعطينا الصيغة المنشودة وهي:

$r^*(X) = |Y| = |X| - (|\overline{Y}| - |\overline{Y}|) = |X| - (r(E) - r(|\overline{X}|))$. ■

بإمكاننا إعادة نص كل خاصية من خواص الماترويد باستخدام مفهوم الثنوية. يطلب التمرينان 34-33 إعطاء توصيفات مميزة للمستويات الزائدية والمجموعات المغلقة باستخدام هذه الطريقة. وتشمل النتائج الأكثر دقة على العلاقات بين الماترويد من جهة، والثنوي الخاص به من جهة أخرى.

35.2.8. قضية. (ثنوية خاصية التوسيع). افترض أن M ماترويد. إذا كانت $X \in \mathbf{I}$ و $X' \in \mathbf{I}^*$ منفصلتين، فإن $B \in \mathbf{B}$، و $B' \in \mathbf{B}^*$ منفصلان بحيث إن $X \subseteq B$ و $X' \subseteq B'$.

الإثبات: بما أن X' هي مرافق مجموعة مستقلة في M، فإن $\overline{X'}$ مجموعة مولدة في M. لذا، فكلّ مجموعة جزئية مستقلة كبرى من $\overline{X'}$ تكون أساسًا. ونوسع $X \subseteq \overline{X'}$ لتكون أساسًا لـB محتوى في $\overline{X'}$. إن مرافق الأساس $B' = \overline{B}$ يحوي X'. ■

نستخدم ماترويدات الحلقات لتوصيف البيانات السوية، والنتيجة الآتية تساعدنا على توصيف مرافقات حلقات ماترويد الحلقات.

36.2.8. قضية. مرافق حلقات الماترويد هو مجموعات أصغرية تقطع كل أساس، أما الأساسات، فهي مجموعات أصغرية تقطع مرافق كل حلقة.

الإثبات: مرافقات الحلقات هي المجموعات الأصغرية غير المحتواة في مرافق أي أساس، وبما أن مرافقات الأساسات هي متممات هذه الأساسات، فإن المجموعة تكون غير محتواة في مرافق أساس إذا وفقط إذا كانت تقطع كل أساس. وبالمثل، فإن مرافقات الأساسات هي المجموعات الأعظمية التي لا تحوي أي مرافق حلقة. لذا، فإن متممات مرافقات الأساسات هي المجموعات الأصغرية التي تقطع مرافق كل حلقة. ■

37.2.8. نتيجة: مرافقات حلقات ماترويد الحلقات $M(G)$ هي روابط G.

الإثبات: من القضية 36.2.8، نجد أن مرافقات الحلقات هي المجموعات الأصغرية التي تقطع كل غابة أعظمية. لذا، فإنها مجموعات أصغرية. وبحذفها، يزيد عدد المركبات؛ وهذه هي الروابط. ■

38.2.8. تعريف: نُعرِّف ماترويد الروابط أو ماترويد مرافق الحلقات لبيان G على أنه نظام وراثي، حلقاته روابط G.

من النتيجة 37.2.8، نعلم أن ماترويد روابط لـG هو ثنوي ماترويد الحلقات $M(G)$. الآن، ينطبق الحذف الضعيف على الروابط. وبما أن كل حلقة يجب أن تعود إلى نقطة بدايتها، فإنها لا تستطيع قطع رابطة في ضلع واحد فقط. وهذا يُعمّم على الماترويدات بوصفه توصيفًا مميزًا آخر لمرافقات الحلقات.

39.2.8. نظرية. إن مرافقات حلقات الماترويد M على E هي المجموعات الأصغرية غير الخالية $C^* \subseteq E$ بحيث إن $|C^* \cap C| \neq 1$ لكل $C \in \mathbf{C}$.

الإثبات: لبرهنة أن لكل مرافق حلقة هذه الخاصية، افترض أن $C \in \mathbf{C}$، $C^* \in \mathbf{C}^*$، $C^* \cap C = e$. لذا، فإن $C\text{-}e \in I$، و $C^*\text{-}e \in I^*$، وأن خاصية ثنوية التوسيع تعطي أن $\boldsymbol{B} \in B$ و $\overline{B} \in \mathbf{B}^*$ بحيث إن $C - e \subseteq B$، و $C^* - e \subseteq \overline{B}$، وبما أن e يجب أن تظهر في B أو في $\overline{B}$، فإننا نحصل على $\boldsymbol{I} \in C$ أو $\boldsymbol{I}^* \in C^*$. وبالعكس، سنبرهن أن كلّ مجموعة غير خالية في $\mathbf{I}^*$ تقطع بعض C في C^* في عنصر واحد، ولأنَّ مرافقات الحلقات ليست كذلك، فإن كل مجموعة أصغرية ليست كذلك تكون مرافق حلقة. اختر $X^* \in \mathbf{I}^*$، واجعل B^* مرافقَ أساس يحوي X^*، واجعل $B = \overline{B}^*$. لاحظ أن لكلٍّ $e \in X^*$، فإن $B+e$ تحوي حلقة C، وأن $X^* \cap C = \{e\}$. ■

فروع الماترويد والثنويات السَّويَّة (Matroid Minors and Planar Graphs)

من بيان G، يمكننا الحصول على بيانات أصغر عن طريق تكرار حذف الأضلاع أو تقليصها. تسمَّى البيانات الناتجة بفروع G. لقد أثبت واجنر (wagner [1937]) أن البيان G يكون سويًّا إذا وفقط إذا كان G لا يحوي K_5 أو $K_{3,3}$ بوصفه بيانًا فرعيًّا (التمرين 12.2.6). لقد خمَّن هادوايجر (Hadwiger [1943])

أن G يكون قابلاً للتلوين بـK من الألوان إذا خلا من فرع يشاكل K_{k+1}. لاحظ أن البيان البسيط يكون غابةً إذا وفقط إذا خلا من C_3 بوصفه فرعًا.

لتعميم هذه العمليات للماترويدات، نحتاج إلى معرفة تأثير كلٍّ من الحذف والتقليص في ماترويدات الحلقات. إن المجموعات الجزئية اللاحلقية لـ$E(G\text{-}e)$ هي بالضبط المجموعات الجزئية اللاحلقية لـ$E(G)$ التي تحذف (تتجنب) e. وعندما لا يكون e عروة، فإن المجموعات الجزئية اللاحلقية لـ$E(G.e)$ هي المجموعات الجزئية لـ$E(G)\text{-}e$ والتي اتحادها مع e يكون غير حلقيٍّ في G، والوصف الثنوي للتقليص أسهل، وهو أن: المجموعات المولدة لـ $G.e$ هي المجموعات التي اتحادها مع e يكون مولِّدًا في G (تعدّ المجموعة مولِّدة إذا احتوت على شجرة مولِّدة من كلِّ مركبة).

نرغب أيضًا في تعميم الرموز المستخدمة بطريقة طبيعية، إلا أنَّ هذا يسبب صعوبة لأن النقاش عن فروع البيانات غالبًا ما يتحدث عن الأضلاع المحذوفة، أما النقاش عن فروع الماترويدات، فإنه يتناول العناصر المتبقية. لذا، سنوائم بينهما من خلال استخدام رموز الماترويد للماترويد على المجموعة المتبقية، في حين نعمِّم الرموز المستخدمة للبيانات لوصف الماترويدات التي نحصل عليها بحذف عنصر واحد.

40.2.8. تعريف: افترض أن M نظام وراثيّ على E. إن حصر M على $F \subseteq E$ والذي نرمز إليه بالرمز $M|F$، ونحصل عليه بحذف $\bar{F}$، هو نظام وراثي معرَّف على الشكل $\boldsymbol{I}_{M|F} = \{X \subseteq F : X \in \boldsymbol{I}_M\}$ وإن تقليص M على $F \subseteq E$ الذي نرمز إليه بالرمز $M.F$ ونحصل عليه بتقليص $\bar{F}$ هو نظام وراثي معرَّف على الشكل $\boldsymbol{S}_{M.F} = \{X \subseteq F : X \cup \bar{F} \in \boldsymbol{S}_M\}$. وعندما F=E-e، فإننا نكتب $M - e = M \mid F$ و $M.e = M.F$. إن فروع M هي الأنظمة الوراثية التي تظهر من M باستخدام كلٍّ من الحذف والتقليص.

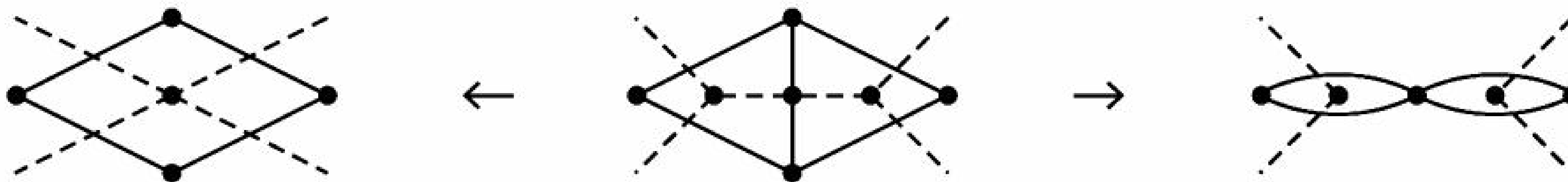
تشير التعريفات إلى أن $M|F$ و $M.F$ نظامان وراثيّان، بالإضافة إلى أن عمليات الحصر والتقليص تبديلية (التمرين 41). تعريف التقليص عن طريق الأساسات الجزئية يعطينا ثنوية طبيعية بين هذه العمليات.

41.2.8. قضية. للأنظمة الوراثية، فإن عمليات الحصر والتقليص هي عمليات ثنوية بمعنى $(M.F)^* = (M^*|F)$ و $(M|F)^* = (M^*.F)$.

الإثبات:

$$\mathbf{I}_{(M.F)^*} = \{X \subseteq F : F - X \in \boldsymbol{S}_{M.F}\} = \{X \subseteq F : (F - X) \cup \bar{F} \in \boldsymbol{S}_M\}$$
$$= \{X \subseteq F : \bar{X} \in \boldsymbol{S}_M\} = \{X \subseteq F : X \in \boldsymbol{I}_{M^*}\} = \boldsymbol{I}_{M^*/F}$$

لبرهنة العبارة الثانية؛ طبِّق الأولى على M^*، وخذ الثنوية (الازدواجية). الثنوية بين الحذف والتقليص حدسيّة أكثر لبيانات المستوى، وحذف ضلع e في بيان مستوى G يقلص الضلع الثنوي المرتبط به في G^*، فضلًا عن أن تقليص e يحذف الضلع في البيان الثنوي لهذا البيان.



42.2.8. نتيجة: في عمليات الحذف أو التقليص لضلع في بيان G، يكون سلوك ماترويد الحلقات وماترويد الروابط كالآتي:

$$M(G - e) = M(G) - e \qquad M^*(G - e) = M^*(G).e$$

$$M(G.e) = M(G).e \qquad M^*(G.e) = M^*(G) - e$$

الإثبات: لقد تم تعريف حذف الماترويد وتقليصه بحيث تصف العبارات في العمود الأول سلوك ماترويدات الحلقات. وباستخدام هذه وقضية 41.2.8. نجد أن :

$$M^*(G - e) = [M(G) - e]^* = [M(G) - e]^* = M^*(G).e$$

$$M^*(G.e) = [M(G.e)]^* = [M(G).e]^* = M^*(G) - e \quad ■$$

وكما نرغب، فإن حصر الماترويدات وتقليصها يعدّ ماترويدات.

43.2.8. نظرية. افترض أن $F \subseteq E$، وأن M ماترويد على E، إن كلًّا من $M|F$ و $M.F$ يكون ماترويد على F. وبدلالة r_M، فإن دوال الرتبة هي: $r_{M|F}(X) = r_M(X)$ و $r_{M.F}(X) = r_M(X \cup \overline{F}) - r_M(\overline{F})$.

الإثبات: إن خاصية التوسيع من M تنطبق على أيِّ زوج من المجموعات في $I_{M/F}$. لذا، فإن $M|F$ يحقق خاصية التوسيع ويكون ماترويد. وباستخدام مبدأ الثنوية (الازدواجية) نجد أن $M.F=(M^*|F)^*$ يكون أيضًا ماترويد. تتبع دالة الرتبة لـ$M|F$ من تعريف $I_{M/F}$. إن وجود هذا مع تكرار تطبيق النظرية 34.2.8. على $(M^*/F)^*$ يعطينا دالة الرتبة لـ$M.F$ (التمرين 42).

تعطي الصيغة لـ$r_{M.F}$ وصفًا للمجموعات المستقلة: $X \in I_{M.F}$ إذا وفقط إذا كانت إضافة X لـ$\overline{F}$ تزيد بمقدار $|X|$.

إن مجموعة أضلاع في بيان سويٍّ G تشكِّل حلقة إذا وفقط إذا كانت الأضلاع الثنوية المرتبطة بهذه الأضلاع تشكل رابطةً في G^* (النظرية 14.1.6). وباستخدام التناظر الطبيعي بين الأضلاع والأضلاع الثنوية، فهذا يشير إلى أن ماترويد الحلقات لبيان سوي يكون متشاكلًا مع ماترويد الروابط G^*. ومن النتيجة 37.2.8، نعلم أن ماترويد الروابط لبيان H هو $(M(H))^*$. أما تطبيق هذا على G و G^*، فيشير إلى أن ماترويد الروابط لـ G يكون متشاكلاً مع ماترويد الحلقات لـG^*. لذا، فإن ماترويد الروابط لبيان سويٍّ G يكون بيانيًّا. وباستخدام نظرية كوراتوسكي، سنبرهن أن الشرط يعطي توصيفًا مميزًا للسَّويَّة.

لقد تناول ويتني (Whitney [1933a]) هذه المسألة عن طريق إعطاء مفهوم غير هندسي للثنوية. وبتغيير تعريفه قليلاً، سنقول إنَّ H هي الثنوي المجرد للبيان G إذا وُجِدتْ دالة تناظر $\phi: E(G) \rightarrow E(H)$ بحيث إن $X \subseteq E(G)$ تكون رابطة في G إذا وفقط إذا كانت $\phi(X)$ مجموعة أضلاع حلقة في H. ومع هذا التعريف، فإن القول أنه يوجد لـG ثنوي مجرد هو القول نفسه أن ماترويد الرابطة لـG يتحقق بيانيًّا. إن دالة التناظر ϕ تبرهن وجود تشاكل بين $M^*(G)$ و $M(H)$.

44.2.8. نظرية. (Whitney [1933a]) يكون البيان G سويًّا إذا وفقط إذا كان ماترويد روابطه بيانيًّا.

الإثبات: سنبرهن أولاً أن حذف الأضلاع وتقليصها يحافظ على وجود الثنوي المجرد. افترض أن لـG ثنويًّا مجردًا H، بحيث إن $M(H) \cong M^*(G)$. وافترض أن e' ضلعًا H المرتبط بالضلع e تحت التناظر. ولإثبات أن $H.e'$ ثنوي مجرد لـ$G - e$، وأن $H - e'$ ثنوي مجرد لـ $G.e$، فإننا نستخدم النتيجة 42.2.8. في حساب أن:

$$M^*(G - e) = M^*(G).e \cong M(H).e' = M(H.e')$$

وأن $M^*(G.e) = M^*(G) - e \cong M(H) - e' = M(H - e')$

لقد برهنّا أن للبيانات السوية ثنويات مجردة. ومن نظرية كوارتسكي، نعلم أن أي بيان غير سوي يحوي تقسيمًا لـ K_5 أو $K_{3,3}$. لذا، فإن K_5 أو $K_{3,3}$ يكون فرعًا لهذا البيان. وبما أن حذف الأضلاع وتقليصها يحافظ على الثنائيات المجردة، فإنَّ إثبات عدم وجود ثنويات مجردة لـ K_5 أو $K_{3,3}$ يبرهن عدم وجود ثنيات مجردة للبيانات غير السّويّة.

إذا كان H ثنويًا مجردًا لـG، فإن G كذلك يكون ثنويًا مجردًا لـH؛ لأن $M^*(G) \cong M(H)$ إذا وفقط إذا كان $M(G) \cong M^*(H)$. وإذا كان خصر G يساوي g، فإن حجم روابط H يكون مساويًا لـ g على الأقل. لذا، فإن $\delta(H) \geq g$. وكذلك، فإن $e(H) = e(G)$. ومن صيغة جمع الدرجات نجد أن $n(H) \leq \lfloor 2e(H)/\delta(H) \rfloor \leq \lfloor 2e(G)/g \rfloor$.

افترض أن H ثنوي مجرد لـ K_5، وبما أن خصر K_5 يساوي 3، فإن $n(H) \leq \lfloor 20/3 \rfloor = 6$. وبما أنه يوجد 4 أو 6 أضلاع لروابط K_5، فإنه يوجد لحلقات H جميعها 4 أو 6 أضلاع. لذا، فإن H بيان ثنائي الفرع بسيط. وعلى أي حال، لايوجد بيان ثنائي الفرع بسيط له عشرة أضلاع إذا كان عدد رؤوسه يساوي 6 على الأكثر. الآن، افترض أن H ثنوي مجرد لـ $K_{3,3}$. بما أن خصر $K_{3,3}$ يساوي 4، فإن $n(H) = \lfloor 18/4 \rfloor = 4$ وبما أن عدد أضلاع أي رابطة من روابط $K_{3,3}$ يساوي 3 على الأقل، فإنه يوجد على الأقل ثلاثة أضلاع لكل حلقة من حلقات H. إذن، يكون H بيانًا بسيطًا. وعلى أيّ حال، لا يوجد بيان بسيط له تسعة أضلاع إذا كان عدد رؤوسه يساوي 4 على الأكثر ■

يوضّح التعليل المتعلق أن ماترويدات الروابط لبيانات المستوى بيانية أنَّ كلَّ ثنويٍّ "هندسي" لبيان سوي يكون ثنويًّا جبريًّا. لقد رأينا أن الثنوي الهندسي ليس وحيدًا بالضرورة، وعلى الرغم من ذلك، فإن ماترويد الحلقات لكلِّ بيان ثنوي لـG، يجب أن يكون $M^*(G)$. لذا، فإن للثنويات الهندسية لـG جميعها ماترويد الحلقات نفسه. لقد حدد وتني (Whitney [1933b]) الحالات التي يكون فيها للبيانات ماترويد الحلقات نفسه (انظر التمرين 45، وانظر ((Kelmans (1980, 1987,1988).

يوجد العديد من التطبيقات لفروع البيانات؛ لأنها ستساعدنا مباشرة على برهنة نظرية تقاطع الماترويدات. فضلًا عن أنها تُستخدم في توصيف صفوف الماترويدات عن طريق البنى الممنوعة. فعلى سبيل المثال، يكون الماترويد ثنائيًّا إذا وفقط إذا خلا من $U_{2,4}$ بوصفه فرعًا. بالإضافة إلى أنها تستخدم الفروع لبناء استراتيجية ربح لتعميم لعبة التجسير على الماترويدات (النظرية 17.1.2).

45.2.8. تعريف*. افترض أن M ماترويد على E، وأن $e \in E$. تُلْعبُ لعبة انتقال (تحويل) شانون (Shanon) (M,e) من قِبَلِ المولّد والقاطع. يحذف القاطع عنصرين من E-e، أما المولد فيصادر ما يحذفه القاطع؛ حيث يصادِر ضلعًا في كل حركة. يهدف المولد مصادرة مجموعة تولد e، في حين يهدف القاطع منع ذلك، حيث يقوم القاطع بالحركة الأولى.

إذا جعلنا المولد يبدأ الحركة، أمكن محاكاة ذلك عن طريق إضافة ضلع e' بحيث تكون $\{e,e'\}$ حلقة، ويجب أن يبدأ القاطع بحذف e' لتجنب الخسارة الفورية. نحصل على جسر عن طريق جعل M ماترويد حلقات للبيان في النظرية 17.1.2 حيث e هي "الضلع المساعد"، وe' هي الضلع المساعد الإضافي. إن استراتيجية الحصول على الشجرة المولدة لدى المولد تنتج عن الشرط الكافي التالي لاستراتيجية الربح، ويعدّ هذا الشرط أيضًا ضروريًّا، إلاّ أن إثبات ذلك يتطلب نظرية اتحاد الماترويدات (النظرية 55.2.8).

46.2.8. نظرية (Lehman [1964]). في لعبة انتقال (تحويل) شانون (M,e) يكون لدى المُولد استراتيجية ربح إذا وُجِدت مجموعتان جزيئيتان منفصلتان هما: X_1، X_2 من E-e بحيث إن $e \in \sigma(X_1) = \sigma(X_2)$.

الإثبات: نستخدم X_1 وX_2 للحصول على استراتيجية ربح. اجعل $X= \sigma(X_1) = \sigma(X_2)$. بما أنه يمكن للمولِّد أن يهمل الحذف خارج X، وأنْ يلعب في $M|(X+e)$، فبإمكاننا افتراض أن X_1 و X_2 أساسات منفصلة. إذا لعب القاطع g، ولعب المولِّد f، فإن g لم تعد متوافرة ولا يمكن حذف f، إن أثر ذلك هو حذف وتقليص. وبجعل $M' = (M - g).f$ يكون لدينا $\sigma_{M'}(X)$ إذا وفقط إذا تحقق أن $g \notin X$ و $e \in \sigma_M(X + f)$ و يربح المولد إذا كان e عروة في M'، وهذا يكافئ أن $e \in \sigma_M(F)$، حيث F هي المجموعة التي صادرها المولِّد.

إذا كان $|E| = 1$، فإن e تكون عروة ويربح المولد. لذا، نتابع بالاستقراء على $|E|$. يكفي أن نعطي جوابًا فوريًّا f لـg، بحيث يكون لـ $M' = (M$-$g).f$ أساسان منفصلان. إذا حذف القاطع g غير الموجودة في X_1 أو في X_2، فإن المولد يصادر f اختيارية، وتكون المجموعتان X_1-g-f وX_2-g-f منفصلتين ومولدتين في M'. لذا، يمكننا افتراض أن $g \in X_1$. تعطي خاصية تبديل الأساس أن $f \in X_2$، حيث $X' = X_1 - g - f \in \boldsymbol{B}$. الآن X'-f وX_2-f عبارة عن أساسان منفصلان يتفاديان e في اللعبة (M',e). ■

تقاطع الماترويدات (Matroid Intersection)

فقد قفزت نظرية الماترويدات قفزة كبيرة إلى الأمام بعد أن أثبت إدموندز مبرهنات تقاطع الماترويدات واتحادها، فقد أعطى ذلك سياقًا موحّدًا لعلاقات أصغر- أكبر المعروفة جميعها التي أصبحت سهلة النتائج. وقد برهنا بعضها في الوحدات السابقة. ونظرًا إلى إعطائها براهين موحدة بسيطة، فإن هذا يؤدي إلى افتراض نظرية تقاطع الماترويدات من بين أجمل مبرهنات الرياضيات التوافقية (التركيبية).

نظرية تقاطع الماترويدات هي علاقة أصغر – أكبر للمجموعات المستقلة المشتركة بين ماترويدين معرَّفين على المجموعة الأساسية نفسها، يمكن إفتراض تقاطع ماترويدين بوصفه نظامًا وراثيًا وليس بوصفه ماترويدًا. إذا وُجِدَ أكثر من ماترويد على مجموعة E، فسنستخدم دلائل سفلية للتمييز بين السمات المختلفة. فمثلاً، نستخدم B_i رمزًا لأساس M_i،...إلخ. وما نزال نستخدم $\overline{X}$ لترمز إلى متممة X في المجموعة الأساسية E.

47.2.8. تعريف: إذا كان M_2 و M_1 نظامين وراثيين على E، فإن تقاطعهما هو النظام الوراثي الذي مجموعاته المستقلة هي: $\{X \subseteq E: X \in \boldsymbol{I}_1 \cap \boldsymbol{I}_2\}$.

فعلى سبيل المثال، تمثل مواءمات G المجموعات المستقلة لتقاطع ماترويدَيِّ التجزئة الطبيعيين على مجموعة أضلاع البيان الثنائي الفرع G. وعمومًا، فهذه ليست مجموعات مستقلة لماترويد (انظر التمرين 1-2). لذا، فإن الخوارزمية الجشعة لا تحلُّ مسألة المواءمة الموزونة العظمى.

تنويه: تذكّرْ أنَّ العروةَ عنصرٌ يشكِّل مجموعةً غير خالية رتبتها 0.

48.2.8. نظرية (نظرية تقاطع الماترويدات، Edmonds [1970]) افترض أن M_1 وM_2 ماترويدان على E. إن حجم أكبر مجموعة مستقلة مشتركة بينهما يحقق:

$$\max\{|I|: I \in \boldsymbol{I}_1 \cap \boldsymbol{I}_2\} = \min_{X \subseteq E}\{r_1(X) + r_2(\overline{X})\}.$$

الإثبات: (Seymour (1976)) للثنوية الضعيفة، خذ في الحسبان صورة اختيارية

$X \subseteq E$ و $I \in \boldsymbol{I}_1 \cap \boldsymbol{I}_2$. إنَّ المجموعتين $I \cap X$ و $I \cap \overline{X}$ هما كذلك مجموعتان مستقلتان مشتركتان $|I| = |I \cap X| + |I \cap \overline{X}| \leq r_1(X) + r_2(\overline{X})$.

للوصول إلى المساواة؛ نستخدم الاستقراء على $|E|$. عندما $|E| = 0$، فإن كلا الطرفين يساوي 0. وإذا كان كلّ عنصر في E عروة في M_1 أو في M_2، فإن $\text{Max } |I| = 0 = r_1(X) + r_2(\overline{X})$، حيث X تتكون من العرى جميعها في M_1. لذا، بإمكاننا افتراض أن $|E| > 0$، وأنه يوجد $e \in E$، حيث إن e ليس عروة في كلا الماترويدين. اجعل $F = E\text{-}e$، وخذ في الحسبان الماترويدات الآتية: $M_1|F$، $M_2|F$، $M_1.F$، و $M_2.F$.

افترض أن $k = min_{X \subseteq E}\{r_1(X) + r_2(\overline{X})\}$؛ نبحث عن مجموعة مستقلة حجمها K مشتركة بين M_1 و M_2. وإنْ لم نجد مثل هذه المجموعة، فلا توجد لـ $M_1|F$ و $M_2|F$ مجموعة مستقلة حجمها K، وأنه لا توجد لـ $M_1.F$ و $M_2.F$ مجموعة مشتركة مستقلة حجمها $k\text{-}1$. من فرض الاستقراء ومن صيغ الرتبة (النظرية 43.2.8) نجد أن $r_1(X) + r_2(F - X) \leq k\text{-}1$ لبعض $X \subseteq F$ وأن $r_1(y+e) -1 + r_2(F - y+e) -1 \leq k - 2$ لبعض $Y \subseteq F$.

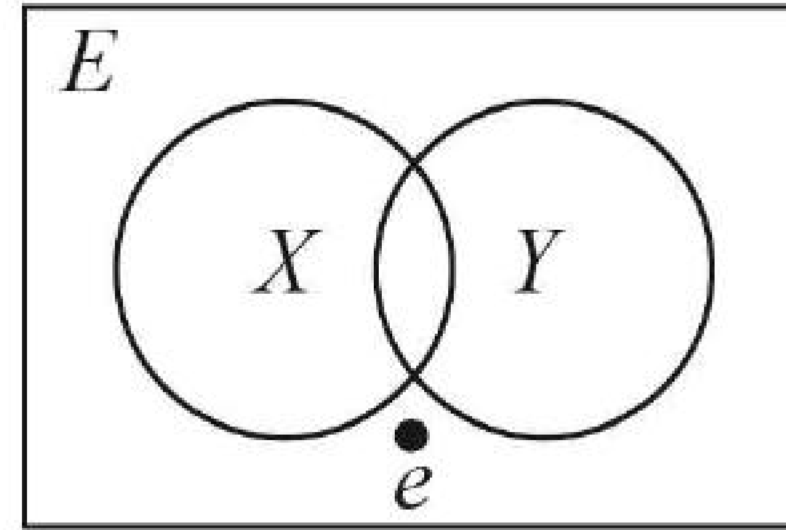
استخدم $(F - Y) + e = \overline{Y}$ و $F - X = \overline{X + e}$ وجمع المتباينتين للحصول على أن:

$$r_1(X) + r_2(\overline{X} + e) + r_1(Y + e) + r_2(\overline{Y}) \leq 2k + 1.$$

الآن، نطبق القياسية الجزئية لـ r_1 على X و $Y+e$، والمقياسية الجزئية لـ r_2 على $\overline{Y}$ و $\overline{X + e}$، للتوضيح؛ اكتب $U = X + e$ و $V = Y + e$. وطبِّق ذلك على المتباينة السابقة لتجدَ أنَّ:

$$r_1(X \cup V) + r_1(X \cap V) + r_2(\overline{Y} \cup \overline{U}) + r_2(\overline{Y} \cup \overline{U}) \leq 2k - 1.$$

بما أن $\overline{Y} \cap \overline{U} = \overline{X \cup V}$، و $\overline{Y} \cup \overline{U} = \overline{X \cap V}$، فإن الجانب الأيسر يجمع شاهدَين (مثلَين) على $r_1(Z) + r_2(\overline{Z})$، وأنَّ الفرض $k \leq r_1(Z) + r_2(\overline{Z})$ لكلٍّ $Z \subseteq E$ يعطينا أن $2k \leq 2k - 1$ إذن، لا توجد مجموعة مستقلة حجمها k مشتركة بين M_1 و M_2. ■



تنويه: ربما يكون مفيدًا حصر مدى التصغير.

49.2.8. نتيجة: افترض أن M_1 و M_2 ماترويدان معرَّفان على E، إن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة بينهما هو أصغر قيمة لـ $r_1(X_1) + r_2(X_2)$ على المجموعتين X_1 و X_2، بحيث إن $X_1 \cup X_2 = E$، وأن كل X_i مغلقة في M_i. ■

الإثبات: تشير خاصية الاندماج إلى أن $r_i(\sigma_i(X)) = r_i(X)$.

لقد برهنّا حالات خاصة من نظرية تقاطع الماترويدات بطرق ومعانٍ أُخرى، وبرهنّا نظرية كونج وايجرفاري بطرق مختلفة، وقد برهنا التوصيف المميز لفورد وفولكرسون الخاصة بالـ$CSDR_S$ من نظرية منجر في النظرية 25.2.4. وعندما يكون لدينا ماترويدان على المجموعة نفسها، فإن نظرية تقاطع الماترويدات تخبرنا أنه يجب أنْ تكون هناك علاقة أصغر - أكبر لأكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة، وتخبرنا كذلك ماذا يجب أن تكون النتيجة، وتعطينا إثباتًا على ذلك أيضًا.

50.2.8. نتيجة : ((Konig (1931)) و ((Egerv'ary (1931)) في أي بيانٍ ثنائي الفرع، يكون حجمُ أكبر مواءمة مساويًا لحجم أصغر غطاء رؤوس.

الإثبات: عندما يكون كلٌّ من M_1 و M_2 هما ماترويدي التجزئة المستحدثَيْن من قِبَل مجموعتي التجزئة لرؤوس G U_1 و U_2، فإن المواءمات هي المجموعات المستقلة المشتركة بين M_1 و M_2.. إذا كانت $X_1, X_2 \subseteq E$، فإن الرتبة $r_i(X_i)$ تحسب رؤوس U_i التي تقع على أضلاع في X_i ومن هنا، إذا كانت $E = X_1 \cup X_2$، فإنه يوجد لـ G غطاء رؤوس من الحجم $r_1(X_1) + r_2(X_2)$ باستخدام رؤوس U_i لتغطية X_i. وبالعكس، إذا كان $T_1 \cup T_2$ غطاء رؤوس بحيث إن $T_i \subseteq U_i$، فاجعل X_i تساوي مجموعة الأضلاع التي تقع على T_i، فيكون لدينا $X_1 \cup X_2 = E$، بحيث إن X_i مغلقة في M_i، وأن $r_1(X_1) + r_2(X_2) = |T_1| + |T_2|$. نستنتج أن:

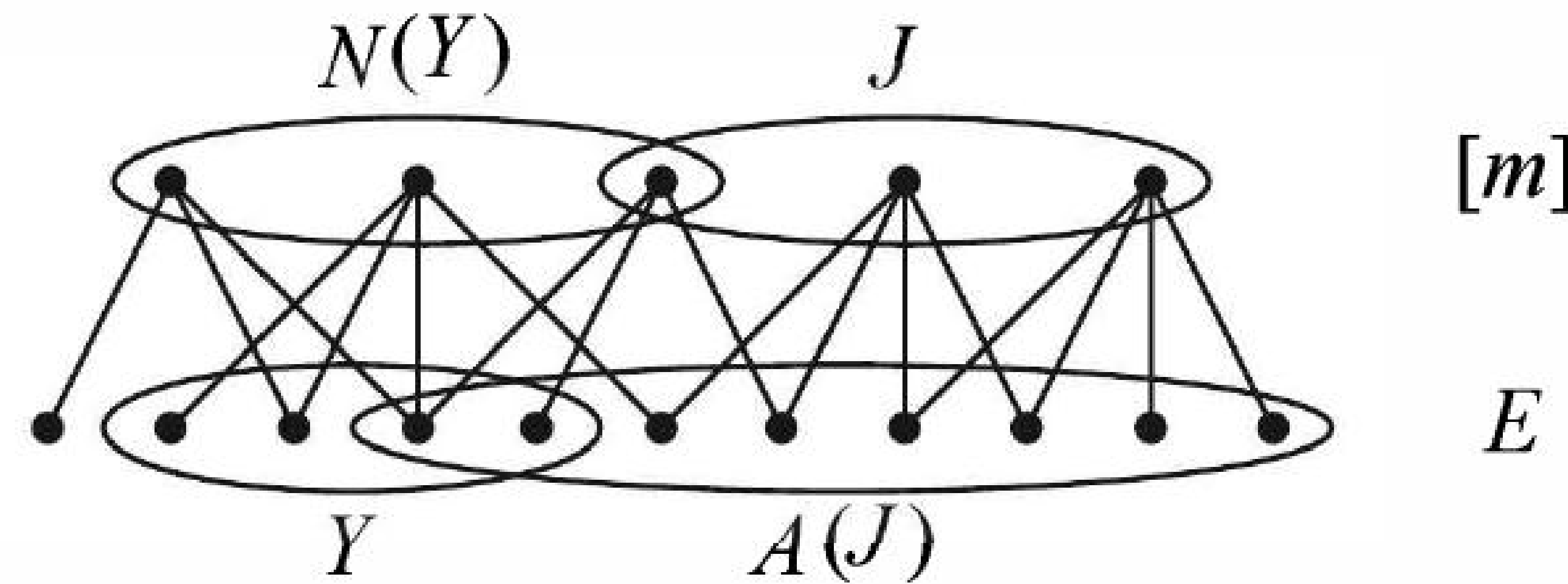
$$\alpha'(G) = max\ \{|I|: \mathbf{I} \in \boldsymbol{I}_1 \cap \mathbf{I}_2\} = min\{r\ (X)_1 + r_2\ (X_2)\} = \boldsymbol{\beta}(G)$$ ■

تنويه: النتيجة الآتية تستخدم دالة الرتبة للماترويدات المستعرضة.

51.2.8. مثال: الماترويدات المستعرضة (انظر المثال 13.2.8). افترض أن $A_1\ U\ ....\ U A_m = E$، وافترض كذلك أن G هي بيان الوقوع المناظر الذي مجموعاته الجزئية E و $[m]$. خذ في الحسبان $X \subseteq E$ إذا كانت $|N(Y)| < |Y|$ لبعض $Y \subseteq X$، فإن Y تجبر وجود $|Y| - |N(Y)|$ عنصر غير مُشبع في X وبتطبيق شرط هال (Halls Condition) على X فإن $r(X) = \min\ \{|X| - (|Y| - |N(Y)|: Y \subseteq X)\}$ (التمرين 51).

نحصل على تعبير آخر لـ $r(X)$ (انظر أور، (Ore (1955)). افترض أنه بدلالة البيان $A(J) = U_{i \in J} Ai$، لاحظ أن $A(J) = N(J)$ وبتطبيق شرط هال على $[M]$، نستطيع كتابة أكبر حجم لمواءمة على الصورة $r(M) = \min\{m - (|J| - |A(J)|\ : J \subseteq [m])\}$ لتحديد أكبر عدد من العناصر في $X \subseteq E$ التي يمكن مواءمتها، فإننا نهمل عناصر $E - X$، وبذلك نحصل على:

$$r(X) = \min\ _{J \subseteq [m]}\{|A(J) \cap X| - |J| + m\}$$



إن الصيغة الأولى لـ $r(X)$ تستخدم جوارات المجموعات الجزئية من E، أمّا الصيغة الثانية فتستخدم جوارات المجموعات الجزئية من $[m]$ يبرهن التمرين 53 مباشرة أن صيغة الرتبة الثانية هي دالة الرتبة لماترويد دون الاعتماد على نتائج من مواءمات ثنائي الفرع. تجد المزيد من المعلومات عن الماترويدات المستعرضة في ((Mirsky (1971)) وفي ((Lova'sz- plummer (1986)). ■

52.2.8. نتيجة : ((Ford-Fulkerson (1958)) يوجد نظام مشترك من التمثيلات المختلفة ($CSDR$) للعائلات $A = \{A_1, ... ,A_m\}$ و $B = \{B_1, ... ,B_m\}$ إذا وفقط إذا تحقق لكل $I, J \subseteq [m]$ أن

$$|(U_{i \in I} Ai) \cap (\cup_{i \in J} B_j)| \geq |I| + |J| - m|$$

الإثبات: إن الـSDR الجزئي المشترك هو مجموعة مستقلة مشتركة في الماترويدين المستعرضين M_1 و M_2 المستحدثين على E من قِبَل $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$، ولتحديد متى يوجد CSDR تامًّا، فنحتاج إلى إعادة صياغة الشرط $r_1(X) + r_2(\overline{X}) \geq m$ فقط لإيجاد الشرط المناسب على أنظمة المجموعة.

إن صيغ الرتبة من المثال 51.2.8. تعطينا أن:

$$r_1(X) + r_2(\overline{X}) = \min_{I \subseteq [m]} \{|A(I) \cap X| - |I| + m\} + \min_{J \subseteq [m]} \{|B(J) \cap \overline{X}| - |J| + m\}$$

لذا فإن $r_1(X) + r_2(\overline{X}) \geq m$ إذا وفقط إذا تحقق أن

$|A(I) \cap X| + |B(J) \cap \overline{X}| \geq |I| + |J| - m$ لكل $X \subseteq E$ و $I,J \subseteq [m]$.

إذا أعطيت I و J، فخذ في الحسبان مساهمة عنصر من E في الجانب الأيسر إن كلَّ عنصر من $A(I) \cap B(J)$ يُحسب مرة واحدة سواء أكان في X أم في $\overline{X}$، وعناصر $A(I) - B(J)$ تُحسب إذا وفقط إذا كانت تنتمي إلى $\overline{X}$ لذا، فإن الجانب الأيسر يُصَغَّر إلى الحدّ الأدنى لـ I و J عندما $A(I) - B(J) \subseteq \overline{X}$، و $B(J) - A(I) \subseteq X$، وفي هذه الحالة يكون الجانب الأيسر مساويًا $|A(I) \cap B(J)|$، وهذا يعطينا شروط فورد وفولكرسون. ■

طريق المسار الموسع إلى مواءمة كبرى لثنائي الفرع يُعَمَّمُ إلى تقاطع الماترويدات، حيث تعطي الخوارزمية مجموعة مستقلة مشتركة I حجمها أكبر ما يمكن، ومجموعة X بحيث إن $|I| = r_1(X) + r_2(\overline{X})$، انظر (Lawler [1976]). و(Edmonds [1979]) و (Faigle [1987]).

اتحاد الماترويدات (Matroid Union)

إن تقاطع ماترويدين نادرًا ما يكون ماترويد، إلا أن مفهومًا طبيعيًّا لاتحاد ماترويدين يعطينا ماترويد. إن مفهوم الاتحاد بالإضافة إلى علاقة أصغر أكبر المفيدة لدالة الرتبة، هو محتوى نظرية اتحاد الماترويدات. تعدُّ مبرهنات تقاطع الماترويدات واتحادها متكافئة، حيث اشتقت كلٌّ منهما من الأخرى. لقد أثبت ولش (Welsh (1976)) نظرية اتحاد الماترويدات أولاً، وهنا سنبرهن نظرية تقاطع الماترويدات أولاً.

53.2.8. تعريف: الاتحاد $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ للأنظمة الوراثية $M_1, \ldots M_2$ على E هو النظام الوراثي M على E المعرَّف على الصورة الآتية: $\boldsymbol{I}_M = \{I_1 \cup \ldots \cup I_k : I_i \in \mathrm{I}_i\}$ وأن الجمع المباشر $M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ للأنظمة الوراثية $M_1, \ldots M_k$ على المجموعات المنفصلة $E_1, \ldots E_k$ هو النظام الوراثي على M على $E_1 \cup \ldots \cup E_k$ المعرف على الصورة الآتية: $\mathrm{I}_m = \{I_1 \cup \ldots \cup I_k : I_i \in \boldsymbol{I}_i\}$.

يمكن التعبير عن الجمع المباشر $M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ على $E_1, \ldots E_K$ بوصفه اتحادًا لـ $M'_1, \ldots M'_K$ على $E' = E_1 \cup \quad \cup E_K$، وذلك بجعل M'_i نسخة من M_i مع العناصر الإضافية لـ $E' - E_i$ التي تضاف بصفتها عرى في الحالة التي يكون فيها كل من M'_i ماترويد موحَّدًا، فإن الجمع المباشر يكون ماترويد تجزئة مُعمّمًا. هنا $E_1, \ldots E_r$ تجزئ E، توجد أعداد صحيحة موجبة $r_1, \ldots, r_K$، و $X \in \mathbf{I}$ إذا تحقق أن $|X \cap E_i| \leq r_i$.

إن ماترويد التجزئة الذي تمّ تعريفه سابقًا يظهر عندما $r_i = 1$ لكل i.

54.2.8. قضية. إذا كانت $M_1, \ldots M_k$ ماترويدات معرَّفة على مجموعات منفصلة $E_1, \ldots E_k$، فإن الجمع

المباشر $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ يكون ماترويد.

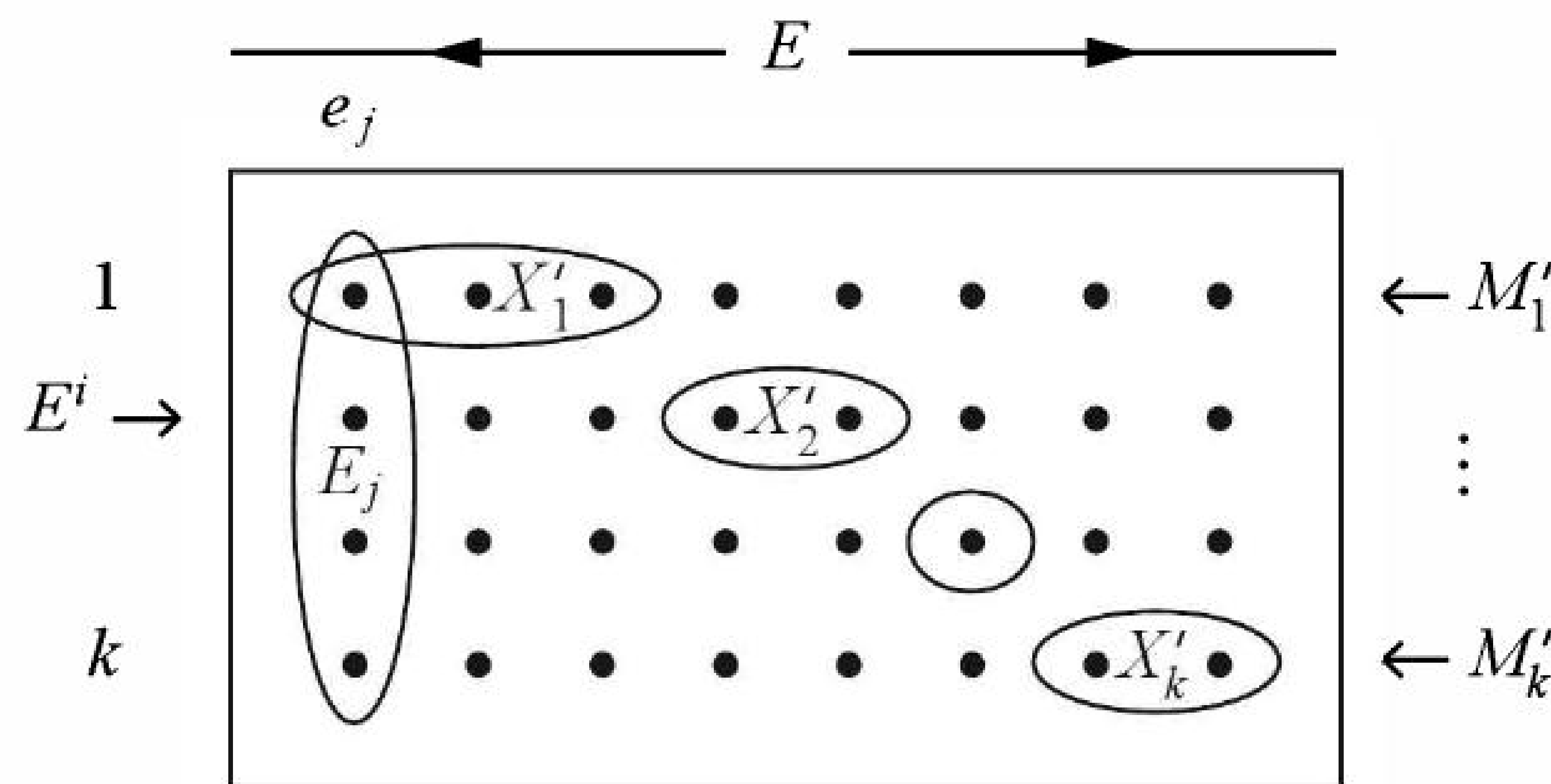
الإثبات: بما أن $E_1,\ldots E_k$ منفصلة زوجًا زوجًا، فإن التقاطع لأي $I \in \mathbf{I}$ مع كل E_i يكون مجموعة مستقلة في M_i. إذا كانت كل من $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ و $|I_2| > |I_1|$، فإن $|I_2 \cap E_i| > |I_1 \cap E_i|$ لبعض i وبما أن كلًّا من المجموعتين مستقلة في M_i، فبإمكاننا توسيع $I_1 \cap E_i$ من $I_2 \cap E_i$ واستنادًا إلى ذلك، يمكن توسيع I_1 من I_2. لذا، فإن $M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ يحقق خاصية التوسيع. ■

تنويه: باستخدام الجمع المباشر، نستطيع برهنة أن اتحاد الماترويدات يكون ماترويد دائمًا، وكذلك نحسب دالة الرتبة.

55.2.8. نظرية. نظرية اتحاد الماترويدات لـ (Edmonds-Fulkerson (1965) و Nash-Willams(1966))
إذا كانت $M_1, \ldots, M_k$ ماترويدات على E لها دوال رتبة $r_1, \ldots, r_K$، فإن $M = M1 \cup, \ldots, \cup M_k$ يكون ماترويد، دالة رتبته $r(X) = \min_{Y \subseteq X} (|X - Y| + \sum r_i(Y))$.

الإثبات: (باتباع شرجفر Shrijver). بعد إثبات الصيغة لدالة الرتبة، سنحقق خاصية المقياسية الجزئية لإثبات أن M عبارة عن ماترويد. أولاً، نختزل حسب دالة الرتبة لحساب $r(E)$ في حصر النظام الوراثي M على المجموعة X، يكون لدينا $\mathbf{I}_{M|X} = \{Y \subseteq X : Y \in \mathbf{I}_M\}$ و $r_{M|X}(Y) = r_M(Y)$ لـ $Y \subseteq X$ لذا، فإن $M | X = U_i (M_i | X)$ وبتطبيق صيغة الرتبة للاتحاد كلّه على M/X نحصل على $r_M(X)$.

خذ في الحسبان شبكة حجمها k في $|E|$ من العناصر E' التي فيها العمود رقم j, E_j يتألف من k نسخة من العنصر $e_j \in E$. نعرِّف ماترويدين N_1 و N_2 على E' بحيث يساوي أكبر حجم لمجموعة مستقلة في N_1 و N_2 أكبر حجم لمجموعة مستقلة في M. ومن ثمَّ نحسب $r_M(E)$ بتطبيق نظرية تقاطع الماترويدات على N_1 و N_2 اجعل M'_i نسخة من M_i معرَّفة على العناصر E^i للصَّف i في E'. واجعل N_1 يساوي ماترويد الجمع المباشر $M'_1 \oplus \ldots \oplus M'_k$، و N_2 يساوي ماترويد التجزئة المستحدث على E' من تجزئة الأعمدة $\{E_j\}$.



لكل مجموعة $X \subset \mathbf{I}_M$ تفكيك بصفته اتحادًا منفصلًا لمجموعات جزئية $X_i \in \mathbf{I}_i$، لأن I_i عائلة وراثية. إذا أُعطيتَ تفكيكًا لـ $X \in \mathbf{I}_M$ $\{X_i\}$، فاجعل X'_i نسخة من X_i في E^i. بما أن $\{X_i\}$ منفصلة، فإن $\cup X'_i$ يكون مستقلًّا في N_2، و $X_i \in \mathbf{I}_i$ تعطي أن $\cup X'_i$ يكون مستقلًّا كذلك في N_1. من $X \in \mathbf{I}_M$، نكون قد بنينا $\cup X'_i$ من الحجم $|X|$ في $\mathbf{I}_{N1} \cap \mathbf{I}_{N2}$ وبالعكس، فإن أي $X' \in \mathbf{I}_{N1} \cap \mathbf{I}_{N2}$ ترتبط بتفكيك لمجموعة في $\mathbf{I}_M$ من الحجم $|X'|$ عندما يُنتقل المجموعات $X' \cap E'$ رجوعًا إلى E؛ لأن N_2 تمنع حصول نسخ مضاعفة من العناصر. لذا، فإن

$r(E) = max\ \{|I| : I \in \mathbf{I}_{N1} \cap \boldsymbol{I}_{N2}\}$. ولحساب هذا، اجعل دالتي رتبة N_1 و N_2 هما q_1 و q_2، واجعل r'_i هي دالة الرتبة للنسخة M'_i من M_i على E'. لدينا $q_1\ (X') = \sum r'_i\ (X' \cap E')$، $q_2\ (X')$ تساوي عدد عناصر E التي لها نُسخ في X'. إن نظرية تقاطع الماترويدات تعطينا أن: $r\ (E) = min\ _{X' \subseteq E'}\ \{q_1\ (X') + q_2\ (E' - X')\}$.

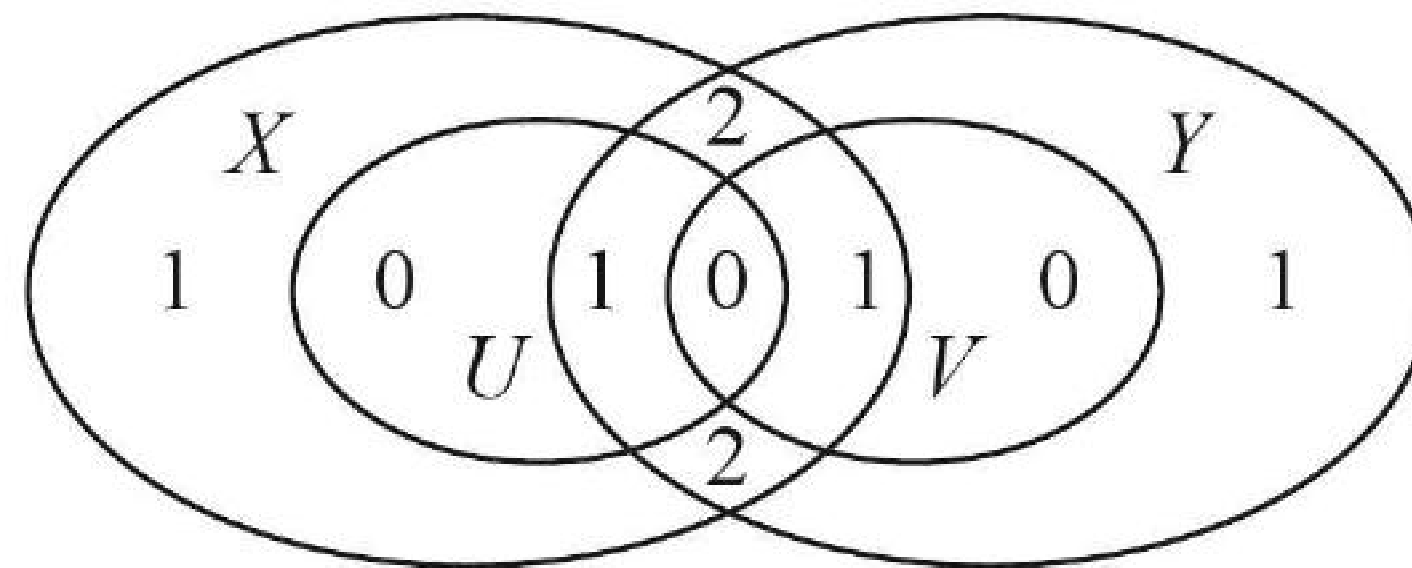
من النتيجة 49.2.8 نجد أن الأصغر (min) يتحقق من قِبَل مجموعة X' حيث E' - X' تكون مغلقة في N_2. إن المجموعات المغلقة في ماترويد التجزئة N_2 هي المجموعاتَ الَتي تحوي كلَّ شيء أو لا شيء من النسخ لكل عنصر – اتحادات الأعمدة الكلية لـ E'. إذا أعطينا X' بحيث $E' - X'$; مغلقة في N_2. اجعل $Y \subseteq E$ هي مجموعة العناصر التي تشتمل نسخها X'. إذن، $q_2\ (E' - X') = |\ E - Y|$ و X' تحوي نسخ العناصر Y جميعها. لذا، فإن $q_1\ (X') = \sum r'_i\ (X' \cap E') = \sum r_i\ (Y)$ وبذلك، نستنتج أن $r\ (E) = \min\ _{Y \subseteq E}\ \{|\ E - Y\ | + \sum r_i\ (Y)\}$.

لبرهنة أن M ماترويد، سنحقّق المقياسية الجزئية لـ r. افترض أنَّ $X,\ Y \subseteq E$ إنَّ صيغة r تعطينا أنه يوجد $U \subseteq X$ و $V \subseteq Y$ بحيث $r\ (X) = |\ X - U| + \sum r_i\ (U);\ r\ (Y) = |\ Y - V| + \sum r_i\ (V)$ وبما أن $U \cap V$ $\subseteq X \cap Y$، و $U \cup V \subseteq X \cup Y$ فإننا نحصل على:

$$r\ (X \cap Y) \le |(X \cap Y) - U \cap V\ | + \sum r_i\ (U \cap V);$$
$$r(X \cup Y) \le |(X \cup Y) - U \cup V| + \sum r_i\ (U \cup V);$$

وبعد تطبيق المقياسية الجزئية لكل r_i والشكل أدناه، فإن هذه المتباينات تقود إلى أن:

$r(\ X \cap Y) + r\ (\ X \cup Y\ ) \le (X) + r(Y)$. ■



$$\left|(X\ \cap Y\ ) - (U\ \cap V\ )\right| + \left|(X\ \cup Y\ ) - (U\ \cup V\ )\right| = \left|X\ - U\right| + \left|Y\ - V\ \right|$$

لتطبيق نظرية تقاطع الماترويدات؛ يجب أن يكون N_1 ماترويد، وهذا يتطلب أن تكون الـ $\{M_i\}$ ماترويدات. لذا، فإن صيغة الرتبة هذه لا تنطبق على اتحادات لأنظمة وراثية اختيارية.

إن نظرية اتحاد الماترويدات تعطينا براهين قصيرة لعلاقات أصغر- أكبر لمسائل التغطية والتحزيم. في كل صيغة أدناه، تكون المجموعات الجزئية الأمثل مغلقة؛ وذلك لأن الانتقال (التحويل) من X إلى $\sigma\ (X)$ يُحسِّن البسط دون تغيير المقام في الأصل، يوجد للنتائج على البيانات براهين صعبة متعلقة بهذا الموضوع خصوصًا.

56.2.8. نتيجة : نظرية تغطية الماترويدات ([1965 b]Edmonds) إذا كان M ماترويد خاليًا من العرى على E، فإن أقل عدد من المجموعات المستقلة التي اتحادها E هو $axX \subseteq E$ $\max_{X \subseteq E} \left\lceil \frac{|X|}{r(X)} \right\rceil$

الإثبات: افترض أن $M_1, \ldots\ M_k$ نسخ من M على E. إن المجموعة E هي اتحاد لـ k من المجموعات المستقلة في M إذا وفقط إذا كانت E مستقلة في $M' = M_1\ \cup\ \ldots\ \cup M_k$. ومن نظرية اتحاد الماترويدات، نجد أن $r'\ (E) \ge |E|$ تكافئ $|E| - |Y| + \sum r_i\ (Y) \ge |E|$ لكل $Y \subseteq E$، وبما أن $r_i\ (Y) = r(Y)$ لكل I، فإننا نستنتج

أن E اتحاد k مجموعة مستقلة إذا وفقط إذا كان $|Y| \geq k\, r(Y)$ لكل $Y \subseteq E$. ■

57.2.8. نتيجة: (Nash-Williams [1964]) إن أقل عدد من الغابات يلزم لتغطية أضلاع بيان G (يسمى تشجير G) يساوي $\mathrm{Max}_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{e(H)}{n(H)-1} \right\rceil$.

الإثبات: (Edmonds [1965b]) يتبع هذا فورًا من تطبيق النتيجة 56.2.8. على $M(G)$. إن أفضل حد أدنى يظهر من بيان جزئي مستحدث مترابط H (يرتبط بمجموعة مغلقة في $M(G)$). ■

58.2.8. نتيجة: نظرية تحزيم الماترويدات (Edmonds [1965c]) إذا كان لدينا ماترويد M على E، فإن أكبر عدد من الأساسات المنفصلة زوجًا زوجًا يساوي $\min_{X: r(x) < r(e)} \left\lfloor \frac{|E| - |X|}{r(E) - r(X)} \right\rfloor$

الإثبات: المجموعة E تحوي k من الأساسات المنفصلة إذا وفقط إذا كانت $r'(E) \geq k\, r(E)$ في الاتحاد M' للماترويدات $M_1, \ldots M_k$ التي هي نسخ من M على E من نظرية اتحاد الماترويدات، نجد أن هذا يتطلب تحقيق $|E| - |Y| + \sum r_i(Y) \geq k\, r(E)$ لكل $Y \subseteq E$، وبما أن $r_i(Y) = r(Y)$ لكل i، فإننا نستنتج وجود K أساسًا منفصلاً إذا وفقط إذا تحقق أن $|E| - |Y| \geq k\,(r(e) - r(Y))$ لكل $Y \subseteq E$. ■

59.2.8. نتيجة: (Nash- Williams [1961] [1961a] Tutte)

للبيان G، يوجد k شجرة مولدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا إذا وفقط إذا وُجِدَ لكل تجزئة P للرؤوس $k\,(|P| - 1)$ ضلعًا على الأقل، بحيث تكون نقاطها الطرفية موجودة في مجموعات مختلفة من مجموعات P.

الإثبات: (Edmonds [1965c]). لاحظ أنه يمكن افتراض أن G مترابط. وبتطبيق النتيجة 58.2.8 على $M(G)$، يجب أن نحدد متى تكون $|E| - |X| \geq k\,(r(E) - r(X))$ لكل مجموعة مغلقة X. إن المجموعات المغلقة مترابطة بتجزئات لـ$V(G)$ إلى مجموعات رؤوس تحدث بيانات جزئية مترابطة لكل تجزئة $V_1, \ldots V_P$. إن المجموعة المغلقة X المرتبطة هي $\cup E(G[V_i])$ التي رتبتها $n - p$. وبما أن $|E| - |X|$ تَحْسُبُ الأضلاع بين مجموعات التجزئة، وأن $r(E) - r(X) \geq p - 1$، فإن للبيان K شجرة مولدة منفصلة إذا وفقط إذا تحقق الشرط. ■

تمارين (Exercises)

1.2.8.(-) أثبت أن المجموعات المستقرة لبيان لا تكون بالضرورة هي المجموعات المستقلة لماترويد، وذلك من خلال إيجاد بيانات موزونة الرؤوس؛ حيث إن النسبة بين أكبر وزن لمجموعة مستقرة الوزن الذي تم إيجاده بجشع إلى مجموعة مستقرة تكون كبيرة اختياريًّا.

2.2.8.(-) أعطِ توصيفًا مميّزًا للبيانات التي تشكِّل مجموعاتها المستقرة عائلة من المجموعات المستقلة لماترويد على مجموعة الرؤوس.

3.2.8.(-) أثبت أنَّ كلّ ماترويد تجزئة يكون ماترويد مستعرضًا.

4.2.8. عدِّل الخوارزمية الجشعة لتحصل (مع إثبات) على خوارزمية لإيجاد مجموعة مستقلة موزونة كبرى في ماترويد له أوزان حقيقية اختيارية (ليست بالضرورة غير سالبة) على العناصر.

5.2.8. أعطِ توصيفًا مميَّزًا للبيانات التي تشكِّل مواءمتها عائلة من المجموعات المستقلة لماترويد على مجموعة الأضلاع.

6.2.8.(!) حدِّد الماترويدات الموحدة التي تكون متحققة بيانيًّا. وأعطِ توصيفًا مميَّزًا للبيانات التي ماترويدات حلقاتها تكون ماترويدات موحَّدة.

7.2.8.(!) حدِّد ماترويدات التجزئة التي تكون متحققة بيانيًّا. وأعطِ توصيفًا مميَّزًا لماترويدات الحلقات التي تكون ماترويدات تجزئة.

8.2.8. باستخدام الاعتماد الخطِّيّ فقط، أثبت أن الماترويدات المتجهة تحقق خاصية الحلقات المُستحدثة: إن

إضافة عنصر واحد إلى مجموعة مستقلة من المتجهات يُوجد مجموعة غير مستقلة واحدة على الأكثر.

9.2.8. صف حلقات الماترويد المستعرض M بدلالة البيان الثنائي الفرع المناظر G، باستخدام خواص البيانات الثنائية الفرع فقط. وبرهن أن M تحقق خاصية الحذف الضعيف.

10.2.8. افترض أن $M(G)$ هي ماترويدات الحلقات لـG. وافترض كذلك أن $k(X)$ تساوي عدد مركبات البيان الجزئي المولّد G_X الذي مجموعة أضلاعه هي X. وبذلك، فإن $r(X) = n - k(X)$. اجعل U و V مجموعتي المركبات في G_X و G_Y على الترتيب، واجعل H تساوي البيان الثنائي الذي مجموعتا رؤوسه هما: U و V، حيث $U \leftrightarrow v$ عندما تتقاطع المركبات المرتبطة في u و v:

a) احسب عدد رؤوس مركبات H بدلالة الأعداد $k(X),k(Y)$ و $k(X \cap Y)$. أثبت أن $k(X \cup Y) \geq e(H)$

b) استخدم فرع (a) لبرهنة خاصية المقياسية الجزئية لـ$M(G)$ دون استخدام أيّ خواص أخرى للماترويدات. (Aigner [1979]).

11.2.8. استخدم نظرية كونج وإيجرفاري (Kônig –Egerv'ary) لتبرهن - مباشرة - أن دالة الرتبة للماترويد المستعرض تكون مقياسية جزئية.

12.2.8. افترض أن D بيان موجه له منبع مميَّز s ومصبّ t. لتكن $E = V(D) - \{s,t\}$، لـ $X \subseteq E$، اجعل $r(X)$ تساوي عدد الأضلاع من $S \cup X$ إلى $\bar{X} \cup t$. أثبت أن r مقياسية جزئية .

13.2.8. (-) إذا كان X ينتمي إلى نظام وراثي، أثبت أن الخواص الآتية تكون متكافئة وتعطي توصيفًا مميزًا للعرى:

a) $r(x) = 0$

b) $x \in \sigma(\phi)$

c) x حلقة

d) x لا ينتمي إلى أيّ أساس.

e) كلّ مجموعة تحتوي على x تكون غير مستقلة.

f) x تنتمي إلى مولد كل $X \subseteq E$

14.2.8. أثبت تكافؤ التوصيفات المميَّزة الآتية للعناصر المتوازية على افتراض أن $X \neq Y$، وأن أيًّا منها ليس عروة:

a) $r(x,y) = 1$ (b $\{x,y\} \in \mathbf{C}$ (c $Y \in \sigma(X)$, $X \in \sigma(Y)$, $r(X) = r(Y) = 1$

15.2.8. (-) افترض أنّ $r(X) = r(X \cap Y)$ لبعض $X, Y \subseteq E$ في ماترويد على E. أثبت أن $r(X \cup Y) = r(Y)$ هل يتحقق العكس؟

16.2.8. افترض أنّ M نظام وراثيّ بأوزان غير سالبة على E، أثبت - مباشرة - أنه إذا كان M يحقق خاصية تبديل الأساس (B)، فإن الخوارزمية الجشعة تولّد دائمًا أساسًا موزونًا أعظم.

17.2.8. بديهيات ماترويد بديلة. افترض أنّ M نظام وراثيّ، أثبت تضمينات M الآتية مباشرةً:

a) تتضمّن (-) المقياسية الجزئية (R) الامتصاص الضعيف (A).

b) يتضمّن الامتصاص القوي (A') المقياسية الجزئية (R) (دون استخدام الانتظام (الاتساق)). (مساعدة: استخدام الاستقراء على $|X \Delta Y|$).

c) يتضمّن تبديل الأساس (B) وحدانية الحلقات المستحدثة (J).

d) تتضمّن (-) وحدانية الحلقات المستحدثة (J) الحذف الضعيف (C).

e) تتضمّن وحدانية الحلقات المستحدثة (J) التوسيع (I). (مساعدة: استخدم J والاستقراء على $|I_1 - I_2|$ لتحصل على التوسيع).

18.2.8. أثبت أنّ النظام الوراثي يكون ماترويد إذا وفقط إذا حقّق خاصية التوسيع فوق الضعيف (الشديد الضعف): إذا كانت $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ بحيث إن $|I_2| > |I_1|$ و $|I_1 - I_2| = 1$، فإن $I_1 + e \in \mathbf{I}$ لبعض $e \in I_2 - I_1$. (Chappell [1994a]).

19.2.8. (-) افترض أنّ M ماترويد على E، وثبّت $A \subseteq E$. واحصل على $\mathbf{I}'$ من $\mathbf{I}$ بحذف المجموعة التي تقطع A. أثبت أن $\mathbf{I}'$ هي عائلة المجموعات المستقلة لماترويد على E.

20.2.8. افترض أنّ M ماترويد على E، وأنّ $\mathbf{B} \ni B \not\ni e$. اجعل $C(e,B)$ تمثّل الحلقة الوحيدة في $B + e$

a) إذا كانت $e \notin B$، أثبت أنّ $B - f + e$ تكون أساسًا إذا وفقط إذا كان f ينتمي إلى $C(e,B)$.

b) لـ $C \in \mathbf{C}$، $e \in C$، أثبت أنّ $C = C(e,B)$ لأساس B.

21.2.8. (-) افترض أنَّ B_1 و B_2 أساسان لماترويد بحيث إنَّ: $\left|B_1 \Delta B_2\right| = 2$. أثبت على وجود حلقة وحيدة C، بحيث إن $B_1 \Delta B_2 \subseteq C \subseteq B_1 \cup B_2$.

22.2.8. (-) افترض أنَّ B_1, B_2 أساسان لماترويد M. إذا كانت $X_1 \subseteq B_1$، فبرهن على وجود $X_2 \subseteq B_2$، بحيث إن $\left(B_1 - X_1\right) \cup X_2$ و $\left(B_2 - X_2\right) \cup X_1$ يكونان أساسين لـ M ([1973] Greene)

23.2.8. (!) افترض أن B_1 و B_2 أساسان مختلفان لماترويد M:

a) افترض أن G بيان ثنائي بحيث إن B_1 و B_2 هما مجموعتا رؤوسه، وأن $e \in B_1$ يجاور $f \in B_2$ وذلك عندما يتحقق أن $B_2 + e - f \in \boldsymbol{B}$. أثبت على وجود مواءمة كاملة لـ G.

b) استنتج من الفرع (a) وجود اقتران تناظر $\pi : B_1 \to B_2$ بحيث إن المجموعة $B_2 - \pi\left(e\right) + e$ تشكل أساسًا لـ M لكل $e \in B_1$.

24.2.8. (!) افترض أنَّ B_1 و B_2 أساسان مختلفان لماترويد M:

a) أثبت أنه لكل $e \in B_1$ يوجد $f \in B_2$، بحيث إن $B_1 - e + f$ و $B_2 - f + e$ تكون أساسات (مساعدة: استخدم خاصية الشراكة (الاندماج) لاحظ أن هذا يعمّم التمرين 34.1.2).

b) استخدم ماترويد الحلقات $M(K_4)$ لتبرهن أنه ربما لا توجد أيّ دالة تناظر $\pi : B_1 \to B_2$ بحيث إن $\boldsymbol{e}$ و $f = \pi\left(e\right)$ يحققان فرع (a) لكل $e \in B_1$.

25.2.8. (-) إن جمعًا مؤلفًا من $\left|E\right| - r\left(E\right)$ هو حلقة لماترويد على E يشكل مجموعة أساسية من الحلقات إذا أمكن ترتيب العناصر $e_1, \ldots, e_n$ بطريقة ما، بحيث إن C_i تحوي $e_{r(E)+i}$ ولكنها لا تحوي عنصرًا دليله أعلى من ذلك. أثبت على وجود مجموعة أساسية من الحلقات لكل ما ترويد. ([1935] Whitney).

26.2.8. (-) إذا أعطيت k من الحلقات المختلفة $\left\{C_i\right\}$ بحيث لا يكون أيّ منها محتوًى في اتحاد البقية، وإذا أعطيت كذلك مجموعة X بحيث إن $\left|X\right| < K$، فبرهن أن $\bigcup_{i=1}^{K} Ci - x$ يحوي حلقة، ([1976] Welsh).

27.2.8. (+) لأيّ نظام وراثيّ، أثبت أن خاصية الحذف الضعيف تتضمّن خاصية الحذف القوي مستخدمًا الاستقراء على $\left|C_1 \cup C_2\right|$، (Lehman [1964]).

28.2.8. (!) علاقة أصغر – أكبر لمجموعة مستقلة موزونة. افترض أن M ماترويد على E، وأن $e \in E$، بحيث إن وزن $(w(e))$ غير سالب. اجعل A تساوي مجموعة في السلاسل $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$، بحيث تظهر كل $e \in E$ على الأقل في $w(e)$ مجموعة في السلسلة (ربما تُكَرَّرُ المجموعات في السلسلة). استخدم الخوارزمية الجشعة لتبرهن أن: $\max_{i \in I} \sum_{e \in l} w(e) = \min_{(x_i \in A)} \sum_i r(X_i)$.

29.2.8. (-) افترض أن $\boldsymbol{r}$ و σ هما دالتا الرتبة والتوليد لماترويد ما. أثبت أن:

$$r(X) = min\{|Y| : Y \subseteq X, \sigma(Y) = \sigma(X)\}$$

30.2.8. أثبت أنه يوجد على الأقل 2^r مجموعة مغلقة للماترويد الذي رتبته r ([1957] Lazarson).

31.2.8. أثبت أن الماترويد يكون بسيطًا إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: 1) لا يوجد أي عنصر يظهر في كل مستوى زائدي. 2) من كل زوج من العناصر المختلفة، يوجد مستوى زائدي يحوي واحدًا منها بالضبط. أثبت أن هذين الشرطين يكفيان لأن تكون عائلة من المجموعات جمعًا من المستويات الزائدية لماترويد بسيط.

32.2.8. في ماترويد ما، أثبت أن مجموعة تكون تحت أساس إذا وفقط إذا كانت مستوى زائديًّا.

33.2.8. استخدم خاصية الحذف الضعيف في إعطاء توصيف مُميّز عندما تكون عائلة من المجموعات عائلة مستويات زائدة لماترويد ما.

34.2.8. أثبت أن المجموعات المغلقة لماترويد ما هي المتممات لاتحادات مرافقات الحلقات.

35.2.8. افترض أن X مجموعة مغلقة في ماترويد M:

a) لتكن Y مجموعة مغلقة محتواة في X، بحيث إن $r\left(Y\right) = r\left(X\right) - 1$. أثبت أنه يوجد لـ M مستوى زائدي H بحيث $Y = X \cap H$. (مساعدة: إذا كان معطى لدينا مجموعة جزئية مستقلة كبرى Z من Y، فوسِّعها بواسطة $e \in X$، ثمَّ وسِّعها لأساس B، واجعل $H = \sigma\left(B - e\right)$.

b) أثبت أن X هو تقاطع $r\left(M\right) - r\left(X\right)$ من المستويات الزائدية المختلفة.

36.2.8. أثبت الخواص الآتية للمجموعات المغلقة لماترويد:

a) تقاطع أيّ مجموعتين مغلقتين يساوي مجموعة مغلقة.

b) يساوي مولّدُ أيِّ مجموعة تقاطعَ المجموعات المغلقة جميعها التي تحوي هذه المجموعة. (تعليق: لذا، فإن σX هي المجموعة الوحيدة المغلقة الصغرى التي تحوي X).

37.2.8. أثبت أن $M.X$ لا تحوي عُرًى إذا وفقط إذا كانت $\bar{X}$ مغلقة.

38.2.8. (!) الأساسات ومرافقات الحلقات في الماترويدات:

a) أثبت أنه عندما ينتمي e إلى أساس B في ماترويد M، فإنه يوجد بالضبط مرافق حلقة واحدة في M منفصل عن $B - e$، ويحوي e.

b) استخدم فرع (a) لتبرهن أنه إذا كانت C حلقة في ماترويد M، وكان كلٌّ من x و y عنصرين مختلفين من عناصر C، فإنه يوجد مرافق حلقة $C^* \in \mathbf{C}^*$ بحيث إن $C^* \cap C = \{x, y\}$، (Minty [1966]).

c) فسّر لماذا يكون فرع (b) بديهيًّا وتافهًا لماترويدات الحلقات.

39.2.8. (-) أثبت أن ثنوي الماترويد البسيط (لا يحوي عرى ولا عناصر متوازية) يمكن أن يكون غير بسيط. وبيّن إمكانية أن تكون مجموعة معينة حلقة أو مرافق حلقة في ماترويد ما.

40.2.8. (!) استخدم ثنوية الماترويدات لتبرهن صيغة أويلر لبيانات المستوى المترابطة.

41.2.8. أثبت أن أيَّ فرع لماترويد يمكن الحصول عليه عن طريق الحصر والتقليص، يمكن الحصول عليه كذلك عن طريق التقليص والحصر. وخصوصًا، إذا كان M ماترويد على E، وكانت $Y \subseteq X \subseteq E$، فبرهن أن $(M.X)|Y = (M|\overline{X-Y}).Y$، وأن $(M/X).Y = (M.\overline{X-Y})|Y$.

42.2.8. استخدم مبدأ الثنوية (الازدواجية) وحصر الماترويد لتبرهن أن $r_{M.F}(X) = r_M(X \cup F) - r_M(F)$، وكذلك اشتقت الصيغة مباشرة عن طريق إثبات أن X مستقلة في $M.F$ إذا وفقط إذا كانت إضافة X إلى $\bar{F}$ تزيد الرتبة بمقدار $|X|$.

43.2.8. إثبات أن ماترويد الحلقات $M(G)$ هو ماترويد الأعمدة على $\mathbb{Z}_2$ لمصفوفة وقوع رأس - ضلع للبيان G، (لذا، فإن كلَّ ماترويد متحقق بيانيًّا يكون ثنائيًّا).

44.2.8. لقد أثبت توت (Tutte [1958]) إن الماترويد يكون ثنائيًّا إذا وفقط إذا خلا من $U_{2,4}$ بوصفه فرعًا:

a) أثبت أن المصفوفة $\begin{pmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&1&1&2 \end{pmatrix}$ تمثل $U_{2,4}$ على $\mathbb{Z}_3$.

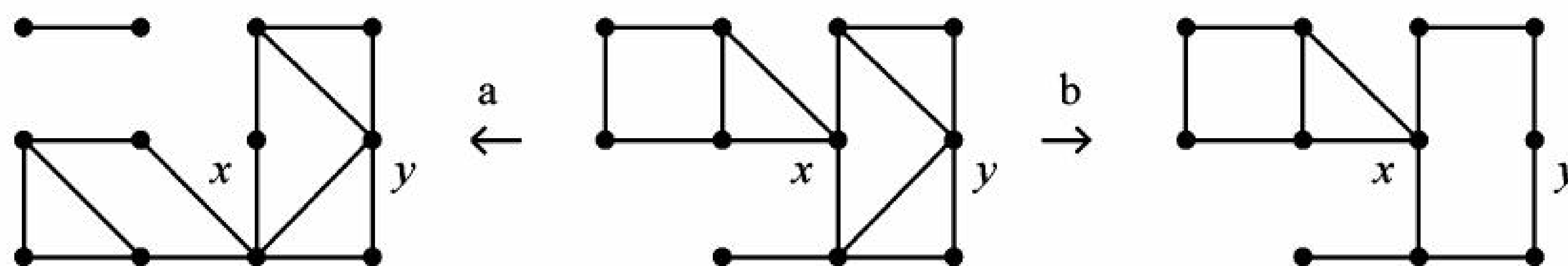
b) أثبت أنه لا يوجد تمثيل لـ $U_{2,4}$ على $\mathbb{Z}_2$.

45.2.8. أثبت أن العمليات الثلاث أدناه تحافظ على ماترويد الحلقات للبيان G:

a) فكّ G لقوالب $B_1, \ldots, B_K$، ثم أعد جمعها لتشكل بيانًا آخر G' قوالبه $B_1, \ldots, B_K$.

b) في قالب B من G الذي له مجموعة قطع من رأسين $\{x, y\}$، بدِّل جيران x و y في أحد مركبات $B - \{x, y\}$

c) أضف الرؤوس المعزولة أو احذفها.



(تعليق: نظرية تشاكل 2- لوتني (Whitney's 2- isomorphismTheorem [1933b]) تنص على أن لـ G و H ماترويد الحلقات نفسه إذا وفقط إذا أمكن تحويل G إلى H من خلال إجراء متتالية من هذه العمليات. لذا، فإن لكل بيان سوي مترابط من الدرجة 3 بيانًا ثنويًّا واحدًا فقط؛ وهذا يعني وجود طمر سوي واحد فقط. انظر (Kelmans [1980])).

46.2.8. جد بيانًا دون رؤوس معزولة، وجد بيانًا ثنويًّا مجردًا له بحيث لا يكون ثنويًّا هندسيًّا. (مساعدة: خذ في الحسبان العمليات الموجودة في التمرين 45.2.8)، (Woodall، في Welsh [1976], P91-92).

47.2.8. إن بيان أساسات الماترويد هو البيان الذي له رأس لكل أساس للماترويد، حيث تكون الأساسات متجاورة إذا كان حجم الفرق التماثلي لهذه الأساسات يساوي 2. أثبت على وجود حلقة مولدة لكل بيان أساسات

ماترويد، ووضح النتيجة لكل من الماترويدات البيانية والموحدة (مساعدة: استخدم التقليص والحصر استقرائيًّا لإيجاد حلقة مولدة من خلال أي ضلع)، (Holzmann-Harary [1972]، Kung [1986,p72]).

48.2.8. استخدم الثنوية الضعيفة للبرمجية الخطية لتبرهن الخاصية الثنوية الضعيفة لتقاطع الماترويدات: $|I| \le r_1(X) + r_2(\bar{X})$ لكل $I \subseteq \mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2$ ولكل $X \subseteq E$. (مساعدة: خذ في الحسبان نقاش الأزواج الثنوية للبرامج الخطية في الملاحظة 7.1.8).

49.2.8. افترض أن M_1 و M_2 ماترويدان على E:

a) أثبت أن أصغر حجم لمجموعة في E هو $\max_{X \subseteq E}\left(r_1(E) - r_1(X) + r_2(E) - r_2(\bar{X})\right)$ بحيث إن هذه المجموعة تولد M_1 و M_2. طبق فرع (a) لتبرهن أنه في البيان الثنائي الفرع الذي ليس له رؤوس معزولة يكون أصغر عدد من الأضلاع يلزم لتغطية الرؤوس جميعها مساويًا لأكبر عدد من الرؤوس التي لا يوجد بينها أضلاع (نظرية Koing "الأخرى").

b) من فرع (a) أثبت أن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة إضافة إلى أصغر حجم لمجموعة مُولدة مشتركة يساوي $r_1(E) + r_2(E)$. استنتج نظرية جالاي (Gallai) للبيانات الثنائية الفرع: في أي بيان ثنائي الفرع الذي ليس له رؤوس معزولة، يكون أكبر حجم لمواءمة إضافة إلى أصغر عدد من الأضلاع يلزم لتغطية الرؤوس مساويًا لعدد الرؤوس.

50.2.8. استخدم نظرية تقاطع الماترويدات لتبرهن أنه في كل توجيه لا حلقي لـ G يمكن تغطية الرؤوس على الأكثر بـ $\alpha(G)$ من المسارات المنفصلة زوجًا زوجًا. (Chappell [1994])، (تعليق: هذه حالة خاصة من النظرية 33.4.8. للبيانات الموجهة اللاحلقية).

51.2.8. (-) افترض أن M ما ترويد مستعرض على $E = A_1$ مُسْتحدث من قبَل المجموعات $A_1, \ldots\ldots, A_m$ استخدم نظرية هال (Hall) للمواءمة في البيانات الثنائية الفرع لتشتق دالة الرَتبَة على الصورة:

$$r(X) = \min_{Y \subseteq X}\left\{|X| - \left(|Y| - |N Y|\right)\right\}$$

52.2.8. افترض أن G بيان ثنائي، مجموعتا رؤوسه هما E و $[m]$، وليس له رؤوس معزولة. لـ $X \subseteq E$، افترض أ، $r(X) = \min\left\{|N(J) \cap X| - |J| + m : J \subseteq [m]\right\}$. أثبت أن العبارات الآتية متكافئة لـ X:

a) يتحقق شرط هال $|N(S)| \ge |S|$ لكل $S \subseteq X$.

b) $r(X) \ge |X|$

c) تكون X مشبعة من قبَل مواءمة في G.

(مساعدة: إن إثبات $B \Leftarrow C$ يستخدم مسارات من رؤوس غير مشبعة تتناوب بين أضلاع خارجَ مواءمة محددة سلفًا وداخلها.

53.2.8. (!) افترض أن G بيان ثنائي، مجموعتا رؤوسه هما E و $[m]$، ليس له رؤوس معزولة، لـ $X \subseteq E$ و $J \subseteq [m]$. اجعل $g(X, J) = |N(J) \cap X| - |J|$، واجعل $r(X) = \min\{g(X, J) + m : J \subseteq [m]\}$. نقول: J مثالي بالنسبة إلى X إذا كانت $r(X) = g(X, J) + m$:

a) أثبت أن $r(\phi) = 0$، وأن $r(X) \le r(X + e) \le r(X) + 1$.

b) أثبت أن r يحقق خاصية الامتصاص الضعيف.

54.2.8. أثبت أن حصر الماترويدات المستعرضة واتحادها يكون ماترويدات مستعرضة، لكن التقليص، والماترويدات الثنوية للماترويدات المستعرضة ليست بالضرورة ماترويدات مستعرضة.

55.2.8. قامويدات. افترض أن D بيان موجه، وإن F و E مجموعتان جزئيتان من $V(D)$، إن القامويد على E الذي تحدثه D و F هو النظام الوراثي المعطى على الشكل: $\mathbf{I} = \{X \subseteq E$: بحيث يوجد $|X|$ من المسارات من F إلى X المنفصلة زوجًا زوجًا$\}$، مكافئًا لذلك فإن $r(X)$ هي أكبر عدد من المسارات من F إلى X المنفصلة زوجًا زوجًا:

a) أثبت أن كل ماترويد مستعرض يكون قامويد.

b) (+) أثبت أن كل قامويد هو ماترويد. (مساعدة: استخدم نظرية منجر لتبرهن تحقق خاصية المقياسية الجزئية، بالإضافة إلى أن إثبات تحقق خاصية التوسيع ممكن أيضًا، إلا أنه أطول بعض الشيء)، (Mason [1972]).

56.2.8. القامويدات التامة. افترض أن D بيان موجه، وافترض كذلك أن F و E مجموعتان جزئيتان من

رؤوس D، واجعل M هو القامويد على E المستحدث من D و E (التمرين 55.2.8). عندما تكون E هي رؤوس D جميعها، فإن القامويد يكون قامويد تامًّا. أثبت أن الماترويد يكون قامويد تامًّا إذا وفقط إذا كان ثنويًّا لماترويد مستعرض. (مساعدة: استخدم الارتباط الطبيعي بين البيانات الموجهة على n من الرؤوس، واستخدم البيانات ثنائية الفرع على $2n$ من الرؤوس)، (Ingleton –Piff [1973]).

57.2.8. (-) بما أن اتحاد الماترويدات هو ماترويد، فيجب وجود عملية ثنوية تعطي الماترويد الثنوي لهذا الاتحاد. إذا أُعطيتَ ماترويدين M_1 و M_2 بحيث $\mathbf{S}_1$ و $\mathbf{S}_2$ هما المجموعتان المولدتان، افترض أن $M_1 \cap M_2$ هو النظام الوراثي الذي مجموعاته المولدة هي $\{X_1 \cap X_2 : X_1 \in \boldsymbol{S}_1, X_2 \in \boldsymbol{S}_2\}$. فبرهن أن $M_1 \cap M_2$ هو الماترويد $(M_1^* \cup M_2^*)^*$.

58.2.8. الماترويدات المستعرضة العامة:

a) افترض أن M ماترويد على E، واجعل $\boldsymbol{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ نظام مجموعة على E، لتكن M' هي النظام الوراثي على $[m]$ الذي مجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية من $\boldsymbol{A}$ التي لها مستعرضات تنتمي إلى $\mathbf{I}_M$، أثبت أن M' يكون ماترويد، ودالة رتبته هي: $r'(X) = \min_{Y \subseteq X} \{|X - Y| + r(A(Y))\}$

b) افترض أن E و F مجموعتان منتهيتان، وافترض أيضًا أن f دالة من E إلى F. إذا كانت $X \subseteq E$ افترض أن $f(X)$ تمثل مجموعة صور عناصر X، وافترض أيضًا أن M ماترويد على E، اجعل M' تمثل النظام الوراثي على F المعرّف على الشكل $\boldsymbol{I}_{M'} = \{f(X) : X \in \boldsymbol{I}_M\}$.

c) أثبت أن M' ماترويد. وبرهن كذلك أن $r'(X) = \min_{Y \subseteq X} \{|X - Y| + r(f^{-1}(Y))\}$ عندما تكون f شاملة (Subjective).

59.2.8. طبق مجموع الماترويدات وتمرين 58.2.8 لتبرهن نظرية اتحاد الماترويدات.

60.2.8. (!) أثبت أن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة بين الماترويدين M_1 و M_2 على E هو: $r_{M_1 \cup M_2^*}(E) - r_{M_2^*}(E)$ استخدم هذا لتبرهن نظرية تقاطع الماترويدات من خلال تطبيق نظرية اتحاد الماترويدات على $M_1 \cup M_2^*$. (تعليق: إذن، هاتان المبرهنتان متكافئتان).

61.2.8. افترض أن G بيان موزون على n من الرؤوس، وافترض أيضًا أن $E_1 \ldots E_{n-1}$, تجزئة لـ $E(G)$ لـ n-1 مجموعة. هل توجد خوارزمية على صورة كثيرة حدود بالنسبة الى الزمن، لحساب عدد الأشجار المولدة التي لها وزن أصغر من بين الأشجار التي لها ضلع واحد بالضبط في كل مجموعة جزئية E_i؟

62.2.8. (!) استخدم التوصيف المميز للبيانات التي لها k من الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا (النتيجة 59.2.8) لتبرهن علي وجود k شجرة مولدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا لكل بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k$، ولكل k جد بيانًا مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $2k$ بحيث لا يوجد له $k+1$ من الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. (Nash-Williams[1961]).

63.2.8. إذا أُعطيتَ الماترويدات $M_1, \ldots, M_k$, على E، إن مسألة تجزئة الماترويدات هي مسألة تحديد ما إذا كانت المجموعة X قابلة للتجزئة إلى المجموعات $\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_k$ حيث إن، $I_i \in \boldsymbol{I}_i$:

a) استخدم نظرية اتحاد الماترويدات لتبرهن أن X قابلة للتجزئة إذا وفقط إذا تحقق أن $|X - Y| + \sum r_i(Y) \geq |X|$ لكل $Y \subseteq X$، وأن المجموعات الأعظمية القابلة للتجزئة تكون مجموعات كبرى قابلة للتجزئة.

b) افترض أن M' هي اتحاد k نسخة من الماترويد M على E، وافترض أن X هي مجموعة عظمى قابلة للتجزئة. أثبت على وجود مجموعات منفصلة $F_1, \ldots, F_k \subseteq X$ بحيث إن $\{F_i\} \subseteq \mathbf{I}$ وأن $\sigma(F_k) = \cdots = \sigma(F_i) \subseteq X$.

3.8 نظريـة رامــزي (Ramsey Theory)

تعود «نظرية رامزي» إلى دراسة تجزئات تراكيب بنائية كبيرة. وتنصّ النتائج النموذجية على أنّ بعض البناءات الجزئية الخاصة يجب أنْ تحدث في بعض صفوف التجزئة. وقد وصف موتزكن (Motzkin) هذا من خلال قوله "الفوضى الكاملة مستحيلة". إنّ الأشياء التي نستخدمها هي مجموعات وأعداد، والأساليب المستخدمة أكثر قليلًا من الاستقراء.

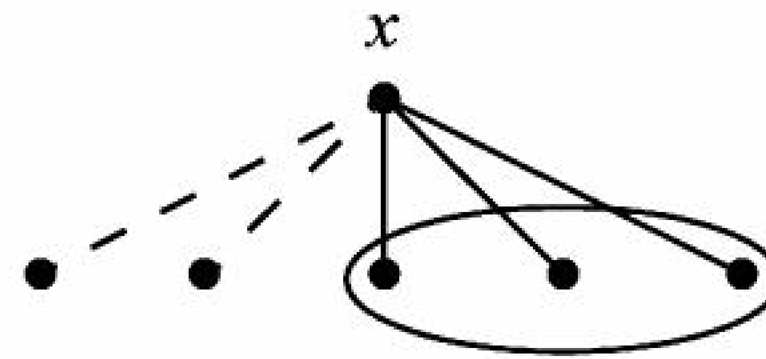
إنّ نظرية رامزي تعمّم مبدأ طواقي (أعشاش) الحمام، والتي نفسها تتعامل مع تجزئات المجموعات. وسندرس تطبيقات مبدأ أعشاش الحمام، إضافة إلى أننا سنبرهن نظرية رامزي، وبعد ذلك، سنركز على أسئلة رامزي الخاصة بالبيانات. وأخيرًا، سنناقش تمهيدية سبيرنر (Sperner) حول وضع علامات دالة على التثليثات؛ وهي مثل نظرية رامزي في أنها تضمن بنية جزئية خاصة.

عودة إلى مبدأ صناديق الحمام (The Pigeonhole Principle Revisited)

ينصّ مبدأ صناديق الحمام (التمهيدية 57.A) على أنه إذا أردنا تجزئة m من الأشياء إلى n من الصفوف، فإنّ أحد هذه الصّفوف يحوي $\lceil m/n \rceil$ شيئًا على الأقل (وأنّ أحد هذه الصّفوف يحوي $\lfloor m/n \rfloor$ شيئًا على الأكثر). إنّ هذه نسخة متقطعة (منفصلة) من العبارة التي تنصّ على أنّ كلّ مجموعة تحوي عددًا أقل من متوسط هذه الأعداد أو يساويه (وعددًا أكبر أو يساوي). إنّ المفهوم بسيط، ولكن التطبيقات يمكن أنْ تكون دقيقة جدًا؛ حيث تكمن الصعوبة في كيفية تعريف تجزئة تناسب التطبيق المنشود. وسنوضّح هذا من خلال أربعة أمثلة.

1.3.8. قضية : من بين ستة أشخاص، يمكن إيجاد ثلاثة منهم؛ كلّ واحد منهم يعرف الاثنين الآخرين، أو ثلاثة منهم بحيث إنّ كلًّا منهم لا يعرف الآخرين.

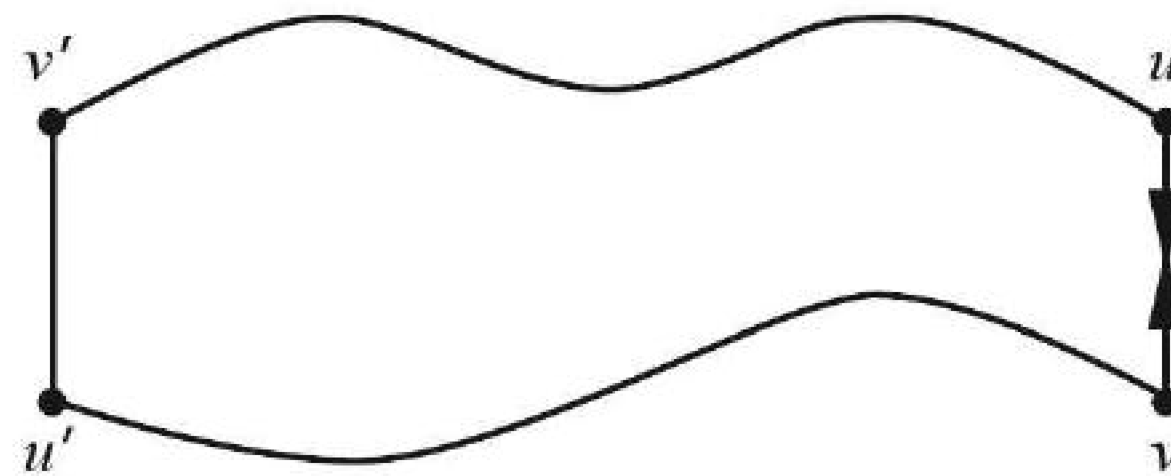
الإثبات : (التمرين 29.1.1) . بلغة نظرية البيانات، يصبح المطلوب برهنة أنّه يوجد مثلث في G أو مثلث في $\overline{G}$ لكلّ بيان G على ستة رؤوس لاحظ أنّ مجموع درجات الرأس x في G و $\overline{G}$ يساوي 5. لذا، فإنّ مبدأ طواقي الحمام يضمن أنّ درجة x تساوي 3على الأقل، إما في G أو في $\overline{G}$. ومن التماثل، نستطيع افتراض أنّ $d_G(x) \geq 3$. إذا وُجِدَ جاران لـ x متجاوران، فإنّ هذا يعطينا المثلث المنشود في G. وبخلاف ذلك، فإنّ ثلاثة من جيران x تشكّل مثلثًا في $\overline{G}$. ■



2.3.8. نظرية : (Graham – Entringer – Sze'kely [1994]) إذا كانت T شجرة مولدة للمكعب الزائدي Q_k، فإنه يوجد ضلع له خارج T، بحيث إنّ إضافته إلى T يعطي حلقة طولها $2k$ على الأقل.

الإثبات : لكل رأس v من رؤوس Q_k المكتوب على صورة عديد -k ثنائي، يوجد رأس متمم v' يختلف عن v في كلّ موقع، ويوجد مسار وحيد من v إلى v' في T، وجِّه ضلعه الأول نحو v'. بما أنّ $n(Q_k) = e(T) + 1$، وبتطبيق هذا على كلّ رأس، فإنّ مبدأ طواقي الحمام يضمن وجود ضلع قد تمّ توجيهه مرتين.

بما أنّ هذا الضلع uv يستقبل توجيهًا من u، وتوجيهًا آخر من v، فسنحصل على أنّ v موجود على مسار من u إلى u'، و u موجود على مسار من v إلى v' في T. لذا، فإنّ المسارين من u إلى v'، ومن v إلى u' الموجودين في T يكونان منفصلين. إنّ طول كلّ منهما يساوي k-1 على الأقل؛ لأنّ المسافة في Q_k، بين أيّ رأس ومتممته تساوي k. أخيرًا، $v \longleftrightarrow u$ في Q_k تعطي أيضًا أنّ $v' \longleftrightarrow u'$ ، وهذا يكمل حلقةً طولها $2k$ على الأقل. ■



تشير النظرية 2.3.8. إلى أنّ قُطر كلّ شجرة مولدة لـ Q_k يساوي $2k-1$ على الأقل (Graham – Harrary [1992]).

3.3.8. نظرية : (Erdös – szekeres [1935]) يوجد لكل قائمة تحوي أكثر من n^2 عددًا قائمةً جزئية رتيبة طولها أكثر من n.

الإثبات: افترض أنّ $a = a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ هي القائمة. حدّد العلامة (x_k, y_k) للموقع رقم k حيث تمثّل x_k طول أطول قائمة جزئية متزايدة تنتهي عند a_k. أمّا y_k فتمثّل طول أطول قائمة جزئية متناقصة تنتهي عند a_k. إذا لم يوجد لـ a قائمة جزئية رتيبة طولها $n+1$ ، فإنّ x_k و y_k لا يمكن أنْ يزيدا (يتجاوزا) على n، وبذلك يوجد n^2 علامة ممكنة فقط.

بما أنّ طول القائمة يساوي $n^2 + 1$، فإنّ مبدأ طواقي الحمام يضمن الآن أنّ هناك علامتين هما العلامة نفسها. ويُعدُّ هذا مستحيلاً عندما تكون عناصر a مختلفة. عندما $i < j$، و $a_i < a_j$، فبإمكاننا إلحاق a_j بأطوال متتالية متناقصة تنتهي عند a_i. (للتعميم؛ انظر التمرين 43.1.5). ■

a:	7	4	1	8	5	2	9	6	3	0
x, y:	1,1	1,2	1,3	2,1	2,2	2,3	3,1	3,2	3,3	4,1

4.3.8. نظرية : (Graham – Kleitman [1973]) في كلّ وسم (وضع علامات دالّة) لـ $E(K_n)$ باستخدام أعداد صحيحة، يوجد مسرب طوله يساوي $n - 1$ على الأقل. بحيث تكون علاماته الدالة متزايدة تمامًا.

الإثبات: نحدّد لكلّ رأس وزنًا مساويًا لطول أطول مسرب متزايد ينتهي عند هذا الرأس، إذا استطعنا إثبات أنّ مجموع هذه الأوزان يساوي $n(n-1)$ على الأقل، فإنّ مبدأ أعشاش الحمام يضمن وجود رأس له وزن كبير كفاية. ولكن المشكلة تكمن في كيفية حساب الأوزان ومجموعها.

نبني بيانًا من البيان التافه بإضافة الأضلاع بالترتيب، ونحدّث الأوزان ومجموعها في كلّ خطوة. تبدأ أوزان الرؤوس عند. فإذا كان الضلع التالي يربط بين رأسين يساوي وزنهما i، عندها يصبح وزنهما $i+1$. أمّا إذا ربطت بين رأسين وزنيهما i و j، وحيث $i < j$، عندها يصبح وزنيهما $j+ 1$ و j.

في الحالات جميعها، نضيف ضلعًا في كلّ مرّة، ليزداد مجموع الأوزان بمقدار 2 على الأقل. لذا، فإنّ البناء قد تمَّ، وأنّ مجموع أوزان الرؤوس يساوي $n(n-1)$ على الأقل. ■

أخيرًا، نلاحظ أنّ البداية في الصّفوف يمكن أنّ تختلف.

5.3.8. نظرية : إذا جزَّأنا $\sum p_i - k + 1$ شيئًا إلى k صفًّا بحصص $\{p_i\}$، فلا بُدّ من وجود صفّ يوافق حصّته.

الإثبات: إذا لم يوجد مثل هذا الصّفّ، فإنه يمكن توفيق $\sum p_i - 1$ شيئًا على الأكثر. ■

نظرية رامزي (Ramsey Theorem)

يضمن مبدأ أعشاش الحمام وجود صفّ فيه العديد من الأشياء عند تجزئتها إلى صفوف. تعطي نظرية رامزي الشهيرة [1930م] نصًّا مشابهًا حول تجزئة المجموعات الجزئية التي تحوي r من العناصر إلى صفوف.

بصياغة تقريبية، فإن نظرية رامزي تنصّ على أنه عندما نجزّئ المجموعات التي تحوي r من العناصر في مجموعة كبيرة كفاية S إلى k صفًّا، فإنّ هناك مجموعة جزئية من S تحوي p من العناصر، بحيث تقع مجموعاتها جميعها التي تحوي r عنصرًا في الصّفّ نفسه.

التجزئة هي فصل المجموعة إلى مجموعات جزئية، وتتألف المجموعة التي نرغب في تجزئتها من مجموعات جزئية لمجموعة أخرى. لذا، سنستخدم لغة التلوين بدلاً من لغة التجزئة للتوضيح. تذكّر أنّ التلوين بـ k لونًا لمجموعة يقسم المجموعة إلى k صفًّا. إنّ الصّفّ أو علامته الدالة لونٌ نستخدم بصورة نموذجية $[k]$ للتدليل على مجموعة الألوان، وفي الأحوال جميعها، فإن تلوين X بـ k من الألوان يمكن النظر إليه بوصفه دالة $f: X \to [k]$

6.3.8. تعريف. اجعل $\binom{S}{r}$ ترمز إلى عدد المجموعات الجزئية التي تحوي r من العناصر؛ وذلك من المجموعة S. ونقول: إنّ المجموعة $T \subseteq S$ **متجانسة تحت تلوين لـ** $\binom{S}{r}$ إذا كان للمجموعات جميعها التي تحوي r عنصرًا في T اللونُ نفسه. ونقول: إنها متجانسة من نوع i إذا كان هذا اللون هو i.

افترض أنّ $p_1, \ldots, p_k$ و r أعداد صحيحة موجبة، إذا وُجِدَ عدد صحيح N بحيث يعطي كلّ تلوين بـ k من الألوان لـ $\binom{[N]}{r}$ مجموعة متجانسة من نوع i حجمها p_i لبعض i، فإنّ أصغر عدد صحيح يحقّق هذه الخاصية هو **عدد رامزي** $R(P_1, \ldots, P_k; r)$.

تنصّ نظرية رامزي على أنّ مثل هذا العدد الصحيح موجود لكلّ خيار لـ r و $P_1, \ldots, P_k$ (إن $p_1, \ldots, p_k$ تّسمى عتبات (**بدايات**) أو **حصص**). عندما تكون كلّ حصة تساوي p، فإن النظرية تنصّ على أنه لكلّ تلوين بـ k من الألوان للمجموعات $-r$ (التي تحوي r من العناصر) لمجموعة كبيرة كفاية توجد مجموعة $-p$ (تحوي p عنصرًا) بحيث إنّ لمجموعاتها $-r$ اللون نفسه. وهناك دراسة معمقة لنظرية رامزي وبعض مبرهنات التجزئة الأخرى في ([Graham – Rothschild- Spencer [1980, 1990]).

قبل أنْ نبرهن النظرية، سنأخذ في الحسبان الحالة $r = k = 2$ والتي من السهل وصفها بدلالة تلوين أضلاع البيانات، حيث إنّ لإثبات هذه الحالة تركيبة إثبات الحالة العامة نفسها.

عندما $r = 2$، فإنّ تجزئة $\binom{S}{r}$ لمجموعات تحوي k عنصرًا ليست سوى تلوين أضلاع البيان التام الذي رؤوسه S بـ k من الألوان (ليس تلوين أضلاع فعليًّا). عندما $k = 2$، فإن التقليد الذي تم احترامه بمرور الوقت في نظرية رامزي هو أنّ اللون 1 هو «أحمر» أمّا اللون 2 فهو "أزرق".

من القضية 1.3.8 ، نجد أنّ $R(3,3;2) \leq 6$ ، سنعمّم (نمدد) التعليل لنبرهن أن:

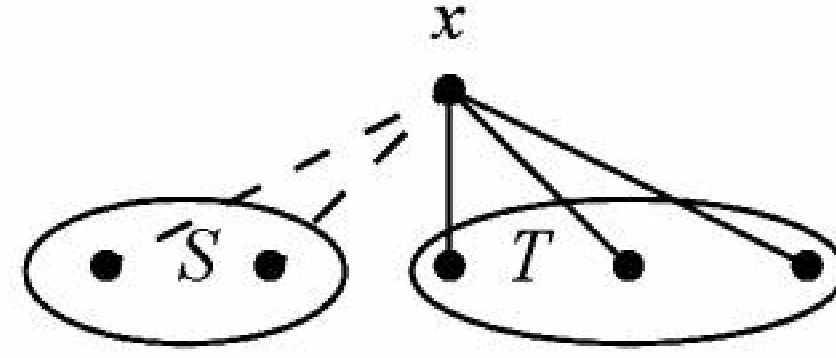
$$R(p_1, p_2; 2) \leq R(p_1 - 1, p_2; 2) + R(p_1, p_2 - 1;2)$$

على افتراض أنّ $R(p_1 - 1, p_2; 2)$، و $R(p_1, p_2 - 1; 2)$ موجودة، افترض أنّ N تساوي حاصل جمعهما، إنّ إثبات الحدّ لـ $R(p_1, p_2; 2)$ يعني أنْ نبرهن أنّ كلّ تلوين أحمر/ أزرق لأضلاع بيان تام له N من الرؤوس يعطينا مجموعة تحوي p_1 عنصرًا (من الآن فصاعدًا، سنكتب مجموعة $-r$ للتدليل على المجموعة التي عدد عناصرها يساوي r) من الرؤوس التي أضلاعها جميعها حمراء، ومجموعة p_2 من الرؤوس التي أضلاعها جميعها زرقاء.

خذ في الحسبان تلوينًا أحمر/ أزرق لـ K_N، واختر رأسًا x. افترض أنّ $s = R(p_1 - 1, p_2; 2)$، و $t = R(p_1, p_2 - 1; 2)$ يوجد $s + t - 1$ رأسًا مختلفًا عن x. إنّ النظرية 5.3.8 تتضمن أنه يوجد على الأقل s ضلعًا أحمر تقع على x، أو على الأقل t ضلعًا أزرق تقع على x.

من التماثل، يمكننا افتراض أنه يوجد على الأقل x ضلعًا أحمر تقع على N. من تعريف s، يوجد للبيان الجزئيّ التام المستحدث من قبل جيران x عبر هذه الأضلاع عصبة $-p_2$ زرقاء أو عصبة $-(p_1 - 1)$ حمراء.

ويمكن ضمّ الأخيرة إلى x للحصول على عصبة $-p_1$ حمراء. وفي كلتا الحالتين نحصل على مجموعة متجانسة $-i$ حجمها p_i لبعض i. سنؤجّل النقاش حول الحدّ الناتج على $R(p_1, p_2; 2)$.



$$|S| \geq R(p_1, p_2 - 1; 2) \qquad \text{or} \qquad |T| \geq R(p_1 - 1, p_2; 2)$$

7.3.8. نظرية : (Ramsey [1930]) . إذا أُعطينا أعدادًا صحيحة موجبة r و $p_1, \ldots, p_k$، فإنه يوجد عدد صحيح N، بحيث يعطي كلّ تلوين بـ k من الألوان لـ $\binom{[N]}{r}$ مجموعة متجانسة $-i$ حجمها p_i وذلك لبعض i.

الإثبات: الإثبات هو استقراء "مضاعف"، وسنستخدم الاستقراء على r، إلا أنّ إثبات خطوة الاستقراء نفسها يستخدم الاستقراء على $\sum p_i$.

الخطوة الأساس: $r = 1$ ، من النظرية 5.3.8. $R(p_1, \ldots, p_k; 1)$ موجودة.

خطوة الاستقراء: $r > 1$. نفترض أنّ الادعاء في نصّ النظرية يتحقق للتلوين بـ k من الألوان للمجموعات الجزئية $-(r - 1)$ لمجموعة معينة، بصرف النظر عن البدايات (العتبات). سنبرهن العبارة للتلوين بـ k من الألوان للمجموعات الجزئية $-r$ لمجموعة بالاستقراء على مجموع الحصص، $\sum p_i$.

الخطوة الأساس: تكون حصّة p_i أقلّ من r. في هذه الحالة، المجموعة - p_i لا تحوي مجموعات $-r$. لذا، - تلقائيًّا - نجد أنّ مجموعاتها $-r$ لها اللون i نفسه. إذن، $R(p_1, \ldots, p_k; r) = \min \{p_1, \ldots, p_k\}$ ، وذلك عندما يكون $r < \min \{p_1, \ldots, p_k\}$.

وللتوضيح؛ فإننا نضع نصّ خطوة الاستقراء فقط للحالة $k = 2$. إنّ التعليل لعموم k مشابه (التمرين 17). اكتب (p, q) بدلاً من (p_1, p_2) واجعل:

$$p' = R(p - 1, q; r) \text{ ، } q' = R(p, q - 1; r) \text{، و } N = 1 + R(p', q'; r - 1).$$

من فرضية الاستقراء للاستقراء الداخلي، فإنّ p' و q' موجودتان. ومن فرضية الاستقراء على الاستقراء الخارجي نعلم أنّ N كذلك موجودة. لاحظ أنّه من المحتمل أنْ تكون كلّ من p' و q' كبيرة جدًّا، ولهذا السبب نحتاج إلى استقرائين (استقراء مضاعف).

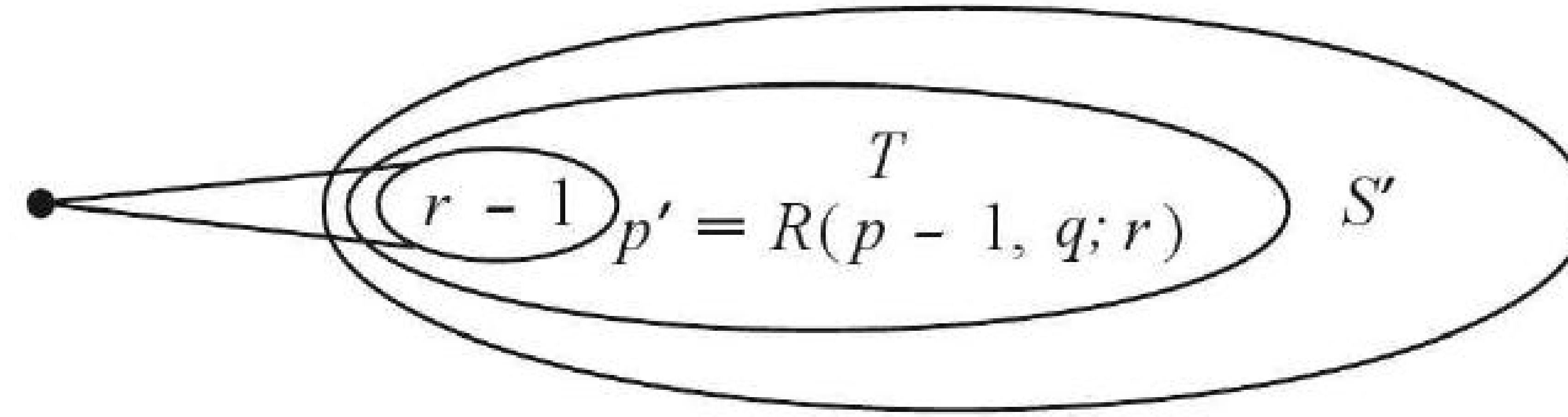
لتكن S مجموعة بها N من العناصر، اختر x في S، خذ في الحسبان تلوينًا ثنائيًّا f لـ $\binom{S}{r}$ ، حيث إنّ اللونين (أحمر، وأزرق)، يلزمنا فقط برهنة أنه يوجد لـ f مجموعة $-p$ متجانسة حمراء، أو مجموعة $-q$ متجانسة زرقاء.

نستخدم f لنُحْدِثَ تلوينًا ثنائيًّا f' للمجموعات - $(r - 1)$ لـ $S' = S - x$. وهذا هو سبب خيارنا لـ $|S'|$ بوصفها عددًا رامزيًّا للمجموعات -$(r - 1)$. عرِّف f' من خلال تحديد اللون i لمجموعة - $(r - 1)$ في S' إذا كان لاتحادها مع x اللون i تحت f وبما أنّ $|S'| = R(p', q'; r - 1)$، فإنّ فرضية الاستقراء تتضمن إنّ لونًا يوافق حصته (p' أو q') تحت f' (عندما $r = 2$، فإنّ هذه الخطوة تمثّل تنفيذًا لمبدأ أعشاش الحمام).

نستطيع من التماثل الافتراض بأنه تمّ الحصول على الحصّة الحمراء. افترض أنّ T مجموعة جزئية من S' تحوي p' من العناصر التي مجموعاتها $-(r - 1)$ تكون حمراء تحت f'.

نعود إلى التلوين الأصليّ f على المجموعات $-r$ في T. بما أنّ $|T| = p' = R(p-1, q; r)$، فإنه يوجد تحت f إمّا مجموعة $-(p-1)$ متجانسة حمراء، أو مجموعة $-q$ متجانسة زرقاء في T. إذا وُجِدَتْ مجموعة $-q$ متجانسة زرقاء، فقد حصلنا على المطلوب. وإذا وُجدت مجموعة P -$(p- 1)$ متجانسة حمراء، فخذ في الحسبان

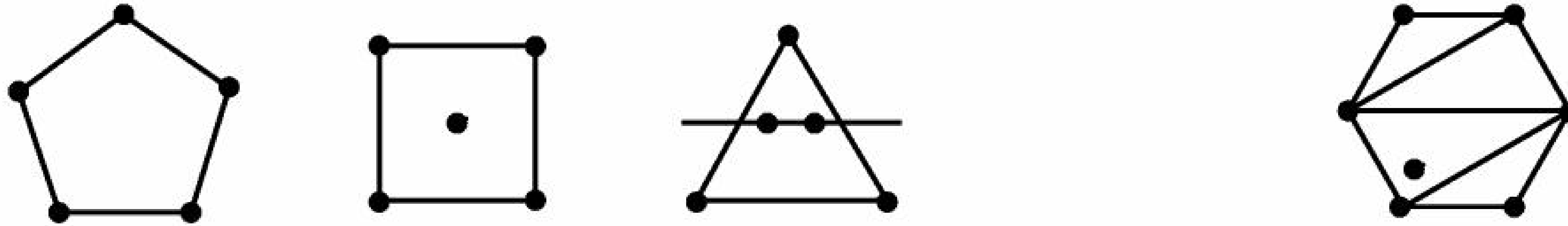
$P \cup \{x\}$ من تعريف T، تكون المجموعات $-(r-1)$ لـ p جميعها حمراء تحت f'، والذي يعني أنّ اتحادها مع x يكون أحمر تحت f. لذا، فإنّ $P \cup \{x\}$ يكون مجموعة $-p$ متجانسة حمراء تحت f. ■



تشبه نظرية رامزي مبدأ أعشاش الحمام من حيث وجود العديد من التطبيقات الرائعة والدقيقة لها. تعطي نظرية رامزي براهين نموذجية أنيقة، إلّا أنّها تعطي حدودًا كبيرة رهيبة وفظيعة.

8.3.8. نظرية: ([Erdős – Szekers [1935]). إذا أُعطينا عددًا صحيحًا m، فإنّه يوجد (أقل) عدد صحيح $N(m)$ بحيث إنّ كلّ مجموعة مؤلفة على الأقل من $N(m)$ نقطة في المستوى بحيث لا يكون أي ثلاث نقاط منها على استقامة تحوي مجموعة جزئية m- تشكّل مضلّعًا محدّبًا عدد أضلاعه m.

الإثبات: نحتاج إلى حقيقتين، هما: (1) من بين أيّ خمس نقاط في المستوى، نعلم أنّ أربعًا منها تشكّل شكلاً رباعيًّا محدّبًا (على افتراض أنّه لا يوجد أيّ ثلاث منها على استقامة واحدة). ابن الغلاف المحدّب للنقاط الخمس. إذا كان هذا الغلاف شكلاً رباعيًّا أو خماسيًّا، فإنّ النتيجة تتبع فورًا. أمّا إذا كان الغلاف مثلّثًا، فإنّ النقطتين الأخريين تقعان في الداخل. ومن مبدأ طواقي الحمام (١)، فإن رأسين من رؤوس المثلث يقعان على أحد جانبي الخطّ الذي يمرّ بالنقطتين الداخليتين. تشكل هاتان النقطتان شكلاً رباعيًّا محدّبًا مع النقطتين الداخليتين، كما هو موضّح أدناه.



تشكّل أربع زوايا في المضلّع $-m$ (المضلّع الذي عدد أضلاعه m) شكلاً رباعيًّا محدّبًا. نحتاج إلى العكس: (2) إذا كان لدينا m على نقطة في المستوى، بحيث إنّ أيّ أربع منها تشكّل شكلاً رباعيًّا محدّبًا، فإنّ هذه النقاط تشكّل مضلّعًا m- محدّبًا. إذا فشل الادعاء، فإنّ الغلاف المحدّب لهذه الـ m نقطة يتألف من t نقطة لبعض $t < m$. إنّ النقاط المتبقية تقع داخل المضلّع $-t$. وعندما نثبّتُ المضلّع $-t$ كما هو موضّح عن اليمين أعلاه، فإنّ نقطة داخلية تقع في أحد المثلثات، حيث تشكّل هذه النقطة مع رؤوس هذا المثلث مجموعة رباعية لا تشكّل شكلاً رباعيًّا محدّبًا.

لبرهنة النظرية؛ اجعل $N = R(m, 5; 4)$ إذا كان لدينا N نقطة في مستوى بحيث لا يوجد أيّ ثلاث منها على استقامة، فلوّن كل مجموعة رباعيّة بحسب تحدّبها: أحمر، إذا كانت تحدد شكلاً رباعيًّا محدبًا. وأزرق بخلاف ذلك. من الحقيقة (1)، لا يوجد خمس نقاط بحيث تكون مجموعاتها الرباعية جميعها زرقاء. ومن نظرية رامزي، فإنّ هذا يعني أنّه يوجد m نقطة تكون مجموعاتها الرباعية جميعها حمراء، ومن الحقيقة (2) فإنها تشكّل مضلّعًا $-m$ محدّبًا. لذا، فإنّ $N(m)$ موجودة وتساوي $R(m, 5;4)$ على الأكثر. ■

الحدّ $R(m, 5; 4)$ مطاط جدًّا، ويكون حدًّا بالضبط عندما $m = 4$؛ حيث تتضمّن الحقيقة (1) $N(4) = 5 = R(4, 5;4)$. وبالمقارنة، فإنّ $N(5) = 9$ (التمرين 10). ولكن $R(5, 5;4)$ يكون ضخمًا.

لقد خمّن إيردوز وسزكرز أنّ $N(m) = 2^{m-2}+1$ وبرهنا أنّ $2^{m-2} \le N(m) \le \binom{2m-4}{m-2}+1$.

هناك تطبيق آخر يهتم باستراتيجيات البحث عن الأعداد المخزّنة بجداول. من مجموعة U، نخزّن مجموعة جزئيّة حجمها n في جدول حجمه n بحسب قاعدة لتخزين مجموعات - n. لقد استخدم ياو (Yao [1981م]) نظرية رامزي لإثبات أنّه عندما تكون U كبيرة، فإنّ استراتيجية تصغير أسوأ حالة لعدد المجسات اللازمة لاختبار ما إذا كان أحد عناصر U موجودًا في الجدول، هي تخزين المجموعة التي اختيرت بترتيب معين، ثمّ اختبار العضوية من خلال البحث الثنائي. (إذا كانت U صغيرة، فإنّ هذه الاستراتيجية ليست الأفضل). إنّ القيمة التي تعطيها نظرية رامزي إلى "القيم الكبيرة" ربّما تكون أكبر كثيرًا مما نحتاج إليه.

أعداد رامزي (Ramsey Numbers)

تعرّف نظرية رامزي أعداد رامزي $R(p_1, \ldots, p_k;r)$. لا توجد هناك صيغة دقيقة معروفة لحساب هذه الأعداد التي حُسبَ عدد قليل منها. لبرهنة أنّ $R(p_1,\ldots, p_k;\ r) = N$، يجب علينا أنّ نعطي تلوينًا بـ k من الألوان للمجموعات $-r$ من بين N -1 من النقاط التي لا تتوافق مع أي حصة. (أو نبرهن أنّ واحدة موجودة دون إبقائها)، ويجب أنْ نبرهن أنّ كلّ تلوين على N من النقاط يتوافق مَعَ أحد الحصص.

من حيث المبدأ، بإمكاننا استخدام الحاسوب لاختبار التلوينات بـ k جميعها من الألوان لـ $\binom{[N]}{r}$ لقيم n المتتابعة حتى نجدَ أول N، بحيث يتوافق كلّ تلوين من هذه الألوان مع حصّة p_i لبعض i. حتى في حالة التلوين الثنائي، فإنّ أعداد رامزي $2^{\binom{n}{2}}$ تصبح كبيرة بسرعة أكثر ممّا نتوقع.

ذكر إيردوز مقولة طريفة حيث قال: لو أنّ مخلوقًا فضائيًّا غريبًا هدّد بتدميرنا إنْ لم نخبره عن قيمة $R(5, 5)$، فيجب علينا أن نشغل أجهزة الحاسوب الموجودة في العالم جميعها من أجل حلّ هذه المسألة. أمّا إذا كان السؤال عن قيمة $R(6,6)$، فيجب علينا في هذه الحالة محاولة تدمير هذا المخلوق الغريب.

عندما $r = 2$، نختصر الرمز $R(p_1,\ldots,p_k;\ r)$ إلى $R(p_1,\ldots p_k)$. وعندما $p = p_1 = \ldots = p_k$، فإننا نختصر الرمز إلى $p_k(p;r)$. لـ $r > 2$. حيث نعرف القليل ما عدا أنّ $R(4,\ 4;\ 3) = 13$ (Mckay- Radziszowski [1991]). حتى عندما $r = 2$، فإن عددًا واحدًا فقط من أعداد رامزي معروف عندما $k > 2$ وهو $R(3,\ 3,\ 3) = 17$. في الجدول أدناه، نجد قيم $R(p,q)$ المعروفة، وكذلك نجد أفضل الحدود العليا المعروفة لغاية شهر 7 عام **1999م**. لقد حُسنت بعض هذه الحدود العليا بعد ظهور الطبعة الأولى من هذا الكتاب، والحدود الحالية موجودة في (Radziszowski [1995])، وهي تُحدَّث بصورة دورية.

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35/41	49/61	55/84	69/115
5			49/34	58/87	80/143	95/216	121/316
6				102/165	109/298	122/495	153/780

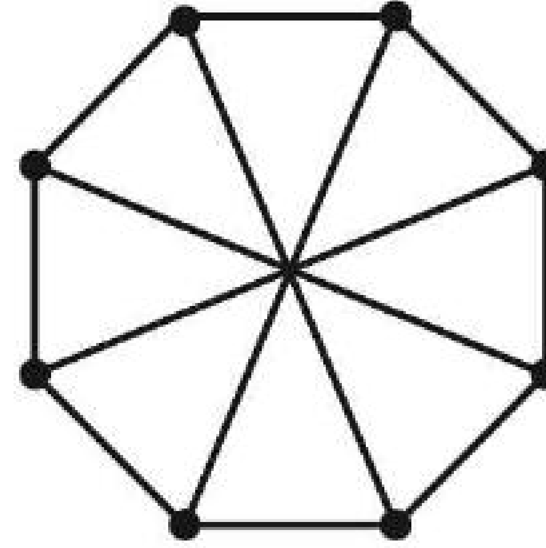
تعدّ حسابات (Grinstead- Roberts [1982]) R(3, 9) ، $R(3,\ 8)$ (Mackay – Zhang [1992]) ، (Mackay – Radiziszowski [1995] ، R(4, 5)) حديثة، أمّا الحسابات الأخرى، فهي أقدم كثيرًا (تعود بصورة أساسية لكلّ من (Greenwood – Gleason [1955]) و Kalbfleisch [1967] و Graver YackeL [1968]).

سنبرهن أول نتيجتين فقط من هذه النتائج (انظر التمرين 16 لـ (R(3,5)). عندما $r = k = 2$، فإننا نُبسّط المصطلحات من خلال استخدام لونين هما: «داخل» و«خارج». وفي هذه الحالة تصبح نظرية رامزي على

الشكل التالي: يوجد أصغر عدد صحيح $R(p,q)$ بحيث توجد لكل بيان على $R(p,q)$ من الرؤوس عصبة من الحجم p، أو مجموعة مستقلة من الحجم q.

9.3.8. مثال: $R(3, 3) = 6$. لقد أثبتنا سابقًا أنّ $R(3, 3) \leq 6$، وبما أنّ الحلقة الخماسيّة تخلو من المثلثات، وليس لها مجموعة مستقلة من الحجم 3، فإنّ $R(3, 3) \geq 6$.

10.3.8. مثال: $R(3, 4) = 9$. يخلو البيان أدناه من k_3 وكذلك من $\overline{k}_4$؛ لأنّ أيّ أربعة رؤوس مستقلة على حلقة ثمانية تشتمل على أزواج متضادة على الحلقة. لذا، فإنّ $R(3, 4) \geq 9$.



إذا كان لدينا رأس x في بيانٍ G، فبإمكاننا أنْ نضيف x إلى رأسين متجاورين لتشكيل مثلث، أو نضيف x إلى مجموعة ثلاثية مستقلة لنشكّل مجموعة رباعية مستقلة. وبما أنّ $R(2,4) = 4$ و $R(3, 3) = 6$، فإنا نستنتج أنه إذا وُجد لـ x أربعة جيران، أو وُجد له ستة لايعدّون جيرانًا، فإنه يوجد في G مثلث أو مجموعة رباعية مستقلة. وبتجنب الحالتين، نجد أنّ هذا يحدّد x كالآتي: إما أنْ يوجد له ثلاثة جيران على الأكثر، أو أنه يوجد له خمسة على الأكثر لايعدّون جيرانًا، وهذا يعطينا أنّ $n(G) \leq 9$. إذا حدث هذا لبيان على تسعة رؤوس، فإنّه يوجد لكل رأس ثلاثة جيران. وبما أنّ صيغة جمع الدرجات تمنع وجود بيان منتظم من الدرجة 3 على تسعة رؤوس، فسنحصل على أنّ $R(3, 4) = 9$. ■

إنّ إثبات نظرية رامزي يعطي حدًّا (كبيرًا جدًّا) أعلى (عن طريق تكرار الخطوات) عن $R(p, q; r)$. لقد قام كلّ من Graham وRothschild، و Spencer, [1980, 1990] بتفسير مقدار كبر هذا الحدّ.

11.3.8. نظرية: $R(p, q) \leq R(p - 1, q) + R(p, q - 1)$. إذا كان حدّا المجموعة عن اليمين زوجية عندها تكون المتباينة دقيقة ومضبوطة.

الإثبات: إذا وُجد لرأس في بيان اختياري $R(p - 1, q)$ من الجيران، أو كان له $R(p, q - 1)$ من اللاجيران، فتوجد للبيان عصبة $-p$ أو مجموعة $-q$ مستقلة. بوجود $R(p - 1,q) + R(p,q - 1)$ نقطة في البيان، فإنّ مبدأ أعشاش الحمام يضمن حدوث إحدى هذه الحالات الممكنة. إنّ المساواة في الحدّ تتطلب وجود بيان منتظم له $R(p -1, q) + R(p, q - 1)$ رأسًا. وإذا كان كلّ حدّ من حدّي المجموع زوجيًّا، فإنّ هذا يتطلب بيانًا منتظمًا فردي الدرجة على عدد فرديّ من الرؤوس. وهذا مستحيل. ■

بما أنّ $R(p,2) = R(2,p) = p$، فإن النظرية 11.3.8 تنتج أن $R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$ (التمرين 15). كما إنّ قلة الأجوبة الدقيقة قادت إلى دراسة المحاذيات (المقاربات). إذا كانت q ثابتة و p كبيرة، فإنّ $R(p,q) \leq Cp^{q-1} \log\log p / \log p$ (Graver – yackel [1968] و (Chung – Grinstead [1983]).

لـ $q = 3$، فإنّ الجواب معروف ضمن معامل ثابت:

$$C' p^2 / \log p \leq R(p,3) \leq cp^2 / \log p .$$

يعود الحدّ الأعلى إلى (Ajitai – Komlo's - Szemere'di [1980])؛ أمّا الحدّ الأدنى فيعود إلى

(Kim [1995]). تستخدم هذه الحدود جميعها طرقًا احتمالية (الجزء 5.8).

تُسمى أعداد رامزي للكوتات المتساوية أعدادَ رامزي القطرية تقاربيًّا. إنّ الحدّ الأعلى $\binom{2p-2}{p-1}$ لـ $R(p,p)$ هو $c\,4^p/\sqrt{p}$. يقدم التمرين 14 حدًّا أدنى بنائيًّا، وهو كثيرة حدود في p. إنّ أفضل حدّ بنائيّ معروف ينمو بصورة أسرع من أيّ كثيرة حدود في p، وأبطأ من أيّ دالّة أسّيّة في p (FrankL – Wilson [1981]، التمرين 29).

ويمكن إثبات الحدّ الأدنى الأسيّ بطرق عدّ (حساب)، حيث تعطي:

$$\sqrt{2} \le \lim\ \inf R(p,p)^{1/p} \le \lim\ \sup R(p,p)^{1/p} \le 4 \,.$$

تحديد قيمة هذه النهاية (إنْ وُجدت) هي أول مسألة غير محلولة متعلقة بأعداد رامزي.

12.3.8. نظرية: (Erdős [1997]). $R(p,p) > (e\sqrt{2})^{-1} p\ e^{p/2}(1+o(1))$.

الإثبات: خذ في الحسبان البيان الذي مجموعة رؤوسه $[n]$. إنّ كلّ عصبة p– ممكنة تحدث في $2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}$ من هذه الـ $2^{\binom{n}{2}}$ بيانًا. وبالمثل، فإنّ كلّ مجموعة p تحدث بوصفها مجموعة مستقلة في $2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}$ من هذه البيانات. وأنّ إهمال هذه الكمّية لكلّ عصبة p– ممكنة ولكلّ مجموعة – p مستقلة ممكنة يترك حدًّا أدنى على عدد البيانات التي ليس لها عصبة -p أو مجموعة – p مستقلة.

بما أنّه يوجد $\binom{n}{p}$ طريقة لاختيار p من الرؤوس، فإنّ المتباينة $2\binom{n}{p}2^{-\binom{p}{2}} < 1$ ، تتضمن أنّ $R(p,p) > n$. إنّ التقريبات غير الدقيقة تعطي أنّ $\binom{n}{p}2^{1-\binom{p}{2}} < 1$ عندما $n < 2^{p/2}$. تقود التقريبات بحرص أكثر (باستخدام صيغة ستيرلنج (Sterling) لتقريب المضروبات) إلى النتيجة التي ادعيناها. ■

نظرية رامزي للبيانات (Graph Ramsey Theory)

إن نظرية رامزي في حالة $r = 2$ تقول: إنَّ تلوينًا بـ k من الألوان لأضلاع بيان تام كبير كفاية يُجبر وجود بيان جزئيّ تام أحاديّ اللون. إنّ أيّ عصبة – p (عصبة لها p من الرؤوس) أحاديّة اللون تحوي نسخة أحادية اللون لكلّ بيان له p من الرؤوس. ربما يمكن ضمان وجود نسخ أحاديّة اللون عدد أضلاعها أقلّ من خلال تلوين بيان أصغر من البيان اللازم لضمان وجود K_p. فعلى سبيل المثال، إنّ التلوين الثنائي لـ K_3 دائمًا يعطي أحاديّ اللون p_3. على الرّغم من الحاجة إلى ست نقاط لضمان وجود مثلث أحادي اللون، وهذا يوحي بالعديد من الأسئلة حول أعداد رامزي، بعضها تكون الإجابة عنه أسهل من الإجابة عن الأسئلة المتعلقة بالعُصب.

13.3.8. تعريف. على افترض أنّ $G_1, \ldots, G_k$ بيانات بسيطة، فإنّ **عدد رامزي (للبيان)** $R(G_1, \ldots, G_k)$ هو أصغر عدد صحيح n، بحيث يحوي كلّ تلوين بـ k من الألوان لـ $E(K_n)$ نسخةً من G_i لها اللون i لبعض i. وفي الحالة التي يكون فيها $G_i = G$ لكلّ i، فإننا نكتب $R_k(G)$ بدلاً من $R(G_1, \ldots, G_k)$.

لقد قام بَر (Burr [1983]) بإيجاد $R(G, G)$، الذي يُسمّى «عدد رامزي لـ G» وذلك لجميع 113 بيانًا التي لها ستة أضلاع على الأكثر، وليس لها رؤوس معزولة. هناك صيغ جميلة معروفة لـ $R(G_1, G_2)$ في بعض الحالات. مرة أخرى، اللونان هما الأحمر والأزرق.

14.3.8. نظرية: (Chava'tal [1977]) إذا كانت T شجرة على m من الرّؤوس فإنّ:

$$R(T, K_n) = (m - 1)(n - 1) + 1$$

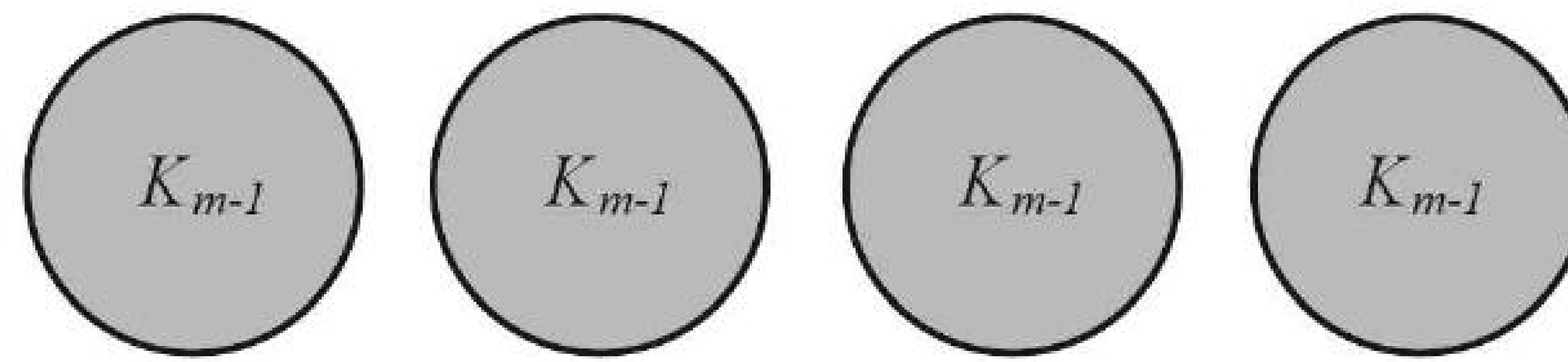
الإثبات: للحدّ الأدنى، لوّن $K_{(m-1)(n-1)}$ من خلال جعل البيان الأحمر هو $(n - 1)K_{m-1}$. آخذين في الحسبان أنّ رتبة المركبات الحمراء تساوي $m - 1$، فلا توجد شجرة حمراء على m من الرؤوس. تشكل الأضلاع الزرقاء

بيانًا متعدد الفروع من الدرجة $n - 1$. لذا، لا يمكن أنْ يحوي K_n.

إنّ إثبات الحدّ الأعلى يستخدم الاستقراء على كلّ وسيط من خلال التركيز على جيران رأس واحد. إنّ يستخدم عرضنا (تقديمنا) الاستقراء على n، مستخدمين إحدى خواص الأشجار التي سبق أن برهناها في الفصل الثانية من خلال الاستقراء على m الخطوة الأساس هي $n = 1$، حيث لا توجد حاجة إلى أضلاع من أجل الحصول على K_1.

إذا أعطيت تلوينًا ثنائيًّا لـ $E(K_{(m-1)(n-1)+1})$، فخذ في الحسبان رأسًا x. إذا وُجد لـ x أكثر من $(m-1)(n-2)$ من الجيران عبر الأضلاع الزّرقاء، فإنّ فرض الاستقراء يعطينا شجرةً حمراء T، أو أنّه يعطي K_{n-1} أزرق من بين هذه الجيران. وهذا بدوره يعطي T حمراء أو K_n أزرق (مع x) في التلوين الكامل.

بخلاف ذلك، فإنّ كلّ رأس يقع على $(m-1)(n-2)$ ضلعًا أزرق على الأكثر، وبذلك فإنه يقع على $(m-1)$ ضلعًا أحمر على الأقل. وهذا يعطينا T حمراء؛ لأنّ كلّ بيان درجته الصغرى تساوي $m - 1$ على الأقل يحوي T (القضيه 8.1.2) . ■



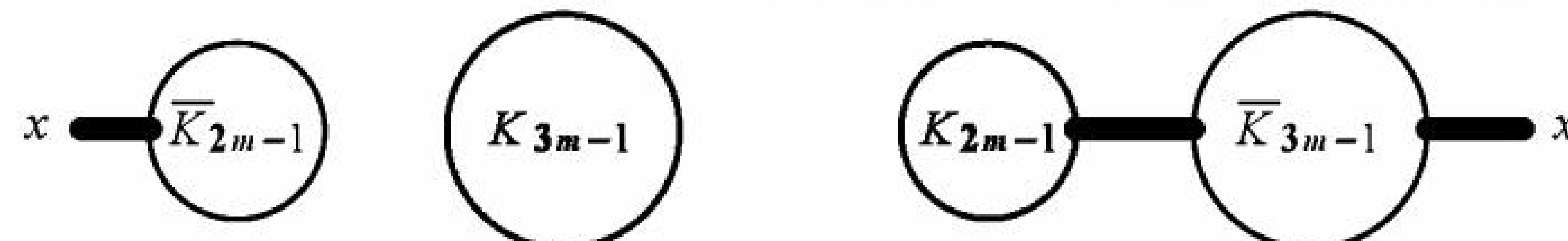
14. 3.8. في الحالة التي يكون لمركبة G الكبرى m رأسًا، وتكون $\chi(H) = n$، فإنّ البناء الموجود في النظرية 14.3.8 يعطينا $R(G, H) \geq (m-1)(n-1)+1$ (Chva'tal – Harary [1972]) .

خمّن بر وايردوز (Burr - Erdo''s [1983]) أنّ المساواة تتحقّق عندما يكون H بيانًا تامًّا وتكون m كبيرة جدًّا بدلالة $n(H)$ و $\max_{F\subseteq G} \frac{e(F)}{n(F)}$. على الرّغم من تحقق هذا (Burr [1981]) عندما يكون لـ G العديد من الرؤوس ذات الدرجة 2، وفي بعض الحالات الأخرى، أثبت براندت (Brandit [2000]) أنّه يوجد لكل بيان غير ثنائي الفرع H (مثل K_n) ولكلّ $h \in \mathbb{R}$ بداية (عتبة) d_0، بحيث إنّ $R(G, H) \geq hn(G)$ تقريبًا لكلّ بيانٍ منتظم من الدرجة D حيث $d > d_0$.

في الحدّ الأعلى للنظرية 14.3.8. من الضروري جدًّا أنْ تكون الصّفوف اللونيّة لـ H تحوي رأسًا واحدًا فقط. عندما يفشل هذا، فإنّ الحدّ الأدنى يمكن أنْ يكون ضعيفًا جدًّا. فعلى سبيل المثال، عندما $G = H = mK_3$، فإن نتيجه كفتال وهراري تعطي $R(G, H) \geq (3-1)(3-1) + 1 = 5$ ؛ إلا أنّ القيمة الصحيحة هي $5m$. هنا نجد أنّ تماثل تلوين الحدّ الأدنى مدهش ومفاجئ، آخذين في الحسبان تماثل المدخلات.

15.3.8. نظرية: (Burr - Erdo''s – Spencer [1975]) $R(mK_3, mK_3) = 5m$ لكل $m \geq 3$.

الإثبات: افترض أنّ البيان الأحمر هو $K_{3m-1} + K_{1, 2m-1}$ ، كما يظهر في الشكل أدناه. في هذا البيان،لاحظ أنّ كل مثلث يستخدم ثلاثة رؤوس من العصبة - $(3m - 1)$، إلاّ أنّ العصبة لا تحوي رؤوسًا تكفي لعمل m مثلثًا منفصلًا. البيان الأزرق المتمّم هو $(K_{2m-1} + K_1) \vee \overline{K}_{3m-1}$ ولكلّ مثلث أزرق رأسان على الأقل في نسخة K_{2m-1}. لذا، لا يمكن أنْ يوجد m من المثلثات الزرقاء المنفصلة.



نستخدم للحدّ الأعلى الاستقراء على m. الخطوة الأساس: $m = 2$. وهذا يتطلب تحليل حالة قصيرة تقريبًا إذا حُلّلت بحرص وحذر. (التمرين 26).

خطوة الاستقراء: $m \geq 3$. بما أنّ $5m > R(3,3) = 6$ ، فإنا نعلم أنّ كلّ تلوين ثنائي يحوي مثلثًا أحادي اللون. وبإهمال رؤوس المثلثات كلّما وجدناها، نستطيع الاستمرار لنجد المثلثات الأحاديّة اللون، في حين تبقى ستة رؤوس على الأقل. بما أنّ $5m - 3m \geq 6$. لكلّ $m \geq 3$، نجد m من المثلثات الأحاديّة اللون المنفصلة إذا كان لجميعها اللون نفسه، وعندها لا نستطيع عمل شيء.

بخلاف ذلك، يوجد لدينا على الأقل مثلث واحد بكلّ لون. افترض أنّ abc مثلث أحمر، وأنّ def مثلث أزرق منفصل عن المثلث abc، فيمكن الافتراض من الأضلاع التسعة التي تربط بينهما أنَّ خمسة منها حمراء على الأقل، وذلك استنادًا إلى التماثل، ويجب أنّ يوجد لزوجٍ من هذه الأضلاع نقاط طرفية مشتركة في def.

الآن، يوجد لدينا مثلث أحمر ومثلث آخر أزرق لهما رأس مشترك، لذا يوجد لهما معًا خمسة رؤوس، وبما أنّ $m > 2$، فإن فرضية الاستقراء للتلوين على الـ $5m - 5$ رأسًا المتبقية تعطينا $(m-1)K_3$ بلون واحد. الآن، نضيف المثلث ذا اللون المناسب من الرؤوس الخمسة الخاصة. ■

إنّ القارئ الذي يقلق بشأن الخطوة الأساس في النظرية 15.3.8، يمكن أنْ يأخذ في الحسبان تلوين K_{11}. إنَّ تفادي $2K_3$ يجبر حدوث فراشي الشكل (مثلثات أحادية اللون برأس مشترك) كما في الأعلى، إلا أنّنا نجد مثلثًا أحادي اللون آخر من بين النقاط الستة المتبقية، وهذا ينهي إثبات أنّ $R(mK_3, mK_3) \leq 5m + 1$. تظهر بعض النتائج المرتبطة بهذا في التمرينين 27 - 28.

إحدى النتائج الجديرة بالملاحظة أنّ عدد رامزي لبيان اختياري ربما يكون أُسّيًّا في عدد الرؤوس كما في حالة K_n. لقد قام كلّ من كفتال (Chva'tal) ورودل (RÖdl) وسزميردي (Szemere'di) وتروتر (Trotter) في العام [1983م] بإثبات أنّ عدد رامزي ينمو على الأكثر خطّيًّا بالنسبة إلى عدد الرؤوس، وذلك لصفّ البيانات التي درجتها العظمى تساوي d. وبكلمات أخرى، برهنوا أنّ $R(G,G) \leq cn(G)$، حيث c ثابت يعتمد على d فقط. بالطبع فإنّ الثابت دالة تنمو بسرعة في d، إلا أنها لا تعتمد على $n(G)$. حيث يستخدم الإثبات تمهيدية سزميردي للانتظام [1978]، وهي نتيجة صعبة ولها العديد من التطبيقات.

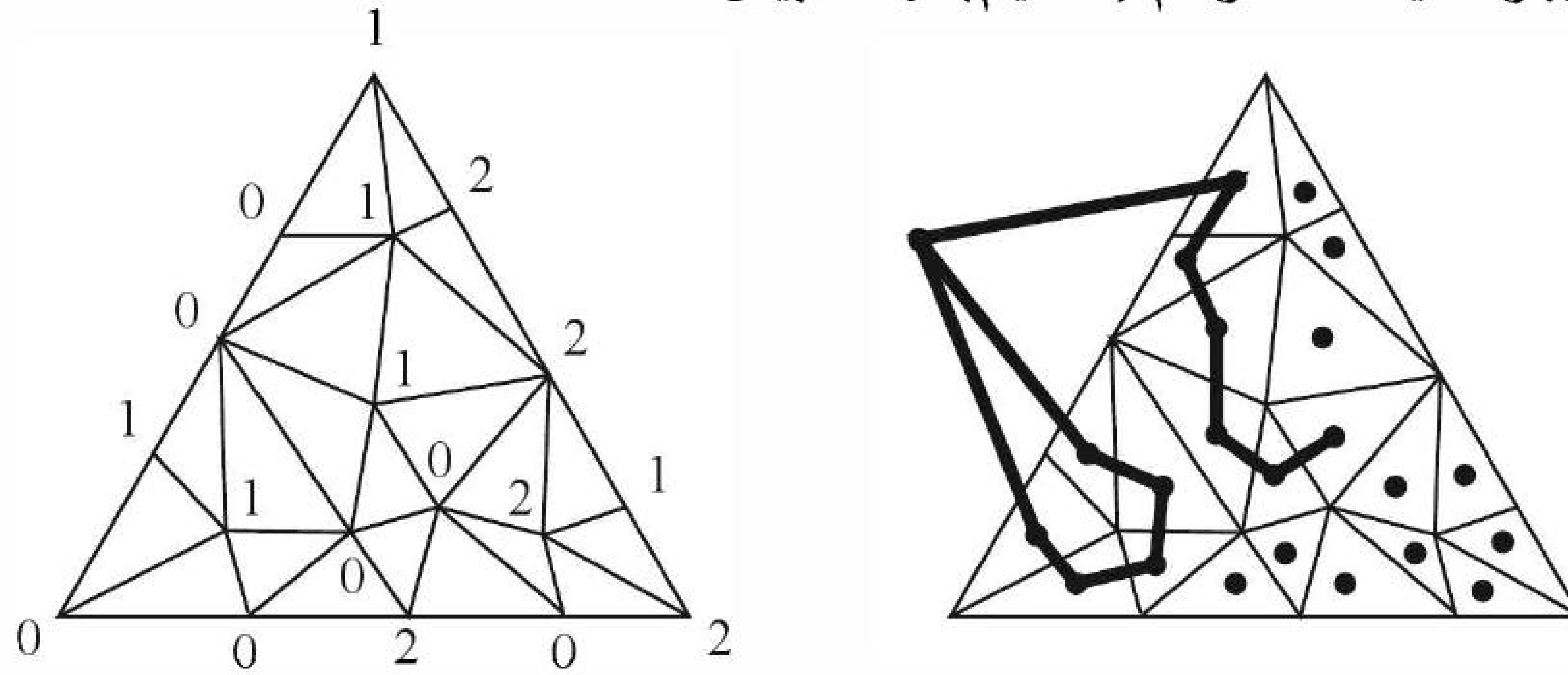
تمهيدية سبيرنر وعرض (اتســاع) النطاق (Sperner's Lemma and Bandwidth)

على الرّغم من أنّ تمهيدية سبيرنر عمومًا لا تعدّ جزءًا من نظرية رامزي، إلا أننا نوردها في هذا الجزء لأنّ لها طبيعة نظرية رامزي: كلّ وسم (وضع علامات دالة) لتثليث يحقق شروطًا حدّيّة يحتوي على قطعة لها وسم خاص (عنصر واحد من كلّ صفّ). لاحظ أنّ تمهيدية سبيرنر مثل نظرية رامزي من حيث استخدامها أفكارًا بسيطة، إلا أنّ تطبيقاتها دقيقة، حيث تعتمد نظرية رامزي على مبدأ طواقي الحمام والاستقراء، أما تمهيدية سبيرنر فتستخدم تعليلات معتمدة على النوعية فقط (والاستقراء من أجل التعميم للأبعاد العليا).

16.3.8. تعريف. التقسيم المُبسطي لمثلث كبير T هو تجزئة لـ T إلى خلايا مثلثية بحيث إنّ تقاطع أيّ خليتين هو ضلع مشترك أو زاوية. تسمّى زوايا الخلية بالعُقد. إنّ الوسم (التعليم) الفعلي لتقسيم مُبسطي لـ T يحدّد علامات من $\{0, 1, 2\}$ للعقد متفاديًا وضع علامة i على الضلع رقم i من أضلاع T لكلّ $i \in \{0,1,2\}$. تسمّى الخليّةُ الموسومة بكلّ المجموعة $\{0,1,2\}$ خليةً تامة الوسم (التعليم).

في التعليم الفعليّ، فإنّ كلّ علامة دالة تظهر على أحد زوايا T، إضافة إلى أنّ العلامة i تتفادى ضلع T الذي

يربط بين الزوايا غير المعلَّمة بالعلامة i. والشكل أدناه يوضّح تقسيمًا مُبسطيًّا وكذلك البيان الذي نحصل عليه منها لنبرهن وجود خلية تامة الوسم (التعليم) لهذا البيان.



17.3.8. نظرية : (تمهيدية سبيرنر [1928]). توجد لكلّ وسم (تعليم) فعليّ لتقسيم مُبسطيّ خليةٌ تامة الوسم.

الإثبات: سنبرهن النتيجة الأقوى، وهي وجود عدد فردي من الخلايا تامّة الوسم. نبحث عن هذه الخلية بدءًا من خارج T، وندخل الخليّة من خلال عبور ضلع علامتاه الدالتان هما 0 و 1. إذا وصلنا إلى خليّة علامتها الدالة الثالثة 2، فهذا يعني إنهاء الإثبات. ولكن الأمر ليس كذلك، حيث إنَّ العلامة الدالة الثالثة تكون إما 0 أو 1، وبذلك يوجد للخليّة ضلع آخر علامتاه الدالتان 0 أو 1. ومن خلال عبورنا إلى هذه الخليّة، فإننا ندخل إلى خليّة جديدة، ونستمر في البحث عن خليّة لها العلامة الثالثة، و هذا يقترح تعريف بيان G بتشفير الخطوات الممكنة جميعها، ونشمل رأسًا لكلّ خليّة بالإضافة إلى رأس واحد للمنطقة الخارجية. يتجاور رأسان في G إذا تشاركت هذه المناطق بضلع حدودي بحيث إنّ العلامتين الدالتين على نقطتيه الطّرفيتين هما 0 و 1، والبيان عن اليمين أعلاه ينتج عن الوسم الفعليّ عن اليسار.

تصبح الخليّة تامة الوسم رأسًا درجته 1 في G. أمّا الخليّة التي ليس لها 0، أو ليس لها 1 فإنها تصبح رأسًا درجته 0. يوجد للخلايا المتبقية زوايا علاماتها الدالة هي: 1 ,0 ,0 أو 1 ,1 ,0 وتصبح رؤوسًا درجتها 2. لذا، فإنّ الخلايا المنشودة تصبح رؤوسًا درجتها 1 في G، وهذه هي الخلايا الوحيدة التي تصبح رؤوسًا درجتها فردية. لقد نقلنا المسألة الأصلية إلى مسألة إثبات أنّ لـ G مثل هذا الرأس الذي درجته تساوي 1.

للرأس v للمنطقة الخارجية درجة فردية أيضًا، وكلّما سرنا من الزاوية التي علامتها (وسمها) 0 إلى الزاوية التي وسمها 1 عبر ضلع T الذي يتفادى الوسم 2، فإننا نقطع ضلعًا لـ G يشمل v في كلّ انتقال من 0 إلى 1، أو الانتقال من 1 إلى 0. وبما أننا نبدأ عند 0 وننتهي عند 1، فنكون قد انتقلنا عددًا فرديًّا من المرات. لذا، فإنّ درجةَ v فرديةٌ. وبما أنّ عددَ الرؤوس التي درجتها فردية زوجيٌّ لكل بيان، فإنّ عدد الرؤوس التي درجتها فردية وغير v يجب أنّ يكون فرديًّا. لذا، يوجد عدد فردي من الخلايا تامة الوسم. ■

18.3.8. تطبيق. نظرية النقطة الثابتة لبراور (**Brouwer**). يمكن صياغة نظرية براور (لبعدين) على الصورة الآتية: توجد نقطة ثابتة لأيّ دالّة متصلة من منطقة مثلثية T إلى نفسها. افترض أنّ زوايا T هي نقاط (متجهات) v_0, v_1, v_2، وبما أننا نستطيع كتابة أيّ نقطة على قطعة مستقيمة معدلًا (متوسّطًا) موزونًا لنقاطها الطرفية، فإنه يمكننا كتابة كلّ $v \in T$ بوصفه متوسطًا موزونًا لزوايا T على الصورة: $v = a_0v_0 + a_1v_1 + a_2v_2$ حيث $\sum a_i = 1$ وكلّ $a_i \geq 0$ (التمرين 37). لذا، يمكننا تحديد v من خلال متجه معاملاته: $a = (a_0, a_1, a_2)$.

عرِّف مجموعات s_0, s_1, s_2 من الدالة f بوضع $a \in S_i$ إذا كان $a_i' < a_i$ حيث $f(a) = a'$. بما أنّ مجموع

معاملات كلّ نقطة يساوي 1، فإنّ كلّ نقطة في T تنتمي إلى S_i واحدة. وأنّ نقطة تنتمي إلى المجموعات الثلاثة إذا وفقط إذا كانت نقطة ثابتة لـ f. لذا، نريد أن نبرهن وجود نقطة مشتركة بين المجموعات الثلاث.

إذا أُعطيت تقسيمًا مبسطيًّا لـ T، فلكل عقدة a اختر وسمًا i بحيث إن $a \in S_i$. حيث إنّ النقط الموجودة على ضلع T المقابل لـ v_i تحقق أنّ إحداثيها رقم i يساوي 0. وأنّ الإحداثيّ i لا يتناقص تحت f. لذا، بإمكاننا أنْ نختار وسمًا مختلفًا عن i لكلّ نقطة على ذاك الضّلع. إنّ الوسم الناتج فعليّ، وتمهيدية سبيرنر تضمن وجود خليّة تامّة الوسم. وتكرار العملية السابقة باستخدام تثليثات ذات خلايا أصغر متتابعة يعطينا متتالية متتابعة من المثلثات الأصغر التّامّة الوسم. افترض أنّ $x_j,\ y_j,\ z_j$ زوايا المثلث رقم j، وعلاماتها الدّالّة هي: 0,1,2, على الترتيب. في كلّ S_i نحصل على متتالية غير منتهية من النقاط.

التفاصيل المتبقية هي تفاصيل توبولوجية؛ لذا نقترح الخطوات فقط، وبما أنّ f متصلة، وكلّ S_i مغلقة ومحدودة، فإنّ لكلّ متتالية غير منتهية في مجموعة مغلقة ومحدودة متتالية جزئية تقاربية. لذا، توجد متتالية جزئية تقاربية لـ $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$. افترض أنّ x_{ik} هي المدخلة رقم k. بما أنّ المسافة من x_{ik} إلى y_{ik}، و z_{ik} تقترب من 0، فإنّ هذه المتتاليات الجزئيّة تقترب من النقطة نفسها، وبمّا أنّ: $S_0,\ S_1,\ S_2$ مجموعات مغلقة ومحدودة، فإنّ نقطة النهاية تنتمي إلى المجموعات الثلاثة، وبذلك تكون نقطة ثابتة لـ f. ■

سنطبق تمهيدية سبيرنر أيضًا لحلّ مسألة على «الشّبكة المثلثيّة».

19.3.8. تعريف. عندما نُرقِّم رؤوس G بأعداد صحيحة مختلفة، فإنّ الاتساع هو أكبر فرق بين الأعداد الصحيحة المحددة للرؤوس المتجاورة. وعرض النطاق $B(G)$ لبيان G هو أصغر اتساع ترقيم لـ G.

لاحظ أنّ الاتساع يكون مصغرًا دائمًا في الحالة التي لا توجد فيها فجوات في التّرقيم. ولكن، يكون من المناسب أحيانًا السماح بوجود فجوات (التمرين 42). يأتي الاسم "عرض النّطاق" من نظرية المصفوفات؛ حيث يصف التّرقيم الأمثل تبديلة لأعمدة مصفوفة التجاور وصفوفها، بحيث تظهر الواحدات على نطاقات قطرية قريبة من القطر الرئيس. إنّ ترتيب المصفوفة بهذه الصورة يُسَرِّعُ عملية حساب النظير. وهناك دافع آخر، وهو تقليل (تصغير) التأخير بين الرؤوس المتجاورة في الحالة التي يجب أنْ تتقدم فيها الرؤوس بترتيب خطّيّ، وحساب عرض النطاق صعب NP – حتى للأشجار التي درجتها الكبرى تساوي 3 (Garey – Graham- Johnson – Knuth [1978]).

سنقدّم حدّين أدنيين على عرض النّطاق.

20.3.8. تمهيدية: $B(G) \geq \max_{H \subseteq G} \frac{n(H)-1}{\mathrm{diam}(H)}$

الإثبات: يحوي كلّ ترقيم لـ G ترقيمًا لكلّ بيان جزئيّ من G، وفي كلّ بيان جزئي H يوجد رأسان بحيث يساوي الفرق بين رقميهما $n(H)$ - 1 على الأقل. ومن مبدأ أعشاش الحمام، يوجد ضلع على مسار بين هذين الرأسين، بحيث يساوي اتساعه $n(H)$ - 1 مقسومًا على المسافة بينهما على الأقل. ■

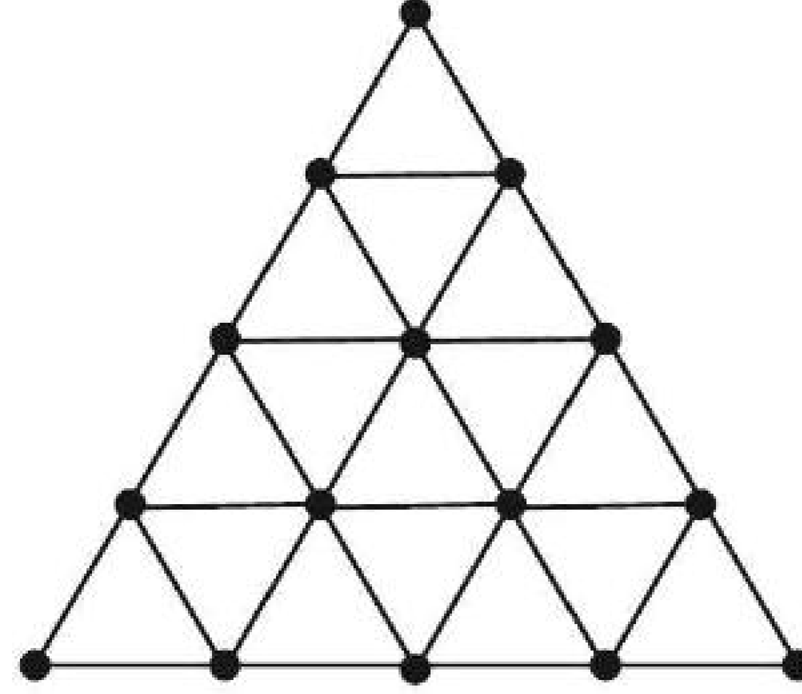
21.3.8. تمهيدية: $B(G) \geq \max_K \min\{\partial S : |S| = K\}$ (Harper [1966]) ترمز ∂S إلى المجموعة الجزئية من الرّؤوس في مجموعة $S \subseteq V(G)$ التي لها جار خارج S على الأقل.

الإثبات: لكلّ قيمة لـ k، توجد مجموعة S مؤلفة من k رأسًا، بحيث تكون أول k من الرؤوس في ترقيم أمثل لـ G. يجب أنْ يكون عرض نطاق G مساويًا لـ $|\partial S|$ على الأقل؛ لأن الرأس الذي رقمه (علامته الدالة) أقلّ ما يمكن من بين ∂S له ضلع اتساعه يساوي $|\partial S|$ على الأقل لجواره فوق S. ■

في العام [1988م] سمّى شنق (Chung) الحدّ الأول بحدّ **الكثافة الموضعي** (المحليّ). إنّ حساب حدّ هاربر يكون صعبًا عادة، وهذا الحدّ للمكعّب Qk يساوي $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}$. أمّا للشبكة $P_m \square P_n$، فإنّ قيمة حدّ

هاربر الأدنى هي $\min\{m,n\}$، والتي يمكن تحقيقها (التمرين 43).

22.3.8. مثال: الشّبكة المثلثيّة. تتكوّن الشّبكة المثلثيّة T_l من رؤوس (i, j, k) بحيث إنّ i, j, k أعداد صحيحة غير سالبة مجموعها يساوي l، وبحيث يتجاور الرأسان إذا كان الفرق المطلق الكلّيّ للإحداثيات المتناظرة يساوي 2. الشكل أدناه يوضّح T_4. ينتجُ ترقيم الرؤوس بحسب الصّفوف حدًّا أعلى لـ $B(T_l)$ قيمته تساوي $l+1$. ويعدّ هذا الحدّ حدًّا أمثل، إلا أنّ حدّ الكثافة المحلية يكون حول $l/2$ فقط، بالإضافة إلى أنّ حدّ هاربر يكون نحو $l/\sqrt{2}$. يمكن استخدام تمهيدية سبيرنر لبرهنة أنّ $l+1$ حدٌّ أمثل. ■



افترض أنّ G البيانُ المشكّلُ من خلال تقسيم مُبسطي لمثلث، إنّ حدود G الخارجية حلقة، فضلًا عن أنّ المناطق المحدودة هي مثلثات، إضافة إلى أنّ الحلقة مجزأة إلى مسارات من خلال زوايا المثلث الكبير. ونقول: إنّ الرّابط عبارة عن رؤوس تولّد بيانًا جزئيًّا مترابطًا يحوي رأسًا من كلّ مسار حدوديّ.

23.3.8. تمهيدية: (Hochberg – McDiarmid- Saks [1995]) افترض أنّ T تقسيمًا مبسطيًّا بحيث حُدِّدَ لونٌ أحمر أو أزرق لكلّ رأس. وافترض أيضًا أنّ R و B هما البيانان الجزئيان اللذان يحدثهما كلّ من الرؤوس الحمراء والزرقاء على التّرتيب. ولكلّ تلوين من هذا القبيل، فإنّ تلوينًا واحدًا بالضبط من R و B يحوي رابطًا.

الإثبات: لكل رأس v، خذْ في الحسبان الرؤوس التي يمكن الوصول إليها من v ولها لون v نفسه. إذا كان من غير الممكن الوصول إلى الجوانب الثلاثة، فعلِّم v بأصغر دليل لجانب لا نستطيع الوصول إليه من v. وللرؤوس الموجودة على الجانب i، فإنّ الوسم (العلامة) i لا يظهر. وإنْ لم يوجد هناك رابط، فإنّ لكلّ عقدة وسمًا (علامة)، وهذا يعطي وسمًا فعليًّا لـ T.

من تمهيدية سبيرن، توجد خليّة تامّة الوسم. وبما أنه يوجد للخليّة ثلاث زوايا، وقد استخدمنا لونين هما R و B فقط، فإن زاويتين لهذه الخليّة لهما اللون نفسه. وبما أنهما متجاوران، فبإمكانهما الوصول إلى مجموعة الرؤوس نفسها الملونة بلونهما. لذا، فإنّ أقلّ جانب لا يمكن الوصول إليه منهما لا يمكن أنْ يكون مختلفًا. وهذا التناقض يعني أننا لم نبنِ الوسم (العلامات الدالة) المحدد (هـ). لذا، يوجد رأس نستطيع من خلاله الوصول إلى أيّ جانب.

إذا وُجد رابط لأحد الألوان، فإنه يقسّم الرؤوس المتبقية إلى مجموعات، بحيث يتحقق وجود جانب واحد على الأقل لا يمكن الوصول إليه لكلّ مجموعة. لذا، لا يمكن أنْ يوجد روابط في كلا اللونين. ■

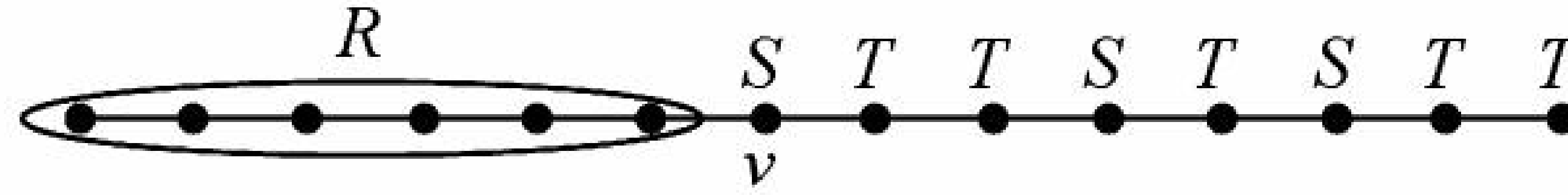
24.3.8. نظرية: (Hochberg – McDiarmid – Saks [1995]). افترض أنّ G بيان يُثَلِّثُ منطقة محاطة (محدودة) بحلقة C مجزأة إلى ثلاثة مسارات. إذا كانت k هي الأصغر لمجموع المسافات من v إلى كلّ من المسارات الثلاثة وذلك لكل $v \in V(G)$، فإن $B(G) \geq k+1$.

الإثبات: افترض أنّ f ترقيمٌ لـ G، وافترض كذلك أنّ t أكبر دليل بحيث لا يوجد للبيان الجزئي المحدث من

الرؤوس المرقّمة من 1 إلى t مركبةٌ تلتقي (تتقاطع) مع المسارات الثلاثة. اجعل R تمثّل مجموعة الرّؤوس هذه، وS تساوي مجموعة الرّؤوس خارج R التي لها جيران في R، واجعل T تمثّل بقيّة الرّؤوس.

من البناء، ينتمي الرّأس v حيث $f(v) = t + 1$ إلى S. بما أنّ $R \cup \{v\}$ تحوي رابطًا، فإن $R \cup S$ تحوي رابطًا ولكن T لا تحوي ذلك. وبما أنه لا يوجد ضلع بين R وT، وبما أنّ R لا تحوي رابطًا، فإن $R \cup S$ لا تحوي رابطًا. الآن، تضمن التمهيدية 8 .3 .23 أنّ S تحوي رابطًا. إنَّ المجموعة S تساوي $\partial\,(R \cup S)$ للقطعة الأخيرة (النهائية) $T \cup S$ في التّرقيم. لذا يوجد للترقيم فرق يساوي $|S|$ على الأقل على أحد الأضلاع من S إلى R.

إنّ الرابط يحوي ممرات من كلّ رأس من رؤوسه إلى كلّ من المسارات الحدودية الثلاثة. ونعلم من الفرض أنّ مجموع أطوال هذه الممرات من أيّ رأس ثابت يساوي k على الأقل. يوجد رأس في S، بحيث تكون هذه الممرات في S بالنسبة إلى هذا الرأس مسارات منفصلة. لذا، فإنّ $|S| \geq k + 1$. ■



25.3.8. نتيجة : عرض نطاق الشبكة المثلثية T_l يساوي $l+1$.

الإثبات: لكل رأس (i, j, k) في T_l، تكون المسافة إلى الجوانب الثلاثة هي: i، jو، وk على الترتيب. لذا، فإنّ مجموع المسافات يساوي l. ومن النظرية 24.3.8 نجد أنّ عرض النّطاق يساوي $l + 1$ على الأقل. وكما لاحظنا، فإنّ هذا الحدّ قابل للتحقيق. ■

تمــارين (Exercises)

1.3.8. (-) افترض أنّ لديك قرصين متّحدين في المركز، وأنّ لكلّ منهما 20 قطاعًا دائريًّا من الحجم نفسه. تمّ طلاء عشرة قطاعات ولكلّ قرص باللون الأحمر، وعشرة قطاعات أخرى باللون الأزرق ضمن ترتيب معين. أثبت أنّه يمكن محاذاة القرصين أو صفّهما بطريقة معيّنة بحيث إنّ لعشرة من قطاعات القرص الداخلي على الأقل اللونَ نفسه لقطاعات القرص الخارجيّ المرتبطة بها.

2.3.8. لكلّ $n \in \mathbb{N}$ ، اجعل S هي المجموعة المؤلفة من $n + 1$ عنصرًا في $\{1, \ldots, 2n\}$. أثبت أنه يوجد في S عنصران بحيث يقسم أحدهما الآخر، ويوجد كذلك عنصران آخران، القاسم المشترك الأعظم لهما يساوي 1. أثبت أنّ هاتين النتيجتين هما أفضل ما يمكن من خلال إيجاد مجموعة جزئية حجمها n لا تتحقق عليها هذه النتائج.

3.3.8. استخدم مبدأ طواقي الحمام والمجاميع الجزئيّة لتبرهن كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) تحوي كلُّ مجموعةٍ مؤلفة من n من الأعداد الصحيحة مجموعةً جزئية غير خالية مجموعها يقبل القسمة على n (أعط مثالاً على مجموعة مؤلفة من $n - 1$ من الأعداد الصحيحة لا تتحقق فيها هذه الخاصيّة).

b) لتكن $x \in \mathbb{R}$ ، أثبت أنّ عنصرًا واحدًا على الأقل من المجموعة $\{x, 2x, \ldots, (n\text{-}1)x\}$ يختلف عن عدد صحيح بمقدار $1/n$ على الأكثر.

4.3.8. (!) يوجد في ناد خاص 90 غرفة و100 عضو. زُوِّد الأعضاء بمفاتيح لهذه الغرف بحيث يكون لـ 90 منهم مقدرة لدخول الغرف، بمعنى أنه تم تزويد كلّ شخص من هؤلاء الـ 90 بمفتاح لغرفة مختلفة. (افترض عدم اشتراكهم بالمفاتيح). أثبت أنه يلزمنا 990 مفتاحًا، وأنّ العددَ 990 كاف.

5.3.8. افترض أنّ T شجرة. استخدم التقنية الموجودة في النظرية 2.3.8 لتبرهن أنّ مركز T يتألف من رأس واحد، أو من رأسين متجاورين (هذا يبرهن النظرية 13.1.2 مرّة أخرى)، (-Jordan [1869], Graham Entringer- Sze'key [1994]).

6.3.8. أثبت أنّ كلّ مجموعة مؤلّفة من 2^m+1 من نقاط شبكيّة صحيحة (شبكيّة أعداد صحيحة) في $\mathbb{R}^m$ تحوي زوجًا من النقاط بحيث يكون مركزه المتوسط (متجه الوسط) أيضًا نقطة شبكيّة صحيحة.

7.3.8. أثبت أنه يوجد لكلّ تلوين ثنائيّ لنقاط شبكيّة صحيحة في $\mathbb{R}^m$ جمعٌ فيه n من النقاط التي لها اللون نفسه بحيث يكون مركزها المتوسط (متجه الوسط) نقطة صحيحة لها أيضًا اللون نفسه (مساعدة: لا حاجة إلى نظرية رامزي بسبب وجود إثبات قصير باستخدام مبدأ طواقي الحمام فقط)، (Bo'na [1990]).

8.3.8. افترض أنّ S جمع مؤلف من $n+1$ عددًا صحيحًا مجموعه يساوي k. لـ $K \le 2n+1$، أثبت أنه يوجد لـ S مجموعة جزئية، حاصل جمع عناصرها يساوي i لكلّ $i \in [K]$. لكلّ n، أعطِ مثالاً لجمع بحيث تفشل هذه النتيجة عندما $k=2n+2$.

9.3.8. لكل عدد زوجي n، جدْ ترتيبًا لـ $E(K_n)$، بحيث يساوي أكبر طول لمسرب متزايد $n-1$. (تعليق: هذا يبرهن أنّ النظرية 4.3.8 هي أفضل ما يمكن عندما يكون n عددًا زوجيًّا، إضافة إلى أنها أفضل ما يمكن عندما يكون n عددًا فرديًّا يساوي 9 على الأقل. إلا أنّ البناء يكون أصعب كثيرًا)، (Graham – Kleitman [1973]).

10.3.8. افترض أنّ S مجموعةٌ من تسع نقاط في المستوى (لا يوجد منها ثلاث نقاط على استقامة واحدة). أثبت أنّ S تحوي رؤوس مضلّع خماسيّ محدّب. أعطِ مثالاً على ثماني نقاط لا تتحقق فيها هذه النتيجة.

11.3.8. (!) افترض أنّ S مجموعة مؤلفة من $R(m,m;3)$ من نقاط المستوى بحيث لا يوجد منها ثلاث نقاط على استقامة واحدة، أثبت أنّ S تحوي m نقطة بحيث تشكّل هذه النقاط مضلّعًا (Tarsi) عدد أضلاعه m.

12.3.8. تذكر أنّ البيان الموجه يكون بسيطًا إذا لم يشترك أيّ ضلعين من أضلاعه بالزوج المرتب نفسه من النقاط الطّرفيّة. يعرّف الدوري الرتيب على أنه دوري يكون فيه توجيه الأضلاع متوافقًا دائمًا مع رتبة الدلائل على الرؤوس، أو أنّه يكون غير متوافق دائمًا مع هذه الرّتبة. ويكون للبيان الموجه خالي العرى التام نسخةٌ واحدة من كلّ زوج مرتّب من الرؤوس المختلفة بوصفها ضلعًا. إذا أعطيت m، فبرهن أنه إذا كانت N كبيرة جدًا، فإن لكل بيان موجه بسيط خالي العرى رؤوسه $[N]$ مجموعة مستقلة من الرتبة m، أو له دوري رتيب رتبته m، أو له بيان موجه خالي العرى تام رتبته m.

13.3.8. (!) نظرية شور (Schur [1916]):

a) إذا كان $k>0$، فبرهن أنه يوجد أقل عدد صحيح S_k، بحيث إنّ كلّ تلوين بـ k من الألوان للأعداد الصحيحة $1, \dots, s_k$ يعطينا أحادي لون x, y, z (ليس بالضرورة أنْ تكون مختلفة) بحيث إنّ $x+y=z$. (مساعدة: طبق نظرية رامزي على $r=2$).

b) أثبت بنائيًّا أنّ $s_k \ge 3s_{k-1}$، وبناءً على ذلك، فإن $S_k \ge (3^k+1)/2$.

14.3.8. (!) نعرّف التركيب، أو الضرب المعجمي لبيانين بسيطين G و H على أنه البيان البسيط $G[H]$ الذي مجموعة رؤوسه هي: $V(G) \times V(H)$ حيث أضلاعه معطاة على الشكل $(u,v) \leftrightarrow (u',v')$ إذا وفقط إذا تحقق أنّ: (1) uu' ضلع في G، أو (2) $u=u'$، وكان ضلعًا في H:

a) أثبت أنّ $\alpha(G[H]) = \alpha(G)\alpha(H)$.

b) أثبت أنّ متممة $G[H]$ هي $\overline{G}[\overline{H}]$.

c) استخدم الفرعين (a) و (b) لتبرهن بنائيًّا أنّ:

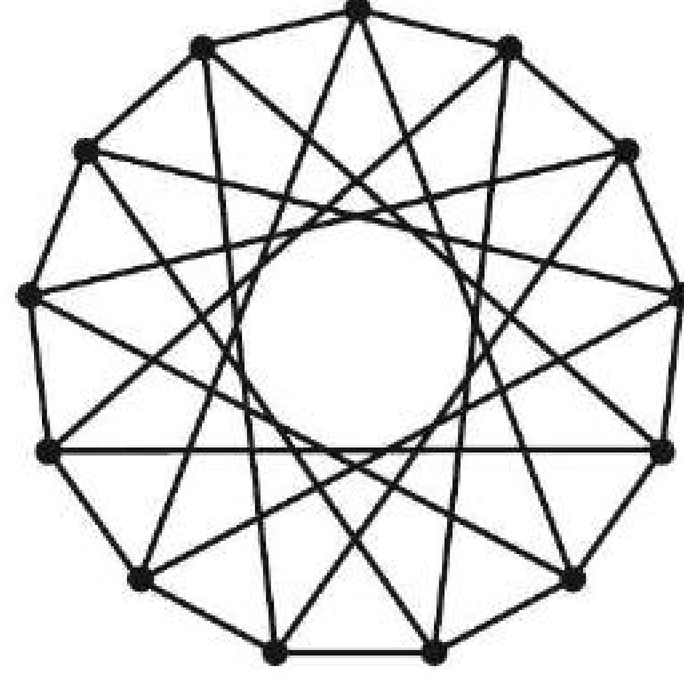
$$R(pq+1, pq+1) - 1 \ge [R(p+1, p+1) - 1] \times [R(q+1, q+1) - 1].$$

d) استنتج أنّ $R(2^n+1, 2^n+1) \ge 5^n+1$ عندما $n \ge 0$، وقارن هذا الحدّ الأدنى بالحدّ الأدنى

البنائيّ لـ $R(k,k)$، (Abbott [1972]).

15.3.8. (-) حقق أنّ $R(p,2)=R(2,p)=p$. استخدم هذا والنظرية 11.3.8 لتبرهن أنّ $R(p,q)\le\binom{p+q-2}{p-1}$.

16.3.8. (-) استخدم البيان أدناه لتبرهن أنّ $R(3,5)=14$.



17.3.8. أعداد رامزي عندما $r=2$ والألوان المضاعفة:

a) افترض أنّ $p=(p_1,\ \dots,\ p_k)$، وافترض أيضًا أننا نحصل على q_i بطرح 1 من p مع ترك باقي الإحداثيات دون تغيير. أثبت أنّ $R(p)\le\sum_{i=1}^{k}R(q_i)-k+2$

b) أثبت أنّ: $R(p_1+1,\dots,p_k+1)\le\frac{(p_1+\dots+p_k)!}{(P_1!\dots p_k!)}$

18.3.8. افترض أنّ $r_k=R_k(3;2)$ (إنّ هذه هي قيمة n، بحيث يُحدث التلوين بـ k من الألوان لـ $E(K_n)$ مثلثًا أحاديّ اللون):

a) أثبت أنّ $r_k\le k(r_k-1-1)+2$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أنّ $r_k\le\lfloor k!e\rfloor+1$. بحيث أن $r_3\le17$ (تعليق: $r_3=17$ إلا أنَّ الحد الأدنى يتطلب تلوينًا ثلاثيًّا بطريقة ذكية لـ K_{16} الناتج من الحقل المنتهي ($GF2^4$)).

19.3.8. أثبت أنّ $R_k(p;r+1)\le r+k^M$ حيث $M=\binom{R_K(p;r)}{r}$.

20.3.8. (+) أعداد رامزي اللاقُطريّة:

a) أثبت أنّ $R(k,l)>n$ إذا كان $\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}+\binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}}<1$ لبعض $p\in(0,1)$. وبرهن أنّ لكلّ $p_n\in\mathbb{N}$ و $p\in(0,1)$: $R_{(k,l)}>n-\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}-\binom{n}{1}(1-p)^{\binom{1}{2}}$.

b) استخدم فرع a لتبرهن أنّ $R(3,k)>k^{3/2+0(1)}$. ما الحدّ الأدنى على $R(3,k)$ الذي يمكن الحصول عليه من الجزء الأول من فرع (a)؟ (Spencer [1977]).

d) استخدم الفرع a لتحصل على حدّ أدنى لـ $R_k(q)$.

21.3.8. (!) جدّ قيمة عدد رامزي $R(K_{1,m},K_{1,n})$. (مساعدة: يعتمد الجواب على ما إذا كانت m و n زوجية أو فردية).

22.3.8. (!) افترض أنّ T شجرة على m من الرؤوس، إذا علمت أنّ $m-1$ يقسم $n-1$، فجد عدد رامزي $R(T,k_{1,n})$. (Burr [1974]).

23.3.8. إذا كان $p>(m-1)(n-1)$، أثبت أنّ كلّ تلوين ثنائيّ لـ $E(K_p)$ يكون فيه البيان الأحمر (الملون بالأحمر) متعدي التوجيه، يحوي عصبة m- حمراء، أو عصبة n- زرقاء، وبرهن أيضًا أنّ هذا هو أفضل ما يمكن. (Brozinsky – Nishiura) (مساعدة: استخدم البيانات الكاملة).

24.3.8. أثبت أنّ: $R(T,K_{n1},\ \dots,\ K_{nk})=(m-1)(R(n_1,\ \dots\ ,n_k)-1)+1$ عندما تكون T شجرة على

m من الرؤوس (Burr).

25.3.8. أثبت أنّ $R(c_4, c_4) = 6$. (تعليق: يوجد العديد من البراهين).

26.3.8. أثبت أنّ $R(2K_3, 2K_3) = 10$. (مساعدة: اختزل المسألة لحالة الشكل الفراشيّ الذي فيه مثلثات من اللونين بالإضافة إلى حلقة خماسيّة أحاديّة اللون، ثمّ استخدم التّماثل).

27.3.8. (!) أثبت أنّ $R(mK_2, mK_2) = 3m - 1$.

28.3.8. (!) لـ $1 \le i \le k$، افترض أنّ G_i بيان على p_i من الرؤوس، وثَبِّتْ له تضاعفًا (عدد مرات تكرار) m_i. أثبت أن: $R\left(m_1G_1,...,m_kG_k\right) \le \sum\left(m_i - 1\right)p_i + R\left(G_1,...,G_k\right)$.

29.3.8. لقد قام فرانكل وويلسون (Frankl and Wilson) في العام [1981] ببناء بيان على n من الرؤوس ليس له عصبة أو مجموعة مستقلة حجمها يزيد على $2^{c\sqrt{\log n \log\log n}}$ ، حيث c ثابت معين، أثبت أنّ هذا يعطي حدًّا أدنى لـ $R(p,p)$ بحيث ينمو هذا الحدّ أسرع من أيّ كثيرة حدود في p، وأبطأ من أيّ دالّة أسّيّة في p.

30.3.8. (!) لكلّ بيان بسيط G، حدّد $R(P_3, G)$ فقط بوصفها دالّة لعدد رؤوس G ولأكبر مواءمة في G.

31.3.8. (!) افترض أنّ r و s عددان طبيعيان بحيث $r + s \not\equiv 0 \mod 4$. أثبت أنّه يوجد لكلّ تلوين ثنائي لـ $E(k_{r,s})$ بيانٌ مترابط أحادي اللون عدد رؤوسه يساوي $\lceil r/2 \rceil + \lceil s/2 \rceil$ على الأقل. ثم استنتج أنّ كلّ تلوين ثلاثيّ لـ $E(K_{r+s})$ يحوي بيانًا جزئيًّا مترابطا أحاديّ اللون عدد رؤوسه يزيد على $(r+s)/2$. بيّن أنّ هذا يفشل عندما 4 تقسم $r + s$.

32.3.8. إجبارية وجود حلقات رباعية:

a) أثبت أنّه إذا كان $\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} > \binom{n(G)}{2}$، فإنّ G يحتوي حلقة رباعيّة.

b) أثبت أنّه إذا كان $e(G) > \frac{n(G)}{4}\left(1 + \sqrt{4n(G) - 3}\right)$، فإنّ G يحوي حلقة رباعيّة.

c) أثبت أنّ $R_k(C_4) \le k^2 + k + 2$ (Chung – Graham [1975]).

33.3.8. (!) لقد أثبت بوندي (Bondy [1971 a]) أنه إذا كانت $X \nleftrightarrow y$ تتضمن أنّ $d(x) + d(y) \ge n(G)$، فإنّ $G = K_{t,t}$، أو أنّه توجد لـ G حلقة من كلّ طول من 3 إلى n. استخدم هذا لتبرهن أنّ $R(C_m, K_{1,n})$=max{m, 2n+1}، ربما إلا إذا كان m زوجيًّا وعلى الأكثر 2n. (Lawerence [1073]).

34.3.8. (!) أثبت أنّه توجد لكلّ تلوين ثنائي لـ $E(K_n)$ حلقة هاملتونية (Hamiltonian cycle) أحاديّة اللون أو مكونة من مسارين أحاديّي اللون. (مساعدة: استخدم الاستقراء على n.) (Lova`sz [1979], p 85)، وفي p482 نسبة إلى (H. Raynound).

35.3.8. (+) افترض أنّ f تلوين ثنائيّ لـ $E(K_n)$، وافترض كذلك أنّ $k \ge 3$، أثبت ما يلي:

a) إذا وُجد لـ f أحاديّ اللون C_{2k+1}، فإنّه يوجد لـ f أحاديّ اللون C_{2k} أيضًا.

b) إذا وُجد لـ f أحاديّ اللون C_{2k}، فإنّه يوجد لـ f أحاديّ اللون C_{2k-1} أو $2K_k$ أيضًا.

c) إذا كانت $m \ge 5$، فإنّ $R(c_m, c_m) \le 2m - 1$ (انظر التمرين **25 .3 .8** للحالة $m = 4$).

(مساعدة: استخدم فرعي (a) و (b)، ونتيجة إيردوز وجالاي [1959] (النظرية **35 .4 .5**) التي تقول إنه إذا كانت $e(G) > (m - 1)(n(G) - 1)/2$، فإنّ ذلك يضمن وجود حلقة طولها يساوي m على الأقل في G. وهنا تبقى حالة واحدة صعبة).

36.3.8. **يعرَّف تضاعف رامزي للبيان** G على أنّه أصغر عدد من النّسخ أحاديّة اللون من G في تلوين ثنائي لأضلاع عصبة على $R(G,G)$ من الرؤوس. أثبت أنّ تضاعف رامزي لـ K_3 يساوي 2.

37.3.8. أثبت أنّه يوجد لكلّ نقطة في منطقة مثلثيّة تعبير وحيد بوصفه تركيبًا محدّبًا لرؤوس المثلث (نقصد

بالتركيبِ المحدّب التركيبَ الخطيَّ الذي تكون فيها المعاملات غير سالبة ومجموعها يساوي 1).

38.3.8. تمهيدية سبيرنر في الأبعاد العليا. يتألف المُبسط ذو البعد k من تركيب محدّب لـ $k+1$ من نقاط $\mathbb{R}^K$ التي لا تقع في مستوى زائدي. إنّ التقسيم المبسطيّ يعبّر عن المبسط ذي البعد k بصفته اتحادًا لمبسطيّات (خلايا) من البعد k بحيث تتقاطع أيّ خليتين في المبسط الذي تحدده زواياهما المشتركة. وأنّ الخليّة **تامّة الوسم** هي الخليّة التي زواياها $\{0,\dots,k\}$.

أعطِ تعريفًا للتعليم (وضع علامات دالة أو وسم) الفعليّ، بحيث يحوي كلّ وسم فعليّ لتقسيم مبسطي لمبسط منَ الدرجة k خلية تامة الوسم. أثبت هذه النظرية. (مساعدة: تعدّ تمهيدية سبيرنر في البعد 2 (نظرية 17.3.8) شاهدًا حيًّا على خطوة الاستقراء لإثبات بالاستقراء على k).

39.3.8. (-) احسب عرض نطاق كلّ من: C_n ،K_n ،P_n.

40.3.8. احسب عرض نطاق (Eitner [1979] $K_{n_1}, \dots, n_k$.

41.3.8. (!) أثبت أنّ كلّ شجرة لها k من الأوراق هي اتحاد لـ $\lceil k/2 \rceil$ من المسارات المتقاطعة زوجًا زوجًا (التمرين 37.1.2). استخدم هذا لتبرهن أنّ عرض نطاق الشجرة التي لها n من الأوراق يساوي $\lceil k/2 \rceil$ على الأكثر، (Ando- Kaneko – Gervacio [1996]).

42.3.8. (+) افترض أنّ G جرارة (التعريف 17.2.2) وافترض كذلك أنّ m عدد صحيح بحيث $\left\lceil \frac{n(H)-1}{\text{diam } H} \right\rceil \le m$ لكلّ $H \subseteq G$. أثبت أنّ $B(G) \le m$. (مساعدة: أثبت أنّه يوجد لـ G ترقيم f بحيث تكون $f(v)$ مضاعفًا من m عندما يكون v على العمود الرئيس (الفقري)، وتكون $|f(u) - f(v)| \le m$ لكل $u \leftrightarrow v$)، (Systo- Zak [1982], Miller [1981]).

43.3.8. عرض نطاق الشّبكات:

a) احسب الحدّ الأدنى للكثافة الموضعية (المحلية) لعرض النطاق لـ $P_m \square P_n$.

b) افترض أنّ S مجموعةٌ تحوي k رأسًا لـ $P_m \square P_n$ بحيث يوجد p_i رأسًا في الصّفّ i و b_j رأسًا في العمود j. أثبت أنّ $|\partial S| < |\partial T|$ إذا كانت T هي المجموعة المؤلفة من أول a_i رأسًا في الصّفّ i لكل i.

c) أثبت أنّ $|\partial S|$ تُصغَّر على المجموعات-k في $V(P_n \square P_n)$ من قبل بعض S، بحيث $a_1 \ge \dots \ge a_n$ و $b_1 \ge \dots \ge b_n$.

استنتج أنّ حدّ هاربر الأدنى لـ $B(P_n \square P_n)$ هو n.

d) استنتج أنّ $B(P_m \square P_n) = \min\{m, n\}$، (Chav`talova` [1975]).

44.3.8. (+) افترض أنّ G بيان بسيط من الرتبة n، وعرض نطاقه يساوي b:

a) إذا كان $e \in \overline{G}$، فبرهن أنّ $B(G+e) \le 2b$.

b) أثبت أنّه إذا كانت $n \ge 6b$، فإنّ $B(G+e)$ تكون كبيرة بمقدار كبر $2b$.

(تعليق: أكبر قيمة لـ $B(G+e)$ هي $b+1$ إذا كانت $n \le 3b+4$، وهي $\lceil (n-1)/3 \rceil$ إذا كانت $(3b+5 \le n \le 6b-2)$، (Wang –West-Yao [1995]).

4.8 المزيد من مسائل التطرفية (More Extermal Problems)

توصف نظريّة البيان التّطرّفيّة بأنها واسعة جدًّا، وقد وصفنا في الجزء 3.1 الاختلاف بين مسائل كلٍّ من الأمثليّة (جد بناءً تطرّفيًّا في البيان المدخل) والقيم القصوى (جد حالة تطرّفيّة على صفّ من البيانات)، وقد تناولنا هذين النوعين من المسائل في هذا الكتاب. وفي هذا الجزء سندرس النّوع الثّاني. تعدُّ مسألة

توران (Turán) مثالاً على الطراز البدائيّ: جد العدد الأكبر للأضلاع في بيان لا يحوي H بوصفها بيانًا جزئيًّا. وسنذكر مثالاً واحدًا إضافيًّا من كلّ وحدة في الجدول الآتي:

الموضوع	صفّ البيانات	الجواب	المرجع
$\max\ e(G)$	n رأس و k مركبة	$\binom{n-k+1}{2}$	التمرين 40.3.1
أكبر خصر	قطر k وليس شجرة	$2k+1$	التمرين 61.1.2
$\max\ \beta(G)$	$\alpha'(G) \le k$	$2k$	التمرين 10.3.3
$\min\ \alpha(G)$	$\kappa(G)=k$ وقطر d	$\lceil (d+1)/2 \rceil$	التمرين 22.2.4
$\min\ \chi(G)$	يخلو من نسختين من $2k2$ و $\omega(G)=k$	$\binom{k+1}{2}$	التمرين 11.2.5
$\min\ \chi(G)$	سويّ خارجيّ	3	التمرين 12.3.6
$\max\ e(G)$	$n(G)=n$ وليس هاملتونيّا	$\binom{n-1}{2}+1$	التمرين 26.2.7
$\max\ n(G)$	$\alpha(G)<q$ و $\omega(G)<p$	$R(p,q)-1$	الجزء 3.8

نأمل مع مثل هذه المجموعة الهائلة المتنوّعة من مسائل القيم القصوى إظهار عينة بسيطة من نتائج ذات جاذبيّة في هذا الجزء.

تشفير البيانات (Encodings of Graphs)

أوّلا، سوف نأخذ في الحسبان متغيّرات تتعلّق بثلاثة أنواع من التّشفير البيانيّ، حيث يتضمّن كلّ نموذج منها تعيين متّجهات للرّؤوس، والمتغيّرات هي الطول الأصغر للمتّجهات التي تكفي. وسندرس القيمة الكبرى لكل متغيّر على بيانات لها n من الرّؤوس. وتشمل هذه المتغيرات عدد التقاطع، وبُعد كلٍّ من الجداء والمكعّب المسحوق.

1.4.8. تعريف: إنّ التّمثيل التّقاطعيّ (intersection representation) **بطول** t يعين لكلّ رأس متّجه 0،1 بطول t بحيث يكون $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كانت متّجهاته تملك 1 في موقع مشترك. وبالتّوازي مع ذلك، فإنّه يعيّن لكلّ $x \in V(G)$ مجموعة $S_x \leq [t]$ بحيث يكون $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. **وعدد التّقاطع** (intersection number) $\theta'(G)$ هو الطّول الأصغر لتمثيل تقاطعيّ لـ G.

إنَّ العناصر لـ $[t]$ في تمثيل ما تقابل بيانات جزئيّة تامّة تغطي $E(G)$. وهذا يحفّز استخدامنا لـ θ' لعدد التّقاطع: لاحظ أنّ $\theta(G)$ هو عدد العصب الأصغر التي نحتاج إليها لتغطية $V(G)$.

2.4.8. قضيّة. (Erdös – Goodman – Pósa [1966]) إنّ عدد التّقاطع يساوي عدد البيانات الجزئيّة التّامة الأصغر التي نحتاج إليها لتغطية $E(G)$.

الإثبات: نعرّف مقابلة طبيعيّة بين تمثيلات بطول t وغطاءات لـ $E(G)$ بواسطة t من البيانات الجزئيّة التّامة. كلّ $i \in [t]$ تولّد عصبة $\{v \in V(G): i \in S_v\}$. والبيانات الجزئيّة التّامة الناتجة تغطّي $E(G)$؛ لأنّ $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا تحقق أنَّ $S_u \cap S_v \neq \emptyset$.

وبالعكس، إذا كانت البيانات الجزئيّة التّامة $Q_1, \ldots, Q_t$ تغطّي $E(G)$، فإنّ تحديد $\{i : v \in V(Q_i)\}$ لكلّ رأس v يعطي تمثيلًا تقاطعيًّا. لذا، فإنّ $\theta'(G) = e(G)$ وذلك إذا كان G يخلو من المثلّثات، وكانت $\theta'(K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}) = \lfloor n^2/4 \rfloor$. في الحقيقة، هذا هو البيان الوحيد على n رأسًا يكبر $\theta'(G)$. يقترح التمرين 1 إثباتًا مباشرًا لهذا الحدّ؛ وهنا نقدم نتيجة أقوى. ■

لتكن $\mathbf{F}$ عائلةً من البيانات. للبيان المدخل G، فإنّ المسألة لتفكيك $\mathbf{F}$ (F-decomposition) هي بتفكيك G إلى العدد الأصغر من البيانات في $\mathbf{F}$. وعندما تكون $\mathbf{F}$ غير مغلقة تحت التّفكيك، فإنّ التّفكيك لـ $\mathbf{F}$ ربما يتطلّب بيانات جزئيّة أكثر من غطاء لـ F ‏(F – Fcovering). فعلى سبيل المثال، نستطيع تغطية الطّائرة الورقيّة ببيانين جزئيّين تامّين، ولكنها تَحتاج إلى ثلاثة بيانات جزئيّة تامّات لتفكيكها.

يعني إثبات أنّ $\theta'(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ لبيانات على n من الرّؤوس برهنة أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يمكن أنْ يغطى بـ $\lfloor n^2/4 \rfloor$ من البيانات الجزئيّة التّامة؛ وسوف نبرهن نتيجة أقوى؛ وهي أنّه يوجد دائمًا تفكيك مستخدم على الأكثر مثل هذا العدد من البيانات الجزئيّة التّامة. وفي الحقيقة، نستطيع إيجاد مثل هذا التّفكيك بشراهة.

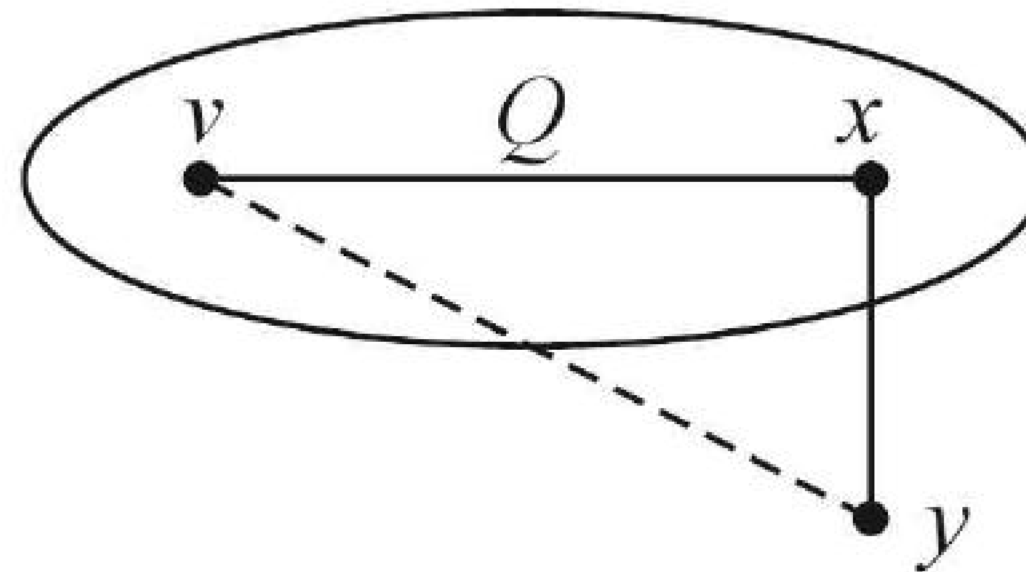
3.4.8. نظرية: [1994] McGuinness) كلّ تفكيك عُصَبيّ شره لبيان على n من الرّؤوس يستخدم على الأكثر $\lfloor n^2/4 \rfloor$ عصبة.

الإثبات: سوف نستخدم الاستقراء على n. الادعاء واضح لـ $n \leq 2$؛ لنفترض أنّ $n > 2$. ليكن $Q = Q_1, \ldots, Q_m$ تفكيكًا شرهًا لـ G، يعني أنّ كلّ Q_i بيانٌ جزئيٌّ أعظميّ تامّ في $G - \cup_{j<i} E(Q_j)$. لاحظ أنّ حذف Q_j من قائمة Q يخلف تفكيكًا شرهًا لـ $G - E(Q_j)$.

إذا كان Q_i كلّه يملك ثلاثة أضلاع على الأقلّ، فإنّ $m < n^2/6$. لذا، نستطيع افتراض أنَّ بعض Q_j هو ضلع xy. لتكن R تتكون من عناصر $\boldsymbol{Q} - \{Q_j\}$ التي تقع على x، ولتكن S تتكون من عناصر $\boldsymbol{Q} - \{Q_j\}$ التي تقع على y. لاحظ أنَّ المجموعةَ $\boldsymbol{Q'} = \boldsymbol{Q}(R \cup S \cup \{Q_j\})$ تفكيكٌ شرهٌ لبيان جزئيٍّ من $G - x - y$. ونجد من فرضية الاستقراء أنَّ $|\mathbf{Q'}| \le (n-2)^2/4$. لذلك، يكفي برهنة أنَّ $|R| + |S| \le n - 2$.

نبرهن هذا باختيار رؤوس مختلفة في $V(G) - \{x, y\}$ من مجموعات الرّؤوس لعناصر $R \cup S$. بما أنّ كلّ ضلع حُذف بالضبط مرةً واحدة، فإنّ كلّ $v \notin \{x, y\}$ يظهر مرّة واحدة في R إذا كان $v \in N(x)$، ومرّة واحدة في S إذا كان $v \notin N(y)$. افترض أنّ $Q \in R$. إذا كان Q يستخدم رأسًا $v \in N(y)$، فنختار مثل هذا الرّأس v لـ Q. وإذا كانت $V(Q) \subseteq N(y)$، فنختار لـ Q رأسا $v \in Q$ بحيث ينتمي vy إلى العنصر الأسبق من Q الذي يحتوي على كلّ من y ورأس ما في Q. يدعى هذا العنصر Q'؛ ولاحظ أنّه العنصرُ الوحيد في S الذي يحوي v، وبما أنَّ Q وxy هما الأعظمان عند اختيارهما، فإنَّ Q' تسبق كليهما في $\boldsymbol{Q}$. ولعناصر S، اختر رؤوسًا بأدوار عكسيّة لـ x و y.

بيّنا أنّه إذا كان v ينتمي إلى بعض $Q \in R$ وبعض $Q' \in S$، وv هو الذي اختير لأحدهما، فإنَّ البيان الذي اختير يظهر بعد البيان الآخر في قائمة $\boldsymbol{Q}$. لذا، فلا يوجد رأس يتمّ اختياره مرّتين. ومن هنا، نستنتج أنَّ $|R| + |S| \le n - 2$ و $m \le n^2/4$. ■



لقد قام كلّ من (Chung [1981]) و (Györi – Kostochka) [1979]) بتقوية حدّ التّفكك، بإثبات أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يملك تفكيكًا لبيانات جزئيّة تامّة حيث يساوي مجموع رتبها $\lfloor n(G)^2/2 \rfloor$ على الأكثر. الآن، سوف نأخذ في الحسبان نموذج التّشفير الثاني.

4.4.8. تعريف: تمثيل الجداء (product representation) بطول t يعين متجهات مختلفة طولها t للرّؤوس، بحيث يكون $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كانت متجهاتها تختلف في كلّ موقع. **والبعد الجدائيّ** (product dimension) للبيان G ($\text{pdim}\, G$) هو الطول الأصغر لمثل هذا التّمثيل لـ G.

وبتخصيص إحداثيّ واحد لكلّ $e \in E(\overline{G})$، بحيث تملك رؤوس e القيمة 0، في حين تملك الرّؤوس الأخرى قيمًا موجبة مختلفة بعضها عن بعض، فسنحصل على أنَّ $\text{pdim} G \le e(\overline{G})$ (إذا كان G ليس بيانًا تامًّا).

5.4.8. مثال: كلّ بيان تامّ يملك بعدًا جدائيًّا 1. لـ $\overline{K_n}$، فإنَّ كلّ زوج من الرّؤوس يجب أنْ يتوافق في إحداثيّ ما. ولكن لا نستطيع تعيين رأسين للمتّجه نفسه. لذلك، نحتاج إلى إحداثيّين، ويكفي تعيين $(0, j)$ لـ v_j لكلّ j.

لـ $K_1 + K_{n-1}$، يجب أنْ تختلف المتجهات للعصبة في كلّ إحداثيّ، أمّا المتّجه للرّأس المعزول، فيجب أنْ يتوافق مع كلّ رأس من الرّؤوس الأخرى في مكان ما، ولكنه لا يمكن أنْ يتوافق مع رأس في أكثر من إحداثيّ واحد. لذا،

نحتاج إلى $n - 1$ من الإحداثيّات على الأقلّ. وهذا يكفي، وذلك باستخدام $(1, 2, \ldots, n-1)$ للرّأس المعزول و$(i, i, \ldots, i)$ للرّأس الذي رقمه i للعصبة. ■

نستطيع مرة أخرى وصفَ المتغيّر باستعمال البيانات التّامّة.

6.4.8. تعريف: يعرَّف **التّكافؤ** (equivalence) على G على أنّه بيان جزئيّ مولّد لِـ G بحيث تكون مركّباتُه بيانات تامةً.

7.4.8. قضيّة. البعد الجدائيّ لِـ G هو العدد الأصغر للتّكافؤات $E_1, \ldots, E_t$ حيث $\bigcup E_i = \overline{G}$ و $\bigcap E_i = \phi$.

الإثبات: مرة أخرى يوجد تناظر طبيعيّ. إذا أعطيتَ تمثيلًا جدائيًّا، فإنّ الإحداثيّ i يولّد E_i، مع مركّبة لكلّ قيمة استعملت في الإحداثيّ i. وكلّ زوج غير متجاور يتوافق في إحداثيّ ما. لذا، فكلّ ضلع في $\overline{G}$ يكون مغطّى.
وبالعكس، إذا أعطيتَ $E_1, \ldots, E_t$، فإنّ كلّ مركّبة لـ E_i تصبح قيمة ثابتة في الإحداثيّ i لتمثيل، إضافة إلى أنّ المتطلّب $\bigcap E_i = \phi$ هو المتطلّب لاستعمال متجهات مختلفة في التّمثيل الجدائيّ ■

8.4.8. تمهيدية: إذا كان $\chi'\left(\overline{G}\right) > 1$، فإنّ $\text{Pdim } G \leq \chi'\left(\overline{G}\right)$، مع المساواة إذا كان $\overline{G}$ لا يملك بيانًا جزئيًّا مُحدثًا متشاكلاً مع مثلث.

الإثبات: كلّ مواءمة هي اتحاد بيانات تامّة منفصلة. وتصبح تكافؤًا بإضافة رؤوس معزولة؛ لذا، فإنّ تكافؤات $\chi'\left(\overline{G}\right)$ تغطّي $\overline{G}$. إذا كان $\chi'\left(\overline{G}\right) > 1$، فإنّ هذه التكافؤات لا تملك ضلعًا مشتركًا.

إذا كان $\overline{G}$ لا يملك بيانًا جزئيًّا مُحدثًا متشاكلاً مع مثلث، فإنّ كلّ تكافؤ استخدم في غطاء لِـ $\overline{G}$ هو مواءمة وأضلاع معزولة. وهكذا فإنّ $\text{pdim } G \leq \chi'\left(\overline{G}\right)$. ■

9.4.8. نتيجة: لِـ $n \geq 3$، فإنّ البُعد الجدائيّ الأكبر لبيان على n من الرّؤوس هو $n - 1$.

الإثبات: ليكن G بيانًا على n من الرّؤوس. بواسطة التمهيدية 8.4.8 والنظرية فايزنج (النظرية 10.1.7)، فإنَّ $\text{pdim } G \leq \chi'(\overline{G}) \leq D(\overline{G}) + 1 \leq n$. فضلًا على ذلك، فإنّ الحدّ يحسّن إلى $n - 1$ إلا إذا كان $\Delta\left(\overline{G}\right) = n - 1$. لتكن S مجموعةَ الرّؤوس التي درجتها $n - 1$ في $\overline{G}$؛ نستطيع افتراض أنَّ $|S| = k \geq 1$.

من التمهيدية 8.4.8 ونظرية فايزنج، فإنَّ $\text{pdim } (G - S) \leq n - k$. وبمضاعفة الإحداثيّات إذا احتجنا إلى ذلك، فإنّنا نحصل على تمثيل جدائيّ لـ $G - S$ بطول $n - k$. ليكن x^i هو المتجه المعين لِـ v_i في هذا التّمثيل.

إنَّ كلّ رأس في S يكون معزولاً في G. نعيّن الآن، لكلّ $v \in S$ المتّجه الذي يكون إحداثيّه i، لكلّ $1 \leq i \leq n - k$، هو الإحداثيّ i لـ x^i. إذا كان $k = 1$، فإنّ هذا يكمل تمثيلًا لـ G مع طول $n - 1$. إذا كان $k > 1$، فإنّنا نعيّن المتّجه نفسه للرّؤوس جميعها في S؛ ونضيف إحداثيًّا واحدًا باستخدام قيم مختلفة لإكمال تمثيل بطول $n - k + 1$، ويكون أقلّ من $n - 1$.

بما أنَّ $pdim\ (K_1 + K_{n-1}) = n - 1$ (المثال 5.4.8)، فإنَّ الحدَّ حادٌّ. ■

أعطى كلٌّ من لوفاسز، ونستريل، وبلتر [1980] (Lovász – Ne→etřil – Pultr) وصفًا مميزًا للبيانات على n من الرّؤوس مع بعد جدائيّ $n - 1$ (التمرين 4). وأثبتوا كذلك حدًّا سفليًّا عامًّا باستخدام تعليل يخصّ البعد في الجبر الخطّيّ.

10.4.8. نظرية: (Lovász – Ne→etřil – Pultr) [1980] لتكن $u_1, \ldots, u_r$ و $v_1, \ldots, v_r$ قائمتين من الرّؤوس (الاختلاف بينهما ليس ضروريًّا) في بيان G. إذا كان $u_i \leftrightarrow v_j$ لكلّ $i = j$ و $u_i \nleftrightarrow v_j$ لكلّ $i < j$، فإنّ $\text{pdim}\, G \geq \lceil \lg r \rceil$.

الإثبات: افترض أنّ G يملك تمثيلاً بطول d. لتكن $x^1, \ldots, x^r$ و $y^1, \ldots, y^r$ هي المتّجهات لـ $u_1, \ldots, u_r$ و $v_1, \ldots, v_r$، على التّرتيب. إنّ المتّجهين x^i و y^i يختلفان في كلّ إحداثيّ، ولكن x^i و y^j يتوافقان في إحداثيّ ما إذا كان $i \neq j$. لذا، لا يساوي $\prod_{k=1}^{d}\left(x_k^i - y_k^j\right)$ صفرًا إذا وفقط إذا كان $i = j$.

نستخدم خاصيّة الجداء هذه إنشاء r من المتّجهات المستقلّة خطّيًّا في $\mathbb{R}^{2d}$؛ هذا يبرهن أنّ $r \leq 2^d$ ولذلك، فإنّ $\text{pdim G} \geq \lceil 1gr \rceil$. إنّ توسيع $\prod_{k=1}^{d}\left(w_k - z_k\right)$ لـ $w, z \in \mathbb{R}^d$ يعطي المجموع $\sum_{S \subseteq [d]} \prod_{i \in S} w_i \prod_{j \in \overline{S}}\left(-z_j\right)$ ولربط r مع 2^d، فإنّنا نمحص هذه كجداء نقطيّ في $\mathbb{R}^{2d}$ مع إحداثيّات دلّلت بواسطة المجموعات الجزئيّة لـ $[d]$. لكلّ $w \in \mathbb{R}^d$، عرّف متجهين في $\mathbb{R}^{2d}$ بوضع $w_S = \prod_{i \in S} w_i$ و $\hat{w}_s = \prod_{i \notin S}\left(-w_i\right)$ للإحداثيّ $S \subseteq [d]$. مع هذا التّعريف، فإنّ الجداء النقطيّ $\hat{z}$. w يساوي $\prod_{k=1}^{d}\left(w_k - z_k\right)$. لاحظ أنّ الشّروط على $x's$ و $y's$ تعطي أنّ $x^i \cdot \hat{y}^j$ لا يكون صفرًا إذا وفقط إذا كان $i = j$.

ندّعي أنّ $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^r$ مستقلّةٌ. افترض إعتمادًا خطيًّا $\sum_{i=1}^{r} c_i \overline{x}^i = \mathbf{0}$. إنّ أخذ الجداء (الضّرب) النّقطيّ لـ $\hat{y}$ لطرفي المعادلة يقتل الحدّود تحت $i = r$ جميعها، ويؤدي إلى أنّ $c_r \overline{x}^r \cdot \hat{y}^r = 0$. وبما أنّ $\overline{x}^r \cdot \hat{y}^r \neq 0$، فإنّ $c_r = 0$. الآن، نستطيع تطبيق النّقاش نفسه باستخدام $\hat{y}^{r-1}$. إنّ معرفة $c_r = 0$ يعطي أنّ $c_{r-1}\overline{x}^{r-1} \cdot \hat{y}^{r-1} = 0$. بالإضافة إلى أنّ إنقاص الدليل بالتتابع يؤدي إلى أنّ $c_j = 0$ لكلّ j. إذن، نستنتج أنّ $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^r$ مستقلّةٌ، وتتطلّب أنّ $2^d \geq r$. ■

11.4.8. مثال: مواءمات: $\text{pdim}\,(n/2)\, K_2 = \lceil \lg n \rceil$. إذا أعطينا k إحداثيًّا، فإنّ البيان المشفّر باستخدام المرتّبات الثنائية من الدّرجة k جميعها، والتي عددها 2^k بوصفها رموزًا هو 2^{k-1} نسخة من K_2، لأنّ أيّ متّجه لا يتوافق فقط مع متمّمته في كلّ موقع. إذا لم يكن n أسا لـ 2، فنستطيع التّخلّص من الأزواج المتمّمة للحصول على بناء أو تركيب. والحدّ السّفليّ يتبع من النظرية 10.4.8، باستخدام كلّ رأس في القائمة (على سبيل المثال، ضع $u_i = v_{n+1-i}$). ■

في نموذج التّشفير الثّالث (المسافة بين الرّؤوس) سنعرض المعلومات بصورة دقيقة. تُعَدُّ مسألة العنونة في شبكات الاتّصال خير مثال على ذلك؛ حيث يجب أنْ تنتقل كلّ رسالة بأقصر مسار إلى منطقتها المقصودة. دون مراقبة مركزية، فإنّ كلّ رأس تصله رسالة يجب أنْ يحدّد المكان الذي سترسل إليه الرسالة باستخدام اسم المنطقة المقصودة فقط. فإذا كانت المتّجهات لرأسين تعطي المسافة بينهما في G، فإنّ رأسًا ما يستطيع أنْ يقارن بين المنطقة المقصودة للمتّجه والمتجهات لجيرانه، ثمّ يرسل الرّسالة إلى أقرب جار للمنطقة المقصودة.

لبيان مترابط G، نريد تعيين متّجهات للرّؤوس بحيث تكون المسافةُ بينها عددَ المواقع التي تختلف فيها المتّجهات. يكون هذا طمرًا متقايسًا (**isometric**) أو **"يحافظ على المسافة"** (**distance – preserving**) من G إلى $H = K_{n_1} \square \ldots \square K_{n_i}$، وتعني دالّة $f: V(G) \rightarrow V(H)$ بحيث يكون $d_G(u, v) = d_H(f(u), f(v))$. على أيّ حال، إنّ العديد من البيانات المترابطة لا تملك طمرًا متقايسًا في جداء كارتيزيّ للعصب؛ ومثال هذا C_{2k+1} لكلّ $k \geq 2$ (التمرين 11).

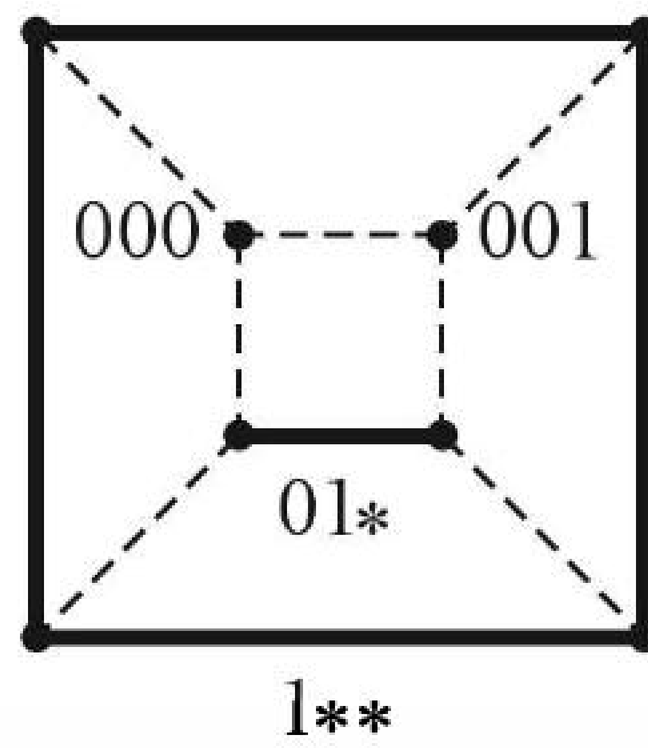
لهذا السّبب، نقدّم الرّمز * "لا تأخذ هذا في الحسبان". لتكن $S = \{0, 1, *\}$، ونعرف دالة التماثل d على الشكلّ الآتي: $d(0, 1) = 1$ و $d(0, *) = 0 = d(1, *)$. ولترمز S^N إلى مجموعة المرتّبات من الدّرجة N (متّجهات) مع مدخلات في S، ولـ $a, b \in S^N$ ضع $d_S(a, b) = \sum d(a_i, b_i)$. لكلّ بيان G. لبعض قيم N نحصل على تشفير $f: V(G) \to S^N$ بحيث يكون $d_G(u, v) = d_S(f(u), f(v))$ لكلّ $u, v \in V(G)$.

كلّ $a \in S^N$ تقابل مكعّبا جزئيًّا لـ Q_N، وهو المكعّب ذو البعد N. ويشير البعد للمكعّب الجزئيّ إلى عدد ظهور * في a. لـ $a, b \in S^N$، فإنّ المسافة الصّغرى بين رؤوس المكعّبات الجزئيّة المتقابلة هي $d_S(a,b)$. والمتّجهات المعيّنة لرؤوس مختلفة تقابل مكعّبات جزئيّة منفصلة. وبخلاف ذلك، فإنّ مسافتها سوف تكون **0**. إذا قلّصنا الأضلاع لكلّ مكعّب جزئيّ معيّن، فإنّنا نحصل على "مكعّب مسحوق" H، علاوة على أنّ دالّة المحافظة على المسافة $f: V(G) \to S^N$ هي طمر متقايس لـ G في H.

12.4.8. تعريف: طمر المكعّب المسحوق (squashed – cube embedding) بطول N هو دالّة $f: V(G) \to S^N$ بحيث يكون $d_G(u, v) = d_S(f(u), f(v))$. أمّا **بعد المكعّب المسحوق** (squashed – cube dimension) qdim G فهو الطول الأصغر لمثل هذا الطّمر لـ G.

13.4.8. مثال: المتّجهات 000، 001، 01* و 1** تشكّل طمرًا مكعّبًا مسحوقًا لـ K_4 مع طول 3. لاحظ أنّ رأسين متجاورين لمكعّب من الدّرجة 3 لا يتغيّران، في حين ينهار الضّلع المجاور لكليهما، إضافة إلى انهيار الوجه المقابل بأكمله، ويكون البيانُ النّاتج K_4. وتظهر صورة المكعّبات الجزئيّة في الشّكل أدناه بخطّ سميك، وهذا البناء يعمّم لطمر K_n في مكعّب مسحوق بعده $n - 1$

يطمر المسار P_n بصورة متقايسة في Q_{n-1} دون سحوقات باستخدام 00...00، 10...00، 11...00، 11...10، 11...11. لا يوجد طمر أقصر؛ لأنّ المسافة بين النقاط الطّرفيّة لـ P_n هي $n - 1$، وكلّ إحداثيّ يسهم على الأكثر بـ 1 للمسافة بين المتّجهات. ■



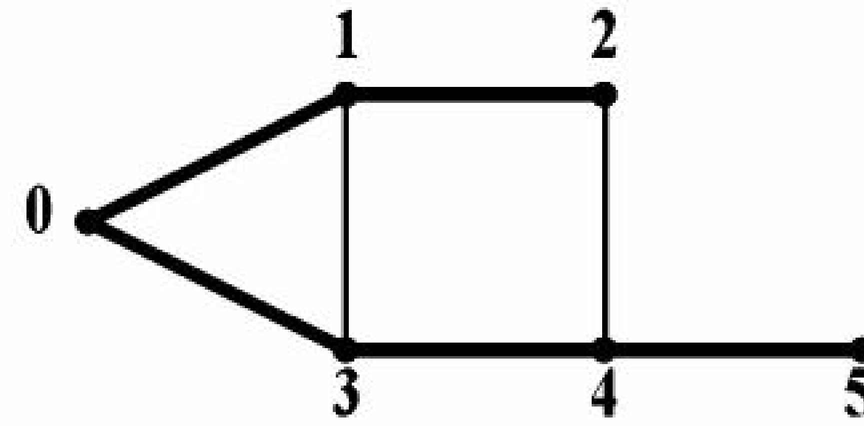
14.4.8. قضيّة. إذا كان G بيانًا، فإنّ $\text{qdim}(G) \le \sum_{i<j} d_G(v_i, v_j)$.

الإثبات: لكلّ زوج i, j مع $i < j$، نخصّص قالبًا له $d_G(v_i, v_j)$ إحداثيّ. ضع هذه الإحداثيّات **0** لـ v_i، و **1** لـ v_j و * لبقية الرّؤوس. إذا أعطينا رأسين، فإنّ الإحداثيات التي لا تحتوي على * هي الإحداثيات المخصصة للزّوج فقط. لذا، فإنّ $d_G(v_i, v_j) = d_S(f(v_i), f(v_j))$. ■

باستخدام أسلوب القيمة الذاتيّة (التمرين 14.6.8)، أثبت جراهام وبولاك (Graham – Pollak) [1971م،1973] الحدّ السّفليّ العام على $qdim\ (G)$ الذي يعطي $qdim\ K_n = n - 1$. لذا، فكلّ من K_n و P_n يملك

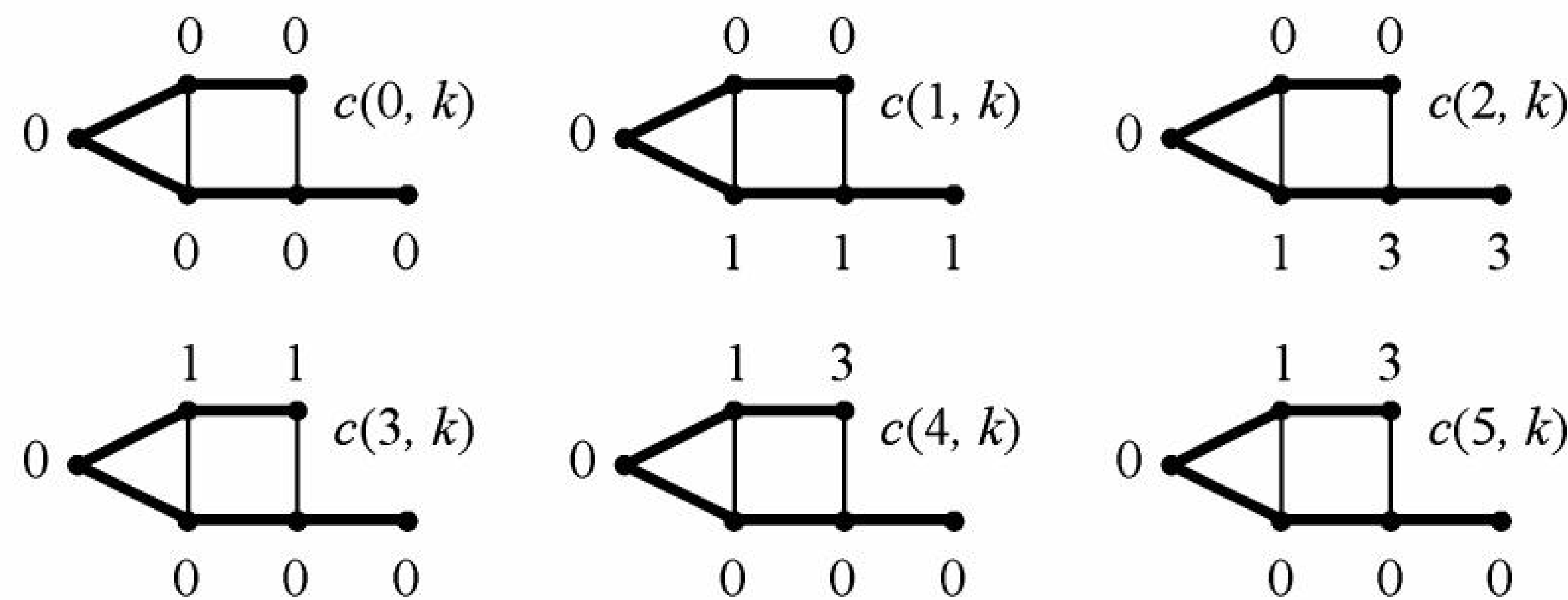
مكعّبًا مسحوقًا بُعده $n-1$؛ وقد خمّن جراهام وبولاك أنّ $qdim\ G \le n-1$ لكلّ بيان مترابط على n من الرّؤوس. وعرض جراهام $ 100 لإثبات هذا التّخمين، وقد وجد وينكلر خطّة تشفير إثبات هذه المخمّنة "مخمّنة المكعّب المسحوق". يولّد إثبات وينكلر بالضبط مكعّبًا مسحوقًا مشفّرًا بعده $n-1$ لكلّ بيان مترابط G على n من الرّؤوس. سنبدأ بوضع دليل على الرّؤوس؛ اختر v_0 عشوائيًّا. وبعد ذلك، جد شجرة مولّدة T بحيث يكون $d_T(v, v_0) = d_G(v, v_0)$ لكلّ $v \in V(G)$ (من الممكن توليد G بواسطة البحث الأفقي أولاً من v_0). الآن، رَقِّم الرّؤوس بالبحث العموديّ أولاً في T، أي، إذا تمّ اختيار التّدليل لـ $v_0, \ldots, v_i$، ليكن v_{i+1} هو الطفل الذي لم نصل إليه من v_i في T، وذلك إذا وجد واحد. وبخلاف ذلك، تحرّك بطريق خلفيّ في إتجاه الجذر حتى تجد رأسًا له مثل هذا الطفل. ولاحظ أنّ الأدلّة الناتجة تزداد من خلال كلّ مسار من v_0 في T.

15.4.8. مثال: التّرقيم العموديّ أوّلاً للشّجرة المولّدة الأفقيّة أوّلاً. في الرّسم أدناه، تنتمي الأضلاع ذات الخطّ السّميك إلى T، أمّا الأضلاع ذات الخطّ الرّفيع، فتنتمي إلى $G-T$. وسوف نستخدم هذا المثال لتوضيح عدّة خطوات في الإثبات.



من الآن فصاعدًا، ثبّت T وهذا التّرتيب للرّؤوس، وارجع إلى الرّؤوس بحسب دليلها في هذا التّرتيب. لتكن P_i مجموعة الرّؤوس للمسار من i إلى 0 في T، وليكن i' هو الوالد لـ i في T (الرّأس التّالي على المسار من i إلى 0)، وليكن $i \wedge j = \max(P_i \wedge P_j)$ هو الرّأس الذي يتقابل فيه المسار من i إلى 0 والمسار من j إلى 0. إذا أعطيت التّرقيم العموديّ أوّلاً للشّجرة الأفقيّة أوّلاً T في G، فاجعل $c(i, j) = d_T(i, j) - d_G(i, j)$ هي التّعارض (discrepancy) للرّأسين $i، j$.

16.4.8. مثال: في البيان المُعَلّم $c(i, k)$ أدناه، نسجّل عند كلّ رأس k التّعارض $c(i, k)$ للشّجرة T في المثال 15.4.8



17.4.8. تمهيدية: (Winkler [1983]). يملك التّعارض الخصائص الآتية:

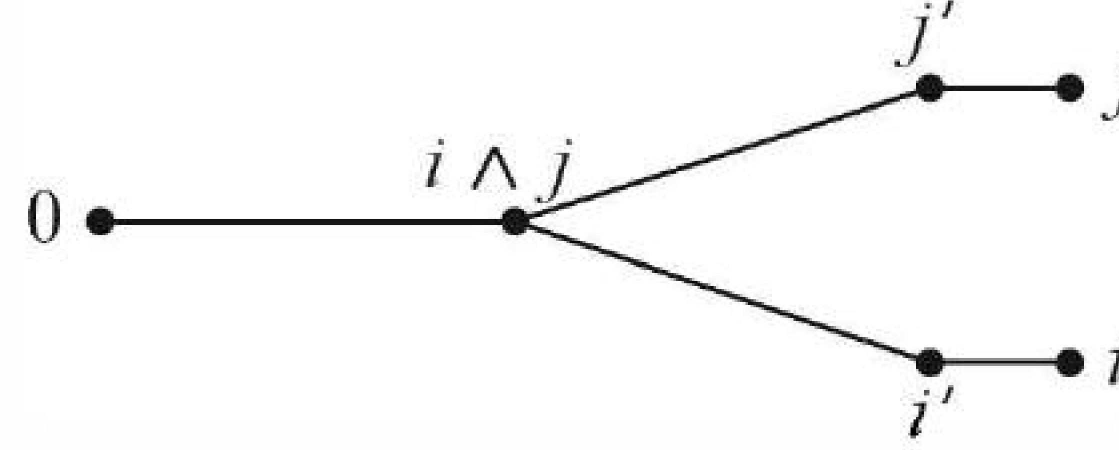
(a $c(i, j) = c(j, i) \ge 0$.

(b إذا كان $i \in P_j$ فإنّ $c(i, j) = 0$.

(c إذا لم يكن $i \in P_j$ ولا $j \in P_i$، فإنّ $c(i, j') \le c(i, j) \le c(i, j') + 2$.

الإثبات: (a) المسافة في البيانات متماثلة، والمسار الأقصر من i إلى j في G ليس أطول من المسار بينهما في T.

b) المحافظة على المسافات لـ v_0 تعطي أنّ المسار من i إلى j في T هو أقصر مسار من i إلى j في (G) بما أنّ j' ينتمي إلى المسار من i إلى j في T، فإنّه يصبح لدينا $d_T(i, j) - d_T(i, j') = 1$. وبما أنّ $jj' \in E(G)$، يصبح لدينا أنّ $|d_G(i,j) - d_G(i,j')| \leq 1$. إذن، $c(i, j) - c(i, j')$ هو 0، 1 أو 2. ■



مع هذا المفهوم للتّعارض، نستطيع إعطاء فكرة واضحة عن كيفية عمل تشفير وينكلر، سنستخدم شجرة بحث، لأنّها تعطينا $(n-1)$ من الإحداثيّات الطّبيعيّة. إنّ المسافة في الشّجرة هي "تقريب" للمسافة في البيان؛ وتحتاج إلى أنْ تكون معدلّة بواسطة التّعارض، وتشفير وينكلر يضع 1 في الإحداثيّ k لأحد الرّؤوس i، j لـ $d_T(i, j)$ بالضبط من قيم k، ونريد للشّفرة الأخرى أنْ تملك 0 بالضّبط في $d_G(i, j)$ من هذه الإحداثيّات؛ لذلك، ننجز التّعديل بامتلاك * بالضّبط في $c(i, j)$ من الإحداثيّات؛ حيث شفرة واحدة تملك 1، والمسألة هي أنْ نصمّم التّشفير لننجز هذا لأزواج الرّؤوس جميعها في الوقت نفسه.

18.4.8. نظرية: ([Winkler [1983]) كلّ بيان مترابط على n من الرّؤوس G يملك مكعّبًا مسحوقًا بعده $n-1$ على الأكثر.

الإثبات: اختر شجرة T، وترقيم $0, \ldots, n-1$ كما هو موصوف أعلاه. نعرّف تشفيرًا $f(i) = (f_1(i), \ldots, f_{n-1}(i))$ وتحقّق من أنّ $d_G(i, j) = d_S(a_i, a_j)$. والتّشفير هو:

$f_k(i) =$
- 1 إذا كان $k \in P_i$
- * إذا كان $c(i,k) - c(i,k') = \hat{1}$
- * إذا كان $c(i,k) - c(i,k') = 1$ و $i < k$ و $c(i,k)$ زوجيّ.
- * إذا كان $c(i,k) - c(i,k') = 2$ و $i > k$ و $c(i,k)$ فرديّ.
- 0 غير ذلك.

(المتّجهات في التّشفير لمثال 16.4.8 هي $f(0) = 00000$، $f(1) = 10000$، $f(2) = 110*0$، $f(3) = *0100$، $f(4) = **110$، $f(5) = **111$).

لإثبات أنّ $d_S(f(i), f(j)) = d_G(i, j)$، نعدّ الإحداثيّات حيث يكون واحد من $f(i)$ و $f(j)$ يملك 1، والآخر يملك 0. مثل هذه الـ k من الإحداثيّات تنتمي إلى $P_i \cup P_j$، حيث وضعت الواحدات جميعها. من التّماثل، نستطيع افتراض أنّ $i < j$. لذلك، $j \notin P_i$، وسوف نعُدُّ الحالتين $i \in P_j$ و $i \notin P_j$.

إذا كان $i \in P_j$، فإنّ $d_G(i,j) = d_T(i,j) = |P_j - P_i|$، وتكون $f_k(i) = f_k(j) = 1$ إذا وفقط إذا كان $k \in P_i$. تقع الإحداثيات جميعها في $P_j - P_i$ حيث يكون بالضبط واحد من $f(i)$ و $f(j)$ يملك 1. لاحظ أن لكلّ $k \in P_j - P_i$، يكون لدينا $f_k(i) = 0$. وعليه، فإنّ $d_G(i,j) = d_S(f(i), f(j))$.

إذا كان $i \notin P_j$، فإنّ واحدًا بالضبط من $\{f_i(k), f_j(k)\}$ يساوي 1 تمامًا عندما يكون $k \in (P_j - P_i) \cup (P_i - P_j)$. ونحتاج إلى برهنة أنّ المتّجه الآخر يملك * بالضبط في $c(i, j)$ من هذه الإحداثيّات. وهذا يعطي:

$d_S(f(i), f(j)) = |P_j - P_i| + |P_i - P_j| - c(i, j) = d_T(i, j) - c(i, j) = d_G(i, j)$.

في المثال 16.4.8، $(P_5 - P_2) \cup (P_2 - P_5)$ هي الإحداثيات الخمسة جميعها ؛ وبما أنّ $f(2)$ و$f(5)$ معًا يملكان * في ثلاثة من هذه الإحداثيّات، فإنّ $d_s(f(2), f(5)) = d_G(2, 5) = 2$، كما أردنا.

لتعيين النّجوم * في هذه المواقع؛ خذ في الحسبان التّغيير في التّعارضات الذي نحصل عليه بسبب جلب أيّ من i أو j إلى نقطة تقاطع P_i مع P_j. خذ في الحسبان قائمتين:

$$0 = c(i, i \wedge j) \leq \ldots \leq c(i, j') \leq c(i, j)$$

$$0 = c(i \wedge j, i) \leq \ldots \leq c(i', j) \leq c(i, j)$$

سوف نحصل على * واحدة في $f(i)$ لكلّ m زوجيّ حيث $0 < m \leq c(i, j)$ ونحصل على * واحدة في $f(i)$ لكلّ m فرديّ حيث $0 < m \leq c(i, j)$.

لكلّ m زوجيّ حيث $0 < m \leq c(i, j)$، ليكن j_m هو الرّأسَ الوحيد حيث $c(i, j_m) \geq m$ و$c(i, j'_m) < m$. حتى عندما تكون القيمة m ليست القائمة الأولى، فإنّ j_m يكون حسن التعريف؛ ولأنّ c تتغير على الأكثر 2 مع كلّ خطوة، فإنّ قيم j_m تكون مختلفة. فضلًا عن ذلك، يضمن الترتيب العموديّ الأوّل أنّ $i < k$ لكلّ $k \in P_j - P_i$. لذلك، فإنّ $f_k(i) = *$ لكلّ $k \in P_j - P_i$ إذا وفقط إذا كان $k = j_m$ لبعض قيم m الزّوجيّة. في المثال 16.4.8، لاحظ أنّ لـ $(i, j) = (2,5)$ يكون لدينا $j_2 = 4$ و$f_4(2) = *$.

بطريقة مشابهة، لكلّ m فرديّ حيث $0 < m \leq c(i, j)$، ليكن i_m الرّأسَ الوحيد بحيث $c(i_m, j) \geq m$ و $c(i'_m, j) < m$. كما في السابق، تكون قيم i_m مختلفة وحسنة التّعريف. والتّرتيب العموديّ أوّلاً يضمن أنّ $k > j$ لكلّ $k \in P_i - P_j$. لذلك، فإنّ $a_j(k) = *$ لكلّ $k \in P_i - P_j$ إذا وفقط إذا كان $k = i_m$ لبعض قيم m الفرديّة. في المثال 16.4.8، لاحظ أنّ لـ $(i, j) = (2,5)$ يكون لدينا $i_1 = 1$، $i_3 = 2$، و $f_1(j) = f_3(j) = *$.

لذلك، نكون قد عددنا النّجوم * في $P_i - P_j \cup P_j - P_i$. وعددها هو عدد الأعداد الزّوجية الصّحيحة بين 1 و $c(i, j)$ ، إضافة إلى عدد الأعداد الفرديّة الصّحيحة بين 1 و$c(i, j)$، ويساويان معًا $c(i, j)$.

التفريع ونشر الإشاعات (Branchings and Gossip)

لقد درسنا مسألة إيجاد العدد الأكبر للأشجار المولّدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في بيان ما؛ وهذا يساوي أكبر k بحيث يتحقّق لكلّ تجزئة رؤوس P، وهناك $k(|P| - 1)$ ضلعًا على الأقلّ تعبر بين مجموعات P (النتيجة 59.2.8). هنا، سوف نأخذ في الحسبان مسألة مماثلة للبيانات الموجّهة تتعلّق بنظرية منجر (التمرين 14). وهذه النظرية هي نظرية أصغر – أكبر تركّز على الأزواج من الرّؤوس. نفحص "خاصّيّة التّرابط من رأس واحد لبقيّة الرّؤوس للبيان الموجّه.

19.4.8. تعريف: التّفريع من الدّرجة r (r – branching) في بيان موجّه يعدُّ شجرةً مجذّرةً "تفريعً خارجيّ" من r. إنّ الرّأس r يملك درجة دخول **0**، أمّا الرّؤوس الأخرى جميعها فتملك درجة دخول 1، والرّؤوس الأخرى جميعها قابلة للوصول من r. ليكن $\kappa'(r; G)$ يرمز إلى أصغر عدد من الأضلاع والتي يؤدّي حذفها إلى الحصول على رأس ما لا تستطيع الوصول إليه من r.

إنّ حذف الأضلاع الدّاخلة إلى المجموعة $X \subseteq V(G) - \{r\}$ يجعل كلّ رأس لـ X غير قابل الوصول إليه من r. من جهة أخرى، فإنّ أيّ مجموعة أصغريّة والتي بحذفها لا نستطيع الوصول إلى بعض الرّؤوس يجب أنّ تشتمل على الأضلاع جميعها التي تغادر مجموعة الرّؤوس التي تمّ الوصول إليها. لذلك، فإنّ $\kappa'(r; G)$ تساوي الأصغر على المجموعة غير الخالية $X \subseteq V(G) - \{r\}$، لـ عدد الأضلاع الداخلة في X.

وفي مجموعة التّفريعات من الدّرجة r المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا، فإنّ كلّ تفريع يجب أنْ يستخدم ضلعًا واحدًا داخل X على الأقلّ. لذلك، يوجد على الأكثر $\kappa'(r;G)$ تفريعات من الدّرجة r منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في G. وقد أثبت إدموند أنّ هذا الحدّ قابل للتّحقّق. ومناقشتنا تسمح بوجود الأضلاع المتكرّرة.

20.4.8. نظرية: (نظرية التّفريع لإدموند [1973]) لرأس r في بيان موجّه G، العددُ الأكبر للتّفريعات من الدّرجة r المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في G هو $\kappa'(r;G)$.

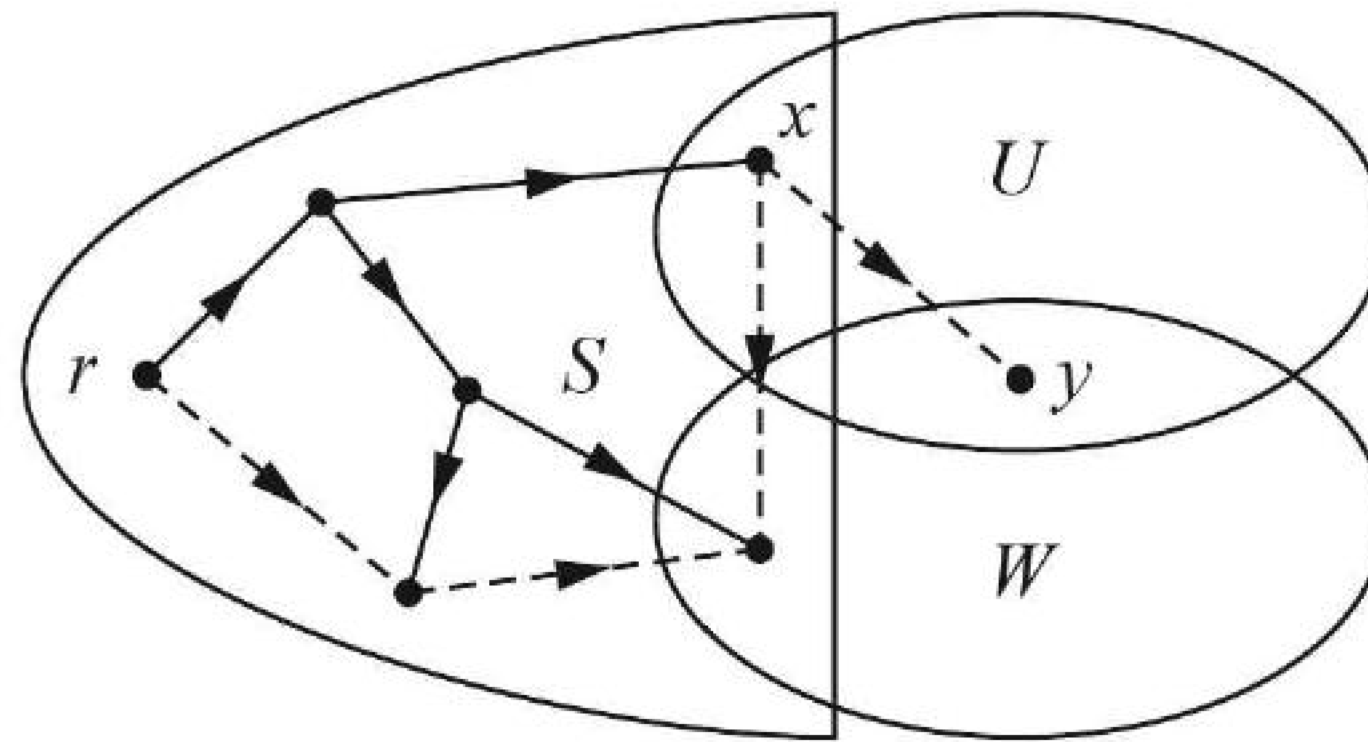
الإثبات: (Lovász [1976]) لتكن V مجموعةَ الرّؤوس في G. لاحظ أنّ الحدّ العلويّ يتحقّق لأنّ كلّ مجموعة جزئيّة من $V-r$ تكون قد دخلت على الأقلّ من خلال ضلع واحد في كلّ تفريع من الدّرجة r. وسوف نبرهن الوجود لـ $\kappa'(r;G)$ تفريعًا من الدّرجة r منفصلة ضلعيًّا بواسطة الاستقراء على $k=\kappa'(r;G)$. لـ $k=1$. يكفي البحث الأفقيّ أوّلاً لتنمية تفريع من الدّرجة r؛ لأنّ كلّ رأس قابل للوصول إليه. ولـ $k>1$، نبحث عن تفريع T من الدّرجة r بحيث يكون $\kappa'(r;G-E(T))=k-1$. لذا، فإنّ فرضية الاستقراء تزوّدنا بـ $k-1$ تفريعًا إضافيًّا من الدّرجة r.

التّفريع الجزئيّ من الدّرجة r هو تفريع من الدّرجة r لبيان جزئيّ مُحدث في G. ليكن T تفريعًا جزئيًّا من الدّرجة r، وله رتبة كبرى بحيث $\kappa'(r;G-E(T))\ k-1$. إنَّ الرّأس r نفسه يكون مثل هذا التّفريع، مع $E(T)=\emptyset$. ضع $S=V(T)$. إذا كان $S=V$، فنكون قد انتهينا. لذلك، من الممكن افتراض أنّ $S\neq V$.

لـ $X\subseteq V-r$، ليكن e_X يرمز إلى عدد الأضلاع في $G-E(T)$ التي تدخل إلى X. إذا كان $e_X\geq k$ لكلّ $X\subseteq V-r$ التي تقطع $V-S$، فنستطيع توسيع T بإضافة أيّ ضلع من S إلى $V-S$. لذا، نستطيع اختيار أصغر مجموعة $U\subseteq V-r$ تقطع $V-S$ وتكون داخلة من خلال $(k-1)$ ضلعًا بالضبط. (للتّوضيح؛ تتكوّن T من الأضلاع المتّصلة الرّفيعة).

بسبب أنّ $\kappa'(r;G)=k$، وبسبب عدم حذفنا لأيّ ضلع داخل إلى $U-S$، فسيبقى لدينا $e_{U-S}\geq k$. على أيّ حال، $e_U=k-1$. لذلك، يجب أنْ يوجد ضلع xy من $S\cap U$ إلى $U-S$. وندّعي أنّ xy يمكن أنْ يضاف لتوسيع T، وهذا يناقض الأعظميّة لـ T. لذا، نحتاج فقط إلى تحقيق بقاء $k-1$ ضلعًا على الأقلّ يدخل إلى كلّ $W\subseteq V-r$ عندما نحذف xy من $G-E(T)$. وهذا يتحقّق تلقائيًّا إلا إذا كان $x\in V-W$ و $y\in W$. ويكفي برهنة أنّ $e_W\geq k$ لمثل W.

لاحظ أنّ الكمية e_W+e_U تعدّ الأضلاع الداخلة إلى كلّ من W و U. ما عدا الأضلاع التي بين $U-W$ و$W-U$، فإنّ الأضلاع الداخلة إلى $W\cup U$، وتلك الداخلة إلى $W\cap U$ تعدّ مرتين. لذلك، فإن $e_W+e_U\geq e_{W\cup U}+e_{W\cap U}$. أصبح لدينا $e_{W\cup U}\geq k-1$ من خلال خاصّيّة التّعريف لـ T، و $e_U=k-1$ بواسطة البناء، و $e_{W\cap U}\geq k$ بسبب أنّ $x\in U-W$ والأصغريّة لـ U. إذن، $e_W\geq k-1-(k-1)+k=k$، كما نرغب. ■



يمكن تحويل إثبات لوفاسز إلى خوارزميّة لإيجاد العدد الأكبر للتّفريعات من الدّرجة r والمنفصلة زوجًا زوجًا؛ وقد أعطى تارجان [1974/75] خوارزميّة أخرى. ربما ندعو $\kappa'(r;\ G)$ **الترابط الضّلعيّ المحليّ الشّامل** (Local – global edge – connectivity). لاحظ أنَّ للنظرية 20.4.8 عدة صورٍ متكافئة.

21.4.8. نتيجة: إذا كان G بيانًا موجّهًا، وr رأسًا في G، و$0 \le k$، فإنّ العبارات التّالية تكون متكافئة:

a) G يملك k تفريعًا من الدّرجة r منفصلا ضلعيًّا زوجًا زوجًا.

b) $\kappa'(r;\ G) \ge k$؛ مكافئة لـ $\left\|\left[\overline{X},\ X\right]\right\| \ge k$ لكلّ $X \subseteq V(G) - \{r\}$.

c) لكلّ $s \neq r$، يوجد k مساراً من r إلى s منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا.

d) يوجد k شجرة مولّدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في البيان الأصليّ المتضمّن (غير الموجّه). والتي لكلّ $s \neq r$ تحوي بينها k ضلعًا بالضبط من البيان الموجّه G تدخل s.

الإثبات: $A \Leftrightarrow B$ هي نظرية إدموند، أمّا $B \Leftrightarrow C$ فهي نظرية منجر، $A \Rightarrow D$ مباشرة. لـ $D \Rightarrow B$، نفترض أنّ الأشجار موجودة، ونعدُّ $U \subseteq V - r$. تملك كلّ شجرة مولّدة $|U| - 1$ ضلعًا ضمن U على الأكثر. لذا، فإنّ الأشجار تملك معًا $k(|U| - 1)$ ضلعًا على الأكثر ضمن U. ومن الافتراض، فإنّ الأضلاع للبيان الموجّه G تقابل هذه الأشجار التي تحتوي بالضبط على $k|U|$ ضلعًا مع مقدّمات في U. لذلك، فإنّ k ضلعًا على الأقلّ يدخل U. ■

لاحظ شرجفر (Schrijver) أنَّ نظرية التّفريع لإدموند يمكن أنْ تبرهن أيضًا باستخدام اتحاد الماترويدات وتقاطعها. أهمل الأضلاع التي تدخل الجذر r. ليكن M_1 هو الاتحاد لـ k نسخة من الماترويد الحلقيّ على البيان الأصليّ غير الموجّه. وليكن M_2 هو الماترويد الذي تكون فيه مجموعة من الأضلاع مستقلة إذا وفقط إذا لم يكن أيّ $k + 1$ منها تملك المقدّمة نفسها (هذا هو الجمع المباشر للماترويدات المنتظمة التي رتبتها k). يوجد k تفريعًا منفصلاً من الدّرجة r إذا وفقط إذا كان هذان الماترويدان يملكان مجموعة مستقلّة مشتركة حجمها $k(n(G) - 1)$.

إنَّ التّفريعات من الدّرجة r المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا تزوّدنا بقواعد (بروتوكولات) ثابتة تتسامح مع خطأ الرّسائل المرسلة من r، في حين تكون الشّجرات البديلة متاحة. بعدها نأخذ في الحسبان قواعد ثابتة للإرسالات من كلّ رأس إلى الرّؤوس الأخرى جميعها، حيث يتمّ الإرسال في اتجاهين، إلاّ أنّ التّنفيذ يتمّ بترتيب معيّن.

السؤال النّاتج هو **مسألة انتشار الإشاعة** (gossip problem). خذ في الحسبان n من الإشاعات يتضمّن كلّ منها معلومة سارة؛ وبسبب أنها إشاعات، فإنّ كلّ شخص يريد معرفة المعلومات كلّها، وعندما يحدث اتصال بين شخصين، فإنّ كلّ شخص يخبر الآخر بكلّ ما يعرف. السّؤال: ما عدد المكالمات الهاتفيّة التي نحتاج إليها لنقل المعلومات جميعها ؟ لقد نُشر العديد من الحلول في بداية السّبعينيّات من القرن العشرين.

إنّ تحقيق ذلك بـ $2n - 3$ من المكالمات يكون سهلاً؛ حيث يهاتف كلّ شخص x ثمّ يعود x بمهاتفة كلّ واحد. وهنا، نوفّر مكالمة واحدة عن طريق دمج المكالمة الأخيرة دخولاً والمكالمة الأولى خروجًا. عندما تكون $n \ge 4$، فإنَّ $2n - 4$ مكالمة تكفي: أولاً، يجري الآخرون مكالمة هاتفية مع مجموعة S تتكون من أربعة أشخاص، بعدها تتشارك S المعلومات مع زوجين متتاليين، ثمَّ يتلقى الآخرون المكالمات من S باستخدام ما مجموعه $(n - 4) + 4 + (n - 4) = 2n - 4$ مكالمة. وباستخدام نموذج بيان، سنبين أنّ هذا هو أفضل ما يمكن.

22.4.8. تعريف: **البيان المرتّب** (ordered graph): بيان مع ترتيب للأضلاع (الأضلاع المتكرّرة مسموح بها).

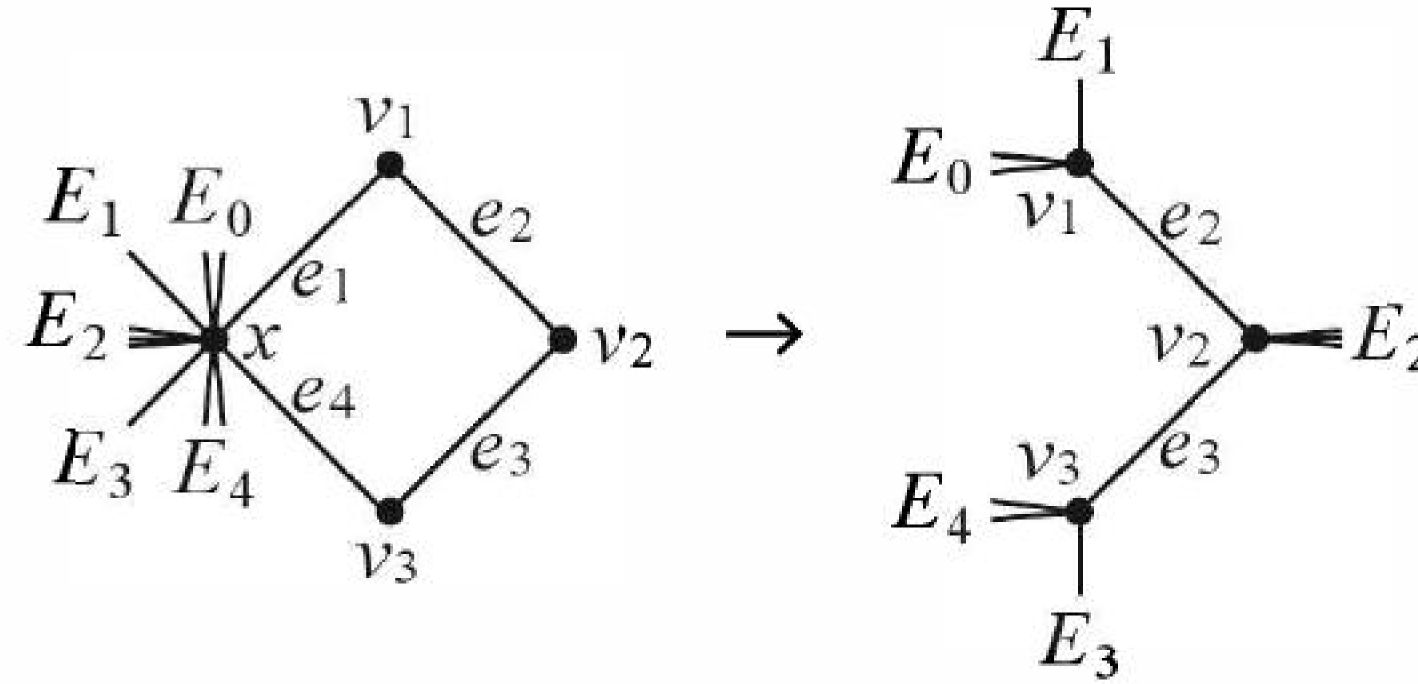
والمسار المتزايد (increasing path): هو مسار بواسطة أضلاع متتالية لاحقة. أمّا مخطّط الإشاعة (gossip scheme)، فهو بيان مرتّب يملك مسارًا متزايدًا من كلّ رأس إلى كلّ رأس من الرّؤوس الأخرى.

يحقّق **مخطّط الإشاعة هذا** $NOHO$ ("لا يسمع أحد معلوماته الخاصة") إذا كان لا يملك مسارًا متزايدًا من x إلى y بالإضافة إلى ضلع لاحق بين x وy.

23.4.8. نظرية: إذا كان $n \geq 4$، فإنّ العدد الأصغر للأضلاع في مخطّط إشاعة على n من الرّؤوس هو $2n - 4$.

الإثبات: ([Baker – Shostak [1972]) سوف نستخدم كلمة "مكالمات" بحرّيّة بدلاً من كلمة "أضلاع" لتأكيد التّرتيب، وإمكانيّة وجود أضلاع مكرّرة. إنّ الخطة الموصوفة أعلاه تستخدم $2n - 4$ مكالمة، ويبين تحليل الحالة أنّها الأمثل لـ $n = 4$. وهذا يزوّدنا بأساس لإثبات بالاستقراء على n. وإذا كان $n > 4$، فيمكن افتراض أنّ كلّ مخطّط إشاعة على $n - 1$ من الرّؤوس يستخدم على الأقل $2n - 6$ مكالمة. إذا كان $2n - 4$ ليس مثاليًّا لـ n من الرّؤوس، فإنّنا نستطيع إضافة مكالمات للمخطّط المثاليّ (إذا كان هذا ضروريًّا) للحصول على مخطّط إشاعة G على n من الرّؤوس له $2n - 5$ مكالمة بالضبط.

الادّعاء الأوّل: G يحقق NOHO. وبخلاف ذلك، فإنّ G سيملك مسارًا متزايدًا من x إلى v_k عبر الأضلاع $e_1, \ldots, e_k$ متبوعًا بمكالمة $e_{k+1} = v_k x$. احذف e_1 و e_{k+1}. وجَزّأ المكالمات الأخرى التي تشمل x إلى $k + 2$ مجموعة؛ تتكوّن E_0 من المكالمات (الأضلاع) الموجودة قبل e_1 وE_i؛ $1 \leq i \leq k$؛ تتكوّن من المكالمات الموجودة بين e_i وe_{i+1}، في حين تتكوّن E_{k+1} من المكالمات الموجودة بعد e_{k+1}. في كلّ ضلع $e \in E_k$، ضع v_1 أو v_i أو v_k مكان x في الحالات $1 \leq i \leq k$، $i = 0$، أو $i = k + 1$، على التّرتيب (انظر التّوضيح). الآن، $E(G) - \{e_1, e_{k+1}\}$ هي مخطّط إشاعة على $V(G) - \{x\}$؛ لأنّ كلّ مسار متزايد خلال x قد استبدل به مسار متزايد يتكوّن من الأضلاع نفسها، بل ربما من أضلاع إضافيّة من $\{e_i\}$. إنّ هذا المخطّط يملك $2(n - 1)$-5 ضلعًا، وهذا يناقض فرضيّة الاستقراء.



الادّعاء الثاني: لاحظ أنّ $d(x) - 3$ مكالمة تعدّ عديمة الفائدة لـ x. لذا، فإنّ $\delta(G) \geq 3$. لتكن $O(x)$ مجموعةَ المكالمات التي تمّ من خلالها الوصول إلى رأس للمرّة الأولى من خلال مسار متزايد "خارج" من x؛ إنّ هذه المكالمات تشكّل شجرة. والشّجرة $I(x)$ من الأضلاع المفيدة "دخولاً" لـ x هي $O(x)$ للتّرتيب العكسيّ على $E(G)$. سوف نثبت أنّ $O(x) \cap I(x)$ هي مجموعة الأضلاع الواقعة على x. إذا وُجد مسار متزايد من x إلى y بحيث يصل هذا المسار إلى $y \in N(x)$ قبل أنْ يصلها الضّلع xy، فإنّ x تخالف أو تنتهك NOHO. لذا، فإنّ $xy \in O(x)$. وبطريقة مشابهة، فإنّ $xy \in I(x)$. وبالعكس، إذا كان $O(x) \cap I(x)$ يحتوي ضلعًا e ليس واقعًا على x، فإنّ مسارًا متزايدًا من x يحتوي e، ومسارًا متزايدًا لـ x يحتوي e يندمجان لانتهاك NOHO لـ x. إذن، $|O(x) \cap I(x)| = d(x)$. أمّا الأضلاع "عديمة الفائدة لـ x"، فهي الأضلاع التي ليست في $\overline{O(x) \cup I(x)}$، ويكون لدينا:

$$\left|\overline{O(x) \cup I(x)}\right| = 2n - 5 - (n-1) - (n-1) + d(x) = d(x) - 3$$

وبما أنّ هذه تحسب مجموعة من الأضلاع، فإنّ $\delta(G) \geq 3$.

الادّعاء الثّالث: البيان الجزئيّ الذي نحصل عليه بحذف المكالمتين الأولى والأخيرة اللتين أجريتا من قبَل كلّ رأس يملك خمسَ مركّبات على الأقل ولا يملك رأسًا معزولاً. لتكن xy المكالمةَ الأولى التي تشمل x. إذا كانَت المكالمة الأولى التي تشمل y هي yz حيث $z \neq x$ ، فمن التعريف نجد أنّها تحدث قبل xy، وهاتان المكالمتان لا تتواصلان من x إلى z. بعد xy وyz، فإنّ مسارًا متزايدًا من x إلى z ينتهك NOHO عند z. لذلك، فإنّ مجموعة المكالمات الأولى F هي مواءمة، ويوجد $n/2$ منها. وبالمثل، مجموعة المكالمات الأخيرة L هي مواءمة حجمها $n/2$. لذا، البيان $G - F - L$ يملك $n - 5$ ضلعًا. وعليه، يملك خمس مركّبات على الأقلّ. ومن القضيّة 11.2.1. نجد أنّ هذا البيان لا يملك رأسًا معزولاً لأنّ $\delta(G) \geq 3$.

التّناقض: بما أنّ $e(G) = 2n - 5 < 2n$، فإنّ رأسًا ما x تكون درجته 3 على الأكثر. لتكن C_1، C_2، C_3 مركّبات $G - F - L$ التي تحتوي على x و كذلك على جاريها الأول و الأخير على الترتيب (يكون جارها الأوسط في C_1). لاحظ أنّ أضلاع $G - F - L$ يمكن أنْ تنتمي إلى $O(x)$ فقط من خلال مسارات تبدأ بالضّلع الأول أو الأوسط الذي يشمل x ويتجنب $F \cup L$. لذلك، فإنّها تنتمي إلى C_1 أو C_2. وبالمثل، فإنّ أضلاع $G - F - L$ التي تنتمي إلى $I(x)$ تظهر في C_1 أو C_3 فقط. أمّا أضلاع بقية المركّبات التي يوجد منها اثنان على الأقل، فتكون عديمة الفائدة لـ x ($G - F - L$ لا تملك رأسًا معزولاً). ولكن الادعاء الثالث يسمح فقط بـِ $d(x) - 3 = 0$ ضلعًا عديم الفائدة لـ x. ■

في التّطبيقات العملية، قد نرغب في تصغير الطّول الكلّيّ للرسائل أو الزّمن الكلّيّ (بافتراض أنّ كلّ رأس يتشارك بمكالمة على الأكثر لكلّ وحدة زمن). إضافة إلى أننا نستطيع حصر الأزواج المسموح لها بمكالمة بعضها بعضًا. وقد يكتمل نشر الإشاعة في $2n - 4$ إذا وفقط إذا كان بيان المكالمات المسموحة مترابط، ويملك حلقة من الدّرجة (4 (Kleitman – Shearer [1980], Bumby [1981]. تأخذ الاختلافات الأخرى في الحسبان البيانات الموجّهة (التمرينان 15 – 16)، وتحمل الخطأ، ومكالمات مؤتمر، ... إلخ.

التلوين القائميّ وقابليّة الاختيار (list Coloring and Choosability)

يُعَدُّ التّلوين القائميّ نسخة أكثر عمومًا من مسألة التّلوين الرّأسيّ. ما زلنا نختار لونًا واحدًا لكلّ رأس، ولكن مجموعة الألوان المتوافرة عند كلّ رأس قد تكون مقيّدة، وقد قدم هذا النموذج فايزنج [1976] (Vizing) وإيردوز، وروبن، وتايلور [1976] (Erdös – Rubin – Taylor) بصورة مستقلة.

24.4.8. تعريف: لكلّ رأس v في بيان G، لتكن $L(v)$ تدلّ على قائمة ألوان متوافرة عند v. إنّ **التّلوين القائميّ** (list coloring) أو **دالّة الاختيار** (choice function) هو تلوين فعليّ f بحيث يتحقق أنّ $f(v) \in L(v)$ لكلّ v. يكون البيان G **قابلاً للاختيار من الدّرجة k** (k – choosable) أو **قابلاً للتّلوين القائميّ من الدّرجة k** (list k – colorable) إذا كان كلّ تخصيص لقوائم مكونة من k عنصرًا للرّؤوس يسمح بتلوين قائميّ فعليّ. ونعرِّف **العدد اللّونيّ القائميّ** (list chromatic number)، أو **عدد الاختيار** (choice number)، أو **قابليّة الاختيار** (choosability) $\chi_l(G)$ على أنّه (أنّها) أصغر k بحيث يكون G قابلاً للاختيار من الدّرجة k.

بما أنّ القوائم قد تكون متطابقة، فإنّ $\chi_l(G) \geq \chi(G)$. وإذا كان حجم القوائم على الأقل $\Delta(G) + 1$، فإنّ تلوين الرّؤوس بصورة متتابعة يترك لونًا متاحًا عند كلّ رأس. لاحظ أنّ هذا النقاش مشابه لخوارزميّة التّلوين الشّره، ويبرهن أنّ $\chi_l(G) \leq 1 + \Delta(G)$ (انظر التمرين 22 لتشابهات أخرى مع $\chi(G)$). على أيّ حال، فإنّه من غير الممكن وضع حدّ علويّ على $\chi_l(G)$ بدلالة $\chi(G)$؛ حيث توجد بيانات ثنائية الفرع مع عدد لونيّ قائميّ كبير جدًّا.

25.4.8. قضيّة. (Erdös – Rubin – Taylor [1979]) إذا كان $m = \binom{2k-1}{k}$، فإنّ $K_{m,m}$ غير قابل للاختيار من الدّرجة k.

الإثبات: لتكن Y, X التّجزئة الثّنائيّة لـ $G = K_{m,m}$. عيّن المجموعات الجزئيّة المختلفة التي تملك k من العناصر لـ $[2k-1]$ بوصفها قوائم للرّؤوس في X، والشيء نفسه لـ Y أيضًا. خذ في الحسبان دالّة اختيار f. إذا كانت f تستخدم أقل من k اختيارًا مختلفًا في X، فإنّه يوجد مجموعة $S \subseteq [2k-1]$ تملك k من العناصر غير المستخدمة، وهذا يعني عدم وجود لون قد اختير للرّأس في X الذي يملك S بصفتها قائمة له. إذا استعملت f على الأقل k لونًا على رؤوس في X، فإنّ هناك مجموعة $S \subseteq [2k\text{-}1]$ تحوي k عنصرًا من الألوان استعملت في X، ولا يوجد لون يمكن اختياره فعليًّا لرأس Y الذي قائمته S. ■

يعدُّ حساب العدد اللّونيّ القائميّ أكثر صعوبة من حساب العدد اللّونيّ؛ لأنّ العبارتين الحدّ العلويّ، والحدّ السّفلي تشملان محدّدات قياسية شاملة. كان تحديد البيانات ثنائيّة الفرع التّامة القابلة للاختيار من الدّرجة 3 صعبًا، فمثلاً لـ $3 \le m \le n$، فإنّ $K_{m,n}$ يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة **3** إذا وفقط إذا كان

$m = 3$ و $n \le 26$ (Erdös – Rubin – Taylor [1979])، أو

$m = 4$ و $n \le 20$ (Mahadev – Roberts – Santhanakrishnan [1991])، أو

$m = 5$ و $n \le 12$ (Shende - Tesman [1994])، أو

$m = 6$ و $n \le 10$ (O′ Donnel [1995]).

استخدم كلّ من ألون [Alon] وتارسي [1992م] (Tarsi) كثيرة حدود مرافقة لبيان لكي يحصلا على حدود علوية على $\chi_l(G)$ (انظر أيضًا Alon [1993]). أمّا فليشنر (Fleischner) وستيبتز (Stiebitz)، فقد استخدما هذه الطّريقة لإثبات أنّ إضافة n من المثلثات المنفصلة إلى حلقة من الدّرجة $3n$ يعطي بيانًا قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3؛ وقد برهنا النّتيجة الأقوى، وهي أنّ هذا البيان قابل للاختيار من الدّرجة 3.

وهناك نوع آخر من التّلوين الضلعيّ أيضًا، حيث نعيّن فيه قوائم الأضلاع. ويجب اختيار تلوين ضلعيّ فعليّ.

26.4.8. تعريف: لترمز $L(e)$ إلى قائمة الألوان المتوافرة للضّلع e. إنّ **التّلوين الضّلعيّ القائميّ** (list – edge – coloring) هو تلوين ضلعيّ فعليّ f، حيث يتم اختيار $f(e)$ من $L(e)$ لكلّ e. **وقابلية الاختيار الضّلعيّ** (edge – choosability) $\chi_l'(G)$ هي أصغر k بحيث إنّ كلّ تعيين لقوائم من الحجم k يعطي تلوينًا ضلعيًّا قائميًّا فعليًّا. وبصورة مكافئة $\chi_l'(G) = \chi_l(L(G))$، حيث $L(G)$ هو البيان الخطّيّ لـ G.

تعليل العبارة لـ $\chi'(G) \le 2\Delta(G) - 1$ يعطي أيضًا أنّ $\chi_l'(G) \le 2\Delta(G) - 1$ (التمرين 22). وعليه، $\chi_l'(G) < 2\chi'(G)$. كما في التّلوين العاديّ، فإنّ استخدام البيانات الخطّيّة يعبّر عن نسخة الضّلع بوصفها حالة خاصة من نسخة الرّأس، ويسلك بصورة أفضل كذلك. وعلى الرّغم من هذا، فإنّ حدّ التّخمين لقابليّة الاختيار الضّلعيّ يكون مفاجئًا. لقد اقترح هذا بصورة مستقلة من قِبَل العديد من الباحثين بمن فيهم: فايزنج، جوبتا، البرتسون، كولنز، وتوكر، وويبدو. ولكنّه نشر أولاً في بلوباز – هاريس [1985] (Bollobas – Harris) (انظر أيضًا [1986] (Bollobas)).

27.4.8. مخمنة: (مخمّنة التّلوين القائميّ) $\chi_l'(G) = \chi'(G)$ لكلّ G. ■

للبيانات البسيطة، تؤدّي هذه المخمّنة ونظرية فايزنج (النظرية 10.1.7) إلى أنّ $\chi_l'(G) \le \Delta(G) + 1$. وقد أثبت كلّ من بلوباز وهاريس [1985] أنّ $\chi_l'(G) < c\,\Delta(G)$ عندما $c > 11/6$ عندما تكون $\Delta(G)$ كبيرة

بما فيه الكفاية. إنّ هذا وتحسينات لاحقة أيضًا استخدمت طرقا احتماليّة. وقد أثبت كاهن (Kahn) [1996م] المخمّنة بصورة متقاربة؛ حيث أثبت أنّ $\chi_1'(G) \le (1+o(1))\Delta(G)$. في حين هذّب كلّ من هاجكفست (Haggkvist) وجانسن (Janssen) [1997] حدّ الخطأ ليصبح: $\chi_1'(G) \le d + o\left(d^{2/3}\sqrt{\log d}\right)$ عندما $d = \Delta(G)$. أمّا مولوي (Molloy) وريد (Reed) [2001] فقد هذّبا الحدّ بصورة أدق (وعمّماه).

طُرحت الحالة الخاصّة لمخمّنة التّلوين القائميّ لـ $G = K_{n,n}$ من قبَل دينتز (Dinitz) في العام 1979. (برهنها جانسن [1993م] لـ $K_{n,n-1}$). وأصبحت مخمّنة دينتز شائعة عندما صيغت على صورة مصفوفة: إذا كان كلّ موقع لشبكة n في n يحتوي على مجموعة حجمها n، فإنّه من الممكن اختيار عنصر واحد من كلّ مجموعة بحيث تكون العناصرُ المختارة في كلّ صفّ وعمود مختلفةً.

لقد أثبت جالفن [1995م] (Galvin) مخمّنة التّلوين القائميّ للبيانات الثنائيّة الفرع التي تتضمّن مخمّنة دينتز (انظر أيضًا ([1996] Slivnik). وسنبرهن هنا مخمّنة دينتز فقط باستخدام مسألة المواءمة المستقرّة (الجزء 2.3).

8.4.28. تعريف: نعرّف النّواة (Kernel) لبيان موجّه على أنّها مجموعة مستقلة S تملك تابعًا لكلّ رأس خارج S. يكون البيان الموجّه كامل النّواة (Kernel – perfect) إذا كان كلّ بيان جزئيّ موجّه محدث يملك نواة. إذا أعطينا دالّة $f: V(G) \to \mathbb{N}$، فإنّ البيان G يكون قابلًا للاختيار من خلال الدالّة f (f-choosable) إذا أمكن اختيار التّلوين الفعليّ من القوائم التي عند الرّؤوس عندما يكون $|L(x)| = f(x)$ لكلّ x.

استخدمنا مفهوم "النّواة" في التطبيق 14.4.1 (البيانات الموجّهة التي ليس لها حلقات فرديّة. كأنْ تملك أنوية مثلًا). إنّ أيّ بيان قابل للاختيار من خلال الدالّة f يكون قابلاً للاختيار من الدّرجة k حيث $k = \max f(x)$؛ لأنّ إضافة ألوان إلى قائمة لا يجعل الاختيار أكثر صعوبة.

8.4.29. تمهيدية: (Bondy – Boppana – Siegel) إذا كان D توجيهًا كامل النّواة لـ G و $f(x) = 1 + d_D^+(x)$ لكلّ $x \in V(G)$، فإنّ G يكون قابلًا للاختيار من خلال f.

الإثبات: سنستخدم الاستقراء على $n(G)$؛ تكون العبارة واضحة لـ $n(G) = 1$. لـ $n(G) > 1$، خذ في الحسبان تعيينًا لقوائم بحيث يكون حجم القائمة $L(x)$ هو $f(x)$. اختر لونًا c يظهر في قائمة ما. اجعل $U = \{v: c \in L(v)\}$. ولتكن S هي النّواة للبيان الجزئيّ الموجّه المحدث $D[U]$. عيّن لون c لكلّ S، وهذا مسموح؛ لأنّ S مستقلة.

احذف c من $L(v)$ لكلّ $v \in U - S$. احذف ألوانًا إضافية بصورة عشوائية من قوائم أخرى لتخفيض $L(x)$ لكلّ $x \in V(D) - S$ لكي يصبح حجمها $f'(x)$. حيث $f'(x) = 1 + d_{D-S}^+(x)$. بما أنّ كلّ رأس ليس في S يملك تابعًا في S، فإنّ $f'(x) < f(x)$ لكلّ $x \in V(D) - S$ الذي يدعم حذف c من القوائم. من فرضية الاستقراء، فإنّ D' يكون قابلًا للاختيار من خلال $f'(x)$. لذا، نستطيع إكمال تلوين قائمي لـ G بإضافة تلوين قائمي إلى D' من خلال استخدام c على S. ■

8.4.30. نظرية: (Galvin [1955]) $\chi_1'(K_{n,n}) = n$.

الإثبات: بما أنّ $\chi_1'(G) = \chi_l(L(G))$، فيكفي من التمهيديّة 8.4.29 برهنة أنّ $L(K_{n,n})$ يملك توجيهًا كامل النّواة مع كلّ رأس يملك درجتي دخول و خروج $n - 1$. لاحظ أنّ البيان $L(K_{n,n})$ هو الجداء الكارتيزيّ $K_n \square K_n$ (التمرين 8.1.7)؛ موضوعًا في شبكة n في n، بحيث تكون الرّؤوس متجاورة إذا وفقط إذا كانت في الصّفّ نفسه أو في العمود نفسه.

عين أوسمة n , ... ,1,2 بحيث يكون الرّأس (r, s) يملك وسم $r + s - 1 \ mod\ n$. وعرّف توجيهًا D لِـ $K_n \square K_n$ بتوجيه الأضلاع من الرّأس (r, s) الذي له الوسم i إلى الرّؤوس في العمود s مع أوسمة أدنى، والرّؤوس في الصّفّ r مع أوسمة أعلى. بما أنّ i أعلى من $i - 1$ من الأوسمة الأخرى، فإنّ الرّأس (r, s) يملك $i - 1$ تابعًا في عموده، و$n - i$ تابعًا في صفّه. لذلك، $d^+(r, s) = d^-(r, s) = n - 1$.

سنبرهن أنّ D كامل النّواة. إذا أعطينا $U \subseteq V(D)$، فسنحصل على نواة للبيان الموجّه الجزئيّ $D[U]$ بحلّ مسألة المواءمة المستقرّة. عندما $(r, b) \in U$ و$(r, s) \to (r, b)$ في D، فإنّنا نريد من r تفضيل b على s. لذا، لصفّ r، فإنّ الأولويّات بين الأعمدة تبدأ مع $\{s: (r, s) \in U\}$ بترتيب متناقص لوسم الرّؤوس، باتّباع أيّ ترتيب بين $\{s: (r, s) \notin U\}$. وبصورة مشابهة، لعمود s، فإنّ الأولويّات بين الصّفوف تبدأ مع $\{r: (r, s) \in U\}$ بترتيب متزايد لأوسمة الرّؤوس، باتّباع أيّ ترتيب بين $\{r: (r, s) \notin U\}$.

خوارزميّة المقترحات لجيل وشابلي (الخوارزميّة 17.2.3) تعطي مواءمة مستقرّة M لهذه الأولويّات. وبالنظر إلى الأزواج المتوائمة في M بوصفها مواقع في الشّبكة، إجعل $S = M \cap U$. بسبب أنّ M مواءمة، فإنّ S لا تملك موقعين في الصّفّ أو العمود نفسه. لذلك، فإنّ S مجموعةٌ مستقلّة في D. وسنثبت أنّ كلّ $x \in U - S$ تملك تابعًا في S.

ليكن i وسمَ الموقع $x = (r, s) \in U - S$. بما أنّ $S = M \cap U$، فإن $x \notin M$. لذا، فإنّ M تملك موقع $y = (r, b)$ مع وسم ما j وموقع $z = (a, s)$ مع وسم ما k. ولأنّ M مستقرّة، فلا يمكن أنْ تكون r تفضل s على b ولا s تفضل r علىً a في الوقت نفسه. إذن، نستنتج من هذه العبارة -من خلال الخطوات في الأسفل- أنّ x تملك y أو z كتابع في S. ■

	b	s
a		$z : k$
r	$y : j$	$x : i$

ليس [(r تفضل s على b) و (s تفضل r على a)]

ليس [($i > j$ أو $y \notin U$) و ($i < k$ أو $z \notin U$)]

($i < j$ و $y \in U$) أو ($i > k$ و $z \in U$)

($x \to y \in S$) أو ($x \to z \in S$)

31.4.8. ملاحظة. ترتبط مخمّنة التّلوين القائميّ بمخمّنة أخرى. إنّ **التّلوين الكلّيّ** (total coloring) لـ G هو تعيين لون لكلّ رأس ولكلّ ضلع، بحيث تملك الأشياء الملونة ألوانًا مختلفة عندما تكون متجاورة أو واقعًا بعضها على بعض. وتنصّ مخمّنة التّلوين الكلّيّ (Behzad [1965]) على أنّ كلّ بيان بسيط G يملك تلوينًا كلّيًّا $\Delta(G) + 2$ لونًا على الأكثر. لقد أعطى كلّ من روزنفيلد [1971] (Rosenfeld) وبهزاد (Behzad) نتائج حول صفوف خاصّة. ومخمّنة التّلوين القائمي تعطي حدًّا علويًّا يساوي $\Delta(G) + 3$؛ لأنّ كلّ بيان G يملك تلوينًا كلّيًّا مستحدثًا $\chi'_l(G) + 2$ لونًا على الأكثر (تمرين 25). ■

دُرِسَت مخمّنة التّلوين القائميّ للبيانات السّويّة. حيث أثبت كلّ من النجهام وجودين [1996م] أنّ كلّ بيان سويّ قابل للتّلوين الضّلعيّ من الدّرجة k ومنتظم من الدّرجة k، يكون قابلاً للاختيار الضّلعيّ من الدّرجة k (باستخدام نظرية الألوان الأربعة).

تعيدنا مناقشة البيانات السّويّة إلى التّلوين القائميّ للرّؤوس، وعلى الرّغم من أنّ البيانات السّويّة تملك عددًا لونيًّا يساوي 4 على الأكثر، فقد خمّن كلّ من فايزنج [1976م] وإيردوز، وروبن وتايلور [1979م] أنّ أكبر عدد اختيار على هذا الصّفّ هو 5. وقد قام فويجت [1993] (Voigt) ببناء بيان سويّ غير قابل للاختيار من الدّرجة 4 على 238 رأسًا، في حين قلّل مرزخاني [1996] (Mirzakani) (التمرين 26) هذا العدد إلى 63

رأسًا (يعمّم المثالان إلى عائلات غير منتهية). في الحقيقة، هناك بيانات سويّة قابلة للتلوين من الدّرجة 3، وغير قابلة للاختيار من الدّرجة 4 (Gutner، [1996] Viogt - Wirth [1997]).

أثبت ثوماسين [1994bم] الحدّ العلويّ (وأثبت أيضًا [1995] أنّ البياناتِ السّويّة التي خصرها 5 قابلةٌ للاختيار من الدّرجة 3). غالبًا، تقوم الرّؤوس على الوجه غير المحدود ("الرّؤوس الخارجيّة") بدور خاص في براهين الاستقراء للبيانات السّويّة.

32.4.8. نظرية: (Thomassen [1994b]) تكون البيانات السّويّة قابلة للاختيار من الدّرجة 5.

الإثبات: إنّ إضافة أضلاع لا يمكن أنْ يخفض العدد اللّونيّ القائميّ. لذا، قد نحصر اهتمامنا بالبيانات السّويّة التي يكون فيها الوجهُ الخارجي حلقةً، ويكون كلّ وجه محدود مثلثًا. من الاستقراء على $n(G)$، سنثبت النتيجة الأقوى التي تنصّ على أنّ تلوينًا ما يمكن اختياره حتى لو كان لرأسين خارجين متجاورين قوائم مختلفة حجمها 1، في حين يكون للرّؤوس الخارجيّة الأخرى قوائم حجمها 3. وللخطوة الأساس $(n = 3)$، يبقى لون ما متوافرًا للرّأس الثّالث.

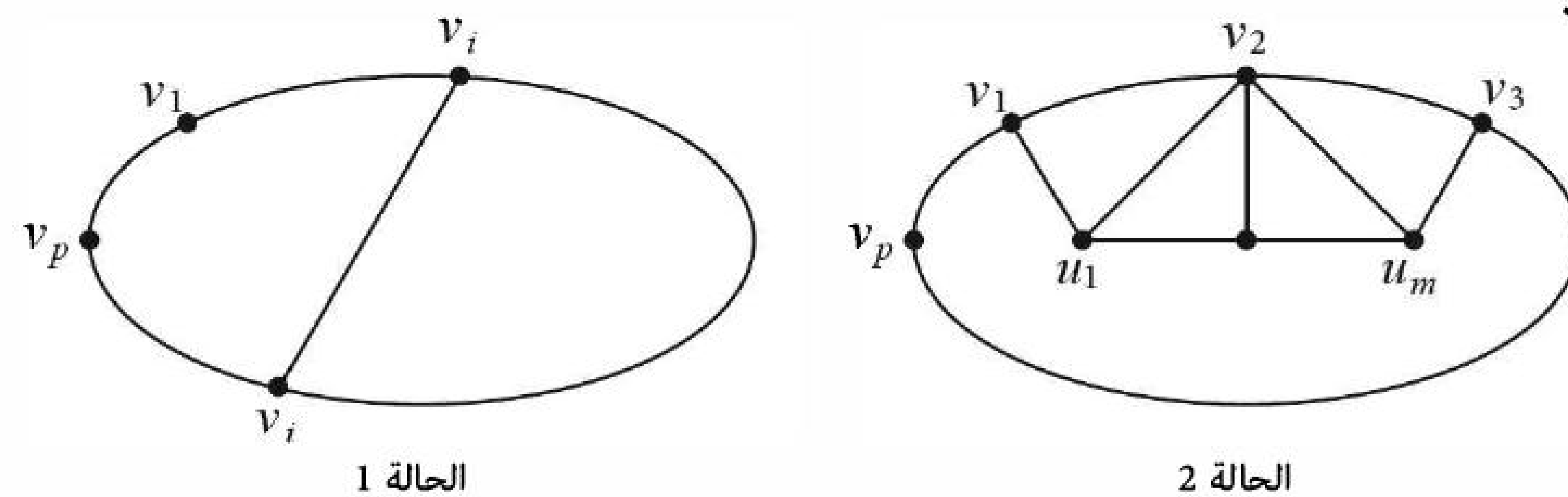
الآن، افترض أنّ $n > 3$. ليكن v_p و v_1 الرّأسين اللذين لهما ألوان ثابتة على الحلقة الخارجية C. ولتكن $v_1, \ldots, v_p$ هي $V(C)$ بترتيب مع اتجاه عقارب السّاعة.

الحالة 1: تملك C وترًا $v_i v_j$ حيث $1 \le i \le j - 2 \le p - 2$. سنطبّق فرضيّة الاستقراء للبيان المكوّن من الحلقة $v_1, \ldots, v_i, v_j, \ldots, v_p$ مع داخلها. إنّ هذا يختار تلوينًا فعليًّا فيه v_i، v_j تستلمان ألوانا مثبّتة ما. وسنطبّق بعد ذلك فرضيّة الاستقراء للبيان المكوّن من الحلقة $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ مع داخلها لإكمال التّلوين القائميّ لـِ G.

الحالة 2: لا تملك C وترًا. لتكن الرّؤوس $v_1, u_1, \ldots, u_m, v_3$ جيرانَ v_2 على التّرتيب (من الممكن $p = 3$). ولأنّ الوجوه المحدودة مثلثات، فإنّ G يحتوي المسار P الذي رؤوسه

$v_1, u_1, \ldots, u_m, v_3$. بما أنّ C خالية من الأوتار، وأنّ $u_1, \ldots, u_m$ رؤوس داخلية، وأنّ الوجه الخارجيّ لـِ $G' = G - v_2$ محدود بحلقة C' يكون فيها P بدلاً v_1, v_2, v_3.

ليكن c اللّونَ المعيَّن لـِ v_1. بما أنّ $|L(v_2)| \ge 3$، فمن الممكن اختيار ألوان مختلفة $x, y \in L(v_2) - \{c\}$. سوف نحتفظ بـ x, y للاستعمال المحتمل على v_2 بمنع x, y من $u_1, \ldots, u_m$. بما أنّ $|L(u_i)| \ge 5$، فإنّه يصبح لدينا $|L(u_i) - \{x, y\}| \ge 3$. لذلك، نستطيع تطبيق فرضيّة الاستقراء على G'، حيث $u_1, \ldots, u_m$ تملك قوائم حجمها 3 على الأقل، أمّا الرّؤوس الأخرى فتملك القوائم نفسها كما في G. في التّلوين النّاتج، لاحظ أنّ v_1 و $u_1, \ldots, u_m$ تملك ألوانًا خارج $\{x, y\}$. نوسّع هذا التّلوين لـ G باختيار لون في $\{x, y\}$ لـِ v_2 بحيث لا يظهر على v_3 في التّلوين لـ G'. ■



تجزئات باستخدام المسارات والحلقات (Partitions Using Paths and Cycles)

أخذنا في الحسبان مسألة التّفكيك بواسطة F ($\mathbf{F}$ – decomposition): وهذا يعني تجزئة $E(G)$ إلى أصغر عدد من البيانات الجزئيّة في عائلة $\boldsymbol{F}$. وتمّ دراسة هذا للعديد من العائلات $\mathbf{F}$، مثل العصب (النظرية 3.4.8)، والبيانات الثنائيّة الفرع (التمرين 3)، والبيانات الثنائيّة الفرع التّامّة (النظرية 20.6.8)، والنّجوم (عدد الغطاء الرّأسيّ – الجزء 1.3). والغابات (التّشجير – النتيجة 57.2.8). وقبل الأخذ في الحسبان مسائل التّطرّف لتفكيك البيانات إلى مسارات وحلقات، فسنناقش مسألة أسهل، وهي تغطية الرّؤوس لبيان موجه باستخدام أقل عدد من المسارات.

إنّ بيانات المقارنة هي البيانات التي تملك توجيهات متعديّة؛ ويكون البيان الموجّه متعديًا (transitive) إذا كان $x \to y$ و $y \to z$ يؤدي إلى أنّ $x \to z$. لاحظ أنّ الرّؤوس لمسار في بيان موجّه متعد تحدث دوريًّا. إنّ بيانات المقارنة تكون كاملة (القضية 25.3.5)، وهذا يعني أنّ بيانًا موجّهًا متعدّيًا D يمتلك فيه الدوري الأكبر ω رأسًا يكون قابلاً للتّلوين الفعليّ بـ ω من الألوان. ومن نظرية البيان الكامل (النظرية 6.1.8) نعلم أيضًا أنّ $V(D)$ يمكن أنْ تغطّى باستعمال $\alpha(D)$ دوريًّا في D، حيث $\alpha(D)$ هو الحجم الأكبر لمجموعة مستقلّة.

بجعل المسارات "سلاسل" ووضع مجموعات مستقلة لتكون "سلاسل منفصلة" فإنّ هذا يصبح نظرية ديلوورث للبيانات الموجّهة التي تخلو من العرى المتعدّية: وهي الحجم الأكبر لسلسلة منفصلة يساوي العدد الأصغر للسّلاسل التي نحتاج إليها لتجزئة $V(D)$.

بالإضافة إلى الذي يتبع من نظرية البيان الكامل، فإنّ نظرية ديلوورث تكافئ نظرية كونج وإيجرفاري (التمرين 27)، فضلًا عن أنّ تعميمًا لها يتبع من نظرية التّقاطع الماترويديّ (التمرين 50.2.8). وسنقدّم هنا تعميمًا آخر يملك إثباتًا أقصر محتوًى في داخله.

33.4.8. نظرية : (Gallai – Milgram [1960]) يمكن تغطية الرّؤوس في بيان موجّه D باستعمال $\alpha(D)$ مسارًا منفصلاً زوجًا زوجًا على الأكثر.

الإثبات: بما أنّه يمكن تغطية $V(D)$ باستخدام n مسارًا منفصلاً بطول $\mathbf{0}$؛ فيكفي أنْ نبرهن ادعاء أقوى وهو: إذا كانت $\mathbf{C}$ مجموعةَ المسارات المنفصلة زوجًا زوجًا، والتي تغطّي $V(D)$، وS هي مجموعة المصادر (الرّؤوس الابتدائيّة) لهذه المسارات، فيمكن تغطية $V(D)$ باستخدام $\alpha(D)$ مسارًا منفصلاً زوجًا زوجًا على الأكثر مع مصادر في S. يكون الإثبات بالاستقراء على $n(D)$، مع خطوة الأساس الواضحة لـ $n(D) = 1$. والعبارة المضافة حول المصادر تساعد على جعل خطوة الاستقراء تعمل.

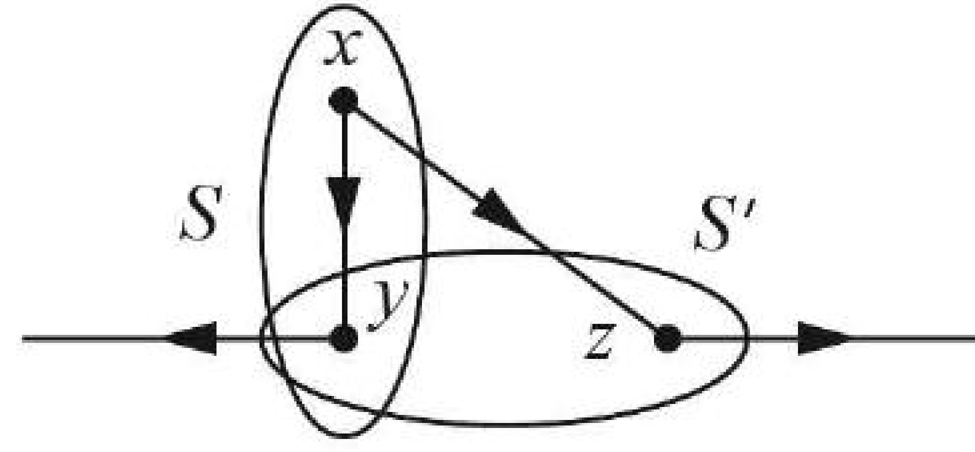
افترض أنّ $n > 1$، وأنّ $\mathbf{C}$ غطاءٌ لـ $V(D)$ بواسطة k مسارًا مع مجموعة مصدر S. يتحقق الادّعاء إلا إذا كان $|\mathbf{C}| = k > \alpha(D)$، في هذه الحالة، ننشئ غطاءً باستخدام عدد مسارات أقل، ومصادرها جميعها في S. بما أنّ $k > \alpha$، فإنه يوجد ضلع xy حيث $x, y \in S$. ليكن A وB المسارين في $\mathbf{C}$ اللذين يبدآن مع x و y على التّرتيب. نستطيع افتراض أنّ A يملك ضلعًا xz. وبخلاف ذلك، نستطيع أنْ نضيف x إلى بداية B وبذلك نوفّر مسارًا واحدًا.

بحذف x من البداية لـ A، نحصل على غطاء $\mathbf{C}'$ لـ $V(D - x)$ من خلال k من المسارات التي تملك مصادر في $S' = S - x + z$. بما أنّ $\alpha(D - x) \le \alpha(D)$، فإنّ فرضيّة الاستقراء تعطي غطاءً $\mathbf{C}''$ لـ $V(D - x)$ يستخدم مسارات أقلّ من k، وتكون مصادرها جميعها في S'. تنتمي عناصر S' كلّها إلى S باستثناء z.

إذا كان z مصدرَ مسار في $\mathbf{C}''$، فنضيف x عند بداية هذا المسار. أمّا إذا كان z ليس مصدرًا بل y، فنضيف x عند بداية المسار الذي يبدأ بـ y. ولكن إذا كان y و z غير مصدرين، فنكون قد استخدمنا $|S'| - 2 = k - 2$ مسارًا على الأكثر، ونستطيع إضافة x بوصفها مسارًا قائمًا بذاته للحصول على الغطاء

المنشود لـ $V(D)$ باستخدام $k-1$ مسارًا. وفي الحالات جميعها، فإنّ المسارات الناتجة تكون منفصلة زوجًا زوجًا وتملك مصادر في S.

بإعادة هذه المناقشة، طالما $k>\alpha$، فإنّنا نستطيع تقليل عدد المسارات لـ α. ■



وبالعودة إلى مسألة التّفكيك، فإنّ مخمّنة جالاي تنصّ على أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يمكن تفكيكه باستخدام $\lceil n/2 \rceil$ مسارًا. وتتحقق المساواة للعصب (التمرين 28). هناك بيانات أخرى تملك أضلاعًا أقلّ، إلا أنّ عدم وجود التّرابط ربما يتطلّب مسارات أكثر. وبصورة مماثلة، تنصّ مخمّنة هاجوس على أنّه يمكن تفكيك كلّ بيان زوجيّ على n من الرّؤوس إلى $\lfloor n/2 \rfloor$ حلقة. وما زالت المخمنتان دون حلّ، إلاّ أنّ لوفاز أثبت الحدّ الأمثل عندما يسمح بوجود كلّ من المسارات والحلقات. ونعرّف الحجم (size) لتفكيك ما على أنّه عدد البيانات الجزئيّة المستعملة في هذا التّفكيك.

34.4.8. نظرية: (Lovász [1968b]) كلّ بيان على n من الرّؤوس يمكن تفكيكه إلى $\lfloor n/2 \rfloor$ مسارًا وحلقة.

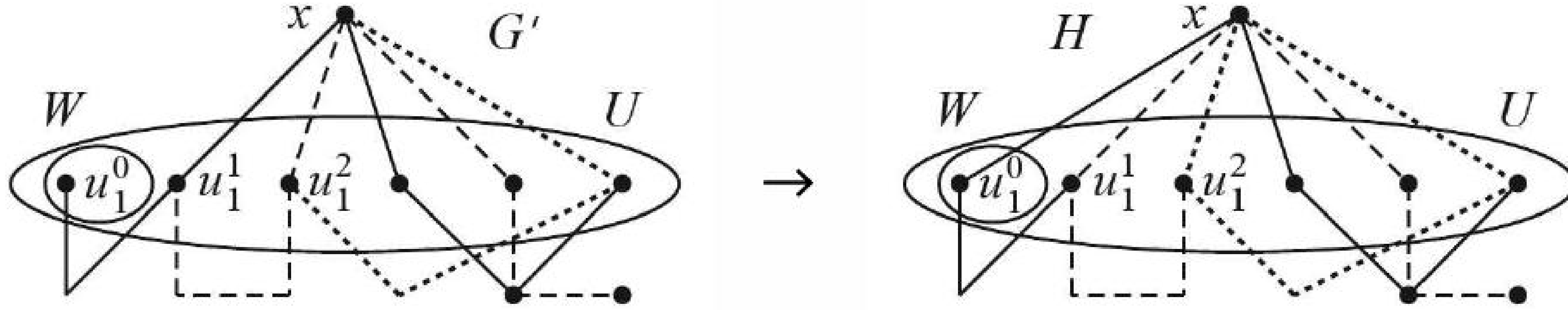
الإثبات: افترض أنّ F عائلة المسارات والحلقات جميعها، و $n'(G)$ عدد الرؤوس غير المعزولة في بيان G. بالاستقراء على $n'(G)$، سنبرهن أنّ G يملك تفكيكًا بواسطة F حجمه $\lfloor n'(G)/2 \rfloor$ على الأكثر. لاحظ أنّ كلّ مركبة لـ G تملك أكثر من ضلع واحد تسهم بصورة إيجابية في $\lambda(G)$. لذا، فإنّ $\lambda(G) = 2e(G) - n'(G)$، $\lambda(G)\geq 0$، حيث تتحقق المساواة فقط عندما تكون كلّ مركبة غير تافهة ضلعًا. ويتحقق الادعاء مع المساواة في حالة $\lambda(G) = 0$.

في خطوة الاستقراء، $\lambda(G) > 0$ سنأخذ في الحسبان حالتين؛ **الحالة** 1: إذا كان G يملك رأسًا y ذا درجة زوجيّة موجبة، اختر $x \in N(y)$، ويكون $W = \{z \in N(x)$: $d(z)$ زوجيًّا$\}$. في هذه الحالة، ضع $G' = G - \{xz: z \in W\}$. وللحصول على G'، نخسر ضلعًا واحدًا (xy) على الأقلّ، ونعزل رأسًا واحدًا (x) على الأكثر. لذلك، فإنّ $\lambda(G)' < \lambda(G)$. الحالة 2: إذا كان G لا يملك رأسًا درجته زوجيّة موجبة، فإنّ $\lambda(G) > 0$ تجبر أنْ يتحقّق $\Delta(G) > 1$. افترض أنّ $\mathbf{x}$ رأس درجته 3 على الأقلّ، وشكّل $\mathbf{G}^+$ بتقديم رأس جديد y لتقسّم الضّلع xx' جزئيًّا. وافترض أيضًا أنّ $W = \{y\}$، و $G' = \mathbf{G}^+ - xy$. الآن $e(G') = e(G)$، ولكن $n'(G') > n'(G)$. لذلك فإنّ $\lambda(G') < \lambda(G)$.

وفي كلّ حالة، فإنّ فرضية الاستقراء تعطي تفكيكًا D بواسطة F لـ G' مع $|\mathbf{D}| \leq \lfloor n'(G')/2 \rfloor$. نحوّل D إلى تفكيك بواسطة F حجمه $|\mathbf{D}|$ للبيان H الذي حصلنا عليه من G' بإضافة أضلاع من x إلى W. في الحالة 1، نجد أنّ $H = G$ و $n'(G') \leq n'(G)$، و هذا هو التّفكيك المرغوب. أمّا في الحالة 2، فإن $H = G^+$ و $n'(G') = n'(\mathbf{G}^+)$. وبما أنّ $n'(G)$ زوجيّ، فإنّ $\lfloor n'(G^+)/2 \rfloor = \lfloor n'(G)/2 \rfloor$. في تفكيك بواسطة F إلى G^+، فإنّ $n'(G)$ رأسًا ذات الدّرجات الفرديّة يجب أنْ تكون جميعها نقاطًا طرفيّة لمسارات. إذن، فالرّأس المضاف y الذي درجته 2 لا يمكن أنْ يكون نهاية لمسار، وهذا يعني أنّ xy و xy' ينتميان إلى البيان الجزئيّ نفسه، ويمكن استبدالهما بـ xx' لنحصل على التّفكيك المطلوب لـ G.

والآن، تندمج الحالتان. ونحتاج فقط إلى الحصول على التّفكيك لـ H من D. ضع $U = N_H(x)$. يملك

كلّ رأس في U درجة فرديّة في G'. لذلك، يوجد مسار $P(u)$ في D مع نقطة نهاية u لكلّ $u \in U$. ولـ $u \in W$، نرغب في توسيع $P(u)$ لامتصاص ux. ولكن لايتمّ هذا إذا كان $P(u)$ يصل ولا ينتهي عند x. وعندها، فإنّ البيان الجزئيّ $ux \cup P(x)$ ليس في F. إنّ الفكرة هي في قطع الضّلع $u'x$ الذي عليه $P(u)$ تصل x، ونستخدم المسار $P(x) \cup ux - u'x$، ونستخدم $u'x$ لتوسيع $P(u')$ بدلاً منه. وهذا يولّد متتالية تغييرات من كلّ $u \in W$. وعلينا بيان أنّ هذه المتتاليات تنتهي ولا تتعارض معًا.

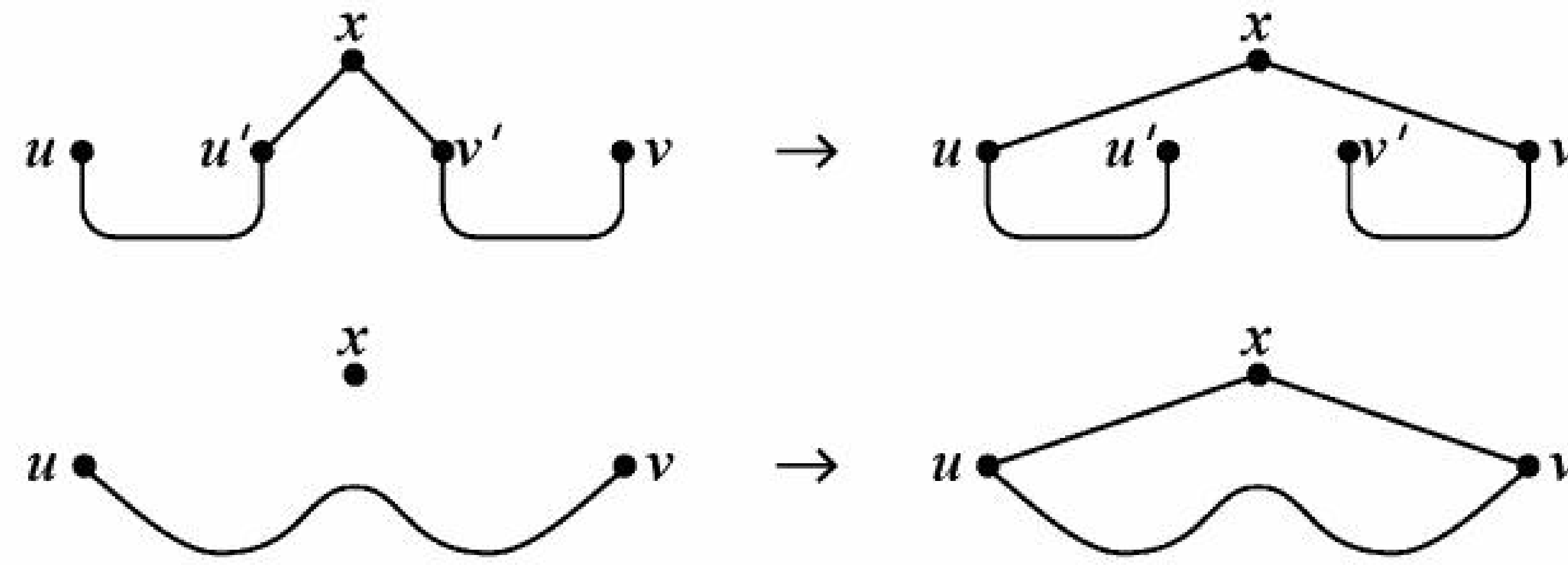


ضع $W = w_1, \ldots, w_t$. لكلّ $w_i \in W$، نشكّل قائمة $u_i^0, u_i^2, \ldots$ حيث $u_i^0 = w_i$ وكلّ $u_i^j \in U$. إذا اخترنا رأسًا u_i^j في القائمة i، فإنّنا نفحص ما إذا كان x رأسًا داخليًّا لـ $P\left(u_i^j\right)$، فإنْ كان غير كذلك، فسنتوقف ولا نعرف u_i^{j+1}. ولكن إذا كان كذلك، فنضع u_i^{j+1} ليكون الرّأس علَى $P\left(u_i^j\right)$ قبل x مباشرة؛ وهذا هو الـ "u'" المقترح في الأعلى. المسار $P\left(u_i^j\right)$ لكلّ $j \geq 1$ لا يمكن أنْ يبدأ خلال الضّلع $u_1^j \cdot x$؛ لأنّ هذا الضّلعَ ضلعٌ داخليّ لـ $P\left(u_i^{j-1}\right)$. (الصورة لـ G' تبيّن ثلاثة مسارات متتالية، هي: $P\left(u_1^0\right)$ الخطّ الرّفيع المتّصل و $P\left(u_1^1\right)$ الخطّ المتقطّع، و $P\left(u_1^2\right)$ الخطّ المنقّط).

سنبرهن الآن عدم وجود رأس لـ U يظهر مرّتين في القوائم. بما أنّ $xu_i^j \in E\left(G'\right)$ عندما تكون $j \geq 1$، فإنّ الرّؤوس لـ W تظهر بوصفها رؤوس بداية فقط. افترض u_i^j, u_k^l رأسًا متكرّرًا بحيث يكون $\{j, l\}$ min أصغريًّا؛ لقد بينّا أنّ $j, l > 0$. من خلال الأصغريّة، فإنّ $u_i^{j-1} \neq u_k^{l-1}$، وهكذا فإنّ المسارين $P\left(u_i^{j-1}\right)$ و $P\left(u_k^{l-1}\right)$ يبدآن عند رأسين مختلفين. إذا كان $u_i^j = u_k^l$، فالمساران يتشاركان بالضّلع $u_i^j \cdot x$، ويجب أنْ يكونا المسار نفسه. ويحدث هذا من رؤوس مختلفة فقط إذا كان u_i^{j-1} و u_k^{l-1} نهايتين متخالفتين للمسار، ولكنهما لا تستطيعان المرور بـ u_i^j قبل x. ولهذا السّبب لا يحدث تكرار.

افترض $W' = \left\{u_i^j\right\}$ إذا كان $u = u_i^j$ و u ليست النهاية لقائمتها، ضع $u' = u_i^{j+1}$. نعرّف تفكيكًا بوساطة $\boldsymbol{F}$ لـ H مكونًا من مسار واحد أو حلقة Q' مقابلة لكلّ $Q \in \mathbf{D}$. إذا كان $Q \neq P(u)$ لبعض $u \in W'$، ضع $Q' = Q$. إذا كان $Q = P(u)$، ضع $Q' = Q + ux$ أو $Q' = Q + ux - u'x$ بالاعتماد على ما إذا كان u هو الرّأس الأخير في قائمته أم لا. وتعدّ Q' مسارًا دائمًا، باستثناء أنّها تعدّ حلقة عندما تنتهي Q عند x (عندما يكون u' غير معرّف). إنّ الاتحاد للمسارات الجديدة المقابلة لـ $\left\{P\left(u_i^j\right)\right\}$ هو نفسه كـ $\cup P\left(u_i^j\right)$، باستثناء أنّ الأضلاع $\{xw_i\}$ قد امتصت، وبما أنّ $u \in W'$ تظهر مرة واحدة فقط في القوائم، فإنّ الضّلع ux ينتهي في أحد المسارات الجديدة فقط. و $\{Q' : Q \in \mathbf{D}\}$ هو تفكيك لـ H. ■

لاحظ في هذا الإثبات أنّ Q يمكن أنْ يكون المسارَ المختار من نقاطه الطّرفيّة $u, v \in W'$. ولا يعدّ هذا مشكلة؛ بسبب عدم تعارض التّعديلات التي أجريت على Q من النهايتين. بالإضافة إلى أنه قد يمرّ المسار في x أو لا يمرّ (لذا يعرف u' و v') كما هو مرسوم في الشكل الآتي.



المحيط (Circuference)

عندما يفشل شرط كفاية للحلقات الهاملتونيّة قليلا، يمكن عندها توقّع أنّ البيان ما زال يملك حلقة طويلة. نعرِّف **المحيط** $c(G)$ للبيان G على أنّه طول أطول حلقة في G. في البداية سنأخذ في الحسبان عدد الأضلاع التي نحتاج إليها لنجبر حلقة أنْ يكون طولها c على الأقلّ في بيان على n من الرّؤوس. في هذا الجزء، لترمز $P(v,w)$ إلى الجزء من v إلى w في مسار P الذي يحتوي v و w. في حين ترمز P,Q إلى السّلسلة المكوّنة للمسارين P و Q عندما يكون الرّأس الأخير لـ P هو الرّأس الأوّل لـ Q.

35.4.8. نظرية: (Erdös – Gallai [1959]) لكلّ $m \geq 2$، كلّ بيان بسيط على n من الرّؤوس، وله أكثر من $m(n-1)/2$ ضلعًا يملك حلقة طولها أكبر من m.

الإثبات: (Woodall [1972]) سنستخدم الاستقراء على n بحيث تكون m ثابتة. عندما يكون $n=m+1$، فإنّ أقلّ من $2/(n-1)$ ضلعًا تكون مفقودة. لذا، فإنّ $\delta(G) \geq n/2$ ويكون G هاملتونيًّا. افترض أنّ $n > m+1$ و $c(G) \leq m$. إذا كان $d(x) \leq m/2$، فإنّ $e(G-x) \geq m(n-2)/2$. إنّ تطبيق فرضية الإستقراء على $G-x$ يؤدي إلى أنّ $c(G-x) > m$. ومن هنا، نستطيع افتراض أنّ $\delta(G) > m/2$. وبالمثل، نستطيع افتراض أنّ G مترابط.

من خلال المسارات الأكثر طولاً في G، اختر $P = v_1, \ldots, v_l$ لتعظيم الدّرجة d لـ v_1؛ بما أنّ G مترابط، فإنّ $v_1 \not\leftrightarrow v_l$ (وبخلاف ذلك، فإنّ ضلعًا من $V(G)$ لـ $V(G)-V(P)$ سيعطي مسارًا أطول). لتكن $W = \{v_i : v_1 \leftrightarrow v_{i+1}\}$. يقع جيران v_1 جميعهم على P. لذا، فإنّ $|W| = d$. لكلّ $v_k \in W$، لاحظ أنّ طول المسار $P(v_k+1, v_l)$ و v_1, v_{k+1} و $P(v_k, v_1)$ أيضًا هو $l-1$؛ لذلك فإنّ $N(v_k) \subseteq V(P)$، والاختيار لـ P يؤدي إلى أنّ $d(v_k) \leq d$. وإضافة إلى ذلك،، لا يوجد $v_k \in W$ يملك جارًا v_j بحيث يكون $j > m$، لأنّنا في هذه الحالة نستطيع إكمال الحلقة الطويلة بإضافة $vjvk$ إلى $P(v_{k+1}, v_j)$ و $P(v_k, v_1), v_1 v_{k+1}$.

وبتقييد الأضلاع التي تقع على W، نجبر العديد من الأضلاع على الوقوع في $G-W$. ليكن $Z = \{v_1, \ldots, v_r\}$، حيث $r = min\{l, m\}$. لقد بيّنّا لكلّ $v_k \in W$ أنّ $N(v_k) \subseteq Z$. لذلك، يوجد $\|[W, Z-W]\| + e(G[W])$ ضلعًا واقعًا على W. ولمجموع درجات ثابت في W، فإنّ هذا يأخذ قيمة عظمى عندما يكون $[W, Z-W]$ بيانا ثنائيّ الفرع تامًّا. ونكبّر إلى أكثر من ذلك بجعل كلّ رأس في W يملك درجة d. إنّ العدّ الناتج هو $\frac{1}{2}|W|(d+|Z-W|) = dr/2 \leq dm/2$. وبناءً على ذلك، فإنّ $G-W$ يملك $n-d$ رأسًا وأكثر من $m(n-d-1)/2$ ضلعًا. ومن فرضية الاستقراء، فإنّ $c(G-W) > m$. إذا كان عدد الأضلاع المجبرة لتكون داخل $G-W$ كبيرًا جدًّا، فإنّ هذه الحالة لا يمكن أنْ تحدث، في حين تنطبق حالة سابقة). ■



تملك معظم شروط الكفاية للحلقات الهاملتونيّة نسخًا معدلة من "حلقة طويلة". نسخة الحلقة الطويلة المعدلة لنظرية ديراك تشير إلى أنّ بيان G المترابط من الدّرجة **2** يملك حلقة طولها $\min\{n(G), 2\delta(G)\}$ على الأقل (Dirac [1952b]). إنّ شرط وجود خاصّيّة التّرابط من الدّرجة 2 يستثني المثال $K_1 \vee 2K_\delta$ الذي محيطه $\delta + 1$.

لاحظ أنّ نسخة الحلقة الطويلة المعدلة لنظرية أور [Ore, 1960] جاءت بعد هذا بكثير. وهذه النسخة متضمّنة في [Bondy, 1971b] وعملت بصورة صريحة في [Bermond, 1976] وفي [Linial, 1976]. وتظهر المناقشة الأساسية التي استخدمت في العديد من نتائج الحلقة الطويلة في [Bondy, 1971b]، حيث تقوي مناقشة التحويل لأور/ ديراك (النظرية 8.2.7) بأخذ "الفجوات" في الحسبان.

36.4.8. تمهيدية: [Bondy, 1971b] إذا كان $P = v_1, \ldots, v_l$ مسارًا أطول في بيان G مترابطًا من الدّرجة 2، فإنّ $c(G) \geq \min\{n(G), d(v_1) + d(v_l)\}$.

الإثبات: (انظر أيضًا [Linial, 1976]). ليكن $m = d(v_1) + d(v_l)$، وافترض أنّ $c(G) < \min\{n(G), m\}$. بما أنّ G مترابط، فإنّ حلقة من الدّرجة l يمكن أنْ تعطي مسارًا أطول. لذا، فإنّ $v_l \nleftrightarrow v_i$. إذا كان $v_1 \leftrightarrow v_j$ و$v_l \leftrightarrow v_i$ لبعض قيم $i < j$، فإنّ i, j عبور زائد مع فجوة $j - i$. وإذا أضفنا $v_1\, v_j$ و $v_i\, v_l$ إلى $P(j, l)$ و $P(i, 1)$، فسنحصل على حلقة طولها $l - (j - i - 1)$. إذن، $m > l - (j - i - 1)$ عندما يكون i, j عبورًا زائدًا.



ليكن $x = v_1$ و $y = v_l$. إذا كان P يملك عبورًا زائدًا، فاجعل i, j هو العبور الزائد ذا الفجوة الأصغر. لذا، فإنّ x و y لا يملكان جيرانًا بين v_i و v_j على P، إضافة إلى أنّ $N(y)$ لا يحتوي على رأس سابق على P لجار لـ x؛ لأنّ حلقة من الدّرجة l تعطي مسارًا أطول. لذلك، فإنّ $N(y)$ تقع في $V(P) - \{y\}$ ولكنها تتجنب $\{v_{i+1}, \ldots, v_{j-2}\}$ و $\{v_r - 1 : v_r \leftrightarrow x\}$. واستنادًا إلى ذلك، فإنّ $d(y) \leq (l-1) - (j-2-i) - d(x)$. وبما أنّ $m < l - (j-i-1)$، فإنّ $d(x) + d(y) < m$، وهذا يناقض الفرض. إذن، لا يوجد عبور زائد.

بجعل $t_0 = \max\{i : x \leftrightarrow v_i\}$ و $u = \min\{i: y \leftrightarrow v_i\}$، نكون قد برهنّا أنّ $t_0 \leq u$. سوف ننشئ حلقة تحوي x و y و جيرانهما جميعهم. بما أنّ عدم وجود عبورات زائدة يؤدي إلى $|N(x) \cap N(y)| \leq 1$، فمثل هذه الحلقة تملك طولاً يساوي على الأقل $m < d(x) + d(y) + 1$.

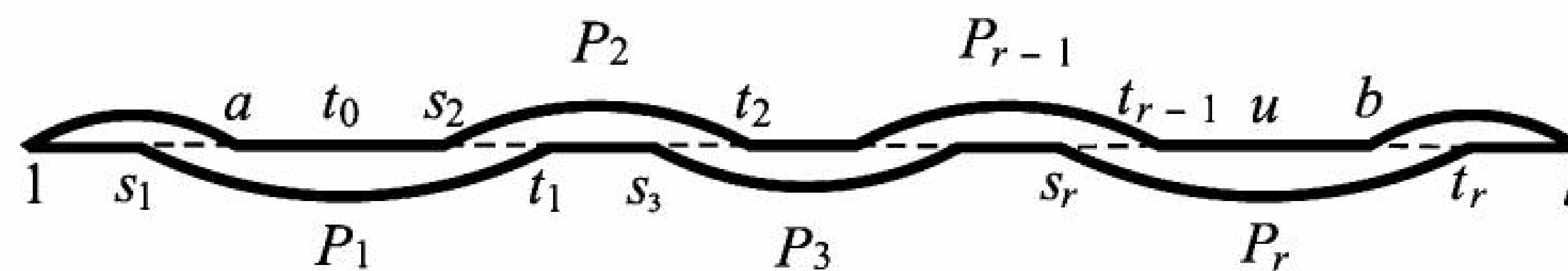
تكراريًّا، نعرّف مسارات ... $P_1, P_2,$. إذا أعطينا t_{i-1}، فإنّنا نختار أعدادًا صحيحة $s_i < t_{i-1} < t_i$ لتكبير t_i بحيث يملك G مسارًا P من v_{s_i} إلى v_{t_i} منفصلاً داخليًّا ا عن P. فمسار كهذا يكون موجودًا لأنّ $G - u_{t_{i-1}}$ مترابط. بالإضافة إلى أنّ هذه المسارات منفصلة؛ إذا كان P_i يتشارك برأس مع مسار لاحق P_j، فإنّنا نستطيع اختيار P_i بوصفها مسارًا من S_j إلى t_j، وهذا يناقض الأعظميّة لـ t_i. وبالمثل، فإنّ $s_{i+1} \geq t_{i-1}$، لأنّه بخلاف ذلك، سيتم اختيار المسار P_{i+1} بدلاً من P_i.

ليكن r أصغر دليل بحيث $t_r > u$. ضع

$$a = \min\{j : x \leftrightarrow v_j\ ,\ j > s_1\}\ ,\quad b = \max\{j : y \leftrightarrow v_j\ ,\ j < t_r\}$$

بما أنّ $s_1 < t_0$ و $t_r > u$، فإنّ تعريف الدليلين b,a يكون حسنًا. نستخدم المسارات P_i التي دليلها زوجيّ لبناء مسار واحد من x إلى y، أمّا المسارات التي دليلها فرديّ، فنستخدمها لبناء مسار آخر من x إلى y. عندما يكون r فرديًّا، فإنّ المسارين يشكّلان بالسّلاسل الآلية:

$$xv_a,\ P(a, s_2),\ P_2,\ P(t_2, s_4),\ P_4,\ \ldots,\ P(t_{r-1}, b),\ v_b y$$
$$P(1, s_1),\ P_1,\ P(t_1, s_3),\ P_3,\ P(t_3, s_5),\ \ldots,\ P_r,\ P(t_r, l)$$



ولكن إذا كان r زوجيًا، فإنّ المسار الذي يبدأ مع الضّلع xv_a يصل t_r وينتهي مع $P(t_r, l)$. في حين يصل المسار الآخر v_b وينتهي مع $v_b y$.

لاحظنا أنّ $s_{i+1} \ge t_{i-1}$. إذن:

$$s_1 < a \le t_0 \le s_2 < t_1 \le s_3 < t_2 \le \ldots < t_{r-1} \le u \le b < t_r$$

وهذا يؤدّي إلى أنّ هاتين السلسلتين الموصوفتين هما مساران، ويكون اتحادهما حلقة. من التعريف لـ a، يكون لدينا $N(x) \subseteq P(1, s_1) \cup P(a, t_0)$. وبالمثل، فإنّ $N(y) \subseteq P(u,b) \cup P(t_r, l)$. ومع x وy، فإنّ الحلقة تملك طولاً يساوي على الأقل $m < 2 + d(x) + d(y) - 1$. ■

لقد أثبت أور أنّ G يكون هاملتونيًا إذا كان $d(u) + d(v) \ge n(G)$ عندما يكون $u \nleftrightarrow v$. إنّ تمهيديّة بوندي تعطي نُسخة الحلقة الطويلة المعدّلة لهذا، التي تقوي نسخة الحلقة الطويلة لنظرية ديراك.

37.4.8. نظرية : ([linial, 1976], [Bermond, 1976], [Bondy, 1971b]) إذا كان G مترابطًا من الدّرجة $d(u) + d(\cup) \ge s$ لكلّ زوج غير متجاور $u, v \in V(G)$، فإنّ $c(G) \ge \min\{n(G), s\}$.

الإثبات: تضمن نظرية أور وجود حلقة هاملتونيّة إذا كان $s \ge n$. لذا، يمكن افتراض أنّ $s < n$. افترض أنّ P مسار أطول في G، مع نقاط طرفيّة x وy. بما أنّ G مترابط، فإنّ الأعظميّة لـ P تعطي أنّ $x \nleftrightarrow y$. الآن، يسمح الشّرط $d(x) + d(y) \ge s$ لنا باستدعاء التمهيدية 36.4.8. ■

وسّع بيرموند هذا كتركيب "حلقة طويلة" لشرطي كفتال و لاس فيرجناس. استخدمت تقنية تبديل الأضلاع التي تشتمل على النقاط الطرفية لمسار أطول في النظرية 35.4.8. وعبارتنا أضعف قليلًا من عبارة بيرموند، ولكن إثباتنا أبسط.

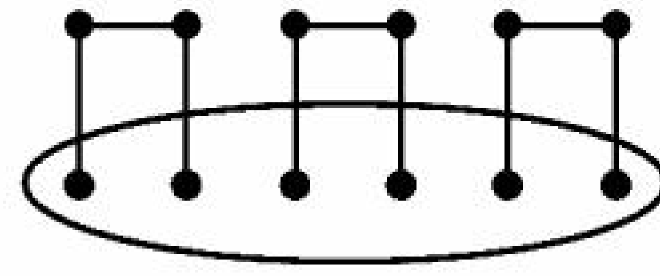
38.4.8. نظرية : (Bermond [1976]) ليكن G مترابطًا من الدّرجة 2 مع متتالية درجات $d_1 \le \ldots \le d_n$. إذا كان G لا يملك زوجًا x، y غير متجاور مع درجات j, i بحيث إنّ $d_i \le i < c/2$, $1 \le j$ و d_{j+1}، و $i + j < c$، فإنّ $c(G) \ge \min\{n(G), c\}$.

الإثبات: من بين المسارات الأطول في G، ليكن $P = v_1, \ldots, v_l$ مع نقاط طرفيّة $x = v_1$ و $y = v_l$ مختارًا لتكبير $d(v_1) + d(v_l)$. إذا كان $d(x) + d(y) \ge c$، فسنطبّق تمهيديّة بوندي. إذا كان $d(x) + d(y) < c$، فإنّنا ندّعي أنّ x، y يناقض الفرض. وكالعادة، فإنّ حلقة من الدّرجة 1 سوف تعطي مسارًا أطول (بسبب أنّ G مترابط). لذا، فإنّ $x \nleftrightarrow y$. نستطيع افتراض أنّ $d(x) \le d(y)$، ووضع $i = d(x)$ و $j = d(y)$.

يقع جيران x و y جميعهم في P. إذا كان $x \leftrightarrow v_k$، فإنّ xv_k , $P(v_{k-1}, x)$,$P(v_k, y)$ هو مسار أطول آخر ينتهي عند y. لذا، فإنّ $d(v_{k-1}) \le d(x) = i$، من خلال الاختيار لـ P. وبما أنّ هذا يتحقق لكلّ جار من الـ i جارًا لـ x، فإنّ $d_i \le i$. وبالمثل، فإنّ درجة كلّ جار من الـ j جارًا لـ y تساوي j على الأكثر. وكذلك $d(x) \le j$. لذلك، فإنّ $d_{j+1} \le j$. ومن الفرض، فإنّ $i + j = d(x) + d(y) < c$، وهذا يكمل التناقض. ■

لقد قام فان [1984م] (G. –H. Fan) بتقوية النظرية 37.4.8 من خلال شرط الدّرجة والإبقاء عليه للأزواج غير المتجاورة التي لها جار مشترك فقط. وقد استخدم تيان [1988م] (T. Feng) تمهيدية بوندي لتقصير الإثبات (ملاحظة: في العام 2003م قصّرها بصورة أكبر). وتتضمن النتيجة شرط كفاية للحلقات الهاملتونيّة التي لا تتطلب الإغلاق لتصبح تامة.

39.4.8. مثال: بيان هاملتونيّ. لـ n زوجيّ، ليكن $G_1 = K_{n/2}$ و $G_2 = (n/4)\, K_2$، وشكل G بإضافة مواءمة بين النسخ المنفصلة من G_1 و G_2. إنّ الإغلاق الهاملتونيّ لـ G هو G نفسه. لذا، لا تنطبق شروطنا الكافية السابقة. وعلى الرّغم من أنّ G يملك $n/2$ رأسًا درجتها 2، فإنّ نظرية فان (G. –H. Fan) تؤدي إلى أنْ يكون G هاملتونيًّا.

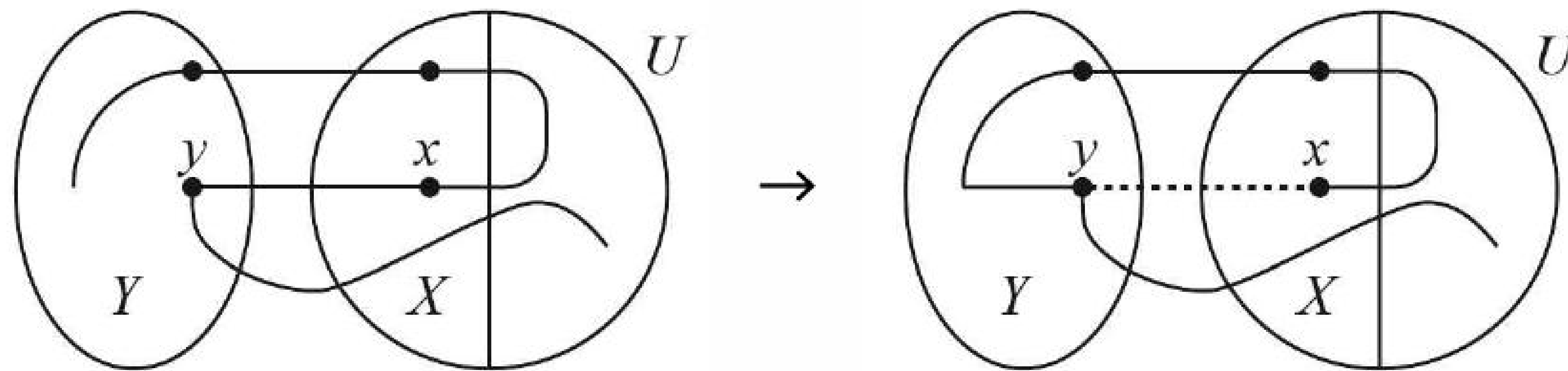


40.4.8. نظرية: ([Fan [1984م) إذا كان G مترابطًا من الدّرجة 2، و $d_G(u,v) = 2$ يعطي $max\ \{d(u),\ d(v)\} \geq c/2$، فإنّ $c(G) \geq min\ \{n(G),\ c\}$.

الإثبات: ([Tian [1988م) لتكن $U = \{v \in V(G) : d(v) \geq c/2\}$. من تمهيدية بوندي، يكفي إيجاد مسار أطول نقطتاه الطّرفيّتان في U. ومن بين المسارات التي طولها أكبر ما يمكن، ليكن $P = v_1, \ \ldots, \ v_m$ أحدَ المسارات التي تملك أكبر عدد من النقاط الطّرفيّة في U. إذا فشل P في أنْ تكون نقطتاه الطرفيتان في U، فسنجد مسارًا أطول أو مسارًا بالطول نفسه مع نقاط طرفيّة أكثر في U. نستطيع افتراض أنّ $v_1 \notin U$.

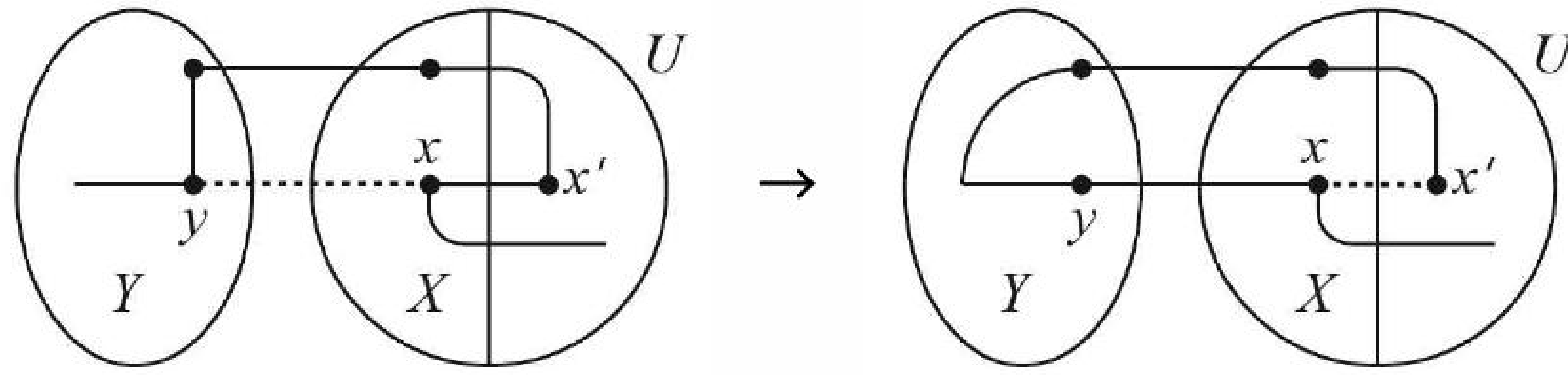
بما أنّ $d(v) < c/2$ لكلّ $v \notin U$، فإنّ الفرضيّة على أزواج المسافة فيما بينهما 2 تؤدي إلى أنّ $G - U$ اتّحادٌ منفصل لبيانات تامّة. لتكن Y المجموعةَ التي تحوي v_1. ولتكن X مجموعةَ الرّؤوس في U التي تملك جيرانًا في Y. بواسطة الفرضيّات، فإنّ رؤوس X تملك جيرانًا في $Y \cup U$ فقط. وأيضًا $|X| \geq 2$؛ لأنّ G مترابط من الدّرجة 2.

ليكن $r = |Y|$. سنبرهن أولاً أنّ P يبدأ بالمرور على رؤوس Y جميعها. إذا أهمل P رأسًا ما في Y، فإنّنا نستطيع امتصاصه قبل أول خروج من Y. وإذا كان P يغادر ويرجع إلى Y، فإنّه يرجع من خلال ضلع xy. ولأنّ $G[Y]$ تام، فإنا نستطيع استبدال xy في P مع $v_1\, y$، وبذلك نحصل على مسار من x إلى v_m يملك طول P نفسه، ولكن مع نقاط طرفية أكثر في U. لذا، نستطيع أنْ نفترض أنّ $Y = \{v_1, \ \ldots, \ v_r\}$.



افترض أنّ $x \in X - v_{r+1}$. افترض أولاً أنّ x يملك جارًا $y \in Y$ يختلف عن رأس الخروج v_r لـ P. إذا كان $x \notin V(P)$، فيمكن البدء بامتصاص بقية Y إلى أنْ نصل إلى v_r، وبذلك نكمل مسارًا من x إلى v_l أطول من P.

وإذا كان $x \in V(P)$، فإنّنا نضع x' ليكون الرّأس الذي يسبق x مباشرة على P. وبما أنّ $x \neq v_{r+1}$، فإنّ $x' \in U$. نستبدل $x'x$ في P بـ yx للحصول على مسار من x' إلى v_1 طوله مثل طول P ولكن مع نقاط طرفيّة أكثر في U.



لذلك، نستطيع أنْ نفترض أنّه لكلّ $x \in X - v_{r+1}$ فإنّ x لا يملك أيّ جار في Y إلاّ v_r. إذا كان $|Y| \geq 2$ فإنّ هذا يجعل v_r رأس قطع إلا إذا كان v_{r+1} يملك جارًا آخر $y \in Y - v_r$. وسنعيد الآن ترتيب P ليبدأ مع v_{r+1}، y، ...، v_r بدلاً من $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}$. وهذه هي الحالة التي نوقشت للتّو. الحالة المتبقية هي $|Y| = 1$ و $N(v_1) = X$. مع $x \in X - v_{r+1}$ كما في السابق، فإنّنا نلحق x إلى بداية P أو تحل $x'x$ محل xv_1. ■

أخيرًا، سنقدم نتيجة واحدة حول البيانات الموجّهة التي تقوّي شرط الكفاية جويلا وهوري (Ghouila – Houri) (النظرية 22.2.7) للحلقات الهاملتونيّة. وسنأخذ في الحسبان فقط البيانات الموجّهة التي تخلو من العرى، والتي تملك نسخة واحدة على الأكثر من كلّ زوج مرتّب بوصفه ضلعًا. تسمّى هذه بيانات موجّهة **قطعيّة أو صارمة** (strict). للبيانات الموجّهة، نستخدم "u وv غير متجاورين" لتعني أنّ $uv, vu \notin E(G)$. وأيضًا، نعرّف $d(v) = d^{+}(v) + d^{-}(v)$.

فعليًا، أثبت جويلا وهوري [1960] أنّ أيّ بيان موجّه G يكون هاملتونيًّا إذا كان $d(v) \geq n(G)$ لكلّ v؛ وهذا أقوى من نصّ النظرية 22.2.7. وقد أثبت وودال [Woodull, 1972م] أنّه يكفي أنْ يكون لدينا $d^{+}(u) + d^{-}(v) \geq n(G)$ عندما يكون v, u غير متجاورين. وهذا يعمّم نظرية أور للبيانات غير الموجّهة (التمرين 33). في حين أثبت مينيال [Meyniel, 1973] أنّ أيّ بيان موجّه قويّ قطعيّ G يكون هاملتونيًّا إذا كان $d(u) + d(v) \geq 2n(G) - 1$ للأزواج غير المتجاورة v , u جميعها. لاحظ أنّ نظرية مينيل تعطي نظرية جويلا وهوري وكذلك نظرية وودال (التمرين 33).

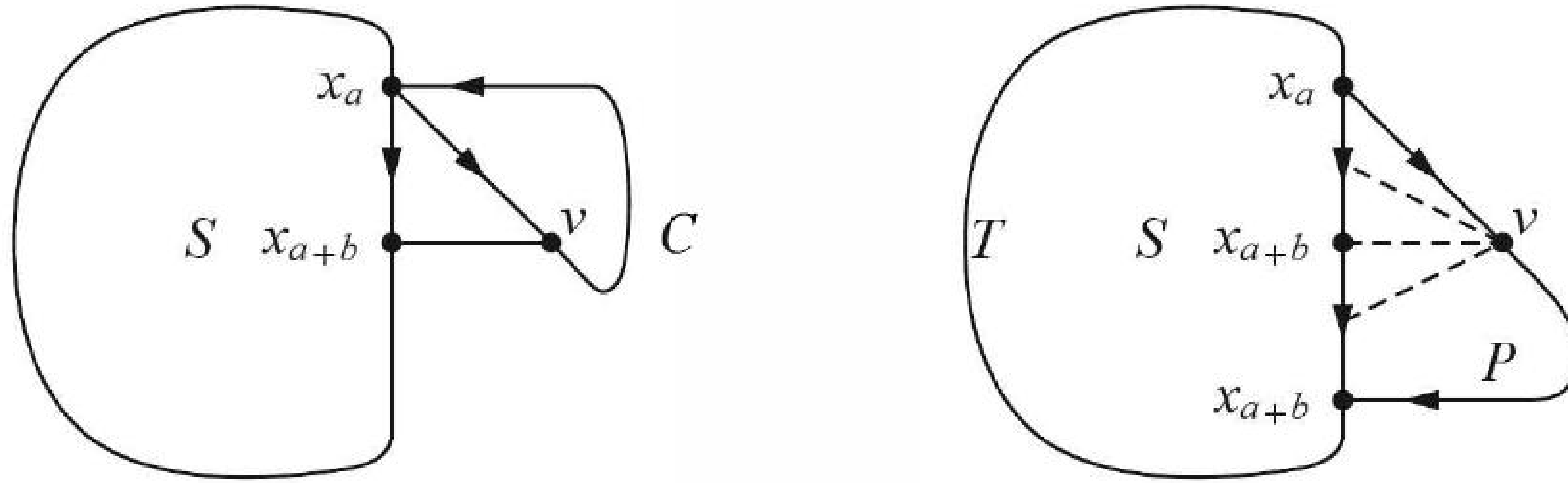
41.4.8. مثال: تُعدّ نظرية مينيل (Meyniel) أفضل ما يمكن. ليكن G يتكون من عصبتين موجّهتين مزدوجتين تتشاركان برأس. يكون البيان الموجّه مترابطًا بقوة، والأزواج الوحيدة من الرّؤوس غير المتجاورة تتكون من رأس واحد من كلّ عصبة. إذا كانت العصبتان تملكان رتبة k ورتبة $n + 1 - k$، فإنّ الدّرجات الكليّة لأيّ زوج غير متجاور هي $2k - 2$ و$2n - 2k$، ومجموعها $2n - 2$.

42.4.8. نظرية: ([Meyniel,1973]) إذا كان G بيانًا موجّهًا صارمًا مترابطًا بقوة بحيث $d(u)+ d(v) \geq 2n - 1$ عندما يكون v, u رأسين غير متجاورين مختلفين، فإنّ G يكون هاملتونيًّا.

الإثبات: (Bondy – Thomassen [1977]) سنبرهن تمهيدية تقنية: إذا كان $T = v_1, \ldots, v_k$ مسارًا لا يستطيع امتصاص الرّأس v داخليًّا (بين اثنين من رؤوسه)، فإنّ عدد الأضلاع من v إلى T إضافة إلى عدد الأضلاع من T إلى v يكون $k + 1$ على الأكثر. وهذا يتبع بالعدّ. لكلّ $1 \leq i \leq k - 1$، نلاحظ أنّه بضلع واحد فقط من الضّلعين $v_i\, v$ و $v\, v_{i+1}$. فضلًا عن أنّه يسمح بالأضلاع $v\, v_1$ و $v_k\, v$؛ ولا يوجد قيد على الامتصاص عند النهاية.

سنستخدم هذا لنبرهن العبارة الآتية: إذا كان G بيانًا موجّهًا غير هاملتونيّ قويًّا وصارمًا، و كانت S مجموعة رؤوس جزئيّة أعظميّة تملك حلقة مولّدة $(x_1, \ldots, x_m)$ في G، فإنّه يوجد $v \in \overline{S}$ وعددان صحيحان a، b مع $1 \leq a \leq m$ و $1 \leq b < m$ بحيث إنّ (1) $x_{av} \in E(G)$، و(2) v غير مجاور لأيّ x_{a+i} على افتراض أن $1 \leq i \leq b$ (3)ن $d(v) + d(x_{a+b}) \leq 2n - 1 - b$. بما أنّ $b \geq 1$، فإنّ نتيجة هذه العبارة مستحيلة تحت فرضيات هذه النظرية التي سوف تؤدي إلى أنّ مجموعة الرّؤوس الأعظميّة الوحيدة التي تملك حلقة مولدة هي $V(G)$.

افترض أوّلاً عدم وجود أيّ مسار يترك S ويعود إليها. بما أنّ G قويّ و $S \neq V(G)$، فإنّ حلقة ما C طولها 2 على الأقل تتشارك مع S بالضبط برأس واحد فقط. ليكن هذا الرّأس هو x_a، وليكن v الرّأسَ التّالي لـ x_a على C. من شرط المسار، لا يوجد مسار بين v و $S - \{x_a\}$ أيّ من كلا الاتجاهين. وبصورة خاصة، فإنّ كلّ رأس خارج $S \cup \{v\}$ يقع على الأكثر على ضلعين يقع أيضًا على v أو v_{a+1}. فضلًا عن ذلك، فإنّ v يقع على الأكثر على ضلعين ويقع أيضًا على S (يجب أنْ تكون النقطة الطّرفيّة الأخرى v_a). أخيرًا، كلّ رأس في $S - x_a + 1$ يقع على الأكثر على ضلعين، فإنّه يقع أيضًا على x_{a+1}. وبجمع المساهمات المسموح بها نحصل على: $d(v) + d(x_{a+1}) \leq 2n - 2$. لذا، فإنّ الشّرط المطلوب يتحقق على افتراض أنّ $b = 1$.



الآن، افترض وجود مسار يترك S ويعود إليها. اختر مثل هذا المسار P بحيث تكون المسافة c على طول S من بداية P إلى نهاية P أصغر ما يمكن. ليكن x_a بداية P، وv هو التالي لـ x_a على P. لاحظ أنّ الأعظميّة لـ S تعطي أنّ $c > 1$. لتكن T جزءَ S من x_{a+c} إلى x_a؛ إنّ هذا الجزء يملك $m - c + 1$ رأسًا. إضافة إلى أنّ الأعظميّة لـ S تؤدي إلى أنّه لا يمكن امتصاص v داخليًا بواسطة T. لذا، فإنّ تمهيديّتنا التّقنيّة تؤدي إلى أنّ v ينتمي على الأكثر إلى $m - c + 2$ ضلعًا واقعًا على T. والأصغريّة لـ c تجعل v غير مجاور للرّؤوس $x_{a+1}, \ldots, x_{a+c-1}$.

ليكن b أكبر عدد صحيح في $[c]$ بحيث يكون لـ G مسار من x_{a+c} إلى x_a على مجموعة الرّؤوس $S - \{x_{a+b}, \ldots, x_{a+c-1}\}$. ليكن R مثل هذا المسار (المسار T مع $b = 1$ يضمن وجود R). بما أنّ $P \cup R$ حلقة، فإنّ الأعظميّة لـ S تعطي $b < c$. ومن أعظميّة b، فإنّ x_{a+b} لا يمتصّ داخليًّا من قبَل R. لذلك، وبواسطة تمهيديّتنا التّقنيّة، فإنّ x_{a+b} ينتمي على الأكثر إلى $m - c + b + 1$ ضلعًا واقعًا على $\acute{R}$.

الآن، نحسب $d(v) + d(x_{a+b})$. كلّ رأس خارج $S \cup \{v\}$ يقع على الأكثر على ضلعين فإنّه يقع أيضًا على $\{v, x_{a+b}\}$؛ لأنّ الأصغريّة لـ c تمنع وجود مسار طوله **2** بين v و x_{a+b} (في كلا الاتجاهين) باستخدام رأس ليس في S. لقد لاحظنا أنّ v ينتمي على الأكثر إلى $m - c + 2$ ضلعًا واقعًا على S. ولاحظنا أيضًا أنّ x_{a+b} ينتمي على الأكثر إلى $m - c + b + 1$ ضلعًا واقعًا على R. أخيرًا، x_{a+b} ينتمي على الأكثر إلى $2(c - b - 1)$ ضلعًا واقعًا على $S - R$. إذن، $d(v)+d(x_{a+b})\ 2(n - m - 1) + (m - c + 2) + (m - c + b + 1) + 2(c - b - 1) = 2n - 1 - b$.

ومرّة أخرى حصلنا على الشّرط المطلوب. ■

تمـــارين (Exercises)

1.4.8. ليكن $m = \lfloor n^2/4 \rfloor$. أثبت أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يملك تمثيل تقاطع باستخدام مجموعات جزئيّة لـ $[m]$، بحيث يظهر كلّ عنصر في $[m]$ في ثلاث مجموعات على الأكثر. وبصورة مكافئة، كلّ بيان على n من الرّؤوس يتفكك إلى m ضلعًا ومثلثًا على الأكثر.

2.4.8. أثبت أنّ الشّروط الآتية على بيان G لا يملك رؤوسًا معزولة هي شروط متكافئة: (Choudom – Parthasarathg – Ravindra [1975])

a) $\theta'(G) = \alpha(G)$

b) $\theta'(G \vee G) = (\theta'(G))^2$

c) $\theta'(G) = \theta(G)$

d) كلّ عصبة في غطاء عصبي أصغر لـ $E(G)$ تستخدم رأسًا مُبسطيًّا لـ G.

3.4.8. (+) ليكن $b(G)$ العددَ الأصغر للبيانات الثنائيّة الفرع التي نحتاج إليها لتجزئة $E(G)$ (يدعى عددًا ثنائيّ الفرع biparticity). ليرمز $a(G)$ إلى العدد الأصغر من الصّفوف التي نحتاج إليها لتجزئة $E(G)$ بحيث تكون كلّ حلقة في G تحتوي على عدد زوجيّ غير صفريّ من الأضلاع في صفّ ما. أثبت أنّ كلًّا من هذين المتغيرين يساوي $\lceil \lg \chi(G) \rceil$. (مساعدة: أثبت أنّ: $\lg \chi(G) \le b(G) \le a(G) \le \lceil \lg \chi(G) \rceil$ (Alon – Egawa [1985] Harary – Hsu – Miller [1977]).

4.4.8. حدّد البيانات على n من الرّؤوس جميعها التي يساوي بعدها الجدائيّ $n - 1$. (Lovász –Ne→etřil Pultr [1980]).

5.4.8. أثبت أنّ $pdim\ G \le 2$ إذا وفقط إذا كان G المتممةَ لبيان خطّيّ لبيان ثنائيّ الفرع. (Lovász –Ne→etřil Pultr [1980]).

6.4.8. إذا كانت r معطاة، فاحسب $pdim\ (K_r + mK_1)$ لكلّ $m \ge 1$. (Lovász –Ne→etřil Pultr [1980])

7.4.8. (-) احسب البعد الجدائيّ لمكعّب ثلاثيّ الأبعاد.

8.4.8. احصل على حدود عليا وأخرى وسفلى تختلف بـ 1 للبعد الجدائيّ لبيان بيترسون (الحدّ العلوي سوف يكون على الأرجح القيمةَ الصحيحة، ولكن برهنة أنّه لا يمكن تحسينه يكون صعبًا ومملًا).

9.4.8. لتكن $f(n)$ القيمةَ العظمى لـ $\text{pdim}\ G\ .\ \text{pdim}\ \bar{G}$ على البيانات جميعها التي تملك n رأسًا. أثبت أنّ $\lfloor n^2/4 \rfloor \le f(n) \le (n-1)^2$.

10.4.8. لكلّ $n \ge 4$، أثبت أنّ $\text{pdim}\ P_n = \lceil \lg(n-1) \rceil$. ولكلّ $n \ge 3$، أثبت أنّ $C_{2n} = 1 + \lceil \lg(c-1) \rceil$ و $1 + \lceil \lg n \rceil \le \text{pdim}\, C_{2n+1} \le 2 + \lceil \lg n \rceil$. Lovaśz –Ne→etřil Pulter [1980]. (تعليق: بيّن Evans – Fricke – Maneri – Mckee – Perkel [1994] أنّ $C_{2n+1} = 1 + [\lg n]$ ربما باستثناء حالة عندما يكون n على صورة قوة لـ 2).

11.4.8. أثبت أنّ C_{2k+1} غير قابل لغمس يحافظ على المسافات في أيّ جداء كارتيزيّ لعصبٍ إذا كان $k > 1$.

12.4.8. حدّد بُعْدَ المكعّب المسحوق لـ $\bar{C}_5$.

13.4.8. (+) حدّد بُعْدَ المكعّب المسحوق لـ $K_{3,3}$. (مساعدة: استخدم التّماثل لاختزال تحليل الحالة).

14.4.8. (!) استخدم نظرية التّفريع لإدموند (نظرية 20.4.8) لتبرهن النسخة الضّلعيّة لنظرية منجر في البيانات الموجّهة: $\lambda'(x,y) = k'(x,y)$. (مساعدة: ابتكر تحويلًا لبيان مناسب لتحصل على إثبات قصير).

15.4.8. (!) تدعى مسألة انتشار الإشاعة "مسألةَ الهاتف" أيضًا، أمّا المسألة المقابلة للبيانات الموجّهة فتدعى "مسألة التلغراف". بوصفها دالّة في n، حدّد العدد الأصغر للتّناقلات في اتجاه واحد بين n من الأشخاص بحيث يملك كلّ شخص مسارًا ناقلاً للأشخاص الآخرين جميعهم. (Harary - Schwenk [1974]).

16.4.8. ليكن D بيانًا موجّهًا يحلّ مسألة التلغراف بحيث يصل كلّ رأس معلومات من الرّؤوس الأخرى مرة واحدة بالضبط. أثبت أنّه يوجد $n-1$ رأسًا في D على الأقل يسمعون معلوماتهم الخاصة. ولكلّ n ، أنشئ مثل D بحيث يكون $n-1$ رأسًا فقط يسمعون معلوماتهم الخاصة، في حين يوجد مسار واحد متزايد تمامًا لكلّ $x \neq y$ من x إلى y (Seress [1987]).

17.4.8. الخاصية *NOHO*:

a) ليكن G بيانًا مترابطًا له $2n-4$ ضلعًا، ويملك ترتيبًا خطّيًّا يحلّ مسألة انتشار الإشاعة ويحقّق NOHO (لا توجد حلقة متزايدة). افترض أيضًا أنّ $n(G) > 8$. وأنّه يوجد على الأكثر رأسان درجتهما 2. أثبت أنّ البيان الذي تمّ الحصول عليه بحذف المكالمات الأولى والأخيرة للرّؤوس في G يملك 4 مركّبات؛ اثنتين منهما رؤوس معزولة والاثنتين الأخريين جارين يملكان الحجم نفسه. (West [1982 a]).

b) لكلّ عدد زوجيّ $n \geq 4$، أنشئ بيانًا مرتّبًا مترابطًا له $2n-4$ ضلعًا يحقّق خاصّيّة NOHO. (مساعدة: استخدم الخواص البنائية التي برهنت في فرع (a) لترشدك في البحث).

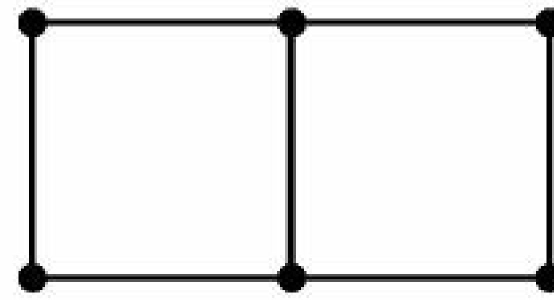
18.4.8. نهج (أسلوب NODUP (**NODUP scheme**) (لا يوجد ناقلان متطابقان) هو بيان مرتّب مترابط يملك مسارًا واحدًا متزايدًا بالضبط من كلّ رأس إلى أيّ رأس آخر:

a) (-) أثبت أنّ كلّ نهج NODUP يملك خاصية NOHO.

b) أثبت عدم وجود نهج NODUP عندما تكون $n \in \{6, 10, 14, 18\}$. (تعليق: أثبت سيرس [Seress, 1986] أنّ هذه هي فقط القيم الزوجيّة لـ n بحيث يكون نهج NODUP غير موجود، وبنى نهجًا NODUP للقيم الأخرى جميعها. لـ $n = 4k$، بنى ويست [1982b] نهجًا NODUP يحتوي على $(9n/4) - 6$ مكالمة، وبرهن سيرس [1986] أنّ هذا هو الأمثل).

19.4.8. افترض أنّ رأسًا في بيان بسيط G يرغب في نشر معلومات للرّؤوس الأخرى جميعها. وأنّه في كلّ وحدة زمنية، فإنّ كلّ رأس يعرف المعلومة يستطيع إجراء مكالمة مع جار لا يعرف هذه المعلومة. إنّ الزّمن المطلوب لنشر المعلومة من v هو العدد الأصغر من الوحدات الزمنية، بحيث تستطيع الرّؤوس جميعها معرفة المعلومة. ابن بيانًا G على n من الرّؤوس له أقل من $2n$ ضلعًا بحيث يستطيع كلّ رأس في G نشر المعلومة على الأكثر في زمن يساوي $(1+ \lg n)$.(Grigni – Peleg [1991].

20.4.8. (!) أثبت أنّ البيان أدناه غير قابل للاختيار من الدّرجة 2.



21.4.8. أثبت أنّ $K_{k,m}$ يكون قابلًا للاختيار من الدّرجة k إذا وفقط إذا كان $m < k^k$. (Erdös – Rubin – Taylor [1979]).

22.4.8. أثبت أنّ $\chi_l(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(G)$ بحيث يكون $\chi_l(G) + \chi_l(\overline{G}) \leq n + 1$. وبرهن أيضًا أنّ $\chi'_l(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

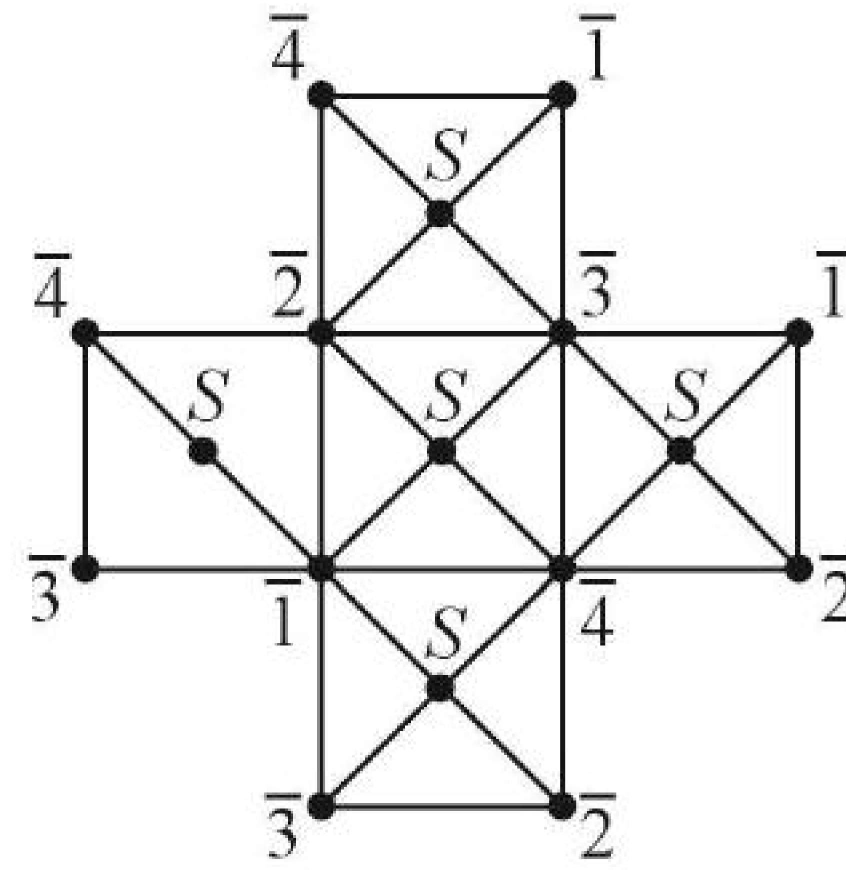
23.4.8. أثبت أنّ كلّ بيان وتري G يكون قابلًا للاختيار من الدّرجة $\chi(G)$.

24.4.8. أثبت أنّ كلّ بيان مترابط G يملك تلوينًا قائميًّا فعليًّا من قوائم، بحيث يكون $|L(v)| \geq d(v)$ لكلّ v إذا وجدت متباينة صارمة لرأس واحد على الأقلّ.

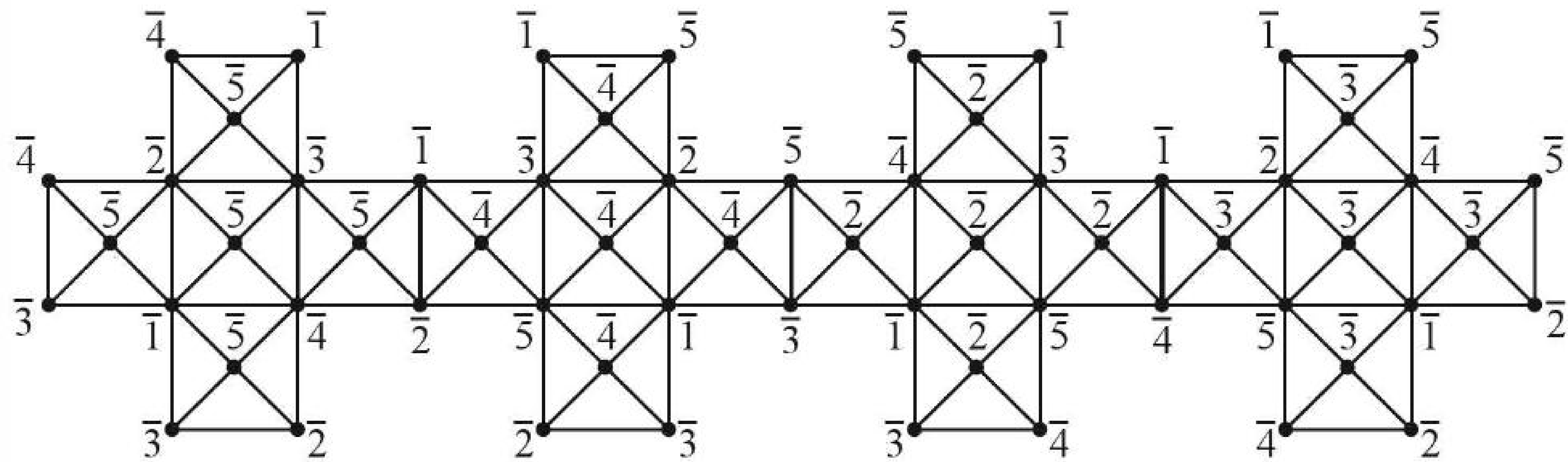
25.4.8. (!) أثبت أنّ G يملك تلوينًا كليًّا (الملاحظة 31.4.8) بـ $\chi'_l(G) + 2$ لونًا على الأكثر.

26.4.8. بيان سويّ غير قابل للاختيار من الدّرجة 4 ورتبته 63:

a) في قائمة التّعيينات للبيان أدناه، ترمز S إلى [4]، أمّا $\bar{i}$ فترمز إلى $S - \{i\}$. أثبت أنّ هذا البيان لا يملك تلوينًا فعليًّا مختارًا من هذه القوائم.



b) في قائمة التّعيينات للبيان G أدناه، ترمز $\bar{i}$ إلى $[5]-\{i\}$؛ وحجم كلّ قائمة يساوي 4. ليكن G' البيانَ الذي تمّ الحصول عليه من G بإضافة رأس واحد مع قائمة $\bar{1}$ مجاورة للرّؤوس جميعها على الوجه الخارجيّ لهذا الرّسم في G. أثبت أنّ G' لا يملك تلوينًا فعليًّا مختارًا من هذه القوائم. ([1996] Mirzakhani) .



27.4.8. (!) تكافؤ لنظرية ديلورث ونظرية كونج وإيجرفاري:

a) إذا أعطيت بيانًا ثنائيّ الفرع G، فطبّق نظرية ديلورث على توجيه متعدٍّ له لتحصل على نظرية كونج وإيجرفاري.

b) إذا أعطيت بيانًا موجّهًا متعدّ D، وليكن G هو الشطر لـ D كما عُرِّفَ في التعريف 20.4.1. فطبّق نظرية كونج وإيجرفاري على G لتحصل على نظرية ديلورث لـ D.

28.4.8. (!) أثبت أنّ K_n يتفكك إلى $\lceil n/2 \rceil$ مسارًا. وبرهن أنّ K_n يتفكك إلى $\lfloor n/2 \rfloor$ حلقة عندما يكون n فرديًّا.

29.4.8. (!) تفكيك K_n إلى بيانات جزئيّة مترابطة مولّدة.

a) أثبت أنّه إذا كان K_n يتفكك إلى k بيانًا جزئيًّا مترابطًا مولّدًا، فإنّ $n \geq 2k$.

b) أثبت أنّ K_{2k} يتفكك إلى k شجرة مولّدة قطرها 3. (مساعدة: لتكن الأضلاع المركزيّة لهذه الأشجار تشكّل مواءمة كاملة). ([1973] Palumbing)

30.4.8. أثبت أنّ كلّ بيان سويّ بسيط منتظم من الدّرجة 3 مترابط ضلعيًّا من الدّرجة 2 يتفكك إلى مسارات طولها **3**. وبرهن العبارة نفسها للتّثليثات السّويّة. ([1985] Jünger – Reinelt-Pulleyblank) .

31.4.8. أثبت أنّ النظرية 35.4.8 أفضل ما يمكن عندما تكون $m-1$ تقسم $n-1$.

32.4.8. ليكن G بيانًا بحيث يكون $\overline{G}$ يخلو من المثلّثات، وليس غابة. أثبت أنّ G يملك حلقةً طولها $n(G)/2$ على الأقل. (مساعدة: استخدم النظرية 37.4.8.) (N. Graham)

33.4.8. استخدم نظرية وودال لتثبت نظرية أور، واستخدم نظرية مينيل لتثبت نظرية وودال.

34.4.8. استخدم نظرية مينيل لتبرهن أنّ بيانًا موجّهًا صارمًا على n من الرّؤوس يملك مسارًا مولّدًا إذا تحقّق أنّ: $d(u)+d(v) \geq 2n-3$ لكلّ زوج u، v من الرّؤوس المختلفة غير المتجاورة.

5.8. البيانات العشوائية (Random graphs)

استعملت الطريقة الاحتماليّة في صورتها الأبسط لتبرهن وجود كائنات توافقية مرغوبة دون بنائها، وقد عُرِّف نموذج احتمالي مناسب على صفّ كبير من الأشياء. والحدث هو حدوث للبناء المرغوب. إذا كانت احتماليّة هذا الحدّث موجبة، فإن شيئًا مرغوبًا يكون قد حدث أو وُجد. إنّ تصميم النموذج، وتطبيق الاحتماليّة، وأساليب التقارب يمكن أنْ تتضمن مهارة كبيرة.

سنناقش هذه الطّرق في سياق البيانات العشوائيّة التي حُفِّزت دراستها بنمذجة الخصائص الفيزيائية وبتحليل الخوارزميّات في علم الحاسوب.

1.5.8. مثال: درجات الانصهار. يقترح سلوك البيانات العشوائيّة تفسيرًا رياضيًّا لدرجات الانصهار. فكّر في المجسّم المصمت بوصفه شبكة ثلاثية الأبعاد من الجزيئات، حيث تتصل الجزيئات المتجاورة بروابط. فعلى سبيل المثال، خذ في الحسبان البيان $P_l \square P_m \square P_n$ حيث الروابط هي الأضلاع. إنّ إضافة الطاقة تثير الجزيئات وتكسر الروابط. سوف نفترض أنّ الروابط تُكْسَرُ عشوائيًّا عندما نرفع درجة الحرارة (مستوى الطاقة). وكلّ حرارة تقابل جزءًا ما من الروابط المكسورة. في حين أنّ البيان يبقى مترابطًا بصورة كبيرة، أما المادة فتبدو مصمتة. وكسر أجزاء صغيرة لا يغير هذا. ولكن، عندما تكون المركبات جميعها صغيرة، فإنّ الطبيعة الكليّة للمادة تتغيّر. والمركبات الصغيرة للجزيئات تطفو بحرية، مثل السائل أو الغاز.

رياضيًا، يوجد مدخل لعدد الروابط التي يجب أنْ تُكْسَر (بدلالة الحجم للشّبكة) بحيث تترك كلّ طريقة لكسر عدد أقل من الروابط مركبةً ضخمة. وبصورة تقريبية، فإنَّ كلّ طريقة لكسر روابط أكثر إلى حدّ ما تترك المركبات جميعها صغيرة جدًّا. وتحت درجة حرارة معينة فقط، فإن المادة سوف تبقى مصمته تقريبًا. وفوقها فقط، تكون غير مصمتة تقريبًا. ■

2.5.8. مثال: تحليل الخورازميّات. يكون التعقيد في أسوأ حالة عندما يكون زمن التشغيل للخوارزمية للمدخلات التي حجمها n جميعها أكبر ما يمكن. (انظر الملحق B). للمسائل الصعبة، يمكن أنْ نبحث عن خوارزمية تأخذ العديد من الخطوات على بعض البيانات الغريبة في حين تعمل بسرعة عند معظم البيانات. إننا بحاجة إلى طريقة لوصف فائدة مثل هذه الخوارزميّات.

الحلّ هو **التحليل الاحتماليّ**. سنفترض التوزيع الاحتماليّ على المدخلات ودراسة زمن التشغيل المتوقع بالنسبة إلى هذا التوزيع. إنّ اختيار توزيع واقعيّ يمكن أنْ يكون صعبًا. لذا، سنختار توزيعًا احتماليًّا يجعل التحليل ملائمًا. و لكننا لا نستطيع تعريف توزيع احتمالي على عدد لا نهائي من البيانات، لذلك سوف نعرف توزيعًا على البيانات لكلّ رتبة. وهذا منسجم مع افتراض زمن التشغيل المتوقع بوصفه دالّة على حجم المدخلة. ■

قدم إيردوز وريني [Erdös-Re′nyi, 1959] البيانات العشوائيّة، ثمّ تطوّر الموضوع بصورة سريعة في الثمانينيّات، كما ورد في كتب [Palmer, 1985]، [Bollob′as, 1985]، و [Alon – Spencer, 1992] .

(حيث عالج الكتاب الأخير تطبيقات توافقية أوسع للطرق الاحتماليّة). في حين أكّد [Janson-Luczak-Rucin′ski, 2000] التّطورات اللاحقة.

أما الآن، فتُطبّق على البيانات العشوائيّة أساليب احتماليّة دقيقة أكثر ممّا نستطيع تقديمه هنا. وسوف نصف الأساليب الأساسية، ونقترح الصفة المميزة للموضوع، دون محاولة إعطاء معالجة كاملة للموضوع.

الوجود والتوقع (Existence and Expectation)

سنبدأ بتوضيح كيفيّة قيام الطّرق الاحتماليّة بإثبات عبارات تتعلّق بوجود الأشياء. افترض أنّنا نريد برهنة أنّ كائنًا ما ذا خاصيّة مطلوبة موجود. لهذا، سوف نعرّف فضاءً احتماليًّا يعدّ ظهور الخاصيّة المطلوبة حدثًا A. إذا كان احتمال A موجبًا، فإنّ الكائن المطلوب موجود.

3.5.8. تعريف: الفضاء الاحتماليّ (probability space) المتقطّع أو **النموذج الاحتماليّ** (probability model) هو مجموعة منتهية أو معدودة S مع أوزان غير سالبة على عناصرها ويكون مجموع الأوزان 1. **والحدث** (event) هو مجموعة جزئيّة من S. **والاحتمال** $P(A)$ (probability) للحدث A هو مجموع أوزان عناصر A. يكون الحدثان A و B **مستقلّين** (independent) إذا كان $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

لقد أعطى إيردوز شعبيّة كبيرة للطّريقة الاحتماليّة في العام 1947م من خلال استخدامها لإثبات الحدود السّفلى على أعداد رامزي (التعريف 6.3.8). وقد عبّرنا عن ذلك بصورة توافقية في النظرية 12.3.8؛ وهنا نقدّم الإثبات نفسه بلغة احتماليّة تستخدم الملاحظة $P(\cup_i A_i) \le \sum_i P(A_i)$. لاحظ أنّ البياناتِ في هذا الجزء جميعها بياناتٌ بسيطة.

4.5.8. نظرية: ([Erdös [1947]) إذا كان $\binom{n}{p}2^{1-\binom{p}{2}} < 1$، فإنّ $R(p,p) > n$.

الإثبات: يكفي أنْ نبيّن أنّه عندما يكون $\binom{n}{p}2^{1-\binom{p}{2}} < 1$، فإنّه يوجد بيان G على n من الرّؤوس مع $\omega(G) < p$ و $\alpha(G) < p$. سوف نعرف نموذجًا احتماليًّا على بيانات لها مجموعة رؤوس $[n]$ بجعل كلّ ضلع يظهر بصورة مستقلة باحتمال يساوي **0.5**. إذا كان الاحتمال للحدث Q الذي هو "لا عصب من الدّرجة p أو مجموعة مستقلّة من الدّرجة p" موجبًا، فإنّ البيان المطلوب موجود.

كلّ عصبة ممكنة من الدّرجة p تحدث باحتمال يساوي $2^{-\binom{p}{2}}$؛ لأنّ الحصول على بيان تامّ يتطلّب الحصول على أضلاعه جميعها، وهذا يحدث بصورة مستقلة. لذلك، فإنّ احتمال الحصول على عصبة واحدة على الأقل من الدّرجة p يكون محدودًا بـ $\binom{n}{p}2^{-\binom{p}{2}}$. ويتحقّق الحدّ نفسه للمجموعات المستقلّة من الدّرجة p. لذا، فإنّ الاحتمال لـ "ليس Q" يكون محدودًا بـ $\binom{n}{p}2^{1-\binom{p}{2}}$، والمتباينة المعطاة تضمن أنّ $P(Q) > 0$. ■

5.5.8. ملاحظة. تقود تعليلات الوجود إلى خوارزميّات البناء الاحتماليّ. فضلًا عن أنّ الاحتمال لبيان عشوائيّ على 64 رأسا لكي يملك عصبة من الدرجة 1024 أو مجموعة مستقلّة من الدّرجة 10 هو أقلّ من $2^{-}((2^6)^{10}/10!)2$ [44]، حيث يكون 0.018 تقريبًا. إذا كان هنالك بيان مولّد بصورة عشوائية يملك مثل هذه المجموعة الرّديئة من الدّرجة 10،

فبالإمكان توليد بيان آخر. إنَّ احتمال تكرار بيانات رديئة هو حاصل ضرب أعداد صغيرة، وسريعًا تصبح صغيرة بصورة يصعب إدراكه. ■

إنَّ الحدّ السّفليّ في النظرية 4.5.8 بصورة غير دقيقة هو $\sqrt{2^k}$ ؛ أمّا الحدّ العلويّ الاستقرائيّ في النظرية 11.3.8 بصورة غير دقيقة فهو 4^k. لذا، فإنّ الفجوة كبيرة. وهنا نؤكّد أنّ طرقًا احتماليّة أكثر دقّة قد قدّمت تحسينات صغيرة في الحدّ السّفليّ. وعلى الرّغم من ذلك، فإنّ الحدّود التي بُنيت بناءً هي أكثر ضعفًا. لذا، يُعدُّ هذا فوزًا للطّريقة الاحتماليّة. إنَّ الإثبات بصورة جوهرية هو تعليل حسابيّ فقط. لاحظ أنّه يمكن إعادة صياغة العديد من التّعليلات الاحتماليّة ذات الفضاءات العينيّة المنتهية بوصفها تعليلات حسابيّة موزونة، إلاّ أنَّ البراهين في لغة الاحتمالات أبسط.

إنّ تقدّم المتغيّرات العشوائيّة يضيف قوّة كبيرة. وسوف نعيّن قيمًا للعناصر في فضائنا الاحتماليّ[1] . ولبرهنة المتباينات؛ فقد استخدمنا سابقًا المقارنة بين المعدّل والقيم الكبرى لمتغيّر عشوائيّ.

6.5.8. تعريف: المتغيّر العشوائيّ (random variable) هو دالّة تُعيّن عددًا حقيقيًّا لكلّ عنصر في فضاء احتماليّ. وسوف نستخدم $X = k$ ليرمز إلى الحدّث الذي يتكون من العناصر جميعها حيث تكون قيمة المتغيّر X هي k.

والتّوقع (expectation) E (X) لمتغيّر عشوائيّ X هو المعدّل الموزون $\sum_k kP\left(X = k\right)$. **وخاصيّة أعشاش (طواقي) الحمام** (pigeonhole property) للتّوقّع هي العبارة التي تنصّ على وجود عنصر في الفضاء الاحتماليّ بحيث تكون قيمة X كبيرة (أو صغيرة) مثل $E(X)$.

إنّ تطبيق خاصية طواقي الحمام تتطلّب قيمة أو حدًّا لـ $E(X)$. وتطبّق الحسابات غالبًا **خطّيّة التّوقّعات** على تعبير لـ X بدلالة متغيّرات عشوائيّة أبسط. ولتحقيق أهدافنا عمومًا، سوف نحصر اهتمامنا بنماذج احتماليّة على مجموعات منتهية، ونجمع عددًا منتهيًا من المتغيّرات العشوائيّة فقط. وهناك نتائج مشابهة تتحقّق في فضاءات احتماليّة متّصلة .

7.5.8. تمهيدية: (الخاصيّة الخطّيّة) إذا كان X والمجموعة المنتهية $\{X_i\}$ متغيّرات عشوائيّة على الفضاء نفسه، وكان $X = \sum X_i$، فإنّ $E(X) = \sum E(X_i)$. وكذلك فإنّ $E(cX) = cE(X)$ لكل $c \in \mathbb{R}$.

الإثبات: في فضاء احتماليّ متقطّع، يسهم كلّ عنصر بالكمّية نفسها لكلّ طرف في المعادلات المطلوبة. ■

غالبًا ما نطبّق التمهيديّة 7.5.8 لمتغيّرات عشوائيّة والتي تحسب بناءات جزئيّة. إنّ مثل هذا المتغيّر العشوائيّ هو مجموع متغيّرات تشير إلى ما إذا كان أحد الأشياء المحتملة التي حُسِبَت تحدث فعلاً. وهذه **المتغيّرات المؤشّرة** (indicator variables) تأخذ قيمًا في $\{0,1\}$ (تدعى كذلك المتغيّرات 0، 1). إنّ التّوقع لمتغيّر مؤشّر هو احتماليّة أنْ يساوي 1. تسهّل هذه الخصائص ما كان متوقّعًا أنْ يكون الاستخدام الأول للطّريقة الاحتماليّة.

(1) سوف نأخذ في الحسبان الفضاءات الاحتماليّة المتقطّعة فقط. ولكن هناك مفاهيم مشابهة تتحقّق لفضاءات احتماليّة متّصلة (مستمرّة).

8.5.8. نظرية: ([Szele [1943]) يوجد دوريّ ألعاب على n من الرّؤوس يملك $n!/2^{n-1}$ مسارًا هاملتونيًّا على الأقل.

الإثبات: ولِّد دوريّ ألعاب على $[n]$ بوصفها عشوائية باختيار $i \rightarrow j$ أو $j \rightarrow i$ مع احتماليّة متساوية لكلّ زوج $\{i, j\}$. ليكن X عددَ المسارات الهاملتونيّة؛ أيّ أنّ X هو المجموع لـ $n!$ من المتغيّرات المؤشِّرة للمسارات الهاملتونيّة المحتملة. واحتماليّة حدوث أيّ مسار هاملتونيّ هي $1/2^{n-1}$، لذلك فإنّ $E(X) = n!/2^{n-1}$. وفي دوري ألعاب ما، يكون X كبيرًا مثل التّوقّع على الأقلّ. ■

يعطي هذا الحدّ البسيط الذي يستخدم التّوقّع الجوابَ الصحيح تقريبًا للعدد الأكبر للمسارات الهاملتونيّة في دوري ألعاب على n من الرّؤوس؛ وقد أثبت ألون [Alon, 1990] أنّ هذا العدد هو $(n!/(2\text{-}o(1)^{n})$ على الأكثر. عندما تكون قيم معظم الأمثلة (المشاهدات) قريبة من القيمة المتطرّفة، فإنّ التّعليلات الاحتماليّة تكون فاعلة بشكل خاصّ.

يمكن تفسير العديد من المتباينات بوصفها عبارات حول القيمة المتوقّعة لمتغيّر عشوائيّ. وهذا ما يعطي إثباتًا أقصر من إثبات الطّرق التّوافقيّة غالبًا. والتمرين 42.1.3 يطلب إثباتًا توافقيًّا للنتيجة الآتية.

9.5.8. نظرية: ([Wei, 1981], [Caro, 1979]) $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$ لكلّ بيان G.

الإثبات: ([Alon- Spencer [1992, p81]) افترض أنّ لديك ترتيبًا لرؤوس في بيان G، إنّ مجموعة الرّؤوس التي تظهر قبل جيرانها جميعها تشكّل مجموعة مستقلة. عندما يتمّ اختيار التّرتيب بصورة منتظمة عشوائيًّا، فإنّ احتماليّة ظهور v قبل جيرانه جميعهم هي $1/(d(v)+1)$. لذلك، فإنّ طرف المتباينة الأيمن هو الحجم المتوقّع للمجموعة المستقلّة المشكّلة باختيار الرّؤوس التي تظهر قبل جيرانها في ترتيب رأسيّ عشوائيّ. ■

عندما يُولَد شيٌّ بصورة عشوائية ليكون قريبًا من امتلاكه خاصيّة مرغوبة، فإنه يمكن أنْ ينتج تغييرًا خفيفًا. يُدعى هذا الأسلوب **طريقةَ الحذف** (deletion method)، أو **طريقة التّبديل (التّغيير)** (alteration method) أو **طريقة الخطوتين** (two- step method). وتزودنا أعداد رامزي بتطبيق كلاسيكيّ على هذه الطّريقة (التمرين 16). وسوف نقدّم تطبيقين آخرين. تذكر أنّ $S \subseteq V(G)$ مجموعةٌ مسيطرة في G إذا كان كلّ رأس خارج S يملك جارًا في S (التعريف 26.1.3). وعندما يكون G منتظمًا من الدرجة k، فإنّ كلّ رأس سيسيطر على $k+1$ من الرّؤوس (بما فيه نفسه). لذا، فإنّ كلّ مجموعة مسيطرة تملك $n(G)/(k+1)$ رأسًا على الأقل. إنَّ طريقة التّغيير تعطي مجموعة مسيطرة قريبة من الحدّ في كلّ بيان ذي درجة صغرى k. لاحظ أنّ التعليل يستخدم المتباينة الأساسية $1\text{-}p < e^{-p}$ كالعديد من التعليلات التي تستخدم هذه الأساليب (التمرين 2).

10.5.8. نظرية: (Alon [1990]) كلّ بيان على n من الرّؤوس ذي درجة صغرى $k>1$ يملك مجموعة مسيطرة حجمها $\frac{1+\ln(k+1)}{k+1}\, n$ على الأكثر.

الإثبات: في مثل هذا البيان G، اختر مجموعة عشوائيّة $S \subseteq V(G)$ تشتمل على كلّ رأس $P = \ln(k+1) / (k+1)$ بصورة مستقلة. إذا كانت S معطاة، فاجعل T مجموعةَ الرّؤوس خارج S التي لا تملك جارًا في S؛ ولاحظ أنّ إضافة T إلى S يعطي مجموعة مسيطرة سوف نبحث عن الحجم المتوقع لـ $S \cup T$.

بما أنّ كلّ رأس يظهر في S مع احتمال p، فإنّ الخاصّيّة الخطّيّة تعطي أنّ $(E(|S|) = np)$. إنّ المتغيّر العشوائيّ $|T|$ هو مجموع لـ n متغيّر مؤشّر يدلّ على ما إذا كانت الرّؤوس القائمة بنفسها تنتمي إلى T. لاحظ أنّ $v \in T$ إذا

وفقط إذا كان v وجيرانه لا ينتمون إلى S. واحتمال هذا محدود بـ $(1-p)^{k+1}$ ؛ لأنّ درجة v تساوي k على الأقل. بما أنّ $e^{-p(k+1)} < (1-p)^{k+1}$ فإنّ $E(|S| + |T|) \le np + ne^{-p(k+1)} = n\frac{1+\ln(k+1)}{k+1}$. إنَّ خاصية طواقي الحمام للتّوقّع تكمل الإثبات. ■

هذا الحدّ السهل يعطي أصغر s_k تقريبًا، بحيث يملك كلُّ بيان G ذي درجة صغرى k مجموعةً مسيطرة حجمها $s_k n(G)$ على الأكثر. ([1990] Alon) والخوارزمية الجشعة تبرهن النتيجة نفسها بصورة بنائية (النظرية 30.1.3).

يوجد تطبيق شائع ولافت لطريقة الحذف، وهو إثبات وجود بيانات ذات خصر وعدد لونيّ كبيرين. وفيما بعد ظهرت بناءات صريحة أخرى [Kriz, 1989] ، [Ne′set′ril-Rödl, 1979] ، [Lovász, 1968a]. وسوف نعرض تبسيطًا للإثبات الأصليّ ([Alon – Spencer [1992, p35). يستخدم خاصية التوقع التي سنبرهنها في التمهيديّة 17.5.8.

11.5.8. نظرية : ([Erdös [1959) إذا أُعطينا $m \ge 3$ و $g \ge 3$، فإنّه يوجد بيان خصره g على الأقلّ، وعدده اللوني m على الأقلّ.

الإثبات: سوف نولّد بيانات بصورة مستقلة على مجموعة رؤوس $[n]$ وذلك بجعل كلّ زوج ضلعًا مع احتمال p. إنَّ البيان الذي لا يملك مجموعة مستقلّة كبيرة يكون ذا عدد لونيّ كبير؛ لأنّ $\chi(G) \ge n(G) / \alpha(G)$. لذلك، نختار P كبيرة بصورة كافية لعمل مجموعات مستقلّة كبيرة بصورة غير متشابهة. وكذلك نختار p صغيرة بصورة كافية لجعل العدد المتوقّع للحلقات القصيرة (طولها أقلّ من g) قليلًا. وإذا أعطينا بيانًا يحقق كلا الشرطين، فإننا نستطيع حذف رأس من كلّ حلقة قصيرة للحصول على البيان المنشود.

ولعمل هذا بصورة مختلفة، فإننا نولّد أكثر من $n/2$ حلقة قصيرة، ونضع $p = n^{t-1}$، حيث $t < 1/g$. كلّ من الحلقات المحتملة التي طولها j تحدث مع احتمال p_j. وبكتابة $n_{(j)}$ بدلاً من $n(n-1)\dots(n-j+1)$، فإنّه يوجد $n_{(j)}/(2j)$ حلقة محتملة لكل j. لذا، فإنّ توقّع العدد الكلّيّ X للحلقات التي طولها أقلّ من g هو:

$$E(X) = \sum_{i=3}^{g-1} n_{(i)} P^i/(2i) \le \sum_{i=3}^{g-1} n^{ti} / (2i)$$

بما أنّ $tg < 1$، فإنّ $E(X)/n \to 0$ عندما $n \to \infty$. وسوف نكمل في متباينة ماركوف التفاصيل لنستنتج أنّ $P(X \ge n/2) \to 0$ عندما $n \to \infty$. ولـ n كبيرة بما فيه الكفاية، فإنّ $P(X \ge n/2) < 1/2$.

بما أنّ $\alpha(G)$ لا يمكن أنْ يزداد عندما نحذف رؤوسًا، فإننا نحتاج إلى $(n-x) / \alpha(G)$ مجموعة مستقلّة على الأقلّ لتلوين الرّؤوس المتبقّية عندما نحذف رأسًا من كلّ حلقة. وإذا كان $X < n/2$ و $\alpha(G) \le n(2k)$، فإننا نحتاج إلى k لونًا للبيان المتبقّي على الأقلّ. وبأخذ $r = \lceil 3 \ln n / p \rceil$ ، فإنّ.

$$P(\alpha(G) \ge r) \le \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} < \left[ne^{-p(r-1)/2}\right]^r$$

وهذا يقترب من 0 عندما تكبر n.

بما أنّ $r = [3n^{1-t} \ln n]$ و k مثبتة. فإنّنا نستطيع اختيار n كبيرة بصورة كافية لنحصل على $r < n/(2k)$. وإذا اخترنا n كبيرة بصورة كافية بحيث $P(X \ge n/2) < 1/2$ و $P(\alpha(G) \ge r) < 1/2$ أيضًا، فإنّه يوجد بيان G على n من الرّؤوس بحيث $\alpha(G) \le n/(2k)$ وبحيث يملك G أقلّ من n/2 حلقة طول كلّ منها أقلّ من g. الآن، نحذف رأسًا من كلّ حلقة قصيرة، ونحتفظ ببيان خصره g على الأقلّ، وعدده اللوني k على الأقلّ ■

خصائص معظم البيانات (Properties of Almost All Graphs)

اقترحنا دراسة خصائص "تقريبًا دائمًا" أو غالبًا ما تتحقّق. وهذا التعبير له معنى في السّياق لنموذج الاحتمال.

12.5.8. تعريف: إذا أُعطيت متتالية من فضاءات الاحتمال، فاجعل q_n تمثّل الاحتمال لتحقّق الخاصّيّة Q في الفضاء $n-$ (الفضاء ذو البعد n). نقول: إن الخاصّيّة Q **تتحقّق تقريبًا دائمًا** (almost always) إذا كانت $lim_{n\to\infty} q_n=1$.

بالنسبة إلينا، فإنّ الفضاء $n-$ هو توزيع احتمالي على بيانات على n من الرّؤوس. عندما تتحقّق الخاصّيّة Q تقريبًا دائمًا، فإنّنا نقول: "يملك كلّ بيان الخاصّيّة Q تقريبًا". إنّ جعل البيانات جميعها التي لها $[n]$ بصفتها مجموعة رؤوس متشابهة بصورة متساوية تكون مكافئة لجعل كلّ زوج من الرّؤوس يظهر بوصفها ضلعًا مع احتمال $1/2$. إنّ النماذج التي تظهر فيها أضلاع بصورة مستقلة مع الاحتمال نفسه هي الأكثر شيوعًا للبيانات العشوائيّة؛ لأنّها تؤدّي إلى أبسط الحسابات. ونسمح لهذا الاحتمال بالاعتماد على n.

13.5.8. تعريف نموذج A: معطى n و $p=p(\text{n})$، نولّد بيانات على مجموعة رؤوس $[n]$ وذلك بوضع كلّ زوج بوصفها ضلعًا مع احتمال p بصورة مستقلة. إنّ احتمال كلّ بيان على m من الأضلاع يساوي $p^m\ (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$ والمتغيّر العشوائيّ Gp يرمز إلى بيان نحصل عليه من هذا الفضاء الاحتمالي. يعني "البيان العشوائيّ" نموذج A مع $\text{p}=1/2$ الذي يجعل البيانات جميعها مع مجموعة الرّؤوس $[n]$ متساوية الحدوث.

الحسابات للبيانات التي تكون مجموعة الرّؤوس فيها مثبتة (البيانات "الموسومة") تكون أسهل كثيرًا من الحسابات لصفوف التّشاكل العشوائيّة، وبما أنّ المدخلات للخوارزميّات هي بيانات مع مجموعات رؤوس محدّدة، فإنّ هذا النموذج يكون متناسقًا مع التّطبيقات.

غالبًا ما نقيس زمن التّشغيل للخوارزميّات بدلالة عدد كلّ من الرّؤوس و الأضلاع؛ لذا فربما نريد السيطرة على عدد الأضلاع، وهذا يقترح نموذجًا تكون فيه البيانات الموسومة على n من الرّؤوس و m من الأضلاع متساوية الحدوث. (نستخدم m لحساب عدد الأضلاع في هذا الجزء؛ لأنّ العدد $e=2.71828...$ يقوم بدور مهم في مناقشات المحاذاة).

14.5.8. تعريف: نموذج B: معطى n و $m=m(n)$. افترض أنّ كلّ بيان له مجموعة رؤوس $[n]$ وله ضلعًا يحدث مع احتمال $\binom{N}{M}^{-1}$، حيث $N=\binom{n}{2}$. يرمز المتغيّر العشوائيّ G^m إلى بيان مولّد بهذه الطريقة.

هذان النموذجان هما الأكثر شيوعًا من العديد من النماذج التي دُرِسَت. ويبدو نموذج B أكثر تناسبًا مع التّطبيقات. سوف نسأل أسئلة مثل "بوصفها دالّة في n: كم ضلعًا نحتاج إلى جعل بيان مترابطًا بصورة شبه مؤكدة؟"، وسوف نسأل في نموذج A، "بوصفها دالّة n: ما احتمال الضلع الذي نحتاج إليه لجعل بيان مترابطًا بصورة شبه مؤكدة؟" لسوء الحظ فإنّ الحسابات التي نحتاج إليها للإجابة عن مثل هذه الأسئلة أكثر عشوائية في النموذج B مقارنة بالنموذج A.

ولحسن الحظ، فإنّ نموذج B موصوف بصورة دقيقة من خلال نموذج A عندما تكون n كبيرة و $p = m / \binom{N}{2}$؛ لأنّ العدد الفعليّ للأضلاع المولّدة في نموذج A قريب جدًّا من التوقع الناتج m تقريبًا دائمًا. إنّ هذا الارتباط يكون صالحًا لمعظم الخصائص التي تهمّنا، و تتطلب برهنة هذا استخدامًا مفصلاً لتوزيع ذات الحدّين لعدد الأضلاع. تكون الخاصّيّة البيانيّة Q محدّبة (convex) إذا كان G يحقق Q عندما $F \subseteq G \subseteq H$ و F, H يحققان Q.

15.5.8. نظرية: (Bollobás [1985, p34-35]) إذا كانت Q محدّبة، و $p(1-p)\binom{n}{2} \to \infty$ فإنّ كل G^p يحقّق تقريبًا Q إذا وفقط إذا كان لكلّ x مثبتة، فإنّ كل G^m تقريبًا يحقق Q ، حيث $m = \left\lfloor p\binom{n}{2} + x\left[p(1-p)\binom{n}{2}\right]^{1/2} \right\rfloor$.

تبرّر النظرية 15.5.8 حصر اهتمامنا بالنموذج A، فضلًا عن أنها تحفّز جعل p بوصفها دالّة بدلالة n. ولدراسة البيانات على عدد خطّيّ من الأضلاع؛ يجب أنْ نجعل p تختفي بمعدّل مثل c/n حيث يكون c ثابتًا؛ وثبات p يعطي بيانات كثيفة.

إنّ إثبات $P(Q) \to 1$ يكون أسهل كثيرًا من حساب $P(Q)$ عادة. ويعدُّ هذا التّمييز مهمًّا. لاحظ أنّ حسابًا مضبوطًا للاحتمالات يكون صعبًا وغير ضروري، ومُتَجَنَّبًا حيثما أمكن. ويُسْتَخْدَمُ بدلاً من ذلك التّحليلُ التّقاربيُّ (المحاذي) الذي يستند إلى النّهايات. ونكتب $a_n \to L$ للدلالة على أنّ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ولمقارنة معدّل النّمو للمتتاليات؛ نستخدم الرّمزين "O كبيرة" و "o صغيرة" (انظر الملحق B للتعريفات)، حيث نكتب $a_n = b_n(1+o(1))$ عندما يكون $\langle a\rangle$ و $\langle b\rangle$ مختلفين بمتتالية تنمو بصورة أكثر بطئًا من $\langle b\rangle$؛ بشكل مكافئ، $a_n / b_n \to 1$. عندما يكون $a_n / b_n \to 1$، فإننا نقول إنّ a_n **مقاربة** (asymptotic) لـ b_n، ونكتب $a_n \sim b_n$.

نستخدم عبارات التّقارب لإهمال حدود التّرتيب السّفليّ التي لا تؤثّر فيما إذا كان $\lim_{n\to\infty} P(Q) = 1$ إنّ حساب $P(Q)$ أوّلاً، ثمّ إثبات أنّ الصيغة تؤول إلى 1 هو أكثر صعوبة وغير ضروري، ونحتاج فقط إلى تبيان أنّ $P(-Q)$ محدود بشيء ما يقترب من 0. لاحظ أنّ العديد من المناقشات التّقاربيّة هي مناقشات "غير دقيقة"؛ لأنّنا لا نهتم بسعة الحدّ ما دام يقترب من 0، وسوف يتطوّر حدسنا حول ما نستطيع إهماله بصورة آمنة من خلال الخبرة.

16.5.8. نظرية: (Gillbert [1959]) عندما يكون p ثابتًا، فإن G_p كلّه يكون مترابطًا تقريبًا.

الإثبات: نستطيع جعل G غير مترابط باختيار تجزئة للرؤوس مكوّنة من مجموعتين، ومنع وجود أضلاع بين هاتين المجموعتين؛ لأنّ وجود الأضلاع داخل هاتين المجموعتين غير ذات صلة. ونحدّد الاحتمال q_n الذي يجعل G_p غير مترابط من خلال جمع $P([S,\overline{S}] = \phi)$ على التجزئات الثنائية S، $\overline{S}$ جميعها؛ حيث إن البيانات التي لها العديد من المركبات تعدّ الكثير من المرات. وعندما يكون $|S| = k$ ، فإنّه يوجد $k(n-k)$ ضلعًا محتملاً في $[S,\overline{S}]$ واحتمال عدم ظهور أيّ منها بصورة مستقلة هو p - 1. لذا، فإنّ $P([S,\overline{S}] = \phi) = (1-p)^{k(n-k)}$. وعلى اعتبار أنّ S كلها تولّد كلّ تجزئة من كلّ جانب، فإنّ $q_n \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(1-p)^{k(n-k)}$.

هذه الصيغة متماثلة في k و n-k؛ إذن، q_n محدودة بـ $\sum_{k=1}^{\lceil n/2\rceil}\binom{n}{k}(1-p)^{k(n-k)}$. وقد خفّفنا الحدّ لتبسيطه. وباستخدام $\binom{2}{k} < 2k$ و $(1-p)^{n-k} \le (1-p)^{n/2}$ (لـ $k \le n/2$) فإنّ $q_n < \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(n(1-p)^{n/2})^k$. ولـ n كبيرة بما فيه الكفاية، فإنّ $n(1-P)^{n/2} < 1$. إنّ هذا يجعل حدّنا هو الجزءَ الابتدائيّ من متسلسلة هندسيّة تقاربيّة. ونحصل على أنّ $qn < x/(1-x)$ حيث $x = n(1-p)^{n/2}$. بما أنّ $n(1-p)^{n/2} \to 0$ عندما يكون p ثابتًا، فإنّ حدّنا على q_n يقترب من 0 عندما $n \to \infty$. ■

سوف نتجنب بذل الجهد والمعاناة مع صيغ الاحتمالات من خلال تقديم متغيّرات عشوائيّة ذات قيَم صحيحة وأساليب تتضمّن التّوقّع. إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا غير سالب بحيث $X = 0$ عندما يملك G_p الخاصية Q، فإنّ $E(X) \to 0$ تؤدي إلى أنّ G^p كلها تقريبًا تحقّق Q. وهذه حالة خاصّة للتمهيديّة الآتية التي سنثبتها فقط للمتغيّرات الصحيحة، ولكنّها أيضًا تتحقّق للمتغيّرات المتّصلة (المستمرّة).

17.5.8. تمهيدية: (متباينة ماركوف) إذا كان X يأخذ القيم غير السالبة فقط، فإنّ $P(X \geq t) \leq E(X)/t$. بوجه خاصّ، إذا كان X ذا قيم صحيحة، فإنّ $E(X) \to 0$ تعطي $P(X = 0) \to 1$.

الإثبات: $E(X) = \sum_{k \geq 0} kp_k \geq \sum_{k \geq t} kp_k \geq t \sum_{k \geq t} p_k = tP(X \geq t)$. ■

لخاصيّة التّرابط، نستطيع معرفة أنّ $X(G^p)$ بواسطة $X = 1$ إذا كان G غير مترابط و $X = 0$ خلاف ذلك. والتّوقّع لمتغيّر مؤشّر هو احتمال أنْ يساوي 1. لقد برهنّا أنّ $P(X = 1) \to 0$ عندما يكون P ثابتًا لنبرهن أنّ G^p كله تقريبًا يكون مترابطا. ومع متغيّر عشوائيّ مختلف فإنّنا نستطيع تبسيط الإثبات وتقوية النتيجة. ما زلنا نريد من G أنْ يحقّق Q إذا كان $X = 0$ (لكي نطبق متباينة ماركوف)، ولكننا لا نحتاج إلى ($(X = 0) \Leftrightarrow G$ يحقّق Q). نستخدم المجموع X للعديد من المتغيّرات المؤشِّرة بحيث G يحقق Q إذا كان $X = 0$. إنّ خطّيّة التّوقع وملاءمة $E(X_i) = P(X_i = 1)$ للمتغيّرات المؤشِّرة تبسّطان المهمة لإثبات أنّ $E(X) \to 0$.

18.5.8. نظرية: إذا كان p ثابتًا، فإنّ قطر (G^p) كله يساوي 2 تقريبًا (وعليه، فإنّ G يكون مترابطًا).

الإثبات: ليكن $X(G^p)$ عددَ أزواج الرّؤوس غير المرتبة التي ليس لها جار مشترك. وإنْ لم يوجد مثل هذه الأزواج، فإنّ G_p مترابط وقطره 2. ومن متباينة ماركوف، نحتاج فقط إلى تبيان أنّ $E(X) \to 0$. سوف نعبّر عن X بوصفه مجموعًا لـ $\binom{n}{2}$ من المتغيّرات المؤشِّرة $X_{i,j}$، واحد لكل زوج من الرّؤوس $\{v_i, v_j\}$، حيث $X_{i,j} = 1$ إذا و فقط إذا كان v_i, v_j لا يملكان جارًا مشتركًا.

عندما يكون $X_{i,j} = 1$، فإنّ الرّؤوس الأخرى وعددها $n - 2$ تفشل بامتلاك أضلاع تصل إلى هذين الرّأسين. لذا، فإنّ $P(X_{i,j} = 1) = (1 - p^2)^{n-2}$ و $E(X) = \binom{n}{2}(1 - p^2)^{n-2}$. وعندما يكون p مثبتًا، فإنّ $E(X) \to 0$. وعليه، فإنّ قطر G_p كلّه هو 2. ■

إنّ الحدس وراء هذا التعليل الذي جُعل مضبوطًا باستخدام متباينة ماركوف، هو أنه إذا توقعنا عدم وجود أزواج سيئة، فإنّ كلّ بيان تقريبًا لا يملك أزواجًا سيئة. حيث يختفي المجموع ، وأخيرا، نحتاج فقط إلى معرفة أنّ $(1 - p^2)^{n-2}$ تؤول إلى 0 أسرع من أيّ دالّة كثيرة حدود بدلالة n.

دوال العتبة (Threshold Functions)

بصورة غير دقيقة، نقول إنّ البيانات العشوائيّة التي لها احتمال ضلعيّ ثابت تكون مترابطة؛ لأنّها تملك العديد من الأضلاع أكثر مما نحتاج إليه لتكون مترابطة. ولتحسين النظرية 18.5.8؛ فإنّنا نريد أنْ نجعل $p(n)$ صغيرة بصورة كافية ليكون G_p كلّه مترابطًا تقريبًا، نحتاج إلى فكرة دالّة احتمال العتبة. من العلاقة بين النموذجين A

و B، فإنّ احتمال ضلع العتبة يعطي أيضًا عدد عتبة للأضلاع.

19.5.8. تعريف: نعرّف الخاصّيّة الرّتيبة (monotone property) على أنّها خاصّيّة بيانيّة يُحافظ عليها من خلال إضافة أضلاع، في حين نعرّف **دالّة احتمال العتبة** (threshold probability function) لخاصية رتيبة Q على أنّها دالّة $t(n)$ بحيث تؤدي $p(n)/t(n) \to 0$ إلى أنّه لا يوجد تقريبًا G_p تحقّق Q، أما $p(n)/t(n) \to \infty$ فتؤدي إلى أنّ G_p كلّه تقريبًا يحقّق Q. وتعرّف **دالّة ضلع عتبة** (threshold edge function) بطريقة مشابهة لنموذج B.

هذه فكرة واسعة عن دالّة العتبة التي تسمح لخاصية ما أنْ يكون لها العديد من دوالّ العتبة، وتكون دالّة العتبة $t(n)$ أكثر حدّة إذا حدث سلوك بشكل مؤكّد تقريبًا عندما تقترب $P(n)/t(n)$ من ثوابت غير صفريّة. وتبقى دالّة العتبة $t(n)$ أكثر حدّة حيث يحدث هذا السّلوك عندما يختلف $p(n)$ عن $t(n)$ بالطرح أو الإضافة لحدٍّ ذي رتبة أقلّ.

لاحظ أنّ متباينة ماركوف تقوم بنصف العمل لاشتقاق دالّة عتبة. إذا كان $X = 0$ يعطي خاصية Q، وبرهنا أنّه إذا كان $E(X) \to 0$، فإنّ $P(Q) \to 1$. نحصل على مرشّحات لدوال عتبة بتحديد أيّ الدّوالّ $p(n)$ يعطي $E(X) \to 0$. غالبًا ما نحصل على $p(n)$ بحيث $E(X) \to 0$ أو $E(X) \to \infty$، استنادًا إلى قيمة المتغير c. وتقترح الخاصّيّة $E(X) \to \infty$ أنّ $P(X=0) \to 0$، ولكن هذا لا يتبع دائمًا. فعلى سبيل المثال، $E(X) \to \infty$ عندما

$P(X=0) = .5$ و $P(X=n) = .5$. ولنحصل على $P(X=0) \to 0$ يجب أنْ نمنع الاحتمال من الامتداد هكذا.

20.5.8. تعريف: إنَّ **العزم من الدرجة** r (rth moment) لـ X هو التّوقّع لـ X^r. **والتّباين** (variance) لـ X، يكتب $var(X)$، وهو الكمية $E[(X - E(X))^2]$. أمّا **الانحراف المعياريّ** (Standard deviation) لـ X فهو الجذر التّربيعيّ لـ $var(X)$.

21.5.8. تمهيدية: (طريقة العزم الثّاني) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا، فإنّ $P(X=0) \le \frac{E(X^2)-E(X)^2}{E(X)^2}$، بوجه خاص، $P(X=0) \to 0$ عندما $\frac{E(X^2)}{E(X)^2} \to 1$.

الإثبات: إنَّ تطبيق متباينة ماركوف على المتغيّر $(X-E(X))^2$ وعلى القيمة t^2، تؤدي إلى أنّ

$P[(X - E(X)^2 \ge t^2] \le E[(X - E(X)))^2]/ t^2$ ونعيد كتابة هذا على الصورة الآتية:

$P[|X-E(X)| \ge t] \le var(X)/ t^2$ متباينة شبيشيف (Chebyshev's Inequality). وبما أنّ

$E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$،

فإنّ متباينة جبيجيف تصبح $P[|X-E(X)| \ge t] \le (E(X^2) - (E(X)^2)/ t^2$. وبما أنّ $X = 0$ فقط عندما $|X - E(X)| \ge E(X)$، فإنّ وضع $t = E(X)$ يكمل الإثبات. ■

حدسيًّا، إذا كبر الوسط الحسابيّ، وكبر الانحراف المعياريّ بصورة أكثر بطئًا، فإنّ الاحتمال كله يسحب بعيدًا عن 0، وينتج أنّ $P(X=0) \to 0$. نوضّح الطّريقة آخذين في الحسبان اختفاء الرّؤوس المعزولة. بما أنّ البيان المترابط لا يملك رؤوسًا معزولة، فإنّ العتبة لخاصّيّة التّرابط يجب أنْ تكون كبيرة، على الأقلّ مثل العتبة لعدم الظّهور للرّؤوس المعزولة. إنّ الحسابات للثاني تكون أبسط؛ لأنّنا نستطيع التّعبير عن هذا الشّرط باستخدام

23.5.8. نظرية: إذا كان H بيانًا متوازنًا على k من الرّؤوس و l من الأضلاع، فإنّ $p=n^{-k/l}$ دالّة عتبة في

مجموع متغيّرات مؤشّرة موزّعة بصورة متطابقة مع توقّعات محسوبة بصورة سهلة. في الحقيقة، كلّ من الخاصّيّتين تملكان العتبة نفسها؛ وذلك لأنه عند العتبة يكون كل بيان تقريبًا مكونًا من مركبة واحدة ضخمة إضافة إلى رؤوس معزولة.

22.5.8. نظرية: في نموذج A، $\ln n/n$ (اللوغاريتم الطّبيعيّ) هو دالّة احتمال عتبة لعدم ظهور الرّؤوس المعزولة (بمعنى أنّ $\delta\,(G) \geq 1$). (العتبة المقابلة في النموذج B هي $\frac{1}{2}\, n\, \ln n$).

الإثبات: ليكن X عددَ الرّؤوس المعزولة؛ حيث يشير X_i إلى ما إذا كان الرّأس i معزولاً.

لذلك، فإنّ $E\ (X) = \sum E\ (X_i) = n\ (1-p)^{n-1}$ سوف ندرس سلوك التّقارب لـ $E\ (X)$ بدلالة $p(n)$ بما أنّ $(1\text{-}p)^n = e^{n\ln(1\text{-}p)} = e^{-np}\, e^{-np2[1/2+p/3+\dots]}$،

يُبسّط تعبيرنا عن $E\ (X)$ بصورة تقاربية إذا كان $np^2 \to 0$. إنّ هذا مكافئ لـ $p \in o\,(1\sqrt{n}\,)$ ويؤدّي إلى أنّ e^{-np} في $(1 - p)^n$ و 1 في $(1\text{-}p)^{-1}$، وهذا يؤدّي إلى أنّ ne^{-np} في $E\ (X)$. وللتّبسيط أكثر؛ ضع $p = c\ln n/n$ للحصول على $ne^{-np} = n^{1-c}$ بسبب إمكانيّة اعتماد c على n. ويعطي الثابت c أنّ $p \in o\,(1\sqrt{n}\,)$ ، كما احتجنا إليها سابقًا. وعندما يكون $c > 1$، فإنّ $n^{1-c} \to 0$ في $E\ (X)$ وهذا يبرهن جانبًا واحدًا للعتبة.

عندما $c<1$، فإنّ $E(X)\to\infty$ ونستخدم طريقة العزم الثانية. حيث نحتاج فقط إلى توضيح أنّ $E(X)^2$ في $E(X^2)$. وهنا تُستَخْدَمُ خاصّيّة مساعدة أخرى للمتغيّرات المؤشِّرة: $X_i^2 = X_i$. لذا، فإنّ:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_{i\neq j} E(X_i X_j) = E(X) + n(n-1)E(X_i X_j).$$

تكون قيمة المتغيّر المؤشِّر X_iX_j 1 فقط عندما يكون كلّ من v_i و v_j معزولاً، وهذا يمنع وجود $2(n\text{-}2)+1$ ضلعًا. لذا، فإنّ $E(X_iX_j) = (1 - p)^{2n-3}$. مرة أخرى $e^{-np} \sim (1\text{-}p)^n$، ولذلك، فإنَّ e^{-2np} في $E\ (X_iX_j)$، و $E\ (X)^2 + E$ في $n(n\text{-}1)e^{-np}$ في $E\ (X) + n(n\text{-}1)e^{-np}$ في $E(X^2)$.

بما أنّ $E\ (X) \to \infty$، فإنّ هذا يعطي $E\ (X)^2$ في $E\ (X^2)$.

النظرية 22.5.8 أقوى من المطلوب من خلال التعريف لدالّة العتبة. لاحظ أن دالة العتبة أكثر حدّة: حيث نضمن أو نمنع وجود رؤوس معزولة عندما تكون نسبة $p(n)$ إلى $\ln n/n$ تقترب من ثابت غير صفري، أي أن الثابت لا يساوي 0 ولا يكون ∞.

في الحقيقة، ما زالت هناك معلومات أكثر حدّة معروفة حول العتبة للرّؤوس المعزولة. عندما يكون $p = \lg n/n + x/n$ ، وتحسب X الرّؤوسَ المعزولةَ، فإنّ: $P\ (X = k)$ في $e^{-M}\, \mu^k/\, k!$ ، حيث $m = e^{-x}$. (من الممكن أنّ يتعرّف القرّاء هذا التوزيع المُحدّد **كتوزيع بويسون** (Poisson distribution). لـ $k = 0$، فإنّ e^{-M} في $P(X = 0)$. لذا، فإنّ هذا الحدّ الجمعيّ في p يصف التّحرك خلال العتبة من رؤوس معزولة تقريبًا دائمًا إلى رؤوس غير معزولة تقريبًا. وهناك العديد من العتبات الحادّة المماثلة المعروفة، ولكن هدفنا هو أساليب اشتقاق توزيع بويسون التّقاربيّ.

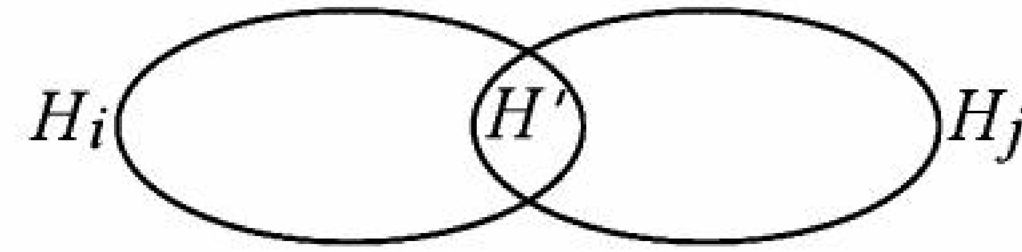
سنشتق فيما يأتي دالّة عتبة لظهور البيانات الجزئيّة المثبتة. يكون البيان متوازنًا (*balanced*) إذا كان معدّل درجة الرّأس في كلّ بيان جزئيّ مستحدث ليس أكبر من معدّل درجة البيان الكلّيّ، لاحظ أنّ البياناتِ المنتظمةَ جميعَها والغاباتِ كلَّها كذلك هي بياناتٌ متوازنةٌ.

النموذج A لظهور H بوصفها بيانًا جزئيًا من G^p كلّه تقريبًا.

الإثبات: ليكن X عددَ نسخ H في G^p؛ أيّ أنّ X مجموعةُ المتغيّرات المؤشّرة للنسخ المحتملة من H في K_n. يوجد $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ من الطّرق لإرسال $V(H)$ إلى $[n]$. وكلّ نسخة من H تظهر A من المرّات، حيث A عددُ التّشاكلات الذّاتيّة لـ H. ولذلك، نحصل على $\frac{1}{A}\prod_{j=0}^{K-1}(n-j)$ من المتغيّرات X_i. بما أنّ نسخة من H تحدث عندما تحدث أضلاعها، فإنّ $P(X_i=1)=p^l$. ولأنّ k مثبتة، فإنّ $E(X)\sim n^k p^l/A$.

إنّ وضع $p(n)=c_n n^{-k/l}$ يعطي $E(X)\sim c_n^l/A$. لذلك، فإنّ $c_n\to 0$ تعطي $E(X)\to 0$، و $c_n\to\infty$ تعطي $E(X)\to\infty$. بقي فقط أنْ نحصل على $E(X)^2\sim E(X^2)$ عندما $c_n\to\infty$. مرة أخرى $E(X^2)=E(X)+\sum_{i\neq j}E(X_iX_i)$. إنّ هذه المجاميع غير متساوية؛ لأنَّ $E(X_iX_j)$ تعتمد على أنّ $H'=H_i\cap H_j$. نجمع الحدود باختيار $H'\subseteq H$. وعندما يكون H' له r رأسًا و s ضلعًا، فإنّ عدد الأضلاع الذي نحتاج إليه لتكوين H_i و H_j هو $2l-s$. لذا، فإنّ

$E(X_iX_j)=P^{2l-s}$.



لتعيين أزواج j, i بحيث إنّ $H'=H_i\cap H_j$، نختار r من الرّؤوس لـ H'، و $k-r$ من الرّؤوس لكلّ من H_i-H' و H_j-H'، وتوسعة لـ H' لكلّ واحدة من تلك المجموعات. إنّ عدد الطرق لاختيار مجموعات الرّؤوس هو $\frac{n!}{r!(k-r)!(k-r)!(n-2k+r)!}$، الذي يقارب $n^{2k-r}/[r!(k-r)!^2]$. بالإضافة إلى أنّ عدد الطرق M لتوسعة H' لكي نحصل على نسخ من H في كلا المجموعتين المعيّنتين من الدرجة k يعتمد على H و H' فقط. وهذا العدد مستقلّ عن n و p. ليكن $\alpha H'$ الثابتَ $M/[r!(k-r)!^2]$. المساهمة لـ $\sum E(X_iX_j)$ من الأزواج j,i حيث تكون $H_i\cap H_j=H'$ تقاربيّة لـ $\alpha_H' n^{2k-r}p^{2l-s'}$؛ ويُدعى هذا $E_{H'}$.

عندما يكون $r=s=0$ فإن $M=(k!/A)^2$. لذلك فإن $\alpha_H'\sim n^{2k}p^{2l}/A^2\sim E(X)^2$ عندما يكون H' "بيانًا خاليًا". وهذه هي المساهمة الكلية لـ $\sum E(X_i\ X_j)$ لجميع i,j حيث يكون H_i, H_j منفصلين، ويكون هذا مقاربًا لـ $E(X)^2$. ويكتمل الإثبات بإثبات أنّ المساهمة الكلية من الاختيارات الأخرى لـ H' كلّه يملك رتبة أقل. لدينا $E_{H'}\sim\alpha_{H'}A^2E(X)^2n^{-r}p^{-s}$ بما أنّ $2s/r$ معدّلُ الدرجة لـ H'، والفرض أنّ H متوازن فهذا يعطي أنّ $2r/s\geq 2k/1$ أو $pn^{r/s}\geq pn^{k/l}\to\infty$ عندما $c_n\to\infty$. وبما أنّ $pn^{r/s}\to\infty$ يكافئ $n^{-r}p^{-s}\to 0$، فإنّنا نحصل على أنّ $E_H\in o(E(X)^2)$ لـ $H'\neq\phi$. وبما أنّ عدد البيانات الجزئيّة المحتملة H' محدود (بتعبير يتضمن الثوابت k و l)، فهذا يعطي أنّ $E(X)^2$ في $E(X)+E_{\emptyset}$ في $E(X^2)$. ■

وتعمّم هذه النتيجة لـ H كلّه. إنّ النسبة $d(H)=e(H)/n(H)$ هي **الكثافة** (density) لـ H، أمّا $\rho(H)=\max_{F\subseteq H}d(F)$ فهي **الكثافة الكبرى** (maximum density)، حيث تكونان متساويتين بالضبط عندما يكون H متوازنًا. لذا، فإنّ $p=n^{-1/p(H)}$ هو العتبة لظهور H. لاحظ أنّ كلّ بيان H يملك بيانًا جزئيًّا متوازنًا F بحيث يكون $d(F)=p(H)$. وعندما $pn^{p(H)}\to 0$، فإنّ G^p كلّه تقريبًا لا يملك نسخة من F؛ إذن، فهو أيضًا لا يملك نسخة من H. وفي الحقيقة فإنّ $p=n^{-1/p(H)}$ يكون دائمًا دالّة عتبة لظهور H (التمرين 25).

التطوّر ومتغيرات البيان (Evolution and Graph Parameters)

نجد في العنوان الفرعي لكتاب بالمر [Palmer, 1985] أنّ البيانات العشوائيّة تتضمن دراسة "دوال العتبة التي تسهّل الدراسة الحذرة لتركيب البيان في أثناء نموّه، وخصوصًا في اكتشاف الظروف الغامضة التي تحيط بالظهور المفاجئ للمركبة الضخمة الوحيدة التي تمتصّ جيرانها بصورة نظامية، وتبتلع الأكبر منهم أولاً دون رحمة، وتستمر في الامتصاص حتى آخر رأس معزول. ثمّ تقع المركبة بشكل مفاجئ تحت السيطرة بواسطة حلقة مولّدة".

إنّ وجهة النظر المتطوّرة تولّد بيانات عشوائيّة على m من الأضلاع بطريقة تعطي فضاء الاحتمال نفسه كنموذج B، ولكنها تجعل التفكير البدهي أسهل. وبصورة تقريبية، فإنّ كلّ شيء اقترح حول البيانات العشوائيّة بصورة حدسيّة أو تجريبية يكون صحيحًا. فضلًا عن أنّ وجهة النظر المتطوّرة تحسّن هذا الحدس.

إنّ توليد m من الأضلاع في الوقت نفسه أو واحدًا تلو الآخر يعطي التوزيع الاحتمالي نفسه، جاعلاً البيانات على m من الأضلاع متساوية الحدوث. ومن خلال دراسة تأثير ضلع جديد على التركيب الحاليّ، نستطيع عمل فرضيات بدهية حول الخصائص للبيان عند أيّ مرحلة. إنّ مرحلة التّطوّر هي مدى من القيم لـ $m(n)$ (أو $p(n)$) يتحقّق فيه الوصف التركيبيّ لبيان نموذجيّ لا يتغيّر كثيرًا. لقد درسنا الأساليب الأساسيّة للتّحقّق من هذه الأوصاف، ولكن الحسابات قد تكون صعبة. لذا، سوف نصف المراحل باستخدام التّطوّر الحدسيّ فقط.

نلاحظ أولاً أنّ مضاعفًا بثابت تقريبًا للاشيء هو تقريبًا لا شيء. لذلك، عندما يحدث كلّ من $A_r, \ldots A_p$ دائمًا تقريبًا (r مثبتة)، فيتبع تقريبًا دائمًا أن جميعها تحدث.

في البداية، نبدأ بالعديد من الرّؤوس دون أضلاع، وكلّ ضلع جديد يكون شبه معزول. لاحظ أنّ البيان العشوائيّ هو مواءمة حتى يكون جزء لابأس به من الرّؤوس المتضمنة قد رُبطَ من خلال الأضلاع. إنّ العتبات $p \sim cn^{-k/(k-1)}$ لظهور شجرات جزئيّة مثبتة تعمّم هذا. ليكن $t_k(n) = n^{-k/(k-1)}$. إذا كان $p/t_k \to \infty$ ولكن $p/t_{k+1} \to 0$ ، فإنّ كلّ شجرة جزئيّة مثبتة على k من الرّؤوس تظهر، ولكن لا يظهر أيّ منها على $k+1$ من الرّؤوس. (العبارات حول الأشجار المنفردة تصبح عبارات حول الأشجار جميعها التي لها الرتبة نفسها). فضلًا عن ذلك، فإن p هذه هي أيضًا تحت العتبة لظهور حلقات مثبتة (الكثافة $\mathbf{1}$، طول محدود بـ k). لذلك، فإنّ G^p غابةٌ من الأشجار التي رتبتها k على الأكثر. وتظهر كلّ شجرة على k من الرّؤوس بوصفها مركّبة.

حدسيًّا، لا يملك البيان العشوائيّ حلقات في هذه المرحلة من التّطوّر؛ لأنّه عندما لا توجد مركبة كبيرة، فإنّ إضافة ضلع بشكل عشوائيّ يكون أكثر ميلاً لربط مركبتين من الوقوع في مركبة واحدة. ولجعل الحدس دقيقًا، نضع X ليكون عدد الحلقات في G^p ونحسب:

$$E(X) = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2}(k-1)!\,p^k < \sum_{k=3}^{n} (np)^k/2k$$

إذا كان $pn \to 0$ فإنّ $E(X) \to 0$.

المرحلة الرئيسة التالية للتّطوّر هي $p= c/n$ حيث $0 < c <1$. بافتراض أنّ X تحسب الحلقات، لا نستطيع الاستمرار بالقول إنّ $E(X) \sim \sum_{k=3}^{n} (np)^k / 2k$؛ لأنّه عندما يكون k جزءًا أساسيًّا لـ n، فإنّ النسبة $n^k/(n)_k$ لا تقترب من 1. لذا، يجب أن نقسم $E(X)$ إلى مجموعتين، وتصبح التعليلات أكثر صعوبة. عندما $pn \to c$ ، فإننا نجد أنّ $E(X)$ تقترب من ثابت c'، والعدد للحلقات في G^p هو توزيع بويسون تقريبيًا. ومع وجود حلقات في مركبات قليلة ومع أنّ المركبات جميعها صغيرة، فإننا لا نزال نتوقّع أنّ الضّلع التّالي سوف يربط مركّبتين أو ينشئ حلقة في مركّبة لا تملك حلقة. في هذا المدى، فإنّ حجم أكبر مركّبة هو $\log n$ تقريبيًا . وهناك العديد من المركّبات التي يملك كلّ منها حلقة واحدة على الأكثر، في حين تبقى معظم الرّؤوس منتمية إلى مركّبات لا حلقيّة.

عندما تصل c وتتعدى 1، فإنّ بنية G^p تتغيّر بصورة جذرية. ويُسمّى هذا **القفزة المزدوجة** (double jump) ؛ لأنّ بنية G^p ذات معنًى مختلف لـ $c <1$، $c \sim 1$، و $c > 1$. عند $pn = 1$، فإنّ طريقة العزم الثانية تضمن أنّ G^p كلّه يملك حلقة تقريبيًا. وتقفز رتبة أكبر مركّبة من $\log n$ إلى $n^{2/3}$. لـ $Pn = c > 1$ ، لاحظ أنّ الرتبة "للمركّبة الضخمة" تصبح خطّيّة في n. كذلك فإنّ G^p يميل لامتلاك حلقة لها ثلاثة أوتار متقاطعة، ويكون غير سويّ.

تاليًا، ليكن p قريبًا من $c \ln n/n$. مع $c < 1$، لقد برهنّا أنّ G^p كلّه يملك رؤوسًا معزولة تقريبيًا. وعندما $c > 1$، فإنّ هذه الرّؤوس تختفي. عندما نضيف أضلاعًا لبيان غير مترابط، فإنّ هذه الأضلاع يمكن أنْ تذهب داخل مركّبة، أو أنّها تربط مركّبتين. وعندما تكون المركّبات جميعها صغيرة، فإنّ إضافة أضلاع سوف تربط بصورة مؤكدة بين مركّبات تقريبيًا. وفي نهاية الأمر، فإنّ هذا ينتج مركّبةً ضخمة. عند هذه النقطة، لاحظ أنّ الأضلاع المضافة تكون تقريبيًا داخل المركّبة الضخمة، أو تربطها بإحدى المركّبات الصّغيرة. ومن بين هذه المركّبات الصّغيرة، نجد أنّ فرصةَ المركّبات الكبيرة منها أكبرُ لاستقبال مثل تلك الأضلاع. وبتعبير آخر، عندما تتعدى c الـ 1، فإنّ المركّبات الصّغيرة المتبقّية التي تُبْتَلَعُ من قِبَلِ المركّبة الضخمة تكون رؤوسًا معزولة. وهذا يفسّر بصورة حدسيّة لماذا تكون العتبة لخاصية التّرابط هي نفسها العتبة لعدم الظهور للرّؤوس المعزولة . إذا كان $c > 1$، فسنجد فجأة أنّ G^p كلّه يملك أيضًا حلقة مولّدة تقريبيًا. ولاحظ أنّ درجة صغرى k (والظهور للحلقة الهاملتونيّة عندما $k = 2$) تملك عتبة تتضمّن حدًّا ذا رتبة أقل وهو: $\ln n/n + (k - 1) \ln n/n$.

إنّ المراحل الأخيرة من التّطوّر تحدث عندما $pn/\ln n \to \infty$ ، لكن $p = o(1)$. وأخيرًا، فإنّ $p = c$؛ وهذا يعود بنا إلى حيث بدأنا دراستنا.

عندما يكون $p = c\log n/n$ مع $c \to \infty$، سنترك المجال للبيانات المتناثرة، حيث تصبح وجهة النظر التّطويريّة ذات قيمة أقل، وسندرس خصائص البيان العشوائيّ، وسنعطي اهتمامًا أقلّ لدوال احتمال العتبة، ونركّز على القيمة المشابهة لمتغيرات البيان، وخصوصًا عندما يكون p ثابتًا. افترض أنّ m متغيّر معطى. لاحظ أنّنا نريد بيان أنّ $\mu(G^p) \sim f(n)$ تقريبيًا لكل G^p. نستطيع عرض هذا كعتبة عندما يكون $\mu(G^p)$ هو تقريبيًا دائمًا بين $(1 - \epsilon)\, f(n)$ و $(1 + \epsilon)\, f(n)$ ، لكل $\epsilon > 0$. إذا كان $\mu(G^p)$ هو تقريبيًا دائمًا بين $f(n) - \epsilon\, g(n)$ و $f(n) + \epsilon\, g(n)$، حيث $g(n) = o(f(n))$، فسيصبح لدينا عبارة أقوى تُكْتَبُ على صورة $\mu(G^p) \in f(n)(1 + o(1))$.

إنّ بعض الخواص التي تكون صحيحة لمعظم البيانات لا تحدث في أمثلة معروفة! فللحدّ السّفليّ المعروف على أعداد رامزي، لا يوجد تركيب لصفّ لا نهائيّ من البيانات بحيث $\alpha(G) < \log_{\sqrt{2}}(n(G))$ و $\omega(G) < \log_{\sqrt{2}}(n(G))$ على الرّغم من أنّ معظم البيانات تملك هذه الخاصيّة.

إنّ خصائص البيان العشوائيّ يمكن أنْ تقود إلى خوارزميّة سريعة تساعد على حلّ مسألة صعبة لمعظم المدخلات. فعلى سبيل المثال، بعد ذكر نتيجتين حول درجات الرّؤوس في بيانات عشوائيّة، سنبّين كيفية استعمال خصائص متتالية الدرجة لتصميم خوارزميّة سريعة لفحص تشاكل "تقريبًا دائمًا". وفي الأدبيّات للبيانات العشوائيّة، نجد أنّ ω_n ترمز إلى دالّة غير محدودة لكنّها تنمو بصورة عشوائية وبطيئة.

24.5.8. نظرية : (Erdös- Re′nyi [1966]) إذا كان $p = \omega_n \log n/n$ و $\epsilon > 0$ مثبتة، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يحقّق أنّ:

$$(1-\epsilon)pn < \delta(G^p) \leq \Delta(G^p) \leq (1+\epsilon)pn \quad \blacksquare$$

تكون درجات معظم الرّؤوس قريبة من المعدّل. ومع ذلك، فإنّ التّغيّر ما زال كبيرًا، وقد بيّن بولوباس (Bolloba′s, 1982) أنّه لكلّ $2 \leq 1/p$ ، فإنّ الرأس الذي درجته كبرى يكون وحيدًا تقريبًا في G^p كلّه إذا وفقط إذا كان $pn/\log n \to \infty$. وعندما نكمل التّطوّر من خلال العودة إلى حقل الاحتمال الضّلعيّ الثابت، فإنّ الكثير من النتائج المفصّلة تكون معروفة حول توزيع الدّرجة. وسوف يكون هنالك تقريبًا دائمًا بعض الرّؤوس مع درجات عالية معزولة قبل أنْ تبدأ الدّرجات في التّجمّع. وقد حدّد بولوباس عدد الدّرجات المختلفة التي قد تكون مضمونة.

25.5.8. نظرية : (Bollob′as [1981b]) في النموذج A مع p مثبتة و $t \in o\,(n/\log n)^{1/4}$، فإنّ G^p كلّه يملك درجات مختلفة لرؤوسه التي تملك درجة عليا والتي عددها t تقريبًا. إذا كان $t \notin o(n/\log n)^{1/4}$، فإنّ G^p كلّه يملك $d_i = d_{i+1}$ لبعض $i<t$ تقريبًا. $\blacksquare$

سنطبّق هذه النتيجة لفحص التّشاكل. لا توجد خوارزميّة زمن – كثيرة حدود معروفة لهذه المسألة، إلاّ أنّ باباي، وإيردوز، وسيلكو (Babai- Erdös- Selkow, [1980]) استخدموا نتائج الدّرجة على بيان عشوائيّ لتطوير خوارزميّة سريعة تعمل تقريبًا دائمًا. ونعلم أنّ مجموعة $\mathbf{H}$ تحوي البيانات جميعها تقريبًا، وتبيّن أنّ التّشاكل مع بيان في $\mathbf{H}$ يمكن فحصه سريعًا من خلال خوارزميّة الوسم القانوني التي تتقبل وتوسم بيانًا بطريقة قانونية إذا كان منتميًا إلى $\mathbf{H}$. وتتحقّق الخاصية المرغوبة عندما تُوسمُ الرّؤوس $v_1, \ldots, v_n$ في بيان، في حين تُوسمُ الرّؤوس $w_1, \ldots, w_n$ في بيان آخر، عندها نجد أنّ دالّة التناظر التي ترسل v_i إلى w_i فقط هي تشاكل محتمل، ويمكن بعد ذلك فحص التّشاكل من خلال مقارنة مصفوفات التّجاور تحت هذا الوسم.

26.5.8. نتيجة : (Babai- Erdös- Selkow [1980]) توجد خوارزميّة تربيعيّة تفحص التّشاكل لمعظم أزواج البيانات.

الإثبات: ليكن G بيانًا معطًى على n من الرّؤوس، وممثلاً بمصفوفة تجاوره. عندها، نحسب درجات الرّؤوس ونصنفها من خلال وسم الرّؤوس في ترتيب متناقص للدرجات. ثبّتق $r = \lfloor 3\lg n \rfloor$. إذا كان $d(v_i) = d(v_{i+1})$ لأيّ $i<r$، فارفض G. يعطي استخدام $p=1/2$ في النظرية 25.5.8 تقريبًا أنّ كلّ بيان سيجتاز هذا الاختبار بصورة ناجحة.

ضع $U=\{v_1, \ldots, v_r\}$. مع $r = \lfloor 3 \lg n \rfloor$، فإنّه يوجد حوالي n_3 مجموعة جزئيّة مختلفة من الرّؤوس في U. وبما أنّه يبقي $n - r$ من الرّؤوس فقط خارج U، فهناك فرصة لتمييز هذه الرّؤوس من قِبَلِ جواراتها في U. سوف تكون المجموعة H هي البيانات جميعها التي تصل إلى هذه المرحلة التي يتحقق فيها هذا: تملك الرّؤوس لـ V-U جوارات مختلفة في U. ولفحص هذا في زمن $O(n^2)$ وإكمال الوسم، شفّرْ $N(X)\cap U$ بوصفها مرتبة ثنائية من الدرجة r لكلّ $x \in V - U$. احسب هذه بوصفها أعدادًا ثنائية صحيحة، وصنّفها؛ تأخذ هذه الخطوات زمن $O(n \log n)$. أعد وسم الرّؤوس من v_{r+1} إلى v_n كـ $w_{r+1}, \ldots, w_n$ في ترتيب متناقض لهذه القيم. إذا كانت هنالك قيمتان متتاليتان متساويتان، ارفض G.

إذا اجتاز G هذا الحدّ، فإنّه لا يملك تشاكلات ذاتيّة غير تمهيدية. لاحظ أنّه يوجد لأيّ بيان يتشاكل مع G تشاكلٌ واحدٌ فقط لـ G، وهذ التّشاكل معطى بتطبيق خوارزميّة الوسم القانونية له. إذا اجتاز كلا البيانين الوسم القانونيّ، فإنّ المرحلة الأخيرة هي مقارنة مصفوفات التجاور بصفوف وأعمدة مُدلّل عليها بالوسم القانونيّ. وتكون البيانات متشاكلة إذا وفقط إذا كانت المصفوفات متطابقة. وتتمّ هذه المقارنة في زمن $O(n^2)$.

يجب أنْ نبين أنّه لكلّ G^p تقريبًا، فإنّ متجهات التّجاور داخل مجموعة محدّدة مكوّنة من r الرّؤوس تكون مختلفة للرؤوس المتبقّية. إذا كان $p \leq 1/2$، فإنّ الاحتمال يكون محدودًا بشكل تقريبيّ بـ $(1-p)^r$ لأيّ زوج y,x يملك التجاورات نفسها في U. وقلنا بصورة تقريبية لأنّ U ليست مختارة بصورة عشوائية؛ ان اختيار U بوصفها مجموعة الرّؤوس التي درجتها هي الأعلى يضعف العشوائيّة، ويزيد احتمال وجود ضلع محدّد واقع على هذه الرّؤوس. وعلى الرّغم من هذا فإنّها لا تتغير كثيرًا. و يكون عددُ أزواج الرّؤوس المتوقّع خارج U مع التّجاورات المتطابقة في U محدودًا بـ $O\left[\binom{n-r}{2}(1-p)^r\right]$. إذا أعطينا اختيارنا لـ r، فإننا نستطيع تحديد اللوغاريتم للأساس 2 لهذا بـ $2lgn - 3lgb\, lgn$، حيث $b = 1/(1-p)$ (إذا كان $p \leq 1/2$). وهذا يقترب من $-\infty$. لذا، فإنّ البيانات جميعها تقريبًا تملك متجهات تجاور في هذه المجموعة. ■

يكون احتمالُ الرّفض في خوارزميّة الوسم محدودًا بـ $n^{-1/7}$ لقيم n الكبيرة بصورة كافية. وظهرت تحسينات لاحقة لخوارزميّة تعمل في زمن $O(n^2)$ مع احتمال رفض c^{-n} ([Babai- Kučera, 1979]).

الترابط والعصب والتلوين (Connectivity, Cliques, and Coloring)

إنّ دراسة "السّلوك النموذجيّ" لتركيب عشوائيّ غالبًا ما يتضمن دراسة التوزيعات الاحتماليّة لمتغيراته. وسنأخذ في الحسبان هنا كلًا من الترابط، والعصب، والتلوين للبيانات العشوائيّة.

وللبيانات العشوائيّة، فإنّ الخوارزميّات البسيطة يمكن انْ تصبح جيدة. فعلى سبيل المثال، فإنّ إيجاد عصبة كبرى هو صعب - PN (NP- hard). إذا علمنا تقريبًا أنّ كلّ بيان يملك عددًا عصبيًّا قرابة $2 \lg n$، فإننا نستطيع فحص المجموعات الجزئيّة جميعها للرؤوس حتى حجم $3 \lg n$ لتكون عصبًا. إذا كان $\omega(G) < 3 \text{ gl } n$، فإنّ هذا يحسب $\omega(G)$؛ لأنّ كلّ مجموعة حجمها $\omega(G)+1$ ليست عصبة. وإذا كان $\omega(G) < 3 \text{ gl } n$، فإنّ الخوارزميّة تفشل في حساب $\omega(G)$، ولكنّ هذا نادر الحدوث. هناك الكثير من المجموعات الجزئيّة ذات حجم $2 \lg n$، ولهذا لتكون خوارزميّة زمن — كثيرة حدود، ولكنها قريبة وتوضح طريقة واحدة يمكن من خلالها استخدام خواص البيانات العشوائيّة خورازميًّا. بعض مسائل صعب - NP تكون واضحة لبيانات عشوائيّة. وعلى الرّغم من أنّ $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$ لكلّ بيان بسيط ([Vising, 1964])، G فإنّ اتخاذ القرار بقيمة من بين

هذه القيم يكون صعبًا - ([Holyer, 1981]) NP. لقد أثبت فايزنج أنّ $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ عندما يملك G ثلاثة رؤوس فقط على الأقل درجتها كبرى. لذلك، لاحظ إيردوز وويلسون [1977] خاصية الإفرادية للرّأس الذي يملك درجة كبرى عندما $p=1/2$. كما لاحظ أنّ $\chi'(G)=\Delta(G)$ للبيان العشوائيّ. للبيانات المتناثرة والثّابت k، فإنّ عتبات ترابط k ودرجته الصغرى هما الشّيء نفسه. فهل يتحقق هذا أيضًا لاحتمال ضلعيّ ثابت؟ يمكن أنْ تعمّم النظرية 18.5.8 وتقوّى لتبيّن أنّه إذا كان (p و $k\in o(n/\log n)$) مُثبَتا، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك k جارًا مشتركًا لكلّ زوج من الرّؤوس، وعليه يكون مترابطًا من الدرجة k (التمرين 33). إنّ تحسين هذا يتطلّب طرقًا أخرى؛ وقد بيّن بولوباس [1981b] للثابت p أنّ G^p كلّه تقريبًا يملك ترابطًا يساوي درجة صغرى.

ماذا عن عدد العصب (العصبة)؟ لـ k مثبتة، تعطي النظرية 23.5.8 عتبة احتمال لظهور عصبة من الدرجة k. ولكن لثابت p، فإنّ العدد العصبي ينمو مع n. إنّ تحديد العدد العصبي هو تام- NP. ولكننا لبيان عشوائيّ نستطيع أنْ نخمّن القيمة الصحيحة مع احتمال عالٍ دون النظر إلى البيان! بصورة مذهلة، لـ p مثبتة، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك إحدى القيمتين المحتملتين للعدد العَصبي (بوصفها دالّة في n)، ولكل $k\in\mathbb{N}$، يوجد مدى لـ n حيث يكون العدد العصبي تقريبًا دائمًا يساوي k. إنّ الطريقة هي إيجاد حدود على $r(n)$ بحيث يكون G^p كلّه تقريبًا يملك عصبةً من الدرجة r، ولا توجد واحدة منها تقريبًا تملك عصبة من الدرجة $r+1$.

27.5.8. نظرية: ([Matula, 1972]) لـ $p=1/b$ مثبتة، و $\epsilon>0$ مثبت، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك عددًا عصبيًّا بين $\lfloor d-\epsilon\rfloor$ و $\lfloor d+\epsilon\rfloor$، حيث $d=2\log_b n-2\log_b\log_b n+1+2\log_b(e/2)$.

الإثبات: (مخطّط) إذا كان X_r عددَ العصب من الدّرجة r، فإنّ $E(X_r)=\binom{n}{r}p^{\binom{r}{2}}$. بما أنّ $(r/e)^r\sqrt{2\pi r}$ (تقريب ستيرلنج)، فإنّه أيضًا $E(X_r)\sim(2\pi r)^{-1/2}(enr^{-1}p^{(r-1)/2})^r$. وإذا كان $r\to\infty$ و $1\le(enr^{-1}p^{(r-1)/2})$، فإنّنا نتوقّع أنّ $E(X_r)\to 0$. لتحديد $r(n)$ بحيث يتحقق هذا؛ خذ اللوغاريتم (للأساس b) في المتباينة، وجد الحلّ لـ r لإيجاد:

$$r\ge 2\log_b n-2\log_b r+1+2\log_b e.$$

وهذا مكافئ تقريبًا لـ $r\ge d(n)$ كما عُرِّف أعلاه، وبصورة أكثر دقة، إذا كان $r>d+\epsilon$، فإن G^p كلّه تقريبًا لا يملك عصبة حجمها r.

يأتي الحدّ السّفليّ من تطبيق طريقة العزم الثّانية بحرص، كما في النظرية 23.5.8، ولكن اعتماد r على n يجعل التّحليل أكثر صعوبة. إنّ التّوقّع لـ X_r^2 يجمع احتمالات الحدوث المشترك للأزواج المرتّبة لعصب من الدّرجة r جميعها. ويعتمد هذا الاحتمال على عدد الرّؤوس المشتركة فقط. لذلك فإنّ:

$$E(X_r^2)=\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{n-r}{r-k}p^{2\binom{r}{2}-\binom{k}{2}}.$$

نريد أنْ نبيّن أنّ الحدّ لـ $k=0$ (عصب منفصلة) مسيطر. ليكن $E(X_r^2)/E(X_r)^2=\alpha_n+\beta_n$، حيث $\alpha_n=\binom{n}{r}^{-1}\binom{n-r}{r}$ و $\binom{n}{r}^{-1}\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\binom{n-r}{r-k}b^{\binom{k}{2}}$. نبحث عن $\alpha_n\sim 1$ و $\beta_n\to 0$. عندما $r\sim 2\log_b n$، فإنّ صيغة التّقارب لـ $\binom{b}{k}/\binom{a}{k}$ تقود إلى $\alpha_n\sim e^{-r^2/(n-r)}\to 1$. إنّ المناقشة لـ β_n هي أكثر صعوبة؛ انظر بالمر [1985, p.75-80]. ■

لاحظ أنّ دراستنا لمتغيرات بيان يمكن أنْ تطبّق لقياس قوّة الشّروط للحلقات الهاملتونيّة

(Palmer, [1985, p. 81-85]). إنّ النظرية لا تبرهن شيئًا إذا لم تتحقّق فرضياتها؛ وتكون النظرية قوية إذا تحققت النتيجة فقط عندما يتحقق الفرض؛ وفي هذه الحالة لا يمكن تخفيف الفرضيات أو إضعافها. ونعرِّف قوة (Strength) النظرية على أنّها احتمال تحقّق فرضياتها مقسومًا على احتمال تحقّق استنتاجاتها.

خذ في الحسبان شروط كفاية للحلقات الهاملتونيّة. بما أنّ $p = \log n/n$ عتبةٌ لحلقة هاملتونيّة، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يكون هاملتونيًّا عندما يكون p مثبتًا. لقد بيّن ديراك [1952b] أنّ G يكون هاملتونيًّا عندما تكون درجة كلّ رأس $n/2$ على الأقل (النظرية 8.2.7). وعندما يكون $p > 1/2$، فإنّ هذا الشّرط يتحقق لـG^p كلّه تقريبًا ؛ وعندما يكون $p > 1/2$، فإنه لا يتحقق تقريبًا. لذلك فإن قوة التقارب لنظرية ديراك تكون 0 عندما يكون p ثابتًا وتساوي على الأكثر 2/1. والمصير نفسه يحدث لشروط الدّرجات الأخرى في الجزء 2.7.

وفي هذه الأثناء، أثبت كلٌّ من كفتال وإيردوز [1972] أنّ G يكون هاملتونيًّا عندما تزيد درجة ترابطه على عدد استقلاله (النظرية 19.2.7). وتعطي عتبات هذه المتغيّرات أنّ هذه النتيجة تكون قوية لكلّ ثابت $p>0$. نعلم أنّ $\alpha(G^p) < 2(1+\in)\log_b n$ تقريبًا دائمًا، ونعلم أيضًا أنّ $k(G^p) \geq k$ تقريبًا دائمًا (عندما $k = o(n/\log n)$). لذلك، فإنّ $\alpha < k$ تقريبًا لـ G^p كلّه، والقوة التقاربية للنظرية تكون 1.

وأخيرًا، نأخذ في الحسبان عددا لونيًّا لثابت p. وبما أنّ $1-p$ ثابت أيضًا ، فإنّنا نستطيع تطبيق النتائج على عدد العصب: تقريبًا G^p كلّه لا يملك مجموعة مستقرّة فيها أكثر من $(1 + o(1))2\, log_b n$ رأسًا، حيث $b=1/(1-p)$. لذلك، فإنّ $\chi(G^p) \geq (1/2+o(1))n/\log_b n$ تتحقّق تقريبًا دائمًا. إنّ إنجاز هذا الحدّ يتطلب إيجاد مجموعات مستقرّة منفصلة عديدة لها أحجام قريبة من الأحجام الكبرى. ولعقد من الزمان، فقد كانت أفضل نتيجة هي ضمانًا خوارزميًّا لتلوين يستخدم ضعفي عدد الألوان التي في الحدّ السّفليّ على الأكثر.

لقد أثبت بولوباس [1988] أنّه يمكن تحقيق الحدّ السّفليّ باستخدام أسلوب احتمالي آخر يضمن إيجاد مجموعات مستقرّة كبيرة بما فيه الكفاية. وقد أثبت أيضًا أنّه في G^p كلّه تقريبًا، فإنّ كلّ مجموعة تملك $n/(\log_b n)^2$ من الرّؤوس على الأقل تحوي عصبة رتبتها $2\log_b n - 5\log_b \log_b n$ على الأقل. وهذا يسمح باستخلاص مجموعات مستقرّة بأحجام شبه كبرى حتى لا يبقى إلاّ القليل القليل من الرّؤوس التي يمكن أنْ تسبّب مشكلة؛ والمتبقية يمكن أنْ تعطى ألوانًا مختلفة.

قبل تطوير نهج بولوباس، سوف نقدّم نتيجة سابقة لأهميّتها الخوارزميّة: تستخدم الخوارزميّة الجشعة $(1+\epsilon)n/\log_b n$ لونًا على الأكثر تقريبًا على G^p كلّه. لذلك، فإنّها "تقريبًا دائمًا تعمل" بوصفها خوارزميّة تقريب بالحس نفسه الذي تعمل فيه تقريبًا دائمًا الخوارزميّة السابقة للتّشاكل. وقد بيّن كلّ من جيري وجوسون [1976] عدم وجود خوارزميّة سريعة تستخدم على الأكثر ضعفي العدد الأمثل من الألوان على كلّ بيان إلا إذا كان $P = NP$. إنّ إثبات بولوباس لا يعطي خوارزميّة سريعة لتلوين كلّ بيان تقريبًا بعددٍ يقترب من عدد الألوان الأمثل؛ لأنّه إثبات وجود فقط.

28.5.8. نظرية: (Grimmett- McDiarmid [1975]) ليكن احتمال ضلعيّ p معطًى، وليكن $b = 1/(1-p)$. لثابت p وثابت $\epsilon > 0$، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يحقق:

$$(1/2-\epsilon)n/\log_b n \leq \chi(G^p)\ (1+\epsilon)n/\log_b n$$

الإثبات: الحدّ السّفليّ يتبع باستخدام مجموعات مستقرّة، كما اقترح أعلاه. للحدّ العلويّ، سوف نبيّن أنّ التلوين الشّره لـ $v_1, \ldots, v_n$ على الترتيب يستخدم $f(n) = (1+\epsilon)\, 2/\log_b n$ على الأكثر من الألوان تقريبًا على G^p كلّه (للتبسيط؛ اختر ϵ بحيث يكون $f(n)$ عددًا صحيحًا). ضمن مجموعة البيانات على n من الرّؤوس التي تستخدم ألوانا أكثر، لتكن $\mathbf{B}_m$ هي المجموعة التي فيها v_m هو الرأس الأول الذي يستخدم اللون $f_n + 1$. سوف نبرهن أن $\sum_{m=1}^{n} P(\mathbf{B}_m) \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$.

إذا أُعطيت بيانًا G، فاجعل $G_m = G[\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}]$. لاحظ أنّه قبل استخدام اللون $f_n + 1$، يجب أنْ يُستخدم اللون f_n. لذلك، نجد أنّ لكلّ $G \in \boldsymbol{B}_m$ فإنّ التّلوين الشّره يستخدم f_n لونًا. ليكن k_i عدد المرات التي يظهر فيها اللون i في هذا التّلوين. وبسبب حاجتنا إلى استخدام اللون $f_n + 1$، فإنّ v_{m+1} يجب أنْ يملك جارًا واحدًا على الأقلّ من كلّ لون $f_n ,..., 1$. وإذا أعطينا الأعداد $\{k_i\}$، فإنّ احتمال هذا هو $\prod_{i=1}^{f(n)} \left[1-(1-p)^{k_i}\right]$.

لقد بسّط كلٌّ من بولوباس وإيردوز [1976] الحسابات التّالية التي تضمّنت هذا الحدّ بملاحظة أنّ الحدّ يكبر عندما تكون k_i جميعها متساوية (التمرين 37.3.8). لذا، فإنّ:

$$\prod_{i=1}^{f(n)}\left[1\text{-}(1\text{-}p)^{k_i}\right] \leq \left[1\text{-}(1\text{-}p)^{m\text{-}1/f}\right]^{f} < \left[1\text{-}(1\text{-}p)^{n/f}\right]^{f}$$

وإذا أُعطينا G_m، فإنّ $b_n = \left[1\text{-}(1\text{-}p)^{n/f(n)}\right]^{f(n)}$ يكون كحدّ على الاحتمال حيث ينتمي البيان الكلّيّ G إلى $\boldsymbol{B}_m$. وبما أنّ هذا يتحقّق لـ G_m كلّه، فإنّنا نستنتج أنّ $P(\boldsymbol{B}_m) < b_n$. وهذا يتحقّق لـ m كلّه. لذلك، فإنّ $\sum_{m=1}^{n} P(\boldsymbol{B}_m) < nb_n$.

وباستخدام $(1-p)^{-x} < e^{-x}$، فإنّنا نحصل على $nb_n < ne^{-f(1-p)\, n/f}$. وأنّ تعويض $f_n = cn/\log_b n$ يعطي $(1-p)^{n/f} = n^{-1/c}$. ويصبح اللوغاريتم للحدّ $\log n - cn^{1-1/c}/\log_b n$. وهذا يقترب من $-\infty$ لِـ $c > 1$. لذلك، فإنّ احتمال أنْ تستخدم الخوارزميّة الشّرهة أكثر من $f(n)$ من الألوان يكون محدودًا بدالّة تقترب من 0. ■

إنّ رتبة نموّ $\chi(G)$ تسلّط الضّوء على مسائل مشهورة أخرى في نظريّة البيان. لقد خمّن هاجوس (Hajo's) أنّ كلّ بيان عدده اللونيّ r يحوي تقسيمًا جزئيًّا لـ K_r (انظر الملاحظة 21.2.5). وقد تم نقض هذا من قبَل كاتلين [Catlin, 1979] (تمرين 40.2.5). وقد لاحظ كلّ من إيردوز وفجتلوسيز [Erdös- Fajtlowicz, 1981] أنَّ العدد اللونيّ لـ G^p تقريبًا دائمًا ينمو مثل $\Theta(n/\log n)$. ومن الناحية الأخرى، فإنّ أكبر r بحيث يحوي G^p تقسيمًا جزئيًّا لـ K_r ينمو مثل $\Theta(\sqrt{n})$. لذلك، فإنّ العدد اللونيّ يكون تقريبًا دائمًا أكبر كثيرًا. وتكون مخمّنة هاجوس غير صحيحة تقريبًا دائمًا.

وعلى النقيض من ذلك، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك بيانًا جزئيًّا قابلاً للتّقليص إلى K_r عندما $r \in \Theta(n/\sqrt{\log n})$. لذلك، فإنّ كلّ بيان يحقّق المخمّنة الأضعف لهادوايجر تقريبًا (الملاحظة 21.2.5) التي تنصّ على أنّ كلّ بيان عدده اللونيّ r يملك بيانًا جزئيًّا قابلاً للتّقليص إلى K_r.

الشّكائم (Martingales)

إنّ الأساليب المتقدّمة في الاحتمال قادت إلى نتائج أنيقة على التّراكيب التّوافقيّة دون العناء المُتضمّن في حسابات العزمين الثّاني والأعلى. وتهدف النظرية إلى تطوير أنماط يمكن تطبيقها دون إعادة تفاصيل حسابية.

تستخدم بعض هذه الطّرق قوائم متغيرات عشوائيّة ذات علاقة. إنّ المعالجة التّصادفيّة الناتجة تظهر

تناسقًا وسلوكًا كليًّا قابلاً للتّوقع أكثر ممّا تعمل المتغيّرات العشوائيّة المفردة. وفي الممر العشوائيّ التقليديّ على خطّ، يوجد عند كلّ خطوة احتمال p للتّحرّك وحدة واحدة نحو اليسار، واحتمال p للتّحرّك وحدة واحدة نحو اليمين، واحتمال $1 - 2p$ لعدم التّحرّك. ومهما كان التّاريخ السّابق للممّر، فإنّ الموقع المتوقع بعد t من الخطوات يساوي الموقع الفعليّ بعد t -1 من الخطوات؛ وهذه هي الخاصيّة المُعرِّفة للشّكيمة.

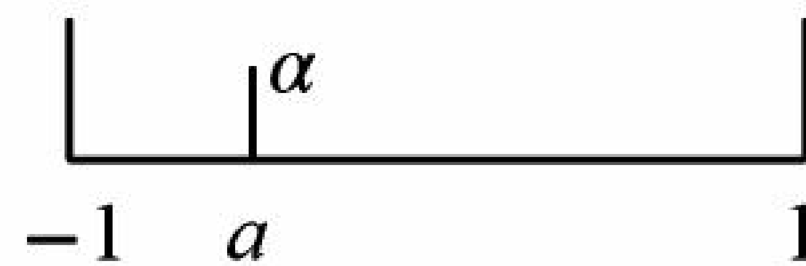
29.5.8. تعريف: **الشكيمة** (martingale) هي قائمة من متغيّرات عشوائيّة X_n , ..., X_o بحيث إنّ التوقع لـ X_i يساوي X_{i-1} ، علمًا بأنّ القيم X_{i-1} , ..., X_o معطاة.

إنّ الموقع المتوقّع للممر العشوائيّ بعد n من الخطوات هو عند نقطة الأصل. والأقل وضوحًا هو أنّه من غير الملائم أنْ يكون الممرّ بعيدًا جدًّا عن نقطة الأصل، بوصفها دالّة بدلالة n. وسوف نرى بأنّ السّبب يكمن في عدم قدرته على التّحرّك أكثر من وحدة واحدة في كلّ خطوة.

تستطيع الشكائم أنْ تجعل من السّهل إثبات أنّ المتغيّر العشوائيّ يكون متركّزًا بصورة عالية حول قيمته المتوقّعة. وعند تطبيق الأسلوب، فإنّه يجعل الحسابات المفصّلة في طريقة العزم الثاني غير ضرورية. لاحظ أنّ العمل الصّعب قد أُنجز من خلال متباينة أزوما، وتسمى أيضًا متباينة ذيل الشّكيمة التي تنصّ على أنّه إذا كانت متغيّرات عشوائيّة متتابعة في شكيمة يختلف بعضها عن بعض بمقدار 1 على الأكثر، فإنّ احتمال أنّ $X_n - X_o$ يتخطى $\lambda\sqrt{n}$ يكون محدودًا بـ $e^{-\lambda^2/2}$. سوف نبرهن أولاً تمهيديّتين. وهذه العبارات تتحقّق لمتغيّرات عشوائيّة متّصلة، ولكنّنا سنأخذ في الحسبان مجدّدا متغيرات متقطعةً فقط.

30.5.8. تمهيدية: ليكن Y متغيّرًا عشوائيًّا بحيث يكون $E(Y) = 0$ و $|Y| \leq 1$. إذا كانت f دالّة محدّبة على [-1,1]، فإنّ $E(f(Y)) \leq ½[f(-1) + f(1)]$. بوجه خاصّ، $E(e^{tY}) \leq \frac{1}{2}[e^t + e^{-t}]$ لكلّ $t > 0$.

الإثبات: عندما تأخذ Y القيم ± 1 فقط، كلّ مع احتمال .5، فإنّ $E(f(y)) = ½ [f(-1)+f(1)]$. لتوزيعات أخرى، لاحظ أنّ دفع الاحتمال "خارجًا في إتجاه الأضلاع" يزيد $E(f(Y))$. وللمتغيّرات المتقطّعة، نستطيع استخدام الاستقراء على عدد القيم مع احتمال غير صفري. إضافة إلى أن التّحدّب يؤدي إلى أنّ $f(a) \leq \frac{1-a}{2} f(-1) + \frac{a+1}{2} f(1)$. إذا كان $P(Y = a) = \alpha$، فإنّنا نستطيع إنقاص الاحتمال عند a إلى ، وزيادة $P(Y=-1)$ بمقدار $\alpha\frac{1-a}{2}$، وزيادة $P(Y = 1)$ بمقدار $\alpha\frac{1+a}{2}$ لنحصل على متغيّر جديد Y' مع التّوقع نفسه. ومن متباينة التّحدّب وفرضيّة الاستقراء، نجد أنّ: $E(f(Y)) \leq E(f(Y')) \leq \frac{1}{2}[f(-1) + f(1)]$. ■



31.5.8. تعريف: للحادثين A و B، نحصل على **الاحتمال المشروط** (conditional probability) لـ A علمًا بحدوث B ومن خلال معاملة الحادث B بوصفه فضاءً احتماليًّا كاملاً والذي يعني مُعايرته بـ $P(B)$. لذلك نعرّف $P(A | B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$.

عندما يكون Y,X متغيرين عشوائيّين، فإنّنا نكتب $Y|X$ بدلاً من "Y علمًا بأنّ X". وهذا يعرف متغيّرًا عشوائيًّا لكلّ قيمة لـ X؛ حيث نعامل X بوصفها ثابت i ونُعيّر التوزيع الناتج لـ Y بـ $P(X = i)$.

لمتباينة أزوما، نستخدم التّوقع لمتغيّرات مشروطة. ولكلّ i، نحسب القيمة المتوقّعة لـ Y عندما تكون مقيدة لنقاط العينة حيث $X = i$. والتّوقع $E(E(Y|X))$ هو التّوقع لـ $(EY|X=i)$ على الاختيارات لـ i التي تحدث مع احتمال $P(X = i)$. والنتيجة هي توقّع على الفضاء العينيّ الكلّيّ. ونزيل أثر الاشتراط، ونحصل على $E(E(Y\setminus X) = E(Y)$.

32.5.8. تمهيدية : $E(E(Y|X) = E(Y)$.

الإثبات. ليكن $p_{i,j} = P(X = i$ و $Y = j)$. بما أنّ $E(Y\setminus X = i) = \dfrac{\sum_j jp_{i,j}}{P(X = i)}$، فإنّ $E(E(Y|X)) = E(Y)$. ■

33.5.8. نظرية : (متباينة أزوما) إذا كانت $X_0, \ldots X_n$ شكائم مع $|X_i - X_{i-1}| \le 1$، فإنّ:

$$P(X_n - X_0 \ge \lambda\sqrt{n}) \le e^{-\lambda^2/2}.$$

الإثبات: بتطبيق دالّة انسحاب، نستطيع افتراض أنّ $X_0 = 0$. لـ $t > 0$، فإنّ $X_n \ge \lambda\sqrt{n}$ إذا وفقط إذا كان $e^{tX_n} \ge e^{t\lambda\sqrt{n}}$. ولهذا السّبب فإنّ $\left(P(X_n \ge \lambda\sqrt{n}\right) = P\left(e^{tX_n} \ge e^{t\lambda\sqrt{n}}\right)$. وبتطبيق متباينة ماركوف على e^{tX_n}، نجد أنّ $P(e^{tX_n} \ge e^{t\lambda\sqrt{n}}) \le E(e^{tX_n}) / e^{\lambda\sqrt{n}}$. إنّ هذا الحدّ يتحقّق لكل $t>0$. وفيما بعد، سوف نختار t لتصغير الحدّ.

أولاً، سوف نبرهن باستخدام الاستقراء على n أنّ $E(e^{tX_n}) \le \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. سوف نضع شرطًا على X_{n-1}. لاحظ أنّ التمهيديّة 32.5.8 تعطي:

$$E(e^{tX_n}) = E(e^{tX_{n-1}}e^{t(X_n - X_{n-1})}) = E(E(e^{tX_{n-1}} e^{t(X_n - X_{n-1})} | X_{n-1})).$$

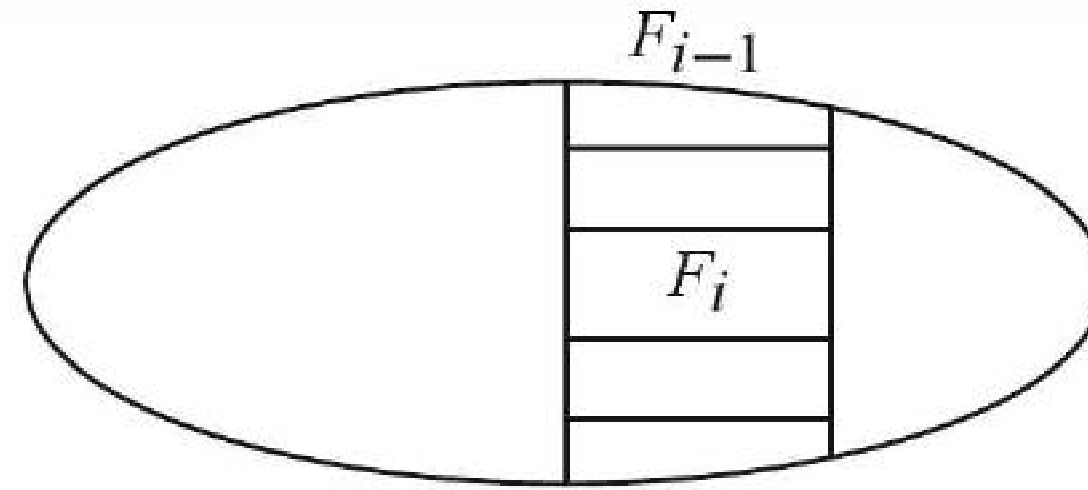
عندما نضع شرطًا على X_{n-1}، فإنّ القيمةَ لـ X_{n-1} ثابتةٌ للتّوقع الدّاخليّ. لذا، نستطيع إزالة $e^{tX_{n-1}}$ من التّوقّع الداخلي لنحصل على $E(e^{tX_n}) = E(e^{tX_{n-1}}E(e^{tY} | X_{n-1}))$، حيث $Y = X_n - X_{n-1}$. لأنّ $\{X_n\}$ شكيمة، فإن $E(Y) = 0$، ومن الفرض فإنّ $|Y| \le 1$. لذلك، فإنّ التهميديّة 30.5.8 تنطبق وتعطي $E(e^{tY} | X_{n-1}) \le \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. وهذا نفسه الآن ثابت، ويعطي $E(e^{tX_n}) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})E(e^{tX_{n-1}})$. وفرضية الاستقراء تكمل الإثبات.

سوف نضعّف الحدّ لصورة أكثر فائدة بملاحظة أنّ $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \le e^{t^2/2}$. وهذا يتحقّق؛ لأنّ الطّرف الأيسر هو $\sum t^{2k} / (2k)!$، أمّا الطرف الأيمن فهو $\sum t^{2k} / (2^k k!)$. إذن، سيكون الاحتمال محدودًا بـ $e^{nt^2/2 - \lambda t\sqrt{n}}$ لكلّ $t > 0$. سوف نحصل على أفضل حدّ بالتصغير على t. يكون الأسّ تربيعيًّا؛ وسوف نصغّره باختيار t لحل $tn - \lambda\sqrt{n} = 0$، أو $t = \lambda / \sqrt{n}$. لذلك، فإنّ الحدّ الناتج هو $e^{-\lambda^2/2}$. ■

إنّ متباينة أزوما هي وحيدة الجانب، حيث إنها تحدّ احتمال أنْ يكون X_n أكبر كثيرًا من X_0. وبما أنّ الشّروط متماثلة بالإشارة، فإنّ تطبيق المتباينة على $\{-X_i\}$ يعطي المتباينة نفسها للذّيل الآخر الذي يكون فيه X_n أصغر كثيرًا من X_0.

34.5.8. مثال: المقامر الواقعيّ. يستطيع المقامر أنْ يراهن حتى n من المرات، حيث n مثبتة. وفي كل مرة يراهن فيها، فإنّه يربح أو يخسر 1، حيث يتساوى احتمالا الربح والخسارة. ويكون هدفه ربح $\lambda\sqrt{n}$. لذا، فسيتوقف عن اللعب إذا وصل إلى هذه القيمة. اجعل X_i تُمثّل أرباحه بعد i لعبة. لذلك، فإنّ $X_i=X_{i-1}$ إذا كان $X_{i-1} \geq \lambda\sqrt{n}$ وغير ذلك، فإنّ $X_i = X_{i-1} \pm 1$، واحتمال كلّ واحدة منها يساوي 0.5. إذن، $\{X_i\}$ هي الشّكيمة التي تتغيّر بـ 1 على الأكثر عند كلّ خطوة، ولهذا تنطبق متباينة أزوما. لاحظ أنّ احتمال حصول المقامر على $\lambda\sqrt{n}$ يكون محدودًا بـ $e^{-\lambda^2/2}$. إذا كانت $\lambda = 1$، فمن الممكن وجود فرصة نجاح معقولة، ولكن إذا كانت $\lambda = 10$ ، فإنّ أمل النجاح ضئيل. ■

في التّطبيقات التّوافقيّة، سوف نأخذ في الحسبان شكيمة من نوع خاص، حيث لدينا فضاء احتماليّ متضمن أصلاً، و X هو التّوقع لمتغيّر عشوائيّ X. والمتغيّر X_n هو القيمة لـ X عند نقطة معينة واحدة. سوف نُعرّف شكيمة X_n , ..., X_o تصف عمليّة تدرّجية للتّعلم أكثر حول القيمة النّهائيّة $X_n = X$.



35.5.8. تمهيدية. ليكن X متغيّرًا عشوائيًّا معرّفًا على فضاء احتماليّ. ولتكن $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots \supseteq F_n$ سلسلة مجموعات جزئيّة من الفضاء، حيث F_0 هي الفضاء كاملاً، أمّا F_n فهي مخرجة مفردة، في حين تكون F_i متغيّرا عشوائيًّا تشكّل قالبًا في تجزئة لـ F_{i-1}. إنّ الاحتمال لاختيار F_i داخل F_{i-1} يتناسب مع احتماله في الفضاء المتضمّن أصلاً. إذا كان $X_i = E(X \mid F_i)$ ، فإنّ القائمة X_n , ..., X_0 تكون شكيمة.

الإثبات: سنبرهن أنّ $E(X| X_0, \dots, X_{i-1}) = X_{i-1}$. في لحظة معيّنة من العمليّة، فإنّ قائمة القيم تكون هي المخرجات لمتتالية معيّنة من القيود. وكلّ متتالية قيود تولّد القيم المعطاة X_{i-1} , ... X_o تصل بعض F_{i-1} حيث تملك $E(X| F_{i-1})$ القيمة المعطاة لـ X_{i-1}. لكلّ F_i مماثلة، فإننا نستطيع أخذ التوقع لـ X_i عبر القيم المحتملة لـ F_i. وفي كلّ حالة نحصل على X_{i-1}. لذلك، فإنّ الصّيغة المرغوبة تتحقق بصرف النّظر عن أيّ F_{i-1} ولدت القائمة X_{i-1} ... X_0. لذلك، سنضع شرطًا على اختيار مثبت لـ F_{i-1} لحساب $E(X_i|X_0, \dots, X_{i-1})$ داخل F_{i-1}. لذا، فإن التمهيديّة 32.5.8 تعطي $E(X_i) = E(E(X| F_i)) = E(X)$. وهذا هو التّوقّع داخل الحادث F_{i-1} (يُعامل بوصفه فضاء احتمال). لذا، فإنّ هذه التّعابير جميعها تكون مشروطة على F_{i-1} ويكون التّعبير الأخير فعليًّا هو $X_{i-1} = E(X| F_{i-1})$. ■

إنّ مثل هذه الشّكائم التي تُدعى **شكائم مُقيّدة** (restriction martingles) تظهر عندما نكتشف بصورة تدريجية شيئًا أو كائنًا مولدًا بصورة عشوائية. هنا، F_i هي المجموعة الجزئيّة من فضاء الاحتمال حيث يكون الكائن محصورًا بعد i من الخطوات (F لـ "معلومة"). ففي عمليّة (نَقْف) العملة، تكون نقاط العينة قوائم طولها n، و F_i يمكن أنْ تكون معرفة أول i من القيم. ففي البيانات العشوائيّة، نجد أنّ F_i يمكن أنْ تكون البيانَ

الجزئيّ المحدث من الرّؤوس $\{v_1, \ldots, v_i\}$. أو أنّ تكون المعرفة التي تكون من خلالها أول i من الأضلاع موجودة.

ولتطبيق متباينة أزوما، نحتاج إلى وضع حدٍّ على $|X_i - X_{i-1}|$. إنّ المعرفة التي تظهر فيها أيّ أضلاع تقع على رأس مثبت v_i يمكن أنْ تغيّر العدد اللونيّ على الأكثر بـ 1؛ لأن $\chi(G - v_i)$ تساوي $\chi(G)$ أو $\chi(G) - 1$. ومن هنا نستطيع استنتاج أنّ | في الشّكيمة المقيّدة المُعرفّة بإظهار الرّؤوس واحدًا تلو الآخر.

36.5.8. تمهيدية : خذ في الحسبان بناءً عشوائيًّا مُحددًا بخطوات مستقلة $S_1, \ldots, S_n$. ولتكن F_i هي المعرفة لـ $S_1, \ldots, S_i$، ولتكن $X_0, \ldots, X_n$ هي الشّكيمة المقيّدة المقابلة لمتغيّر عشوائيّ X. ولتكن A هي المعرفة لـ S_j لكلّ $j \neq i$، مع S_i مجهولة. إذا تحقّق لكلّ A أنّ قيم X على نقاط في A تختلف على الأكثر بـ 1، فإنّ | لكلّ i (ولهذا؛ فإنّ $P(X - E(X) > \lambda\sqrt{n}) \leq e^{-\lambda^2/2}$).

الإثبات: خذ في الحسبان مثالاً معينًا لـ F_{i-1}، حيث $X_{i-1} = E(X | F_{i-1})$ معطى. سوف نرتّب النّقاط لـ F_{i-1} في الخلايا لشبكة. ولهذه النقاط جميعها، فإنّ المخرجات لـ $S_1, \ldots, S_{i-1}$ هي نفسها. إنّ كلّ صفّ هو خيار لـ F_i: وهو قالب في التّجزئة لـ F_{i-1}. وكلّ عمود هو A تكون فيه $S_{i+1}, \ldots, S_n$ مثبتة، في حين تتغير S_i فقط. ومن الفرض، فإنّ القيم الكبرى والصّغرى لـ X تختلف في كلّ عمود بـ 1 على الأكثر. لتكن m_s, M_s القيم الصّغرى والكبرى لـ X في عمود s.

اختيارات لـ A ($S_{i+1}, \ldots, s_n$) مثبتة داخل العمود)

					اختيارات
					لـ F_i
					(أو S_i)

بما أنّ S_i و $S_{i+1}, \ldots, S_n$ محدّدة بصورة مستقلة، فإنّ الاحتمال للمخرجات في صفّ r وعمود s هو $q_r p_s$، حيث q_r هو الاحتمال الذي يكون فيه S_i يعطي هذا الصّفّ، أمّا p_s فهو الاحتمال الذي يكون فيه $S_{i+1}, \ldots, S_n$ يعطي هذا العمود. والحساب لـ X_i هو التّوقّع عبر صفّ واحد:

$$\sum m_s p_s \leq E(X | F_i) \leq \sum M_s p_s \leq 1 + \sum m_s p_s.$$

بما أنّ هذه الحدود السّفليّة والعلويّة مستقلّة عن دليل الصّفّ، فإنّ أخذ التّوقّع خلال الشّبكة كاملة لحساب X_{i-1} يعطي المتباينات نفسها. لذا، فإنّ X_{i-1} و X_i محصورتان بفترة واحدة طولها 1 وتختلفان بـ 1 على الأكثر. وبناءً عليه، تنطبق متباينة أزوما. ■

عندما تتحقّق الشروط في التمهيديّة 36.5.8، فإنّنا نستنتج مباشرة أنّ قيمة X تكون متركزة بصورة كبيرة حول معدّلها (وسطها الحسابي).

37.5.8. مثال: العدد اللّوني للبيانات العشوائيّة. ثبّت n، وخذ في الحسبان نموذج A مع احتمال ضلعيّ p. افرض أنّنا نريد إظهار رأس واحد في كلّ مرّة في البيان العشوائيّ على n من الرّؤوس. في المرحلة i، نعلّم الأضلاع من v_i إلى الرّؤوس السابقة، وهذا هو S_i. والنموذج A يعيّن المخرجات للخطوات S_i بصورة مستقلة. والحادث A الذي تكون فيه الخطوات جميعها معيّنة ما عدا S_i هو البيان الجزئيّ $G - v_i$ للبيان العشوائيّ G إضافة إلى المعرّفة للأضلاع من v_i إلى الرّؤوس اللاحقة. وبما أنّ $\chi(G - v_i) \le (G) \le (G - v_i) + 1$، فإنّ قيمة X تختلف على الأكثر بواحد عبر الاحتمالات جميعها في A. ومن هنا، فإنّ الفرضيّات في التمهيديّة 36.5.8 تتحقق. وباستخدام كلا الذيلين؛ نستنتج أنّ:

$$P\left(\left|\chi(G)-E(\chi(G))\right| \ge \lambda\sqrt{n}\right) \le 2e^{-\lambda^2/2}$$ ■

لاحظ أنّ النتيجة في المثال 37.5.8 لا تذكر شيئًا حول قيمة $E(\chi(G))$. ولتقريب هذا نستخدم متباينة أزوما مرّة أخرى. مع احتمال ضلعيّ ثابت p، فإننا نعرف أنّ العدد العصبيّ لـ G^P هو تقريبًا دائمًا ضمن 1 عن $d = 2\log_b n - 2\log_b \log_b n + 1 + 2\log_b (e/2)$ ، حيث $b=1/p$. والنتيجة نفسها تتحقق لمجموعات مستقرّة باستخدام الأساس $c = 1/(1-p)$ للوغاريتم. ولإثبات أنّ العدد اللّونيّ لـ G^P قريب من $n/(2\log_c n)$؛ فقد بيّن بولوباس إمكانية استخلاص مجموعات مستقرّة بالحجم الأكبر تقريبًا حتى يصبح عدد الرّؤوس المتبقية قليلاً جدًّا ليكون مهمًّا.

38.5.8. نظرية: (Bollobás [1988]) تقريبًا، لكلّ G^P مع ثابت $p = 1 - 1/c$، فإنّ كلّ بيان جزئيّ محدث رتبته $m = \lceil n/\log_c^2 n \rceil$ على الأقلّ يملك مجموعة مستقرة حجمها $r = 2\log_c n - 5\log_c \log_c n$ على الأقلّ.

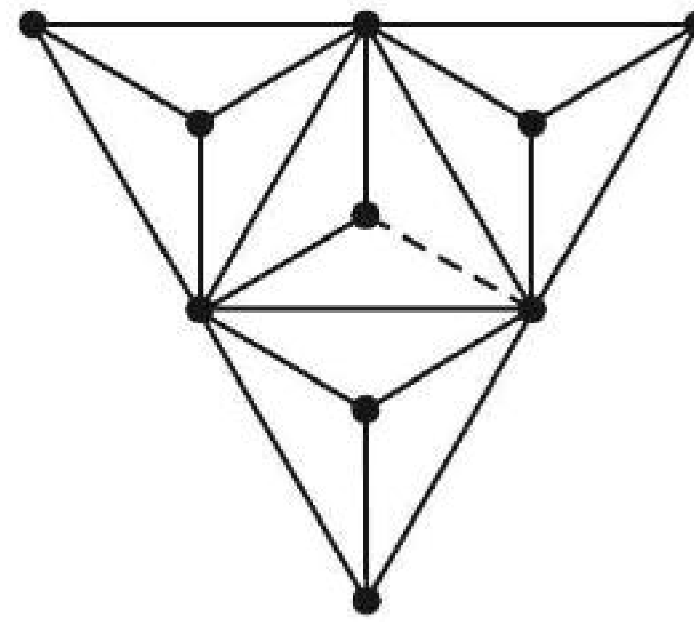
الإثبات: (مخطّط) لتكن S مجموعةً فيها m من الرّؤوس. سنحدّد احتمال عدم امتلاك S لمجموعة مستقرة حجمها r بـ $e^{-dm^{1+\epsilon}}$ لبعض قيم d ، ϵ. وهذا بدوره يحدّد احتمال وجود مجموعة فيها m عنصرًا، ولا تملك مجموعة مستقرّة حجمها r بـ $2^n e^{-dm^{1+\epsilon}} > e^{-dm^{1+\epsilon}}$ بما أنّ $n = m^{1+o(1)}$، فإنّ هذا الحدّ يذهب إلى 0. وطريقة العزم الأول تعطي أنّ فيها G^P كلّه تقريبًا لا يملك مجموعة رديئة فيها m عنصرًا.

يكفي أنْ ندرس البيان الجزئيّ G المُحدث من $[m]$. ليكن X العددَ الأكبر من المجموعات المستقرّة التي حجمها r المنفصلة – مثنى زوجًا زوجًا في هذا البيان الجزئي، حيث إنّ منفصلة – مثنى تعني أنّها تتشارك برأس واحد على الأكثر. سوف نبيّن أنّ $X \ge 1$ تقريبًا دائمًا. ولتحقيق ذلك، يكفي بيان أنّ: (1) X متركز بصورة كبيرة حول وسطه الحسابيّ. (2) $E(X)$ أكبر من شيء ما كبير .

لـ (1)؛ نستدعي متباينة أزوما. خذ في الحسبان الشّكيمة المقيّدة لـ X التي تنتج عن إظهار G لشقّ ضلعيّ واحد في كلّ مرّة. وعند كلّ خطوة، يجب أنْ نعلم ما إذا كان زوج إضافيّ واحد من الرّؤوس يحدث ضلعًا. لذا، يكون لدينا $X_0=E(X)$ و $X_{\binom{m}{2}} = X$. لاحظ أنّ الوضع الحاليّ لشقّ ضلعيّ واحد يغيّر القيمة لـ X بـ 1على الأكثر. لذلك، فإنّ التمهيديّة 36.5.8 تنطبق، وينتج أنّ $P(X - E(X) \le -\lambda\binom{m}{2}^{1/2}) \le e^{-\lambda^2/2}$. مع $\lambda = E(X)/\binom{m}{2}^{1/2}$ فإنّ $P(X=0) = P(X - E(X) \le -E(X)) \le e^{-E(X)^2/(m^2-m)}$. لذلك، يكفي بيان أنّ $E(X)/m \to \infty$.

ولبرهنة هذا؛ سوف نأخذ في الحسبان متغيّرًا عشوائيًّا آخر $\hat{X}$. وسنأخذ في الحسبان أيضًا عدد المجموعات المستقرّة التي حجمها r في G التي لا تملك أزواجًا مشتركة مع أيّ مجموعة مستقرّة أخرى حجمها r. يمثّل جمعٌ مثل هذا حشدًا من مجموعات مستقرّة حجمها r منفصلة – مثنى زوجًا زوجًا. لذا، فإنّ $X \geq \hat{X}$.

ولقد استحدثنا X لأنّ الشّكيمة المقيّدة لـ $\hat{X}$ لا تحقّق $|\hat{X}_i - \hat{X}_{i-1}| \leq 1$. فعلى سبيل المثال، في الرسم لـ $\bar{G}$ في الشّكل أدناه، فإن $r = 4$ ونبحث عن عصب من الدرجة 4؛ إذا كان الضّلع الأخير (المنقّط) موجودًا في $\bar{G}$ (غير موجود في G)، فإنّ $\hat{X} = 0$، أمّا إذا كان غير موجود في $\bar{G}$ (موجود في G)، فإنّ $\hat{X} = 3$.



إنّ حساب $E(\hat{X})$ أسهل من حساب $E(X)$. وبالتّعبير عن $\hat{X}$ بوصفها مجموعًا لـ $\binom{m}{r}$ من المتغيّرات المؤشّرة، فإننا نحصل على $E(\hat{X})$ كـ $\binom{m}{r}$ مضروبًا في الاحتمال الذي تُحدث فيه $[r]$ مجموعة مستقرة حجمها r تكون منفصلة – مثنى عن المجموعات الأخرى جميعا. هذا هو $(1-p)^{\binom{r}{2}}$ مضروبًا بالاحتمال المشروط الذي لا تتعارض فيه $[r]$ مع المجموعات المستقرّة الأخرى التي حجمها r، علمًا بأنّه معطى لدينا أنّ الحادث Z هو أنّ $[r]$ مستقلة. ليكن Y عددَ المجموعات المستقرة الأخرى التي حجمها r والتي تتداخل مع $[r]$ على الأقل في عنصرين. من متباينة ماركوف، فإنّ $E(Y|Z) \to 0$ يعطي $(P(Y=0|Z) \to 1)$. وبما أنّ كلّ مجموعة عُدَّتْ تتشارك برأسين على الأقل مع $[r]$، فإنّ:

$$E(Y|Z) = \sum_{i \geq 2, r-1} \binom{r}{i}\binom{m-r}{r-i}(1-P)^{\binom{r}{2}\binom{i}{2}} .$$

عندما $m \to \infty$ فإنّ هذا يؤول إلى 0؛ وهذا يتبع من التعبير لـ r بدلالة m. لذلك، فإنّ $E(\hat{X})$ يكون مقاربًا لـ $\binom{m}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}}$. والتعبير لـ r بدلالة m يعطي $E(\hat{X}) \in \Omega(m^{5/3})$. لذلك فإن $E(X)/m \to \infty$. وهذا يكمل الإثبات. ■

39.5.8. نتيجة: (Bollobás [1988]) لكلّ احتمال ضلعيّ ثابت $p = 1 - 1/c$، فإن G^p كلّه تقريبًا يحقق أنّ:

$$(1+\in)n/(2\log_c n) \leq \chi(G^p) \leq (1+\in')\, n/(2\log c\, n)$$

حيث $\epsilon = \log_c \log_c n$ و $\in' = 5\log_c \log_c n / \log_c n$

الإثبات: يتحقق الحدّ السّفلي لأن G^p كلّه تقريبًا لا يملك مجموعة مستقرّة أكبر من $2\log_c n - 2\log_c \log_c n$. والحدّ العلوي يتبع من النظرية 38.5.8، لأنّنا نستطيع تقريبًا دائمًا اختيار مجموعات مستقرّة حجمها $2\log_c n - 5\log_c \log_c n$ حتى يبقى $n/lg_c^2 n$ من الرّؤوس فقط. بما أنّ $n/lg_c^2 n \in o(\log_{cn}/ n)$، فإنا نستطيع إكمال التّلوين باستخدام ألوان جديدة مختلفة على الرّؤوس المتبقّية. ■

تمارين (Exercises)

1.5.8. (-) التّوقع:

a) احسب العدد المتوقّع للنقاط الثابتة في تبديل عشوائيّ لـ $[n]$.

b) حدّد العدد المتوقّع للرؤوس التي درجتها k في بيان عشوائيّ على n من الرّؤوس مع احتمال ضلعيّ p.

2.5.8. (-) أثبت أنّ $1-p>e^{-p}$ لـ $0<p$.

3.5.8. (-) حدّد العدد المتوقّع للمثلثات الأحاديّة اللّون في تلوين عشوائيّ من الدّرجة 2 لـ$E(K_6)$.

4.5.8. (-) أثبت أنّ بعض التّلوينات من الدرجة 2 للأضلاع لـ $K_{m,n}$ تملك على الأقل $\binom{m}{r}\binom{n}{s}2^{1-rs}$ نسخة أحاديّة اللّون من $K_{r,s}$.

5.5.8. (-) العبارة "$f(G_n)\le(1+\in)n$" تعني أنه لكلّ $\in>$، فإنّ المتباينة تتحقّق لـn كبيرة بما فيه الكفاية. أمّا العبارة "$f(G_n)\le n+o(n)$" فتعني أنّ $f(G_n)/n\to 1$ عندما $n\to\infty$. أثبت أنّ العبارتين متكافئتان.

6.5.8. احسب بصورة صريحة احتمال أنْ يكون الإغلاق الهاملتونيّ لبيان عشوائيّ على مجموعة الرّؤوس [5] تامًا.

7.5.8. ليكن G بيانًا له p من الرّؤوس، وq من الأضلاع، وزمرة تماثل ذاتيّ حجمها s. لتكن $n=(sk^{q-1})^{1/p}$. أثبت أنّه يوجد تلوين من الدّرجة k لـ$E(K_n)$ لا يملك نسخة أحاديّة اللّون من G. (Chva'tal- Harary [1973])

8.5.8. (!)

a) استخدم تجزئة عشوائيّة للرّؤوس لتبرهن أنّ كلّ بيان يملك بيانًا جزئيًا ثنائيّ الفرع يحوي نصف أضلاعه على الأقلّ.

b) استخدم تجزئات متساوية للرّؤوس لتحسّن فرع (a): إذا كان G يملك m ضلعًا وn رأسًا، فإنّه يملك بيانًا جزئيًّا ثنائيّ الفرع له $\frac{m\lceil n/2\rceil}{2\lceil n/2\rceil-1}$ من الأضلاع على الأقلّ.

9.5.8. جيش من الحواسيب مرتب على هيئة شجرة تامة ذات متعدد k (k- ary tree) مع أوراق على بعد 1 من الجذر. عند زمن مثبت، يعمل كلّ رأس باحتمال p بصورة مستقلة عن الرّؤوس الأخرى. وعندما لا يعمل رأس ما، فإنه لا يمكن الوصول إلى أيّ جزء من الشجرة الجزئيّة التي تقع تحت هذا الرّأس. ما العدد المتوقّع للرّؤوس التي يمكن الولوج إليها من الجذر.

10.5.8. لتكن G مواءمة حجمها n. اختر مجموعة مكوّنة من k من الرّؤوس بصورة عشوائية. احسب العدد المتوقّع للأضلاع المُحدثة من خلال الرّؤوس المختارة.

11.5.8. خذ في الحسبان رسمًا في المستوى لبيان بسيط G له n من الرّؤوس و m من الأضلاع، حيث $m\ge 4n$. ليكن H رسمًا جزئيًّا مُحدثًا عشوائيًّا. ومولّدًا من خلال استيفاء كلّ رأس احتماله p بصورة مستقلة. وليكن Y عددَ الأضلاع المتقاطعة في H. ضع $X = Y - [e(H) - (3n(H)-6)]$. استخدم التّوقعات لتبرهن أنّ $3n + p^3v(G) - pm>0$. واستنتج أنّ $v(G)\ge m^3/[64n^2]$، حيث $v(G)$ هو العدد الأصغر للتقاطعات في رسم G. (تعليق: هذا إثبات بديل النظرية 16.3.6).

12.5.8. إذا أُعطيت تبديلاً عشوائيًّا للرّؤوس في بيان بسيط G، فوجّه كلّ ضلع في اتجاه الرّأس الذي يكون دليله أعلى في التّبديل. احسب العدد المتوقّع للرّؤوس التي تُمثّل بالوعات (درجة خروجها 0) في التّوجيه النّاتج. وبدلالة $n(G)$، حدّد القيم الصّغرى والكبرى لهذا التّوقع. أثبت أنّ احتمالية امتلاك بالوعة واحدة فقط هو على الأكثر $e(G)/\binom{n(G)}{2}$. (Jeurissen [1997])

13.5.8. (!) يتكون البيان الزّائد (hypergraph) من حشد رؤوس وحشد آخر من الأضلاع؛ فإذا كانت مجموعة الرّؤوس هي V، فإنّ الأضلاع هي مجموعات جزئيّة من V. والعدد اللّونيّ $c(H)$ لبيان زائد H هو العدد الأصغر من الألوان الذي نحتاج إليه لوسم الرّؤوس بحيث لا يوجد ضلع يكون أحاديّ اللّون. ويكون البيان الزّائد موحدًا من الدرجة k (k- uniform) إذا كانت أضلاعه جميعها حجمها k:

a) أثبت أنّ كلّ بيان زائد موحّد من الدرجة k عدد أضلاعه أقلّ من 2^{k-1} يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة 2. (Erdös [1963]).

b) استخدم فرع (a) لتبرهن أنّه إذا امتلك كلّ رأس في بيان ثنائي الفرع على n من الرّؤوس قائمةً فيها أكثر من $1 + l\,gn$ من الألوان القابلة للاستخدام، فإنّ تلوينًا فعليًّا يمكن اختياره من هذه القوائم.

14.5.8. (!) استخدم طريقة الحذف لتبرهن أنّ البيان الذي له n من الرّؤوس، ومعدّل درجة رؤوسه $d \geq 1$ يملك مجموعة مستقلّة لها $n/(2d)$ رأسًا على الأقل. (مساعدة: اختر مجموعة جزئيّة عشوائيّة تشمل كلّ رأس احتماله p بصورة مستقلة لتُختار فيما بعد. واحسب العدد المتوقّع للأضلاع المحدثة).

15.5.8. الحجم الأكبر لبيان على n من الرّؤوس الذي لا يحوي H هو $ex(n;H)$. استخدم طريقة الحذف لتبرهن أنّ $ex(n;C_k) \in \Omega(n^{1+1/(k-1)})$. (تعليق: لـ k زوجيّ، بيّن بوندي- سيمونوفيتش [1974] أنّ $ex(n;C_k) \in O(n^{1+2/k})$).

16.5.8. (!) لكلّ $n \in \mathbb{N}$، أثبت أنّ $R(k,k) > n - \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$. استخدم هذا لتستنتج أنّ $R(k,k) > (1/e)(1-o(1))k\,2^{k/2}$.

17.5.8. للأعداد الطبيعة n,t ضع $m = n - \binom{n}{t}^2 2^{1-t^2}$. أثبت أنّه يوجد تلوين من الدّرجة 2 للأضلاع في $K_{m,m}$ دون أيّ نسخة أحاديّة اللّون لـ $K_{t,t}$.

18.5.8. (+) أعداد رامزي البعيدة عن القطر. افترض أنّ $0 < p < 1$:

a) أثبت أنّه إذا كان $\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$، فإنّ $R(k,l) > n$.

b) أثبت أنّ $R(k,l) > n - \binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{l}(1-P)^{\binom{l}{2}}$ لكلّ $n \in \mathbb{N}$.

c) اختر n و p في فرع (b) لتبرهن أنّ $R(3,k) > k^{3/2-o(1)}$. ما الحدّ السّفليّ على $R(3,k)$ الذي قد نحصل عليه من فرع (a)؟ (Spencer [1977]).

19.5.8. ليكن H بيانًا. للثابت p، أثبت أنّ G^p كلّه تقريبًا يحوي H بوصفه بيانًا جزئيًّا مُحدثًا.

20.5.8. a) ثبّت p . t، s، k. أثبت أنّ G^p كلّه تقريبًا يملك الخاصية التّالية: لكلّ اختيار لمجموعات رؤوس منفصلة T, S حجمها t، s يوجد k على الأقلّ من الرّؤوس تكون مجاورة لكلّ رأس في S ولكنّها غير مجاورة لأيّ رأس في T. (Blass- Harary [1979]).

استنتج أنّ G^p كلّه تقريبًا يكون مترابطًا من الدرجة k.

d) طبّق التّعليل نفسه للدّوريات العشوائيّة: كلّ دوري تقريبًا يملك الخاصية الآتية: لكلّ اختيار لمجموعات رؤوس منفصلة S,T وحجمها s,t يوجد k على الأقلّ من الرّؤوس مع أضلاع لكــل رأس في S ومن كـل رأس في T.

21.5.8. يمكن توليد دوريّ عشوائيّ موسوم بتوجيه كلّ ضلع $v_i\,v_j$ من $v_j \rightarrow v_i$ أو من $v_i \rightarrow v_j$ بصورة مستقلة مع احتمال $1/2$:

a) أثبت أنّ كلّ دوريّ تقريبًا يكون مترابطًا بصورة قوية.

b) في دوريّ ما، "الملك" هو رأس يمكنه الوصول إلى أيّ رأس آخر بمسار طوله 2 على الأكثر. ومن المعلوم أنّ كلّ دوريّ يحوي ملكًا. هل صحيح أنّه في كلّ دوريّ تقريبًا يكون كلّ رأس ملكًا؟ (Palmer [1985]).

22.5.8. جد دالّة احتمال العتبة للخاصّيّة الآتية: نصف الأضلاع المحتملة على الأقل لبيان ما تكون موجودة. ما مقدار دقّة العتبة؟

23.5.8. لـ $p = 1/n$ ولـ $0 < \epsilon$ مثبتة، بيّن أنّ G^p كلّه تقريبًا لا يملك مركّبة فيها أكثر من $(1+\epsilon)n/2$ رأسًا. (مساعدة: بدلاً من محاولة وضع حدّ للاحتمال مباشرة، بيّن أنّه محدود باحتمال لحادث آخر، ويؤول إلى 0).

24.5.8. حدّد أصغر بيان بسيط مترابط بحيث لا يكون متوازنًا.

25.5.8. وسّع تعليل العزم الثّاني للنظرية 23.5.8 لتبرهن أنّ $n^{-1/r(H)}$ يكون دالّة عتبة لظهور H بوصفه بيانًا جزئيًّا من G^p، حيث $\max_{G \subseteq H} e(G)/n(G)$ (Rucin'ski- Vince[1985], Bollob'as, [1981a],).

26.5.8. لتكن Q خاصية البيان الآتية: لكلّ اختيار لمجموعات رأسيّة منفصلة T,S حجمها $c \lg n$، يوجد ضلع نقاطه الطّرفيّة في S و T. أثبت أنّه إذا كان $c > 2$، فإنّ كلّ بيان تقريبًا يملك الخاصية Q. (تعليق: يؤدي هذا إلى أنّ البيان العشوائيّ يملك عرض نطاق يساوي على الأقل $n - 2\log n$).

27.5.8. أثبت أنّه إذا كان $k = l\,gn - (2+\epsilon)\ lg\ lg\ n$، فإنّ كلّ دوريّ ألعاب على n من الرّؤوس تقريبًا يملك الخاصّيّة الآتية: كلّ مجموعة فيها k من الرّؤوس تملك تابعًا مشتركًا.

28.5.8. يكون دوريّ الألعاب متعدّيًا إذا امتلك ترتيبًا رأسيًّا $u_1, \ldots, u_n$ بحيث $u_i \rightarrow u_j$ إذا وفقط إذا كان $j > i$. أثبت أنّ كلّ دوريّ ألعاب يملك دوريّ ألعاب جزئيًّا متعدّيًا فيه $1\ gn$ من الرّؤوس. وأنه إذا كان c عددًا ثابتًا أكبر من 1، فإنّ كلّ دوريّ ألعاب تقريبًا لا يملك دوريّ ألعاب جزئيًّا متعدّيًا فيه أكثر من $21\ gn + c$ رأسًا.

29.5.8. (!) جامع القسائم (الكوبونات):

a) خذ في الحسبان تكرارات لتجربة ما مع احتمال نجاح مستقلّ p. أثبت أنّ العدد المتوقّع للمحاولات التي تحقّق النجاح الأول هو $1/p$.

b) يحتوي كلّ صندوق لنوع معيّن من الحلوى على واحدة من n من الجوائز. وكلّ واحدة احتمالها $1/n$. يتطلّب الحصولُ على الجائزة الكبرى الحصولَ على كلّ جائزة من هذه الجوائز مرّة واحدة على الأقلّ. أثبت أنّ العدد المتوقّع للصّندوق الذي نحصل فيه على الجائزة الأخيرة هو $n\sum_{i=1}^{n} 1/i$.

c) أثبت أنّ $m(n) = n\ln n + (k-1)\ln\ln n$ هي دالّة عتبة لعدد الصّناديق الذي نحتاج إليه للحصول على k من النسخ لكلّ جائزة على الأقلّ. (مساعدة: أثبت أنّه عندما يكون $p = o(1)$، وk ثابتًا، فإنّ الاحتمال على الأكثر k من النجاحات في m من المحاولات مع احتمال نجاح p يكون مقاربًا للاحتمال لـ k بالضبط من النجاحات).

30.5.8. أثبت أنّ الطول لأطول مسافة مجتازة في قائمة مكوّنة من n من الرّؤوس والذّيول العشوائيّة هو $(1 + o(1))\ lgn$. بكلمات أخرى، لـ $\epsilon > 0$، لا توجد قائمة تقريبًا تملك على الأقل $(1 + \epsilon)\ lgn$ شقلبات متطابقة متتالية، وكل قائمة تقريبًا تملك على الأقل $(1 - \epsilon)\ \lg n$ شقلبات متطابقة متتالية.

31.5.8. مع $p = (1 - \epsilon)\log n / n$، جد m كبيرة بحيث يكون كلّ بيان تقريبًا يملك على الأقل m من الرّؤوس المعزولة. ما $m(n)$ التي تنتج من متباينة تشيبيجيف (Chebyshev's Inequality)؟

32.5.8. ليكن G بيانًا معطى. نقول إنّ المجموعة S التي فيها k من العناصر هي مجموعة رديئة إذا كان G لا يملك رأسًا v بحيث إنّ $S \subseteq N(v)$. لـ p مثبتة. كم يمكن أنْ تكون k كبيرة بحيث G^p كلّه تقريبًا لا يملك مجموعة رديئة فيها k من العناصر؟ وكم يمكن أنْ تنمو k ببطء بحيث G^p كلّه تقريبًا يملك مجموعة رديئة فيها k من العناصر؟

33.5.8. بفحص جيران مشتركين؛ أثبت أنّه إذا كانت p مثبتة، و $k = o(n/\log n)$، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يكون مترابطًا من الدرجة k.

34.5.8. (!) مع $p = (1 - \epsilon)\log n / n$، كم يمكن أنْ تكون m كبيرة بحيث يملك كلّ بيان تقريبًا على الأقل m من الرّؤوس المعزولة؟ (مساعدة: استخدم متباينة تشيبيجيف).

35.5.8. فترة - t (t- interval) هي مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$ والتي تكون الاتحاد لـ t من الفترات على الأكثر. أما **عدد الفترات** (interval number) لبيان G فهو t الصغرى بحيث يكون G بيانًا مكونًا من تقاطعات فترات من الدّرجة t (كلّ رأس معيّن بمجموعة تكون الاتحاد لـ t من الفترات على الأكثر). أثبت أنّ البيانات جميعها تقريبًا (احتمال ضلعيّ $1/2$) تملك عدد فترات يساوي $(1 - o(1))n/(4\lg n)$ على الأقل. (مساعدة: قارن عدد التّمثيلات بعدد البيانات البسيطة. تعليق: بيّن شنيرمان [1990] أنّ البيانات جميعها تقريبًا تملك عدد فترات يساوي $(1+ o(1))n/(2\lg n)$ (Erdös- West [1985]).

36.5.8. (!) عتبة لمواءمة كاملة في بيان عشوائيّ ثنائيّ الفرع. ليكن G بيانًا جزئيًّا عشوائيًّا في $K_{n,n}$ مع مجموعات مجزّأة A، B، مولّدة باحتمال ضلعيّ مستقلّ $p = (1 + \epsilon)\ inn / n$، حيث ϵ ثابت غير صفريّ. نسمي S مجموعة مُنتَهَكَة إذا كان $|N(S)|<|S|$.

a) أثبت أنّه إذا كان $\epsilon < 0$، فإنّ G كلّه تقريبًا لا يملك مواءمة كاملة.

b) لتكن S مجموعة منتهكة أصغريّة. أثبت أنّ $|N(S)| = |S| - 1$ وأنّ $G[S \cup N(S)]$ مترابط.

c) افترض أنّ G لا يملك مواءمة كاملة. أثبت أنّ A أو B تحوي مجموعة منتهكة فيها $\lceil n/2 \rceil$ عنصرًا على الأكثر.

d) لـ $r, s \geq 1$، عدد الشّجرات المولّدة في $K_{r,s}$ هو $r^{s-1} s^{r-1}$. استخدم هذا، وفرع (b)، وفرع (c)، ومتباينة

ماركوف لتبرهن أنّه إذا كان $o < \in$، فإنّ G يملك مواءمة كاملة بصورة مؤكدة تقريبًا. (مساعدة: نستطيع تحديد المجموع الموجود في الحدّ على العدد المتوقّع لمجموعات منتهكة أصغريّة بمتسلسلة هندسيّة).

37.5.8. افترض أنّ $o < p < 1$، وأنّ $k_1, \ldots, k_r$ أعداد صحيحة غير سالبة مجموعها m. أثبت أنّ $\Pi_{i=1}^{r}[1-(1-p)^{k_i}] \le [1-(1-p)^{m/r}]^r$.

38.5.8. الذّيل للتّوزيع الثنائيّ الحدّ. ليكن $X = \sum X_i'$، حيث كلّ X_i' هو متغيّر مؤشّر مع احتمال نجاح $P(X_i' = 1) = .5$، وبحيث يكون $E(X) = n/2$. إنّ تطبيق متباينة ماركوف للمتغيّر العشوائيّ $Z = (X- E(X))^2$ يعطي أنّ $P(|Z| \ge t) \le Var(X)/t^2$. إضافة إلى أنّ وضع $t = \alpha\sqrt{n}$ يعطي حدًّا على الإحتمال الذّيليّ: $P(|X - np| \ge \alpha\sqrt{n}) \le 1/(2\alpha^2)$، استخدم متباينة أزوما لتبرهن الحدّ الأقوى وهو $P(|X - np| > \alpha\sqrt{n}) < 2e^{-2\alpha^2}$. (مساعدة: ضع $Y_i' = X_i' - 0.5$. ليكن F_i هو المعرفة لـ $Y_1', \ldots, Y_i'$، ولتكن $Y_i = E(Y|F_i)$)

39.5.8. التعبئة بالأوعية. لتكن الأعداد $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ مسحوبة وبصورة موحّدة ومستقلة عن الفترة $[0,1]$. يجب أنْ توضع الأعداد في أوعية سعة كلّ منها **1**. وليكن X هو عدد الأوعية الذي نحتاج إليه. استخدم التمهيديّة **36.5.8** لتبرهن أنّ $P(|X - E(X)| \ge \lambda\sqrt{n}) \le 2e^{-\lambda^2/2}$.

40.5.8. (!) متباينة أزوما، ومسألة رجل المبيعات المتجوّل:

a) أثبت التعميم لمتباينة أزوما للشّكائم العامّة: إذا كان $E(X_i) = X_i - 1$ و $|X_i - X_{i-1}| \le c_i$، فإنّ $P(X_n - X_0 \ge \lambda\sqrt{\sum c_i^2}) \le e^{-\lambda^2/2}$.

b) لتكن Y المسافةَ من نقطة معطاة z في مربّع الفصل إلى أقرب نقطة من n من النقاط المختارة بصورة موحّدة ومستقلة في مربّع الفصل. أثبت أنّ $E(Y) < c/\sqrt{n}$، لثابت ما c. (مساعدة: لمتغيّر عشوائيّ متّصل غير سالب Y، والذي نستطيع التحقق منه باستخدام التكامل بالأجزاء. لوضع حدّ على هذا التكامل؛ استخدم (في مكان ما) المتباينة $1 - a < e^{-a}$ والتّكامل المحدود $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$.

c) طبّق الفرعين (a) و (b) لتبرهن أنّ أصغر طول لمتعدّد أضلاع يحدّ مجموعة عشوائيّة تحوي n من النقاط في مربّع الفصل يكون متركزًا بصورة عالية حول توقعه. بوجه خاص، إنّ احتمال انحرافه عن طول الجولة المتوقع بأكثر من $\lambda c\sqrt{\ln n}$ يكون محدودًا بـ $2e^{-\lambda^2/2}$ مناسبة لـ c. (مساعدة: للشّكيمة التي يكون فيها X_i هو الطول المتوقّع للجولة التي يكون فيها أول i من النقاط معروفة، أثبت أنّ $|X_i - X_{i-1}| < c(n-i)^{-1/2}$ إنّ تمهيديّة 36.5.8 لا تنطبق بصورة مباشرة).

6.8. القيم الذّاتيّة للبيانات (Eigenvalues of Graphs)

تساعد الأساليب في نظرية الزّمر والجبر الخطّيّ على دراسة البناء والتّعداد للبيانات، فالجبر الخطّيّ مثلًا ساعد في الفضاءات المتّجهة والمحدّدات على بيان G مع أضلاع $e_1, \ldots, e_m$، لاحظ أنّ **متّجه الوقوع (incidene vector)** لمجموعة $F \subseteq E(G)$ يملك إحداثيّات $a_i = 1$ عندما $e_i \in F$، و$a_i = 0$ عندما $e_i \notin F$ لتكن **C** مجموعة متجهات الوقوع لبيانات جزئيّة زوجيّة (البيانات الجزئيّة التي درجة رؤوسها زوجية)، ولتكن **B** مجموعة متجهات الوقوع للقاطعات الضّلعيّة؛ ولأنّ هاتين المجموعتين مغلقتان تحت عملية الجمع المتجهي الثنائية، فإنّ **C** و **B** فضاءان متجهان. (التمرينان 1–2) يدعيان **الفضاء الحلقي (cycle space)** و**فضاء الروابط (bond space)** لـ G. وبما أنّ أيّ بيان جزئيّ زوجيّ، وأيّ قاطع ضلعيّ يتشاركان في عدد زوجيّ من الأضلاع، فإنّ **C** و **B** يكونان متعامدين، وهذا يرتبط بصورة قريبة جدًّا بالثّنويّة بين الحلقات والرّوابط في النظرية 14.1.6 والنتيجة 42.2.8،

واستخدام المحدّدات في نظرية شجرة المصفوفة (النظرية 12.2.2). ولمزيد من مناقشة هذه الفضاءات المتّجهة؛ انظر بيجز [1993, Part 1] (Biggs). تظهر الزّمر في دراسة تشاكل البيان، والطّمر، والتعداد. لاحظ أنّ التّشاكلات الذّاتيّة لبيان تشكل زمرة تباديل على رؤوس هذا البيان. لقد قادت أفكار نظرية الزّمر إلى خوارزميّات لفحص التّشاكل، وإلى البناءات للطّمور على السّطوح أيضًا. وبالعكس، فإنّه يمكن نمذجة كلّ زمرة باستخدام البيانات. وهناك تقديم لتبادل الأدوار هذا في [White, 1973]؛ وانظر كذلك [Gross – Yellen, 1999, 13 – 15].

سوف نحصر اهتمامنا في القيم الذّاتيّة لمصفوفات التّجاور، ونفسّر كثيرة الحدود المميّزة بدلالة البيانات الجزئيّة، وعلاقة القيم الذّاتيّة مع المتغيّرات الأخرى للبيان، وتمييز مجموعات القيم الذّاتيّة للبيانات الثنائيّة الفرع والبيانات المنتظمة. ونتناول أخيرًا تطبيقات على البيانات الممتدّة و"نظرية الصّداقة". وهناك مناقشة شاملة للقيم الذّاتيّة للبيانات في [Cvetkovic′ – Doob – Śachs, 1979]. وقد قدّم [chung, 1997] نهجًا حديثًا لهذه المسألة من خلال تعديل مصفوفة التّجاور بطريقة معايرة القيم الذّاتيّة لإعطاء نتائج مماثلة، وتحقيق عمومية أكثر. سوف نستخدم النسخة التقليدية في هذا التّقديم المختصر.

كثيرة الحدود المميّزة (The Characteristic Ploynamial)

1.6.8. تعريف: القيم الذّاتيّة (eigenvalues) للمصفوفة A هي الأعداد λ، بحيث يكون للمعادلة $Ax = \lambda x$ حلّ متجهيّ غير صفريّ؛ وكلّ حلّ مثل هذا هو **متّجه ذاتيّ** (eigenvector) مرافق لـ λ. أو مرتبط بـ λ. والقيم الذّاتيّة للبيان هي القيم الذّاتيّة لمصفوفة التّجاور A للبيان. وهذه القيم الذّاتيّة $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ هي الجذور **لكثيرة الحدود المميّزة** (characteristic polynomial) $\phi(G;\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$. أمّا **الطّيف** (spectrum) فهو قائمة القيم الذّاتيّة المختلفة مع تكراراتها $m_1, \ldots, m_t$؛ ونكتب $\text{spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_t \\ m_1 \ldots m_t \end{bmatrix}$.

2.6.8. ملاحظة. الخصائص الأوّليّة للقيم الذّاتيّة هي:

0) القيم الذّاتيّة هي قيم λ بحيث تكون المصفوفة المربعة $\lambda I - A$ هي مصفوفة منفردة، وهذا يكافئ أنْ تكون $det(\lambda I - A) = 0$.

1) $Trace\ A = \sum \lambda_i$ **الأثر** (trace) هو مجموع عناصر القطر. وهو سالب معامل λ^{n-1} في $det(\lambda I - A)$. وبما أنّ $\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$، فإنّه يساوي $\sum \lambda_i$ أيضًا. أمّا للبيانات البسيطة، فإنه يساوي 0.

2) $\prod \lambda_i = (-1)^n \phi(G;0) = \det\ A = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$، حيث يتغير المجموع على التّباديل σ لـ $[n]$.

3) للمصفوفة A الحقيقية المتماثلة التي حجمها $n\times n$ و لـ $\lambda \in \mathbb{R}$، يكون التّكرار لـ λ بوصفها قيمة ذاتيّة للمصفوفة A هو $n - \text{rank}(\lambda I - A)$.

4) إنّ إضافة c إلى القطر يغيّر القيم الذّاتيّة بمقدار c؛ نظرًا لأن $\alpha + c$ تكون جذرًا لـ $det(\lambda I - (cI + A))$ إذا وفقط إذا كان a جذرًا لـ $det(\lambda I - A)$.

3.6.8. مثال: طيف العصب والعصب الثّنائية. إنّ مصفوفة التّجاور للبيان K_n هي $J - I$، حيث J هي المصفوفة التي تكون مدخلاتها جميعها **1**. لذا، فإنّ القيم الذّاتيّة للبيان K_n هي أقلّ من القيم الذّاتيّة لـ J بـ **1**. وبما أنّ $\text{spec}\ J = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 1 & n\text{-}1 \end{bmatrix}$، فإنّ $\text{spec}\ K_n = \begin{bmatrix} n\text{-}1 & \text{-}1 \\ 1 & n\text{-}1 \end{bmatrix}$. إنّ رتبة مصفوفة التّجاور للبيان $K_{m,n}$ هي **2**. لذا، فإنها

تملك قيمتين ذاتيّتين λ_1, λ_2. وبما أنّ الأثر يساوي 0، فإنّ $-\lambda_2 = \lambda_1$؛ سُمّي هذا الثابت b.

لذلك، فإنّ $\phi(K_{m,n};\ \lambda) = \lambda^n - b^2\ \lambda^{n-2}$. نحسب b باستخدام $\phi(G;\ I) = det\ (\lambda I - A)$. بما أنّ λ تظهر فقط على القطر، فإنّ الإسهامات في تمديد التّباديل لمعاملات λ^{n-2} تظهر فقط من تباديل تستخدم $n-2$ موقعًا على القطر. أمّا الموقعان المتبقّيان، فيجب أنْ يكونا $-a_{i,j}$ و$-a_{j,i}$ لبعض قيم j, i. ويوجد mn إسهامًا غير صفريّ على هذا الشّكل، وجميعها سالبة. إذن، $b^2 = mn$، و $\text{spec}(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{m,n} & 0 & -\sqrt{m,n} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$. ■

ونضع دليلًا لمعاملات كثيرة الحدود المميّزة حيث $\phi(G;\lambda) = \sum_{i-0}^{n} c_i\,\lambda^{n-i}$. بما أنّ $\phi(G;\lambda) = \det(\lambda I - A)$، فإن $C_0=1$ و $C_1=\text{Trace } A=0$ دائمًا. لاحظ أن حساباتنا لـ C_2 للبيان $K_{m'in}$ تُعمم على البيانات جميعها.

4.6.8. تعريف: المصفوفة الجزئيّة الرّئيسة (principal submatrix) لمصفوفة مربّعة A هي مصفوفة جزئيّة تتكون من أعمدة وصفوف لها الدليل نفسه.

بما أنّ الإسهامات لـ $c_2\,\lambda^{n-2}$ تشمل $n-2$ عاملاً لـ λ من القطر، فإنّ المعامل c_2 هو مجموع المحدّدات الجزئيّة من الحجم 2×2 الرّئيسة للمصفوفة $-A$. لبيان بسيط، فإنّ $-a_{i,j}$ هي -1 عندما $v_i \leftrightarrow v_j$ و 0 غير ذلك. لذا، $c_2 = -e(G)$.

وبالمثل، فإنّ c_3 هو مجموع المحددات الجزئيّة من الحجم 3×3 الرّئيسة للمصفوفة $-A$. وللثّلاثيّة i, j, k، لاحظ أنّ المحددة تعتمد على عدد الأضلاع فقط بين v_i, v_j, v_k. حيث تكون المحددة 0 إلاّ إذا شكّلت هذه الرؤوس مثلّثًا، وعند ذلك فإنها تكون -2، إذن، c_3 هو حاصل ضرب -2 في عدد الحلقات من الدرجة 3 في G.

بما أنّ المصفوفات الجزئيّة الرّئيسة هي مصفوفات التّجاور لبيانات جزئيّة محدثة، فإنّه يصبح لدينا عمومًا $c_i = (-1)^i \sum_{|S|=i} \det A\,(G[S])$.

5.6.8. نظرية: (Harary [1962 b]) إذا أُعطيت بيانًا بسيطًا G، فاجعل $\mathbf{H}$ مجموعةَ البيانات الجزئيّة المولّدة التي يكون فيها كلّ مركّبة ضلعًا أو حلقة. إذا كان $k(H)$ و $s(H)$ يرمزان إلى عدد المركّبات في H وعدد المركّبات التي تكوّن حلقات على الترتيب، فإنّ $\det A(G) = \sum_{H \in \mathbf{H}} (-1)^{n(H)-k(H)}\, 2^{s(H)}$.

الإثبات: صيغة المحددة هي: $\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{t(\sigma)} \prod a_{i,\sigma(i)}$، حيث المجموع على تباديل لـ $[n]$، و$t[\sigma]$ هي التبديلات الصّفية (مناقلات transpositions) التي نحتاج إليها لوضع الموقعين $(i)\ \sigma$ و i على القطر. عندما تكون A مصفوفة مدخلاتها 0، 1، فإنّ الإسهام من σ يكون غير صفري إذا وفقط إذا كانت هذه المدخلات جميعها تساوي 1.

سوف ننظر إلى σ بوصفها تبديلًا رأسيًّا يرسل كلّ v_i إلى $v_{\sigma(i)}$. وهذا يقسم $V(G)$ إلى مدارات. وبما أنّ $a_{i,\sigma(i)} = 1$ تعني أنّ $v_i \leftrightarrow v_{\sigma(i)}$، فإنه لا يوجد مدارات حجمها 1 ولا مدارات حجمها 2 ترتبط بأضلاع، ولا مدارات أطول ترتبط بحلقات. لذلك، فإن التبديل يعمل إسهامًا غير صفري عندما يصف بيانًا جزئيًّا مولدًا H من G الذي تكون المركبات فيه أضلاعًا وحلقات.

إن إشارة الإسهام تحدد من خلال عدد المناقلات التي نحتاج إليها لنقل المدخلات إلى القطر. وتبديل الصفوف ينقل عنصرًا واحدًا من مدار في المرة الواحدة إلى القطر، لكن التبديل الأخير ينقل العنصرين الأخيرين إلى القطر. لذلك، فإن $t(\sigma) = n(H) - k(H)$. وأخيرًا، فإنّ كلّ حلقة طولها 3 على الأقل في H يمكن أن تظهر في أحد الطريقين في مصفوفة التباديل؛ لأننا نستطيع تتبع الحلقة في أحد الاتجاهين. لذا، فإن عدد التباديل التي

تُنتج H هو $2^{s(H)}$. ■

6.6.8. نتيجة: ([Sachs [1967]) لترمز $\mathbf{H}_i$ إلى مجموعة بيانات جزئية على i من الرؤوس لبيان بسيط G الذي تكون مركباته أضلاعًا أو حلقات. إن كثيرة الحدود المميّزة لـ G هي $\sum_{ci}\lambda^{n-i}$، حيث $c_i = \sum_{H\in \mathbf{H}_i} (-1)^{K(H)}\ 2^{S(H)}$.

الإثبات: هذا يتبع من النظرية **5.6.8**. والملاحظة السابقة التي تشير إلى أن $c_i = (-1)^{(i)} \sum_{|s|=i} \det\ A(G[S])$. ■

إنّ هذه الصيغة تقودنا إلى تعبير تتابعي لكثيرة الحدود المميّزة (التمرين **5**). ومن الممكن استخدام هذه الصيغة لإنشاء أشجار غير متشاكلة لها كثيرة الحدود المميّزة نفسها (مع ثمانية رؤوس فقط) (التمرين **7**).

وفيما يأتي، سنناقش خصائص القيم الذّاتيّة للبيانات الثنائية الفرع.

7.6.8. قضية. إن المدخلة (i, j) للمصفوفة A^k تحسب الممرات التي طولها k من v_i إلى v_j. والقيم الذّاتيّة لـ A^k هي القيم الذّاتيّة لِـ A مرفوعة للقوة k.

الإثبات: تتحقق العبارة للممرات من خلال الاستقراء على k (التمرين **30.2.1**). وللعبارة الثانية، لاحظ أنّ $Ax = \lambda x$ تعطي $A^k x = \lambda^k x$ من خلال تكرار الضّرب. وباستخدام متجه ذاتيّ اختياري x، فإننا نتأكد من عدم تغيير التكرارات للقيم الذّاتيّة. ■

8.6.8. تمهيدية: إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع، و λ قيمة ذاتية لـ G مع تكرار m، فإنّ λ- هي أيضًا قيمة ذاتية لـ G مع تكرار m.

الإثبات. إن إضافة رؤوس معزولة لإعطاء المجموعات المجزأة حجمًا متساويًا ما هو إلا إضافة صفوف وأعمدة صفريّة لمصفوفة التّجاور، وهذا لا يغير الرتبة، ولكنّه يغيّر الطّيف فقط من خلال تضمين 0 واحد إضافيّ لكلّ رأس مضاف. لذلك، يمكن الافتراض بأنّ المجموعات المجزّأة لها الحجم نفسه.
بما أنّ G ثنائيّ الفرع، فإنا نستطيع تبديل الصفوف والأعمدة في A لنحصل على الشّكل $A = \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix}$، حيث إن B مصفوفة مربعة. إذا كانت λ قيمة ذاتية مرافقة للمتجه الذاتيّ $v = \binom{x}{y}$ (مجزءًا تبعًا للتّجزئة الثّنائيّة لـ G)، فإنّ $\lambda v = Av = \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix} \binom{x}{y} = \begin{bmatrix} By \\ B^T x \end{bmatrix}$. لذلك، فإنّ $By = \lambda x$ و $B^T x = \lambda y$.

ضع $v' = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$. نحسب $Av' = \begin{bmatrix} B(-y) \\ B^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = \lambda_{v'}$. إذن، v' متجه ذاتي لـ A للقيمة الذّاتيّة λ-. علاوة على ذلك وبالطريقة نفسها، فإنّ m من المتجهات الذّاتيّة المستقلة لِـ λ التي تعطي m من المتجهات الذّاتيّة المستقلة لـ λ-. لذلك، فإنّ λ- متّجه ذاتيّ لـ A له تكرار λ نفسه. ■

9.6.8. نظرية: العبارات الآتية حول البيان G متكافئة:

a) G ثنائيّ الفرع.
b) تظهر القيم الذّاتيّة غير الصّفريّة لـ G على صورة أزواج λ_i، λ_j حيث $\lambda_i = -\lambda_j$.
c) $\phi(G;\lambda)$ أو $\lambda\phi(G;\lambda)$ كثيرة حدود في λ^2.
d) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t-1} = 0$ لكلّ عدد صحيح موجب t.

الإثبات: برهنّا في التمهيدية أنّ $A \Leftarrow B$.

$B \Leftrightarrow C$ $(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j) = (\lambda^2 - a)$ إذا وفقط إذا $\lambda_j = -\lambda_i$. لذلك، فإنّ الجذور تظهر مثل تلك الأزواج إذا وفقط إذا كانت $\phi(G;\lambda)$ حاصل ضرب عوامل خطّيّة في λ^2.

$D \Leftarrow B$: إذا كان $\lambda_j = -\lambda_i$، فإنّ $\lambda_j^{2t-1} = -\lambda_i^{2t-1}$.

$A \Leftarrow D$: لأنّ $\sum\lambda_i^k$ يحسب الممرات من الدّرجة k المغلقة في البيان (من كلّ رأس ابتدائيّ)، فإنّ الشرط d يمنع

وجود ممرات مغلقة طولها فرديّ. وهذا يمنع وجود حلقات فرديّة؛ لأنّ الحلقة الفرديّة هي ممر مغلق فرديّ. ولذلك، فإنّ G ثنائيّ الفرع. ■

الجبر الخطّيّ للمصفوفات المتماثلة الحقيقيّة (Linear Algebra of Real Symmetric Matrices)

تتطلّب القيم الذّاتيّة التي لها علاقة مع متغيرات أخرى نتائج عديدة من الجبر الخطّيّ، مثل النظرية الطيفية، ونظرية كايلي وهاملتون للمصفوفات المتماثلة الحقيقية. وهذا يذكر عادة بعمومية أكثر، لكن مصفوفات التّجاور تكون حقيقية ومتماثلة، وهنا نلاحظ أنّ براهين المبرهنات أقصر. سنبدأ مع تمهيدية تنتج عن النظرية الطيفية عندما نبرهن الأخيرة باستخدام مصفوفات أعداد مركبة. ويمكن تجاوز البراهين لهذه النتائج، وخصوصًا من قبل المتمكنين جيدًا من مفاهيم الجبر الخطّيّ.

10.6.8. تمهيدية: إذا كان $f(x) = x^TAx$، حيث A مصفوفة متماثلة حقيقية، فإنّ f تحقق القيم العظمى والصغرى على متجهات الفصل x عند المتجهات الذّاتيّة لـ A؛ حيث إنها تساوي القيمة الذّاتيّة المقابلة (المرتبطة بذلك).

الإثبات: تكون الدالة f متصلة في $x_1, \ldots, x_n$. ولتقييد مثالي، نستخدم مضروبات لاجرانج. إذا أعطينا القيد $x^T x = 1$، فإنّنا نضع $g(x) = x^T x - 1$. وبتشكيل $L(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$، فإنّ القيم القصوى تظهر حينما تكون المشتقات الجزئيّة لـ L جميعها تساوي 0. وبالنسبة إلى λ، فإنّ هذا يعطي $x^T x = 1$.

ليرمز ∇ إلى متجه المشتقات الجزئيّة بالنسبة إلى $x_1, \ldots, x_n$.

نحسب $\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) - \lambda\nabla g(x) = 2Ax - 2\lambda x$. لاحظ أنّ العبارة $\nabla f(x) = 2Ax$ تستخدم التماثل لـ A. ويكون لدينا $\nabla L = 0$ بالضبط عندما يكون $Ax = \lambda x$، وهذا يتطلب أن يكون x متجهًا ذاتيًّا لـ A مرافقًا للقيمة الذّاتيّة λ. وهذا يؤدي إلى أن $f(x) = x^T Ax = \lambda x^T x = \lambda$.

بما أن متغيراتنا في الأمثلية حقيقيةٌ، فإننا نكون قد وجدنا متجهًا ذاتيًّا حقيقيًّا وقيمة ذاتية على الأقل. ونستطيع استخدام هذا استقرائيًّا لنبين أن المتجهات الذّاتيّة جميعها تملك هذه الخاصية.

11.6.8. نظرية: (النظرية الطيفية) المصفوفة المتماثلة الحقيقية من الحجم $n \times n$ تملك قيمًا ذاتية حقيقية، وتمتلك n متجهًا ذاتيًّا متعامدًا مُعَيَّرًا (orthonormal).

الإثبات: سوف نستخدم الاستقراء على n. يكون الادعاء واضحًا لـ $n = 1$؛ خذ في الحسبان $n > 1$. ليكن v_n هو المتجه الذاتي الذي يعظِّم $x^T Ax$. ولتكن W المتممةَ المتعامدة للفضاء المولد من v_n؛ لاحظ أن بُعد W هو $n - 1$. إذا كان $w \in W$، فإنّ $v_n^T\ Aw\ = w^T A\ v_n\ = \lambda_n w^T v_n = 0$. لذلك، فإنّ $A\,w \in W$. وبالنظر إلى الضرب في A كدالة f_A، فإن لدينا $f_A\colon W \to W$.

لتكن S هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات لأساس متعامد مُعَيَّر لـ $\mathbb{R}^n$ مع v_n بوصفه عمودًا أخيرًا لهذه المصفوفة. بما أنّ الأساس متعامد ومُعَيَّر، فإنّ $S^{-1} = S^T$. والمصفوفة لـ f_A بالنسبة إلى هذا الأساس هي S^TAS. وبما أنّ الأساس متعامد ومُعَيَّر، وv_n متجه ذاتي، فإنّ العمود الأخير لـ $S^T AS$ يكون 0، ما عدا λ_n في الموقع الأخير. فضلًا عن ذلك، فإنّ المصفوفة متماثلة. لذلك، فإنّ أول $n - 1$ صفًا وعمودًا لهذه المصفوفة تُشكّل المصفوفة A' لـ f_A على W بالنسبة إلى هذا الأساس.

من فرضية الاستقراء، فإن A' تملك متجهات ذاتية متعامدة مُعَيَّرة $v_1, \ldots, v_{n-1}$، مع قيم ذاتية حقيقية. وباستخدام S، نحول هذه المتجهات بإرجاعها إلى متجهات ذاتية حقيقية لـ A، لها القيم الذّاتيّة الحقيقية

نفسها، وتشكّل مجموعة متعامدة مُعَيَّرة. ■

لاحقًا، سوف نأخذ في الحسبان دوال كثيرة حدود لمصفوفة. وبالنظر إليها بوصفها عناصر في $\mathbb{R}^{n^2}$، فإنّ المصفوفات لا $I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ يمكن أن تكون مستقلة بسبب وجود $n^2 + 1$ منها. وباستخدام معادلة الاعتماد الخطي، نحصل على كثيرة حدود p بحيث تكون $p(A)$ هي المصفوفة الصفرية. وكثيرة الحدود المميّزة نفسها تكفي، وهذا يتحقق لكلّ A. ولكن مجددًا سنأخذ في الحسبان المصفوفات الحقيقية المتماثلة فقط.

12.6.8. نظرية: (نظرية كايلي – هاملتون) إذا كانت $\phi(\lambda)$ كثيرة الحدود المميّزة لمصفوفة حقيقية متماثلة A، فإنّ $\phi(A)$ هي المصفوفة الصفرية (A «تحقق» كثيرة الحدود المميّزة خاصتها).

الإثبات: لتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ القيمَ الذاتية للمصفوفة A. لذلك، فإن $\phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$. وبما أن القوى لـ A إبدالية، فإن $\phi(A)$ التي نحصل عليها باستخدام A بدلاً من λ تكون $\phi(A) = \prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)$. ولبرهَنة أن $\phi(A) = 0$، فإننا نحتاج فقط إلى بيان أن المصفوفة $\phi(A)$ ترسل كلّ متجه إلى $\mathbf{0}$. اكتب متجهًا اختياريًّا x كتركيب خطي من المتجهات الذّاتيّة التي تشكل أساسًا والمضمونة من النظرية الطيفية. ولاحظ أن تطبيق $A - \lambda_i I$ يقتل المعاملات لـ v_i. فضلًا عن أن الضرب في العوامل $A - \lambda_i I$ جميعها بصورة متتالية ينتج المتجه الصفري.

13.6.8. تعريف: **كثيرة الحدود الصغرى** (minimum polynomial) ψ لمصفوفة A هي كثيرة الحدود ذات أصغر درجة تحقق A، وتملك معاملاً قائدًا يساوي **1**. وعندما تكون A مصفوفةَ التّجاور لـ G، فإن ψ تسمى **كثيرة الحدود الصغرى** (minimum polynomial) $\psi\,(G; \lambda)$ لـِ G.

لاحظ أن كثيرة الحدود الصغرى تكون وحيدة؛ حيث إنه إذا كانت A تحقق كثيرتي حدود صغريين لهما الدرجة نفسها، فإن A سوف تحقق الفرق بينهما، وهذا الفرق يملك درجة أقل.

14.6.8. نظرية: كثيرة الحدود الصغرى للمصفوفة A هي $\psi(A) = \prod_{i=1}^{t}(\lambda - \lambda_i)$، حيث $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$ هي القيم الذّاتيّة المختلفة لـ A.

الإثبات: كثيرة الحدود الصغيرة تقسم كلّ كثيرة حدود متحققة بواسطة A. وبخلاف ذلك، فإن الباقي سوف يكون كثيرة حدود بدرجة أقل متحققة بواسطة A. الآن، تعطي نظرية كايلي – هاملتون أن ψ تقسم ϕ، ويجب أن تكون حاصل الضرب لبعض عواملها. إن قتل المتجهات في الفضاء الجزئي للمتجهات الذّاتيّة للقيمة الذّاتيّة λ_i يتطلب عاملاً من الشكل $A - \lambda_i I$. وهذا العامل يقتل المتجهات جميعها في الفضاء الجزئي. لذلك، نحتاج إلى نسخة واحدة فقط لكلّ عامل مثل هذا العامل. ■

15.6.8. تمهيدية: (قانون سلفستر للقصور الذاتي) لتكن A مصفوفة حقيقية متماثلة. إذا أمكن كتابة x^TAx بوصفه مجموعًا لـ N من جداءات التراكيب الخطية، بمعنى $x^TAx = \sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{i \in S_m} a_{i,m}x_i\right)\left(\sum_{j \in T_m} b_{j,m}x_j\right)$، فإن N هي العدد الأكبر لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة وعدد القيم الذّاتيّة السالبة للمصفوفة A على الأقل.

الإثبات: (Tverberg [1982]) اكتب التعابير الخطية على هيئة $u_m(x)$ و $v_m(x)$. ولكل m، لاحظ أن $u_m(x)v_m(x) = L_m^2(x) - M_m^2(x)$، حيث $L = \frac{1}{2}(u+v)$ و $M = \frac{1}{2}(u-v)$ تركيبان خطيان لـ $x_1, \ldots, x_n$. وهذا يعبر عن الشكل التربيعي على الشكل $x^TAx = \sum_{m=1}^{N}\left[L_m^2(x) - M_m^2(x)\right]$.

ومن الناحية الأخرى، بما أنّ A مصفوفةٌ حقيقية متماثلة، فإنها تملك متجهات ذاتية متعامدة مُعَيَّرة

$w^1, \ldots, w^n$. وباستخدام هذا، نكتب $x^TAx = x^TS\,AS^Tx$، حيث A هي المصفوفة القطرية التي قيمها الذّاتيّة $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$، و S تملك الأعمدة $w^1, \ldots, w^n$. إذا كانت S تملك P متجهًا ذاتيًّا موجبًا، في حين تملك q متجهًا ذاتيًّا سالبًا، فإنّ $x^TAx = \sum_{i=1}^{p}\left(y^i . x\right)^2 - \sum_{i=n-q+1}^{n}\left(z^i . x\right)^2$، حيث تكون y^i أو z^i هي $|\lambda_i|^{1/2}\ w^i$.

والآن، لنأخذ في الحسبان نظامًا متجانسًا من المعادلات الخطية. حيث نشترط أن $L_m(x) = 0$ لـ $1 \leq m \leq N$، وأيضًا $z^i \cdot x = 0$ لـ $n - q < i \leq n$، وأيضًا $w^i . x = 0$ لـ $p < i \leq n - q$. لاحظ أنّ هذا يضع $N + n - p$ قيدًا خطيًّا متجانسًا على n من المتغيرات. إذا كان $n < p$، فإن هذه المعادلات تملك حلًّا متزامنًا غير صفري x'. وبوضع x بدلاً من x' في التعبيرين لـ $x^T Ax$، نجد أنّ $\sum_{i=1}^{P}\left(y^i . x'\right)^2 = -\sum_{m=1}^{N} M_m^2(x')$.
وبما أنّ x' متعامد مع المتجهات الذّاتيّة جميعها التي قيمها الذّاتيّة غير موجبة، فإنّ الجهة اليسرى تكون موجبة، في حين تكون الجهة اليمنى غير موجبة. وهذا التناقض يعطي أنّ $N \geq p$؛ وبتعليل مماثل نجد أنّ $N \geq q$. ■

القيم الذّاتيّة ومتغيرات البيان (Eigenvalues of Graph Parameters)

توفر القيم الذّاتيّة حدودًا على متغيرات متنوعة. وبكلماتٍ أخرى، فإنّ متغيرات البيان تعطي حدودًا على القيم الذّاتيّة. ونتيجتنا الأولى الآتية تستخدم كثيرة الحدود الصُغرى فقط.

16.6.8. نظرية : إن القطر لبيان مترابط G يكون أقل من عدد القيم الذّاتيّة المختلفة لـ G.

الإثبات: لتكن A مصفوفة التّجاور؛ فإن A تحقق كثيرة حدود من الدرجة r إذا وفقط إذا كانت بعض التركيبات الخطية لـ $A^0, \ldots, A^r$ هي 0. وبما أنّ عدد القيم الذّاتيّة المختلفة هي الدرجة لكثيرة الحدود الصغرى، فإننا نحتاج فقط إلى بيان أن $A^0, \ldots, A^k$ مستقلة خطيًّا عندما تكون $k \leq diam\ (G)$.

يكفي أن نبين أنه لكل $k \leq diam\ (G)$ فإن A^{k-1} ليست تركيبًا خطيًّا لـ $A^0, \ldots, A^k$. اختر $v_i, v_j \in V(G)$ بحيث تكون $d(v_i, v_j) = k$. وبحساب عدد الممرات، فإنّ $A_{i,j}^k \neq 0$ لكن $A_{i,j}^t = 0$ لكلّ $t < k$. وعليه، فإنّ A^k ليست تركيبًا خطيًّا للقوى الصغرى. ■

بما أن النظرية الطيفية تضمن وجود قيم ذاتية حقيقية، فنستطيع أن نضع دليلاً لقيمنا الذّاتيّة مثل $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. وندعو λ_1 و λ_n بـ $\lambda_{max}(G)$ و $\lambda_{min}(G)$ على الترتيب.

17.6.8. تمهيدية : إذا كان G' بيانًا جزئيًّا مُحدثًا لـ G، فإن:

$$\lambda_{min}(G) \leq \lambda_{min}(G') \leq \lambda_{max}(G') \leq \lambda_{max}(G).$$

الإثبات: بما أنّ A مصفوفةٌ حقيقية متماثلة، فإنّ التمهيدية **10.6.8** تعطي أنّ $\lambda_{min}(A) \leq x^TAx \leq \lambda_{max}(A)$ لكل متجه وحدة x. خذ مصفوفة التّجاور A' لـ G' في الحسبان. وبتبديل الرؤوس في G، يمكن أنْ ننظر إلى A' بوصفها مصفوفة جزئية رئيسة علوية إلى اليسار للمصفوفة $A = A(G)$. ليكن z' متجهَ الفصل الذاتي لـ A' بحيث يكون $A'z' = \lambda_{max}(G')z'$. وليكن z متجهَ الفصل في $\mathbb{R}^n$ الذي نحصل عليه بإلحاق أصفار إلى z'. لذلك، فإنّ $\lambda_{max}(G') = z'^TA'z = z^TAz \leq \lambda_{max}(G)$. وبالمثل، فإنّ $\lambda_{min}(G') \geq \lambda_{min}(G)$. ■

لاحظ أنّ سلوك القيم الذّاتيّة القصوى تحت عملية حذف الرأس يكون حالة خاصة من «نظرية الحياكة أو التشابك» (Interlacing Theorem): إذا كان G يملك قيمًا ذاتية $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ و $G - x$ يملك قيمًا ذاتية

$\mu_1 , \ \dots \ , \ \mu_{n-1}$، فإنّ $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda n$. وبسبب عدم حاجتنا إلى هذا، فسنهمل الإثبات الذي يتضمن جبرًا خطيًّا فقط.

18.6.8. تمهيدية : لكلّ بيان G، فإنّ $\delta(G) \leq \frac{2\,\mathrm{e}(G)}{\mathrm{n}(G)} \leq \lambda_{\max}(G) \leq \Delta(G)$.

الإثبات: ليكن x متجهًا ذاتيًّا للقيمة الذّاتيّة λ، ولتكن $x_j = \max_i x_i$ هي قيمة أكبر إحداثي في x. لذا، فإنّ $\lambda \leq \Delta(G)$ تتبع من:

$$\lambda x_j = (Ax)_j = \sum_{v_i \in N(v_j)} x_i \leq d(v_j)x_j \leq \Delta(G)x_j$$

للحد السفلي، سوف نطبق التمهيدية 10.6.8 على متجه الفصل مع إحداثيات متساوية. بما أنّ مجموعَ المدخلات في مصفوفة التّجاور ضعفُ عدد الأضلاع في G، فإنّ:

$$\lambda_{\max} \geq \frac{\mathbf{I}_n^T}{\sqrt{n}} \ \mathrm{A} \ \frac{\mathbf{I}_n}{\sqrt{n}} = \frac{\mathrm{I}}{n} \sum\sum a_{ij} = \frac{2\,\mathrm{e}(G)}{n}$$ ■

تمكّننا التمهيدية 18.6.8 من تحسين الحدّ الواضح $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ المعطى من خلال خوارزمية التلوين الشره. وتبديل $\Delta(G)$ بمعدل الدرجة يكون صغيرًا جدًّا؛ لأنّ $K_n + K_1$ يملك عددًا لونيًّا n، ومعدلًا درجته أقل من $n - 1$. وبما أنّ λ_{max} دائمًا تكون على الأقل مساوية لمعدل الدرجة، فإنّ $1 + \lambda_{max}(G)$ يملك فرصة للعمل، ولا يمكن تحسينه أكثر.

19.6.8. نظرية : (Wilf [1967]) لكلّ بيان G، فإنّ $\chi(G) \leq 1 + \lambda_{max}(G)$.

الإثبات: إذا كان $\chi(G) = k$، فنستطيع بصورة متتابعة حذف رؤوس دون تخفيض العدد اللوني حتى نحصل على بيان جزئي H بحيث إن $\chi(H-v) = k - 1$ لكل $v \in V(H)$. كما لوحظ في التمهيدية 18.1.5، فإنّ $\delta(H) \geq k - 1$. وبما أنّ H بيان جزئي محدث من G، فإنّ التمهيديتين 18.6.8 و 17.6.8 تعطيان:

$k \leq 1 + d(H) \leq 1 + \lambda_{max}(H) \leq 1 + \lambda_{max}(G)$. ■

يعطي قانون سلفستر للقصور الذاتي حدًّا سفليًّا على عدد العصب الثنائية التي نحتاج إليها لتفكيك بيان ما. ولأنّ النجومَ عصبٌ ثنائية، وكلّ بيان جزئي من نجمة هو نجمة، فإنّ عدد العصب الثنائية التي نحتاج إليها هو عدد الغطاءات الرأسية $\beta(G) = n(G) - \alpha(G)$ على الأكثر. وقد خمن إيردوز أنّ المساواة غالبًا ما تتحقق، ولكن هذا مازال دون حلّ. إن البيانات التي لها بنية خاصة ربما تملك تجزئات فاعلة باستخدام عصب ثنائية أخرى. وباستخدام القيم الذّاتيّة؛ فإنّ الحدّ السفلي العام يظهر بصورة صريحة في [Reznick – Tiwari – West, 1985]، ولكنه موجود بصورة ضمنية في عمل سابق يفكك البيان التام (Tverberg [1982], Peck [1984]) .

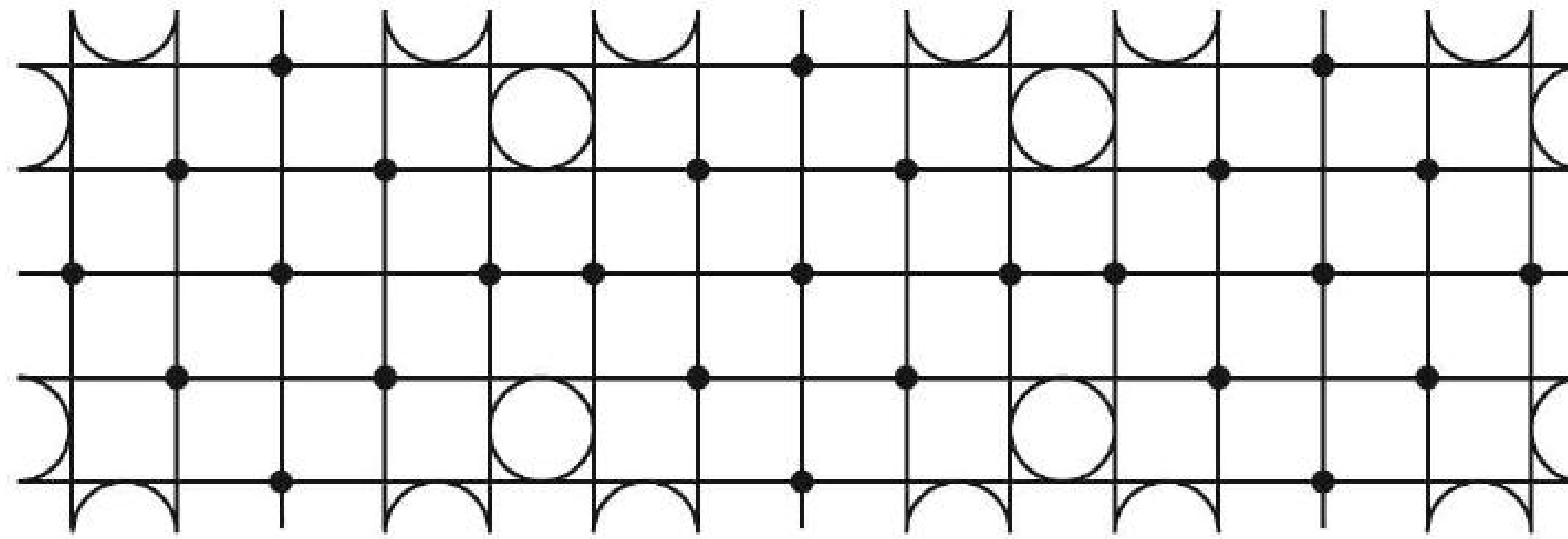
20.6.8. نظرية : لبيان بسيط G، يكون عدد العصب الثنائية التي نحتاج إليها لتفكيك G هو على الأقل العدد الأكبر لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة، وكذلك عدد القيم الذّاتيّة السالبة لمصفوفة التّجاور $A(G)$.

الإثبات: عندما يتفكك البيان G إلى بيانات جزئيات $G_1, \dots, G_t$، فإن هذا يمكننا من كتابة $A(G) = \sum_{i=1}^{t} Bi$ ، حيث B_i هي مصفوفة التّجاور للبيان الجزئي المولد لـِ G مع مجموعة الأضلاع $E(G_i)$، وعندما يكون G_i هو العصبة

الثنائية مع التجزئة الثنائية S_i, T_i، فإنّ $x^T B_i\ x = 2\sum_{j\in S_i} x_j \sum_{k\in T_i} x_k$. وبكتابة هذه التعابير الخطية على صورة $u_i(x) = \sqrt{2}\sum_{j\in S_i} x_j$ و $v_i(x) = \sum_{k\in T_i} x_k$، فإننا نحصل على $x^T Ax = \sum_{i=1}^{t} x^T\ B_i x = \sum_{i=1}^{t} u_i(x)\, v_i(x)$
الآن، يعطي قانون سلفستر للقصور الذاتي (التمهيدية 15.6.8) الحدّ السفلي المزعوم. ■

21.6.8. مثال: تفكيك ثنائي العصبة لـ $C_{(2t+1)n} \square C_n$. هناك صيغ بسيطة لإيجاد القيم الذّاتيّة لحلقة (التمرين 6) ولحساب القيم الذّاتيّة لجداء كارتيزي من القيم الذّاتيّة للعوامل (التمرين 10). حيث تعطي هذه صيغًا بسيطة لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة والسالبة لـ $C_m \square C_n$ عندما يكون m مضاعفًا فرديًّا من n. بوجه خاص، $C_{(2t+1)n} \square C_n$ يملك $(2t+1)(n^2+1)/2$ قيمة ذاتية موجبة و $(2t+1)(n^2-1)/2$ قيمة ذاتية سالبة عندما يكون n فرديًّا (0 ليس قيمة ذاتية).

علاوة على ذلك، فإن مثل هذا الجداء يتفكك إلى $(2t+1)(n^2+1)/2$ عصبة ثنائية، مكونة من $(2t+1)$ $(n-1)/2$ حلقة من الدرجة 4 و $2(2t+1)(n+1)$ / نجمة (Kratzke – West). لاحظ أنّ الحلقات من الدرجة 4، والنجوم هي البيانات الجزئيّة الوحيدة من $C_m \square C_n$ التي تكون ثنائية العصبة. التفكيك الأمثل لـ $C_{15} \square C_5$ يظهر في الشكل أدناه. تلتف الأضلاع من الأعلى إلى الأسفل، ومن اليمين إلى اليسار، في حين تشير نقاط الشبكة جميعها إلى رؤوس، حيث تشير النقاط السميكة إلى الرؤوس التي تكون مراكز للنجوم في التفكيك، أما الدوائر فتشير إلى حلقات من الدرجة 4 في التفكيك. ■



القيم الذّاتيّة للبيانات المنتظمة (Eigenvalues of Regular Graphs)

تميز البيانات المنتظمة باستخدام الطيف مثلها مثل البيانات الثنائية الفرع. يقوم المتجه 1_n الذي له n من الإحداثيات حيث تكون جميعها إحداثياته 1 بدور خاصّ في هذا وفي العديد من المناقشات الأخرى التي تتضمن قيمًا ذاتية، كما تفعل مصفوفة الواحدات J جميعها.

22.6.8. نظرية: تكون القيمة الذّاتيّة لـ G التي لها أكبر قيمة مطلقة هي $\Delta(G)$ إذا وفقط إذا وُجد لـ G مركبة منتظمة من الدرجة $\Delta(G)$. وعدد مرات تكرار $\Delta(G)$ كقيمة ذاتية هو عدد المركبات المنتظمة من الدرجة $\Delta(G)$.

الإثبات: لتكن A مصفوفةَ التّجاور. إن المدخلة i للمصفوفة $A\mathbf{1}_n$ هي $d(v_i)$. وعندما يكون G منتظمًا من الدرجة k، فإننا نحصل على أن $A\mathbf{1}_n = k\mathbf{1}_n$. وعليه، فإن k هي قيمة ذاتية مع متجه ذاتي 1_n. وعمومًا، ليكن x متجهًا ذاتيًّا للقيمة الذّاتيّة λ، وليكن x_j الإحداثيَّ الذي قيمته المطلقة هي الأكبر من بين إحداثيات x المرتبطة برؤوس لمركبة ما H لـ G. للإحداثي j لـ Ax، فإنّ:

$$|\lambda|\ |x_j| = |(Ax)_j| = \left|\sum_{v_i\in N(v_j)} x_i\right| \le d(v_j)|x_j| \le \Delta(G)|x_j|$$

لذلك، فإنّ $|\lambda| \le \Delta(G)$. لاحظ أنّ المساواة تتطلب أنْ يكون $d(v_j) = \Delta(G)$ و $x_i = x_j$ لكلّ $v_i \in N(v_j)$. ونستطيع تكرار هذا التعليل للوصول إلى الإحداثيات جميعها للرؤوس الموجودة في H لذلك، فإن القيم الذّاتيّة المرافقة لـ x تملك قيمة مطلقة كبيرة مثل $\Delta(G)$ فقط إذا كان H منتظمًا من الدرجة $\Delta(G)$ لذلك، فإنّ القيمة الذّاتيّة المرافقة لمتجه ذاتي x لها قيمة مطلقة كبيرة مثل $\Delta(G)$ إذا وفقط إذا كان: (1) كل مركبة لـ G تحتوي على رأس بحيث يكون x غير صفري تكون منتظمة من الدرجة $\Delta(G)$، و (2) يكون x ثابتًا على الإحداثيات المرتبطة بكل مركبة مماثلة. ونستطيع اختيار الثابت باستقلالية لكل مركبة منتظمة من الدرجة $\Delta(G)$. لذا، فإنّ بُعْدَ فضاء المتجهات الذّاتيّة المرافقة لـ $\Delta(G)$ هو عدد المركبات المنتظمة من الدرجة $\Delta(G)$.

عندما يكون G مترابطًا وغير منتظم، فإنه يبقى صحيحًا أن القيم الذّاتيّة التي لها أكبر قيمة مطلقة تملك المضاعفة 1، وأنّ الإحداثيات للمتجه الذاتي المرافق تملك الإشارة نفسها. وهذا له علاقة مع نظرية بيرون وفروبينس في الجبر الخطي، فضلًا عن أنه يستخدم تعليلات كتلك الموجودة أعلاه؛ وسوف نهمل الإثبات.

تنويه: لاحظ أنّ القوى لمصفوفة التّجاور تعطي تمييزًا آخر.

23.6.8. نظرية : ([1963] Hoffman) يكون البيان G منتظمًا ومترابطًا إذا وفقط إذا كان J تركيبًا خطيًّا لقوى من $A(G)$.

الإثبات : الكفاية. إذا أمكن التعبير عن J بهذا الشكل، فإنه لكل i, j يصبح لدينا أنّ $(A^k)_{i,j} \neq 0$ لبعض قيم $k \ge 0$، وهذا يتطلب ممرًّا من v_i إلى v_j طوله k. لذلك، فإنّ G مترابط. للانتظام؛ خذ في الحسبان المصفوفتين JA و AJ. ولاحظ أنّ الموقع i, j في المصفوفة AJ هو $d(v_i)$ (ثابت على الصفوف)، والموقع i, j في المصفوفة JA هو $d(v_j)$ (ثابت على الأعمدة). وبما أنّ J تركيب خطي لقوى من A التي يمكن تبديل كل منها مع A، فإنّ $JA = AJ$. لذلك، فإنّ الموقع i, j هو كل من $d(v_i)$ و $d(v_j)$ ويكون البيان منتظمًا.

الضرورة. بما أنّ G منتظمٌ من الدرجة k والتي هي قيمة ذاتية، وكثيرة الحدود الصغرى هي $\Psi(G : \lambda) = (\lambda - k)\, g(\lambda)$ لكثيرة حدود ما g، بما أنّ $\Psi(G ; A) = 0$، فإنّ $Ag(A) = kg(A)$. لذلك، فإنّ كلّ عمود في $g(A)$ هو متجه ذاتيّ لـ A مع قيمة ذاتية k. وبما أنّ G منتظم ومترابط، فإنّ كلّ متجه ذاتيّ مماثل هو مضاعف من I_n. لذلك، فإنّ الأعمدة في $g(A)$ تكون ثابتة، وعلى أي حال، فإنّ $g(A)$ هي تركيب خطي لقوى من مصفوفة متماثلة. وعليه، فإنّ $g(A)$ يجب أن تكون متماثلة. لذا، فإنّ الأعمدة تكون متساوية، و $g(A)$ تكون مضاعفة من J. ■

عندما يكون G بسيطًا ومنتظمًا، فإنّ $\overline{G}$ يكون منتظمًا أيضًا، ويمكن الحصول على القيم الذّاتيّة لـ $\overline{G}$ من القيم الذّاتيّة لـ G، وهذا يرتكز على التعبير المصفوفي للإتمام: $A\left(\overline{G}\right) = J - I - A(G)$.

24.6.8. تمهيدية : $\phi\left(\overline{G}\,;\lambda\right) = (-1)^n \det\left[(-\lambda-1)I - A(G) + J\right]$.

الإثبات : تعطي الحسابات المباشرة ما يأتي:

$$\det\left(\lambda I - A\left(\overline{G}\right)\right) = \det\left(\lambda I - (J - I - A)\right)$$

$$= \det\left[(\lambda+1)I - J + A\right] = (-1)^n \det\left[(-\lambda-1)I - A + J\right]$$

25.6.8. نظرية : إذا كان G بيانًا بسيطًا ومنتظمًا من الدرجة k، فإنّ G، و $\overline{G}$ لهما المتجهات الذّاتيّة نفسها. القيمة الذّاتيّة المرافقة لـ $\mathbf{1}_n$ هي k في G، وتكون $n-k-1$ في $\overline{G}$. إذا كان x متجهًا ذاتيًّا غير ثابت لـ G

مرافقًا للقيمة الذّاتيّة λ لـ G، فإنّ قيمته الذّاتيّة المرافقة في $\overline{G}$ هي λ - 1 - .

الإثبات: بما أنّ $\overline{G}$ منتظمٌ من الدرجة $n-k-1$، فإنّ $\mathbf{1}_n$ متجه ذاتيّ لكلّ من G و $\overline{G}$، مع قيمة ذاتية k لـ G، و$n-k-1$ لـ $\overline{G}$. ليكن x متجهًا ذاتيًّا لـ G في أساس متعامد مُعَيَّر مكون من متجهات ذاتية، ولتكن $\overline{A}=A\left(\overline{G}\right)$.
بما أنّ $x=0$. $\mathbf{1}_n$، فإنّ $\sum_{xi}=0$. نحسب $\overline{A}x=Jx-x-Ax=0-x-Ax=\left(-1-\lambda\right)x$. ■
إنّ هذا يعطي حدًّا سفليًّا على القيمة الذّاتيّة الأصغر لبيان منتظم، ويعطي اشتقاقًا آخر لطيف للبيان K_n.

26.6.8. نتيجة: لبيان بسيط منتظم من الدرجة k، فإنّ $\lambda_n \geq k-n$.

الإثبات: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة k، وكانت $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$، فإنّ القيم الذّاتيّة لـ $\overline{G}$ هي $(n-k-1, -1-\lambda_n, \ldots, -1-\lambda_2)$، وذلك من المبرهنات 22.6.8 – 25.6.8. وبوجه خاص، فإنّ $n-k-1 \geq -\lambda_n - 1$. ■

يمكن استخدام القيم الذّاتيّة لبيان بسيط منتظم مترابط G لحساب أشجاره المولدة. ليس شرطًا أنْ تكون القيم الذّاتيّة نسبية، وعلى الرغم من ذلك، فإنّ الناتج $\tau(G)$ هو عدد صحيح. إن نظرية مصفوفة الشجرة (النظرية 12.2.2) تشير إلى أن $\tau(G)$ يساوي كل فرعي (minor) للمصفوفة $Q=D-A$، حيث A هي مصفوفة التّجاور، أما D فهي المصفوفة القطرية للدرجات. عندما يكون G منتظمًا من الدرجة k، فإنّ $D=kI$. إذا استخدمنا Adj Q لترمز إلى المصفوفة القرينة لـ Q (مصفوفة المتعاملات المؤشرة)، فإنّ نظرية مصفوفة الشجرة هي Adj $Q=\tau(G)J$. وباستخدام صيغة كايلي (النظرية 3.2.2) للأشجار المولدة في K_n، فإنّ $Adj\ (nI-J)=n^{n-2}J$.

27.6.8. تمهيدية: لتكن D المصفوفةَ القطريةَ لدرجات الرؤوس في بيان بسيط G، ولتكن $A=A(G)$، و $Q=D-A$. إذن، فإن عدد الشجرات المولدة لـ G هو $\tau(G)=\det\,(J+Q)\,/\,n^2$.

الإثبات: لاحظ أنّ $JQ=0$ ، $J^2=nJ$، و$\mathrm{Adj}(AB)=\mathrm{Adj}(A)\ \mathrm{Adj}(B)$. نطبق هذا باستخدام $J+Q$، والمصفوفة $nI-J$ التي تظهر من K_n للحصول على:

$$\mathrm{Adj}(nI-J)\ \mathrm{Adj}(J+Q)=\mathrm{Adj}[(nI-J)(J+Q)]=\mathrm{Adj}(nQ)$$

لأنّ $J^2=nJ$ و $JQ=0$. لقد حسبنا أنّ $\mathrm{Adj}\ (nI-J)=n^{n-2}J$. أيضًا $\mathrm{Adj}\ (nQ)=n^{n-1}\ \mathrm{Adj}\ Q$ لأي مصفوفة Q. واختصار العوامل المشتركة في n يعطي $J\ \mathrm{Adj}\ (J+Q)=n\,\tau\,(G)\,J$. كما أن ضرب طرفي المعادلة من اليمين في $(J+Q)^T$ يعطي: $J\,(\det(J+Q)\,I)=n\,\tau(G)n\,J$. وكلا الطرفين هما مضاعفات لـ J. لذلك، فإن المساواة المطلوبة تتحقق. ■

نستطيع الآن حساب $\tau(G)$ من القيم الذّاتيّة إذا كان G منتظمًا. (هذا التحليل يوسع للبيانات جميعها عندما يكون النظام المعدل للقيم الذّاتيّة مستخدمًا).

28.6.8. نظرية: إذا كان G بيانًا بسيطًا مترابطًا منتظمًا من الدرجة k على n من الرؤوس مع طيف $\begin{pmatrix} k & \lambda_2 \ldots \lambda_t \\ 1 & m_2 \ldots m_t \end{pmatrix}$ فإنّ $\tau\left(G\right)=n^{-1}\ \phi'\left(G\ ;k\right)=n^{-1}\ \prod_{j=2}^{t}\left(k-\lambda_j\right)^{mj}$.

الإثبات: بما أنّ $J+Q=J+kI-A$، فإنّ المحددة لـ $J+Q$ هي القيمة لكثيرة الحدود المميّزة لـ $A-J$ عند k. وبما أنّ G مترابط ومنتظم من الدرجة k، فإنه يملك $\mathbf{1}_n$ بوصفه متجهًا ذاتيًّا مع قيمة ذاتية k، أما المتجهات الذّاتيّة الأخرى فتكون متعامدة مع $\mathbf{1}_n$. وكل متجه ذاتي مماثل لـ A هو أيضًا متجه ذاتي لـ $A-J$ مع القيمة الذّاتيّة نفسها، لأنّ $(A-J)x=Ax-Jx=Ax=\lambda x$.

أيضًا، $\mathbf{1}_n$ متجهٌ ذاتيٌّ لـ $J - A$ مع قيمة ذاتية $n - k$. وهذا ينتج مجموعة كاملة من القيم الذّاتيّة لـ $J - A$. وحساب كثيرة الحدود المميّزة عند k يعطي أنّ: $\det(J + Q) = n \prod_{j=2}^{t}(k - \lambda_j)$. وبما أنّ $\phi'(G;\lambda)$ يملك $\lambda - k$ كعامل غير متكرر عندما يكون G مترابطًا ومنتظمًا من الدرجة k، فإنّ حاصل الضرب يكون $\phi'(G;k)$. ومن التمهيدية 27.6.8، فإننا نحصل على $\tau(G)$ بعد قسمتها على n^2. ■

النتائج في التمهيدية 24.6.8 – النظرية 28.6.8 وسّعت أيضًا للبيانات غير المنتظمة في [Kelmans, 1967] (وأيضًا [Kelmans – Chelnokov [1974) باستخدام القيم الذّاتيّة للمصفوفة اللابلاسية للبيان. هذه هي المصفوفة Q التي استخدمت أعلاه التي تظهر طريقة أخرى لحساب الأشجار المولدة في [Kelmans, 1965, 1966]، ويظهر تنوع آخر على نظرية مصفوفة الشجرة في [Hartsfield – Kelmans – Shen, 1996].

القيم الذّاتيّة والموسعات (Eigenvalues and Expanders)

إن العديد من التطبيقات في علم الحاسوب تتطلب «بيانات موسعة». ولقد جمع والترز [1996م] العديد من التعريفات التي استخدمت لبيانات مماثلة. إنّ الفكرة الأساسية للتوسعة هي أنّ المجموعات الصغيرة جميعها يجب أنْ تملك جوارات كبيرة، والهدف من ذلك هو إنشاء خصائص ترابطية جيدة دون وجود أضلاع كثيرة.

29.6.8. تعريف: نعرِّف الموسع ((n, k, c) – expander) من نوع (n, k, c) على أنه بيان ثنائي G بالتجزئة الثنائية X, Y حيث $|X| = |Y| = n$ وأنّ $\Delta(G) \le k$، وأنّ $|N(S)| \ge (1 + c(1 - |S|/n))$ لكلّ $S \subseteq X$ مع $|S| \le n/2$. ونُعرِّف **المكبر** (**المضخم**) من نوع (n, k, c) – magnifier ((n, k, c)) على أنه بيان G على n من الرؤوس بحيث إن $\Delta(G) \le k$، وإن $|N(S) \cap \overline{S}| \ge c \cdot |S|$ لكل $S \subseteq V(G)$ مع $|S| \le n/2$. ونعرِّف **المُركز الفائق من الدرجة** n (n – superconcentrator) على أنه بيان موجه لا حلقي مع n مصدرًا، وn بالوعة (مصبًّا) بحيث يوجد لكلّ مجموعة A من المصادر، وكلّ مجموعة B تتكون من $|A|$ بالوعة، $|A|$ مسار منفصل من A إلى B.

تظهر الموسعات في شبكة التصنيف الموازي لـ[Ajtai, Kamlós, Szemerédi, 1983م]. فضلًا عن أنّ الشرط للتوسيع يقوي شرط هال؛ نحن لا نملك مواءمة واحدة فقط، بل العديد منها. وهذا يساعد على استخدام الموسعات لبناء المركزات الفائقة. وقد نوقشت تطبيقات المركزات الفائقة في [Alon, 1986a]. إن الحد على الدرجة العظمى يجعل عدد الأضلاع خطيًّا في n. وبهذه الوسيلة، فإنّ تكلفة إنشاء الشبكة تكون محدودة.

إنّ الطرق الاحتمالية (التمرين 22) تؤدي إلى وجود الموسعات (والمركزات الفائقة) مع n كبيرة ومعدل درجة محدود ([Chung, 1978م b], [Pippenger, 1977م], [Pinsker, 1973م]). استخدم مارجوليس [Margulis, 1973م] أفكارًا جبرية لإنشاء مثال صريح (انظر أيضًا ([Gabber – Galil, 1981م].

وعلى الرغم من أنّ بيانًا عشوائيًّا مولدًا بصورة مناسبة غالبًا ما يملك خصائص موسعة جيدة، إلا أنه من الصعب قياس التوسعة. استخدم كلٌّ من [Tanner, 1984م] و[Alon – Milman, 1984م, 1985م] بصورة مستقلة القيم الذّاتيّة لحلّ هذا. حيث برهنا أنّ البيانات تملك خصائص موسعة جيدة عندما تكون أكبر قيمتين ذاتيتين بعيدتين إحداهما عن الأخرى. وبما أنّ القيم الذّاتيّة سهلة الحساب (أو التقريب)، فإننا نستطيع أنْ نولد بيانًا بصورة عشوائية، ومن ثَمّ نحسب قيمه الذّاتيّة لفحص مقدار التّوسّع.

سوف نأخذ في الحسبان الحالة الخاصة للبيانات المنتظمة فقط. في التطبيقات، تكون الموسعات أكثر فائدة من المكبرات، ولكن من السهل الحصول على موسع من نوع $(n, (k+1), c)$ من مكبر من نوع (n, k, c)

(التمرين 21). لذلك، سوف نأخذ في الحسبان العلاقة بين القيم الذّاتيّة والتكبير. وتمثيلنا يتبع ([Alon – Spencer, 1992, p119ff]) الذي يناقش خصائص إضافية للقيم الذّاتيّة للبيانات المنتظمة (والعشوائية).

30.6.8. إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة k على n من الرؤوس حيث λ ثاني أكبر قيمة ذاتية، وكانت S مجموعة جزئية فعلية غير خالية من $V(G)$ فإنّ:

$$|[S, \overline{S}]| \geq (k - \lambda)\, |S|\, |\overline{S}|/n$$

الإثبات: بما أنّ G منتظم من الدرجة k، فإنّ $\lambda_{max}(G) = k$. ويكون الادعاء واضحًا إذا كان $k - \lambda = 0$، لذلك نستطيع G مترابط، ثم نحسب:

$$x^T (kI - A)x = k\sum x_i^2 - 2\sum_{ij \in E(G)} x_i x_j = \sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2$$

الآن، ليكن $s = |S|$، وضع $x_i = -(n-s)$ لـ $i \in S$، و $x_i = s$ لـ $i \notin S$. لاحظ أنّ المجموع عن اليمين أعلاه يصبح $n^2|[S,S]|$.

ولأنّ $|S| = s$ تعطي $\Sigma x_i = 0$، فإنّ المتجه x يكون متعامدًا على المتجه الذاتي $\mathbf{1}_n$ لـ A مع قيمة ذاتية k. والمتجه الذاتي $\mathbf{1}_n$ هو أيضًا المتجه الذاتي لـ $kI - A$ لأصغر قيمها الذّاتيّة 0. باستخدام التمهيدية 10.6.8 والنظرية 11.6.8، فإنّ القيمة الصغرى لـ $\frac{x^T (kI - A)x}{x^T x}$ خلال متجهات عمودية على $\mathbf{1}_n$ هي أصغر قيمة ذاتية تالية لـ $kI - A$، والتي تكون $k - \lambda$. لذلك، فإنّ:

$$x^T (kI - A)x \geq (k - \lambda)x^T x = (k - \lambda)\left(s(n-s)^2 + (n-s)s^2\right) = (k - \lambda)s(n-s)n$$

وبما أنّ $x^T (kI - A)x = n^2 \left|[S, \overline{S}]\right|$، فإنّ $\left|[S, \overline{S}]\right| \geq (k - \lambda)s(n-s)/n$. ■

31.6.8. نتيجة: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة k على n من الرؤوس حيث إن λ هي ثاني أكبر قيمة ذاتية، فإنّ G هو مكبر من نوع (n, k, c)، حيث $c = (k - \lambda)/2k$.

الإثبات: إذا كانت S مجموعة رؤوس في G وعدد رؤوسها s بحيث $s \leq n/2$، فإنّ النظرية 30.6.8 تعطي أنّ $\left|[S, \overline{S}]\right| \geq (k - \lambda)s(n-s)/n$. وكلّ رأس في $\overline{S}$ يستقبل k من هذه الأضلاع على الأكثر. لذلك، فإنّ S يجب أنّ تملك $(k - \lambda)s(n-s)/(nk)$ جارًا على الأقل في $\overline{S}$. وبما أنّ $(n-s)/n \geq 1/2$، فهذا ينهي الإثبات. ■

لاحظ أنّ فصلاً أوسع بين أكبر قيمتين ذاتيتين يؤدي إلى تضخيم أكبر. ولقد حَسَّن ألون وميلمان [1984م] الحدّ السّفليّ إلى $c \geq (2k - 2\lambda)/(3k - 2\lambda)$. حيث أثبت ألون [1986 b] نتيجة عكسية جزئية هي: إذا كان البيان G المنتظم من الدرجة k مكبرًا من نوع (n, k, c)، فإنّ الفصل $k - \lambda$ هو $c^2/(4 + 2c^2)$ على الأقل.

إن بناءات صريحة للبيانات المنتظمة معروفة مع فصل بين λ_1 و λ_2 كبير قدر الإمكان. لاحظ أنّ ثاني أكبر قيمة ذاتية لبيان منتظم من الدرجة k قطره d هي على الأقل $2\sqrt{k-1}\left(1 - 0(1/d)\right)$ (انظر [Nilli, 1991]). لقد أنشأ كلّ من [Lubotzky – Phillips – Sarnak, 1982] و [Margulis, 1988] عائلات لانهائية من البيانات المنتظمة حيث تكون الدرجة k أكبر بـ 1 من عدد أولي يكافئ 1 بمقياس 4، وثاني أكبر قيمة ذاتية هي $2\sqrt{k-1}$ على الأكثر.

البيانات المنتظمة بقوة (Strongly Regular Graphs)

سوف نختتم هذا الفصل من خلال تطبيق على صف خاص من البيانات المنتظمة.

32.6.8. تعريف: يسمى البيان البسيط G على n من الرؤوس **منتظمًا بقوة** (Strongly regular) إذا وجدت متغيرات k, λ, μ بحيث يكون G منتظمًا من الدرجة k، ويملك كل زوج متجاور من الرؤوس λ جارًا مشتركًا، في حين يملك كل زوج من الأزواج غير المتجاورة μ جارًا مشتركًا.

إن خصائص القيم الذّاتيّة للبيانات المنتظمة بقوة توفر لنا إثباتًا قصيرًا مع نتيجة لافتة للنظر تدعى «نظرية الصداقة». هذه النظرية تقول إنه في أي حفلة يكون فيها كلّ زوج من الأشخاص له معرفة شخصية مشتركة واحدة، فإنه يوجد شخص واحد يعرف الأشخاص جميعهم (تخمينًا المضيف). إنّ البيان الناتج من علاقة المعرفة الشخصية يتكون من عدد من المثلثات التي تتشارك برأس. وهناك دافع آخر لدراسة البيانات المنتظمة بقوة وهو ربطها مع نظرية التصاميم. إنّ البيانات المنتظمة بقوة والتي فيها $\lambda = \mu$ ترتبط بالتصاميم القالبية غير التامة الموزونة المتماثلة. البيانات المنتظمة الأخرى مع بناء جبري غني موجودة في [Biggs, 1993م, part 3].

33.6.8. نظرية: إذا كان G بيانًا منتظمًا بقوة على n من الرؤوس ومتغيرات k, λ, μ، فإنّ $\overline{G}$ يكون منتظمًا بقوة مع متغيرات $K' = n - k - 1$، G و $\mu' = n - 2k + \lambda$.

الإثبات: لكلّ زوج متجاور w » v في G يوجد $2(k-1) - \lambda$ رأسًا آخر في $N(v) \cup N(w)$. لذلك، فإنّ v و w يملكان $n - 2 - 2(k-1) + \lambda$ رأسًا مشتركًا غير مجاورين لهما. وعندما يكون $v \not\leftrightarrow w$، فإنه يوجد $2k - \mu$ رأسًا في $N(v) \cup N(w)$. وعليه، فإنه يوجد $n - 2k + \mu$ رأسًا مشتركًا غير مجاورين لهما. ■

34.6.8. نظرية: إذا كان G بيانًا منتظمًا بقوة على n من الرؤوس ومتغيرات k, λ, μ، فإنّ $k(k - \lambda - 1) = \mu(n - k - 1)$.

الإثبات: نعدّ النسخ المحدثة لـ P_3 مع رأس ثابت v بوصفها نقطة طرفية. يمكن اختيار الرأس الأوسط w بـ k من الطرق. ولكل w مماثلة، فإنّ الرأس الثالث يمكن أنْ يكون أيّ جار لـ w غير مجاور لـ v. وعندما يكون v غير متوافر، فإنه يوجد دائمًا $k - \lambda - 1$ طريقة لاختيار الرأس الثالث. ومن ناحية أخرى، فإنّ الرأس الثالث يمكن اختياره بـ $n - k - 1$ طريقة بوصفه رأسًا غير مجاور لـ v. ولكل اختيار مثل هذا، فإنّه يوجد m جارًا مشتركًا مع v، ومن الممكن أنْ يخدم مثل w. ■

35.6.8. مثال: حالات مضمحلة: $\mu = 0$، أو $\lambda = k - 1$، أو $k = n - 1$. سوف نبين أنّ بيانًا منتظمًا بقوة مماثل هو عبارة عن اتحاد عصب منفصلة من الدرجة $k + 1$. من النظرية 34.6.8، فإنّ $\lambda = k - 1$ إذا وفقط إذا كان $\mu = 0$، أو $k = n - 1$. لذلك، يمكن افتراض أنّ $\lambda = k - 1$. الآن، كلّ جار لـ v هو مجاور لكلّ رأس آخر، وهذا يمنع وجود P_3 محدث، ويجبر G ليكون اتحاد عصب منفصلة. ■

من الآن فصاعدًا، سوف نفترض $\mu > 0$، و $\lambda < k - 1$. تذكر النظرية 34.6.8 شرطًا ضروريًا على مجموعة المتغيرات لبيان منتظم بقوة. ويظهر أيضًا شرط ضروري آخر من القيم الذّاتيّة.

36.6.8. نظرية: (شرط التكامل) إذا كان G بيانًا منتظمًا بقوة على n من الرؤوس ومتغيرات k, λ, μ، فإنّ العددين أدناه يكونان صحيحين وغير سالبين.

$$\frac{1}{2}\left(n - 1 \pm \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}}\right)$$

الإثبات: هذان العددان يكونان صحيحين غير سالبين لأنهما من مضاعفات قيم ذاتية. خذ A^2 في الحسبان. المدخلة ij في A^2 هي k إذا كان $i = j$، في حين تكون λ إذا كان $v_i \leftrightarrow v_j$، وتكون μ إذا كان $v_i \not\leftrightarrow v_j$. وبما أنّ $v_i \leftrightarrow v_j$ تُعلِّم (تضع علامات) الواحدات (1s) في مصفوفة التّجاور، و $v_i \not\leftrightarrow v_j$ تُعلّم الواحدات في مصفوفة التّجاور للمتممة، فإنّ $A^2 = kI + \lambda A + \mu(J-I-A)$. وإعادة ترتيب الحدود يعطي: $A^2 = (k-\mu)I + (\lambda-\mu)A + \mu J$.

وضرب كلا التعبيرين لـ A^2 في $\mathbf{1}_n$ يعطي $k^2\,\mathbf{1}_n = (k-\mu)\mathbf{1}_n + (\lambda-\mu)k\mathbf{1}_n + \mu\, n\mathbf{1}_n$،

وهذا يؤدي إلى إثبات آخر لـ $k(k-\lambda-1) = \mu(n-k-1)$. ليكن x متجهًا ذاتيًّا لقيمة ذاتية أخرى $\Theta \neq k$. بما أنّ x عمودي على $\mathbf{1}_n$، فإنّ $Jx = 0_n$. وضرب كلا التعبيرين لـ A^2 في x ينتج $\Theta^2 - (\lambda-\mu)\Theta - (k-\mu) = 0$.

وهذه المعادلة التربيعية لـ Θ تملك جذرين هما r، و s، اللذين يجب أن يكونا القيمتين للقيم الذّاتيّة الأخرى جميعها. وهما: $\frac{1}{2}\left(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}\right)$.

الآن، ليكن a و b مضاعفات القيم الذّاتيّة لـ r و s. يصف المثال 35.6.8 الحالات جميعها عندما تكون $\mu = 0$. لذلك، من الممكن افتراض أنّ $\mu > 0$، وبالتالي يكون G مترابطًا. ولأن G مترابط، فإنّ عدد مرات تكرار القيمة الذّاتيّة k يساوي 1. وعليه، فإنّ $n = 1 + a + b$. وبما أنّ مجموع القيم الذّاتيّة يساوي 0، فإنّ $k + ra + sb = 0$. إنّ الحلّ لهاتين المعادلتين الخطيتين لـ a و b هو $a = -\frac{k + s(n-1)}{r-s}$ و $b = \frac{k + r(n-1)}{r-s}$. وهاتان القيمتان هما المزعومتان في الأعلى بأنهما صحيحتان وغير سالبتين. ■

تنويه: لاحظ أنه يمكن تتبع التعليل السابق في الاتجاه المعاكس.

37.6.8. نظرية: يكون البيان G المترابط المنتظم من الدرجة k منتظمًا بقوة مع متغيرات k, λ, μ إذا وفقط إذا كان يملك ثلاث قيم ذاتية $k > r > s$ تمامًا. وهذه القيم تحقق أنّ $r + s = \lambda - \mu$ و $rs = -(k-\mu)$. ■

38.6.8. مثال: صفوف البيانات المنتظمة بقوة. سوف نأخذ في الحسبان حالتين: $(n-1)(\mu-\lambda) = 2k$، و $2k \neq (n-1)(\mu-\lambda)$. باستثناء القيم الواضحة، فإنّ الحالة الأولى تتطلب أنْ يكون $m = \lambda + 1$؛ لأنّ $0 < 2k < 2n-2$. ومن النظرية 33.6.8، فإنّ G و $\overline{G}$ يكونان بيانين منتظمين بقوة مع المتغيرات نفسها. في هذه الحالة، نعلم أيضًا أنّ $n = 4\mu + 1$، وأنّ n هي المجموع لمربعين كاملين. فضلًا عن ذلك، فإنّ للقيم الذّاتيّة r و s عدد مرات التكرار نفسها.

أما في الحالة الثانية، تتطلب النسبية أنْ يكون $(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu) = d^2$ لعدد صحيح موجب ما d، و d يجب أنْ يقسم $2k - (\mu-\lambda)(n-1)$. وهنا يجب أنْ تكون القيم الذّاتيّة أعدادًا صحيحة. وهناك أمثلة متنوعة معروفة. في الحالة الخاصة $\lambda = 0$ و $\mu = 2$، هناك ثلاثة بيانات مماثلة معروفة، ولكنه غير معروف فيما إذا كانت القائمة منتهية! والأمثلة المعروفة؛ بإدراج المتغيرات (n, k, λ, μ)؛ هي: المربع (4, 2, 0, 2)، وبيان كليبش (Clebsch graph) (16, 5, 0, 2) وبيان جويرتز (Gewirtz graph) (56, 10, 0, 2) (انظر [Cameron – van Lint,[1991, p43). بيان كليبش يظهر في التمرين 23. وتظهر بيانات منتظمة بقوة في التمارين 24 – 26. ■

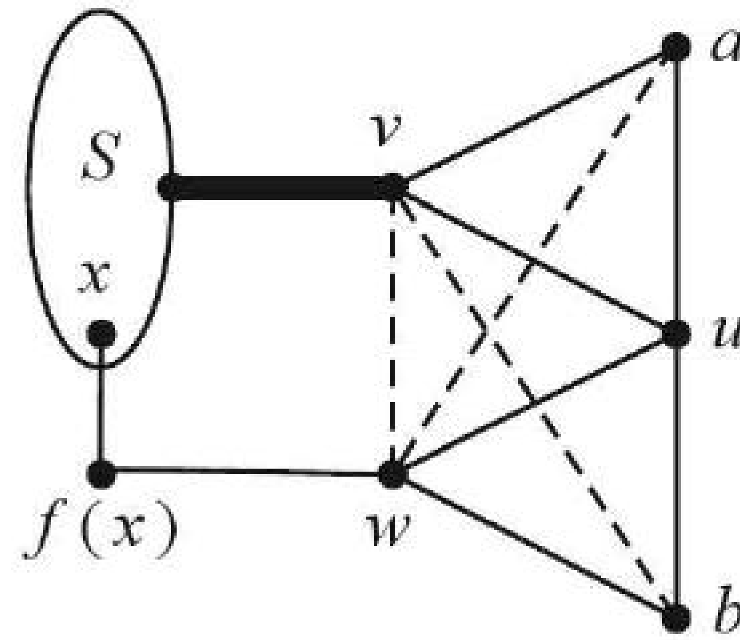
أخيرًا، سوف نثبت نظرية الصداقة. لاحظ أنّ كرايج هنيك (Craig Huneke) يملك إثباتًا قصيرًا لاستثناء البيانات المنتظمة من خلال حساب ممرات واستخدام حساب مقياسي؛ وهو ليس أطول من إثبات شرط التكاملية. ويناقش همرسلي [Hammersley,1983] براهين أخرى تتجنب استخدام القيم الذّاتيّة، وتستخدم تعليلات عددية معقدة لحذف البيانات المنتظمة.

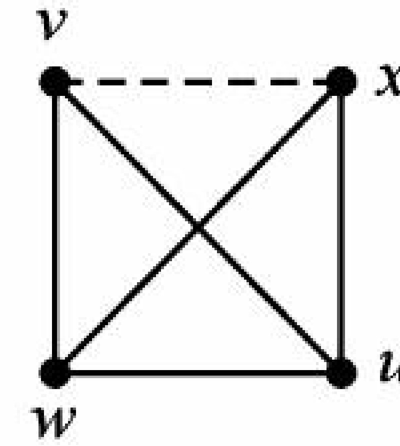
39.6.8. نظرية: (نظرية الصداقة – [Wilf, 1971]) إذا كان G بيانًا يتحقق فيه أنّ كلّ رأسين مختلفين يملكان جارًا مشتركًا واحدًا تمامًا، فإن G يملك رأسًا مربوطًا بالرؤوس الأخرى جميعها.

الإثبات: التماثل للشرط يقترح أنّ G يجب أنْ يكون منتظمًا. إذا كان G منتظمًا، فإنه سوف يكون منتظمًا بقوة مع $\lambda = \mu = 1$. ومن النظرية 36.6.8، فإنّ $\frac{1}{2}\left(n-1 \pm k/\sqrt{k-1}\right)$ يجب أنْ يكون عددًا صحيحًا. لذلك، فإنّ $k/\sqrt{k-1}$ عددٌ صحيح، والذي يحدث فقط عندما $k = 2$. وعلى أي حال، فإنّ K_3 هو البيان المنتظم من الدرجة 2 الوحيد الذي يحقق الشرط، ويملك رؤوسًا درجتها $n-1$.

الآن، افترض أنّ G غير منتظم. سوف نبين أنّ $v \nleftrightarrow w$ تتطلب تَحَقُّقَ $d(v) = d(w)$. لاحظ أنّ الإصرار على وجود جيران مشتركين وحيدين يمنع وجود حلقات من الدرجة 4. وليكن u هو الجار المشترك لـ $\{v, w\}$. وليكن a هو الجار المشترك لـ $\{u,v\}$، وليكن b هو الجار المشترك لـ $\{u, w\}$. كلّ $x \in S = N(v) - \{u, a\}$ يملك $f(x)$ بوصفه جارًا مشتركًا مع w. إذا كان $f(x) = b$ لبعض $x \in S$، فإنّ x, b, v, u حلقةٌ من الدرجة 4. إذا كان $f(x) = f(x')$ لرأسين مختلفين $x, x' \in S$، فإنّ $x, v, x', f(x)$ حلقةٌ من الدرجة 4. لذا، نكون قد بينا أنّ $d(w) \geq d(v)$. ومن التماثل فإنّ $d(v) \geq d(w)$.

بما أنّ G غير منتظم، فإنه يملك رأسين v, w مع $d(w) \neq d(v)$. من الفقرة السابقة $v \leftrightarrow w$. ليكن u جارهما المشترك. بما أنّ درجة u لا يمكن أنْ تساوي درجتهما معًا فنستطيع افتراض أنّ $d(u) \neq d(v)$. إذا كان G يملك رأسًا $x \notin N(v)$، فإنّ $d(x) = d(v)$، ولكن هذا يتطلب أنْ يكون $w \leftrightarrow x$ و $u \leftrightarrow x$. وهذا يبني الحلقة الرباعية v, u, x, w. لذلك، فإنّ $d(v) = n-1$. ■





تمارين (Exercises)

1.6.8. تفسير الفضاء الحلقي وفضاء الروابط. معطى بيان G، أثبت أنّ:

a) الفرق التماثلي لبيانين جزئيين زوجيين هو بيان جزئيّ زوجيّ.

b) الفرق التماثلي لقطعين ضلعيين هو قطع ضلعيّ.

c) كلّ قطع ضلعيّ يشترك مع كلّ بيان جزئيّ زوجي بعدد زوجيّ من الأضلاع.

2.6.8. البعد للفضاء الحلقي ولفضاء الروابط. من خلال الفرعين (a) و (b) في التمرين 1.6.8، فإنّ الفضاءَ الحلقيّ **C** وفضاءَ الروابط **B** لبيان G هما فضاءان متجهان ثنائيان. أثبت أنه عندما يكون G مترابطًا، فإنّ البعد لـ **C** هو $e(G) - n(G) + 1$، والبعد لـ **B** هو $n(G) - 1$. (مساعدة: بَيِّنْ أنَّ الحلقات التي تتكون بإضافة ضلع واحد إلى شجرة مولدة معينة تشكل أساسًا للفضاء الحلقي. وبَيِّنْ أنّ $n(G) - 1$ من الروابط التي تعزل رؤوسًا مفردة تشكّل أساسًا لفضاء الروابط، أو استخدم التعامد).

3.6.8. تذكر أنّ الجوار المغلق لرأس v هو $N(v) \cup \{v\}$:

a) لتكن S مجموعة رؤوس في بيان بسيط G بحيث إن جواراتها متطابقة أثبت أنّ إحدى القيم الذّاتيّة لـ G تكون مكررة على الأقل $|S|-1$ مرة. ما هي؟

b) لتكن S مجموعة رؤوس في بيان بسيط G بحيث إن جواراتها المغلقة تكون متطابقة. أثبت أنّ إحدى القيم الذّاتيّة لـ G تكون مكررة على الأقل $|S|-1$ مرة. ما هي؟

4.6.8. ليكن σ_k عددَ البيانات الجزئيّة للبيان G التي تكون حلقات من الدرجة k. وليكن $D_k = \sum d_i^k$ و $L_k = \sum \lambda_i^k$ هما مجموع القيم الذّاتيّة ودرجات الرؤوس مرفوعة للقوة k على الترتيب. احصل على صيغ لـ σ_3 و σ_4 بدلالة $\{L_k\}$ و $\{D_k\}$.

5.6.8. صيغ الحذف لكثيرة الحدود المميّزة. لتوضيح هذه المسألة، سوف نكتب $\phi(G\ ;\ \lambda)$ كَـ ϕ_G. ليكن $v[xy]$ رأسًا [ضلعًا]عشوائيًّا لـ G، ولتكن $Z(v)[Z(xy)]$ مجموعة الحلقات التي تحوي $v[xy]$. أثبت أنّ كثيرة الحدود المميّزة تحقق العلاقات التكرارية الآتية:

a) $\phi_G = \lambda\phi_{G-v} - \sum_{u \in N(v)} \phi_{G-v-u} - 2\sum_{C\in Z(v)} \phi_{G-v(C)}$.

b) $\phi_G = \phi_{G-xy} - \phi_{G-x-y} - 2\sum_{C \in Z(xy)} \phi_{G-V(C)}$.

(مساعدة: من الممكن استخدام الاستقراء أو صيغة ساش (Sach). لاحظ أيضًا أنّ صيغة الحذف الضلعي يمكن أنْ تبرهن من صيغة الحذف الرأسيّ. تعليق: عندما يكون G غابة و v ورقة مع جار u، فإنّ الصيغ تختزل إلى $\phi_G = \phi_{G-xy} - \phi_{G-x-y}$ و $\phi_G = \lambda\phi_{G-v} - \phi_{G-v-u}$).

6.6.8. كثيرة الحدود المميّزة للمسارات والحلقات:

a) استخدم التمرين 5.6.8 في إيجاد صيغة تكرارية لـ $\phi(P_n\ ;\ \lambda)$ ولـ $\phi(C_n\ ;\ \lambda)$.

b) دون أنْ تحلّ الصيغة التكرارية، أثبت أنّ $\{2\cos(2\pi j/n): 0 \le j \le n-1\}$ هي القيم الذّاتيّة لـ C_n.

c) معطى $Spec(C_n)$، احسب $Spec\ G$، حيث يكون G البيانَ الذي حصلنا عليه من C_n بإضافة أضلاع تربط رؤوسًا على مسافة 2 في C_n.

7.6.8. لشجرة، أثبت أنّ المعامل لـ λ^{n-2k} في كثيرة الحدود المميّزة هو $(-1)^k \mu k(G)$، حيث $\mu_k(G)$ هو عدد المواءمات التي حجمها k. استخدم هذا في إنشاء زوج من الأشجار على 8 رؤوس "بأطياف مشتركة" (*co–spectral*) بحيث يكون زوج الأشجار هذا غير متشاكل؛ وكلاهما يملك كثيرة الحدود المميّزة $\lambda^8 - 7\lambda^6 + 9\lambda^4$. (تعليق: عندما $n \to \infty$، تقريبًا لا توجد أشجار محددة بصورة وحيدة من أطيافها). (Schwenk [1973]).

8.6.8. (+) لتكن T شجرة. أثبت أنّ $a(t)$ هو عدد القيم الذّاتيّة غير السالبة لـ T. (مساعدة: انظر النظرية 20.6.8). (Cvetkovic′ – Doob – Sachs [1979, p233]).

9.6.8. لتكن λ قيمةً ذاتية لبيان G على n من الرؤوس و m من الأضلاع. أثبت أنّ $|\lambda| \le \sqrt{2m\,(n-1)/n}$.

10.6.8. لتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ و $\mu_1, \ldots, \mu_n$ قيمًا ذاتية لـ G و H على الترتيب. بَيِّنْ أنّ الـ mn قيمة ذاتية لـ $G \square H$ هي $\{\lambda_i + \mu_j\}$. استخدم هذا لاشتقاق الطّيف للمكعب من الدرجة k. (مساعدة: معطى متجه ذاتي لـ $A(G)$ مرافق لـ λ_i، ومتجه ذاتي لـ $A(H)$ مرافق لـ μ_j، أنشئ متجهًا ذاتيًّا لـ $A(G \square H)$ مرافقًا لـ $(\lambda_i + \mu_j)$).

11.6.8. احسب الطّيف للبيان التام $K_{m, \ldots, m}$ المجزأ إلى P مجموعة مجزأة (مجموعة تجزئة). (مساعدة: استخدم التعبير $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$ لمصفوفة التّجاور للمتممة).

12.6.8. معطى $\phi(G\ ;\ x) = x^8 - 24x^6 - 64x^5 - 48x^4$، حَدِّدْ G.

13.6.8. (!) أثبت أنّ G يكون ثنائي الفرع إذا كان G مترابطًا و $\lambda_{max}(G) = -\lambda_{min}(G)$.

14.6.8. (!) معطى بيان G، ولتكن $R(G)$ هي المصفوفة التي تكون مدخلتها i,j هي $d_G(v_i, v_j)$. أثبت أنّ بُعْدَ المكعّب المسحوق لبيان ما (التعريف 12.4.8) يكون على الأقل العدد الأكبر لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة وعدد

القيم الذّاتيّة السالبة للمصفوفة $R(G)$. استنتج أنّ بُعْدَ المكعّب المسحوق للبيان K_n هو $n - 1$. (مساعدة: أعد كتابة الشكل التربيعي $x^T Rx$ بوصفه مجموعًا لمربعات دوال خطية، وطبق قانون سلفستر للقصور الذاتي).

15.6.8. (!) **المصفوفة اللابلاسية** Q (Laplacian matrix) لبيان G هي $D - A$؛ حيث D مصفوفةُ الدرجات القطرية، وA مصفوفةُ التّجاور. و**الطيف اللابلاسي** (Laplacian spectrum) هو القائمة للقيم الذّاتيّة لـ Q:

a) أثبت أنّ أصغر قيمة ذاتية لـ Q هي 0.

b) أثبت أنه إذا كان G مترابطًا، فإنّ القيمة الذّاتيّة 0 تتكرر مرة واحدة فقط.

c) أثبت أنه إذا كان G منتظمًا من الدرجة k، فإنّ $k - \lambda$ قيمةٌ ذاتية لابلاسية إذا وفقط إذا كانت λ قيمةً ذاتية عادية، مع المضاعفة نفسها (أي لها عدد مرات التكرار نفسه).

16.6.8. إذا أعطينا مصفوفة حقيقية متماثلة مجزأة على الصورة $M = \begin{bmatrix} P & Q \\ QT & R \end{bmatrix}$ حيث P، R مصفوفتان مربعتان، فإنّ تمهيدية في الجبر الخطي تعطي: $\lambda_{\max}(M) + \lambda_{\min}(M) \le \lambda_{\max}(P) + \lambda_{\max}(R)$.

a) لتكن A مصفوفة حقيقية متماثلة مجزأة إلى t^2 مصفوفة جزئية $A_{i,j}$ بحيث تكون المصفوفات الجزئيّة القطرية A_{ii} مربعة. أثبت أنّ: $\lambda_{\max}(A) + (t-1)\lambda_{\min}(A) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_{\max}(A_{ii})$.

b) أثبت أنّ $\chi(G) \ge 1 + \lambda_{\max}(G)/(-\lambda_{\min}(G))$ لبيان غير تافه G.

c) استخدم نظرية الألوان الأربعة لتبرهن أنّ $\lambda_1(G) + 3\lambda_n(G) \le 0$ للبيانات السوية.

17.6.8. (!) استخدم النظرية 28.6.8 لتعدَّ الأشجار المولدة في $K_{m,m}$. (تعليق: انظر التمرين 13.2.2).

18.6.8. (+) معطى مصفوفة A، لتكن $b_{i,j}$ تساوي $(-1)^{i+j}$ مضروبة في المصفوفة التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j من A. ولتكن Adj A المصفوفةَ التي تكون مدخلتها في الموقع i,j هي $b_{j,i}$. إنّ تعريف المحددة من خلال التمديد على صفّ من صفوف A يعطي أنّ $A(\text{Adj } A) = (\det A)I$. استخدم هذه الصيغة لتبرهن أنه إذا كان مجموع الأعمدة في A هو المتجه $\mathbf{0}$، فإنّ $b_{i,j}$ تكون مستقلة عن j. (تعليق: مع التمرين التالي، فإنّ هذا يكمل الإثبات لنظرية مصفوفة الشجرة (النظرية 12.2.2).

19.6.8. (+) لتكن $C = AB$، حيث A مصفوفةُ $m \times n$، و B مصفوفةُ $n \times m$. إذا أُعطيت $S \subseteq [m]$، لتكن A_S المصفوفةَ $n \times n$ التي أعمدتها هي الأعمدة في A التي يدل عليها بـ S، ولتكن B_S المصفوفة $n \times n$ التي صفوفها هي الصفوف في B التي يدل عليها بـ S. أثبت أنّ صيغة بينت وكوشي: $\det C = \sum_S \det A_S \det B_S$. حيث يوسّع المجموع على المجموعات الجزئيّة جميعها التي تحوي n عنصرًا من $[m]$. (مساعدة: خذ في الحسبان معادلة المصفوفات $\left(\begin{pmatrix} I_m & O \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_m & B \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_m & B \\ O & AB \end{pmatrix}\right)$

20.6.8. تكون المصفوفة **مُحَيّدة كليًا** (totally unimodular) إذا كانت محددة كلّ مصفوفة جزئية مربعة موجودة في $\{0, 1, -1\}$. أثبت أنّ مصفوفة الوقوع لبيان بسيط تكون محيدة كليًّا إذا وفقط إذا كان البيان ثنائيّ الفرع. (تذكير: مصفوفة الوقوع لبيان بسيط تملك $+1$ مرتين في كل عمود).

21.6.8. (-). ليكن G مُكبرًا من نوع (n, k, c)، ورؤوسه $v_1, \ldots, v_n$. وليكن H بيانًا ثنائي الفرع مع مجموعات مجزأة $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ بحيث يكون $x_i y_j \in E(H)$ إذا وفقط إذا كان $i = j$ أو $v_i v_j \in E(G)$. أثبت أنّ H موسّع من نوع $(n, k+1, c)$.

22.6.8. الوجود للموسعات التي حجمها خطي:

a) ليكن X متغيرًا عشوائيًّا يعطي الحجم لاتحاد k من المجموعات الجزئيّة التي درجتها s من $[n]$ مختارة عشوائيًّا من $\left[\binom{[n]}{s}\right]$. أثبت أنّ $p(x \le l) \le \left[\binom{n}{l}\right] (l/n)^{ks}$.

b) (+) لـ $\alpha\beta < 1$، أثبت أنه يوجد ثابت k، بحيث إنه إذا كان n كبيرًا بما فيه الكفاية، فإنه يوجد بيان جزئيّ من $K_{n,n}$ مع درجة كبرى على الأكثر k بحيث يكون $|N(S)| \ge \beta |S|$ عندما يكون $|S| \le \alpha n$.

(مساعدة: وَلِّدْ بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع من $K_{n,n}$ بأخذ الاتحاد لـ k مواءمة كاملة عشوائية).

c) استنتج الوجود لـ k بحيث تضمن وجود موسّعات من نوع (n, k, c) لكلّ n كبيرة بما فيه الكفاية.
ونُعرِّف **موسّعًا** من نوع (n, α, β, d) $(n, \alpha, \beta, d - expander)$ على أنه بيان ثنائيّ الفرع $G \subseteq K_{A,B}$ مع $|A| = |B| = n$، $\Delta(G) \le d$، و $|N(S)| \ge \beta|S|$ عندما $|S| \le \alpha n$.

23.6.8 ليكن G بيانًا خاليًا من المثلثات على n من الرؤوس، بحيث يكون لكلّ زوج من الرؤوس غير المتجاورة بالضبط جاران مشتركان. أثبت أنّ G منتظم، وأنّ $n = 1 + \binom{k+1}{2}$، حيث k هي درجة الرؤوس في G. أثبت أنّ G منتظم بقوة. ما القيود على k المتضمنة باستخدام شروط التكامل؟ أنشئ أمثلة لكلّ $k \in \{1, 2, 5\}$. وهناك تحقيق لـ $k = 10$ معروف باستخدام التصاميم التركيبية التوافقية).

24.6.8 (+) أثبت أنّ بيان بيترسون منتظم بقوة، وحدِّدْ طيفه (يكون الطّيف سهلاً بوجود خصائص البيانات المنتظمة بقوة وليس صعبًا من غيرها). طَبِّق الطّيف لتبين أنّ أضلاع البيان التام K_{10} لا يمكن أنْ تجزّأ إلى ثلاث نسخ منفصلة من بيان بيترسون. (مساعدة: استخدم الطّيف لتبرهن أنّ نسختين من مصفوفة بيترسون تملكان متجهًا ذاتيًّا مشتركًا غير المتجه الثابت) ([Schwenk [1983]).

25.6.8 ليكن $F = G \square H$، حيث G و H بيانان بسيطان. أثبت أنه إذا كان كلّ رأسين غير متجاورين في F يملكان جارين مشتركين بالضبط، فإنّ G و H يكونان بيانين تامين.

26.6.8 **المكونات الجزئيّة** (subconstituents) لبيان G هي البيانات الجزئيّة المحدثة التي تكون على الشكل $G[U]$، حيث $v \in V(G)$، و $U = N(v)$، أو $U = \overline{N(v)}$. عَرَّفَ فينس [Vince, 1989] أنّ البيان G يكون **فائق الانتظام** (superregular) إذا كان لا يملك رؤوسًا، أو إذا كان منتظمًا، وكلّ مكون جزئي له فائق الانتظام. ليكن $\mathbf{S}$ الصّفّ المكوَّنَ من $\{aK_b : a, b \ge 0\}$ (اتحادات منفصلة لعصب متشاكلة)، $\{K_m \square K_m : m \ge 0\}$ و C_5 ومتممات هذه البيانات:

a) أثبت أنّ كلّ بيان في $\mathbf{S}$ يكون فائق الانتظام، وأنّ كلّ بيان فائق الانتظام غير مترابط يكون في $\mathbf{S}$. (تعليق: في الحقيقة، كلّ بيان فائق الانتظام يكون في $\mathbf{S}$، لكن الإثبات الاستقرائي الكامل لهذا يتطلب صفحات عديدة ([West, 1996], [Maddox, 1996]).

b) أثبت أنّ كلّ بيان فائق الانتظام يكون منتظمًا بقوة.

27.6.8 (+) التشاكلات الذّاتيّة والقيم الذّاتيّة:

a) أثبت أنّ σ يكون تشاكلًا ذاتيًّا لـ G إذا وفقط إذا كانت مصفوفة التباديل المقابلة لـ s إبدالية مع مصفوفة التّجاور لـ G؛ بمعنى أنّ $PA = AP$.

b) ليكن x متجهًا ذاتيًّا لـ G للقيمة الذّاتيّة التي عدد مرات تكرارها 1، ولتكن P مصفوفةَ التباديل للتشاكل الذاتي لـ G. أثبت أنّ $Px = \pm x$.

c) استنتج أنه عندما تكون كل قيمة ذاتية لـ G مكررة مرة واحدة فقط، فإن كل تشاكل ذاتي لـ G هو تبديلة عودة إلى الأصل (involution)، بمعنى أن مربع هذه التبديلة يعطي العنصر المحايد.
(Mowshowitz,[1969], Petersdorf – Sachs [1969])

28.6.8 (+) لتكن $l_1, \ldots, l_n$ مصابيحَ ضوئيةً متحكمًا فيها من خلال المفاتيح $s_1, \ldots, s_n$. المفتاح i يغير حالة المصباح i إلى تشغيل/ إغلاق وربما مصابيح أخرى، ولكن s_i يغير حالة l_j إذا وفقط إذا كان s_j يغير حالة l_i. مبدئيًّا، افترض أنّ المصابيح جميعها مغلقة. أثبت أنه يمكن تشغيل المصابيح جميعها. ([Peled [1992]) (مساعدة: يُستخدم هنا الفضاءات المتجهة، وليس القيم الذاتية).

ملحق (Appendix A)

الخلفية الرياضية (Mathematical Background)

يلخص هذا الملحق أوجه اللغة والرياضيات التي لا تعدّ جزءًا مباشرًا من نظرية البيان، إلا أنها تزودنا بخلفية مفيدة لتعلم هذه النظرية، وسنذكر الأمثلة في سياق البيانات عندما يكون ذلك مناسبًا. لذا، من المفيد قراءة هذا الملحق وربطه مع الوحدة الأولى. إن هذا التقديم (العرض) منمذج على المادة الموجودة في النصف الأول من كتاب التفكير الرياضي لكل من :

.Douglas B. West, John P. D`Angelo (prentice – Hall, second edition, 2000)

المجموعات (Sets)

إن أول مفهوم رياضي أساسي ومهم هو مفهوم المجموعة، لأننا لا نستطيع تعريفها بواسطة مفاهيم أبسط. حيث إننا نفكر فيها على أنها جمع (حشد) من الأشياء المختلفة التي لها وصف دقيق يعطينا طريقًا لمعرفة (من حيث المبدأ) ما إذا كان شيء معين موجودًا فيها أم لا.

A.1. تعريف: تسمى الأشياء الموجودة في المجموعة عناصر أو أعضاء. وعندما يكون xعنصرًا في A، فإننا نكتب $x \in A$، ونقول: إن "x ينتمي إلى A"، ولكن عندما لا يكون x في A، فإننا نكتب $x \notin A$.

وإذا تحقق أن كل عنصر في مجموعة B يكون عنصرًا في المجموعة A، فنقول: إن B مجموعة جزئية من A، وأن A تحوي B. ونكتب $B \subseteq A$ أو $A \supseteq B$. ونكتب $B \subset A$ إذا كانت A تحوي Bولا تساويها.

فعلى سبيل المثال، يمكننا الحديث عن مجموعة البيانات A التي لها n من الرؤوس، وعندما نضيف شرطًا إضافيًا كأن يكون البيان مترابطا، فإننا نحصل على مجموعة جزئية من A.

وعندما نضع قائمة صريحة بعناصر المجموعة، فإننا نضع أقواسًا متوسطة حول هذه العناصر. فمثلاً، عندما نكتب "$A = \{-1, 1\}$" فإن هذا يعني أن المجموعة A تحوي عنصرين هما 1 و 1-. إن كتابة عناصر المجموعة بترتيب مختلف لا يغيرها. ونكتب $x , y \in S$ لنعني أن xو y عنصران في S.

A.2. مثال: نستخدم الحروف: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ بوصفها أسماء لمجموعات الأعداد الطبيعية، والأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية، والأعداد الحقيقية على الترتيب. لاحظ أن $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. نتعامل مع

هذه المجموعات وعناصرها كأشياء معروفة. واصطلاحًا، فإن الصفر ليس عددًا طبيعيًّا. لذا، فإن $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ومجموعة الأعداد الصحيحة هي:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ومجموعة الأعداد غير الكسرية Q هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي يمكن وصفها على صورة a/b حيث كل من $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a \neq 0$. $Q = \{{}^{a}/_{b} : a,b \in \mathbb{Z} : b \neq 0\}$

وكذلك نفترض أن الخواص الحسابية الأساسية لأنظمة الأعداد معروفة، وهذا يشمل القواعد الجبرية، والمساواة، والمتباينات. ويشمل ذلك أيضًا الخواص الأساسية المتعلقة بقسمة الأعداد الصحيحة. ■

A.3. تعريف: نقول: إن المجموعتين A و B متساويتان، ونكتب $A = B$، إذا كان لهما العناصر نفسها. أما المجموعة الخالية Ø، فهي المجموعة الوحيدة التي لا تحتوي على عناصر. في حين نقصد بالمجموعة الجزئية الفعلية من A كل مجموعة جزئية من A غير مساوية لها.

إن المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من كل مجموعة، فضلًا عن أن كل مجموعة تعدّ مجموعة جزئية من نفسها. إن تعريف البيان الجزئي (التعريف 1. 1. 16) مشابه لهذا التعريف. وكل بيان هو بيان جزئي من نفسه، إلا أنه يجب إهمال شيء للحصول على بيان جزئي فعلي.

«إن حل مشكلة رياضية» في الغالب يعني إعطاء وصف أسهل لمجموعة معطاة، ويجب إثبات أن مجموعة الأشياء التي تحقق الوصف الجديد تساوي المجموعة المعطاة.

A.4. ملاحظة: مساواة المجموعات

لإثبات أن $A = B$، علينا أن نبرهن أن كل عنصر في A هو عنصر في B، وأن كل عنصر في B هو عنصر في A. أي؛ يجب أن نثبت أن $A \subseteq B$، وأن $B \subseteq A$. ويكفي أيضًا أن نحوّل وصف مجموعة إلى وصف المجموعة الأخرى عن طريق عمليات لا تغير عضوية العناصر.

يعطي هذا الكتاب العديد من براهين المبرهنات التي تعطي أوصافًا مميزة لبعض صفوف البيانات، وأن مثل هذه المبرهنة تنص على أن المجموعتين هما المجموعة نفسها (مثال: إن مجموعة البيانات الثنائية الفرع تساوي مجموعة البيانات التي ليس لها حلقات فردية — المبرهنة1.2.18).

غالبًا، يعرِّف النموذج الرياضي مجموعة S من الحلول؛ إن هذه هي الأشياء التي تحقق شروط المسألة. ونرغب في إيجاد الحلول صراحة أو وصفها، وهذا يحدد مجموعة T. إن المسألة الآن هي إثبات أن $S = T$. ويعني إثبات $S \subseteq T$ أن كل حل ينتمي إلى T. كما أن إثبات $T \subseteq S$ يعني أن كل عنصر في T يكون حلًّا للمسألة. ■

A.5. ملاحظة: كيفية تحديد مجموعة

لتكن A مجموعة معطاة، قد نرغب في تحديد مجموعة جزئية S مؤلفة من عناصر A التي تحقق شرطًا أو خاصية معينة. ولعمل ذلك؛ نكتب "$S = \{x \in A : condition(x)\}$" ونقرأ هذا على الشكل "إن S هي مجموعة العناصر x التي تحقق الشرط". فعلى سبيل المثال، إن التعبير $\{n \in N : n^2 \leq 25\}$ هو صورة أخرى للمجموعة {1، 2، 3، 4، 5}.

وبهذه الصورة، فإن المجموعة A تشكل المجتمع الكلي لـ x. وبإمكاننا أن نهمل هذا الجزء من الرمز عندما يكون المقصود واضحًا من السياق. فعلى سبيل المثال، إن المجموعة $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ هي مجموعة مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة. ■

تنويه: يوجد للعديد من المجموعات أسماء أو رموز شائعة.

A.6. تعريف: نكتب $\{a, \ldots, b\}$ عادة للتدليل على المجموعة $\{i \in \mathbb{Z} : a \leq i \leq b\}$، في حين نكتب $[n]$ للتدليل على المجموعة $\{1, \ldots, n\}$ حيث $n \in \mathbb{N}$، ونكتب $\text{Ø} = [0]$. إن مجموعة الأعداد الزوجية هي:

$\{2k: k \in \mathbb{Z}\}$. أما مجموعة الأعداد الفردية فهي $\{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$. وأن نوعية العدد الصحيح هي فردية أو زوجية.

لاحظ أن 0 عدد زوجي، وأننا نتحدث عن الأعداد الزوجية والفردية فقط عند حديثنا عن الأعداد الصحيحة. ولاحظ كذلك أن كل عدد صحيح إما أن يكون عددًا زوجيًّا أو عددًا فرديًّا، ولكنه لن يكون الاثنين معًا.

A.7. تعريف: إن التجزئة لمجموعة A هي مجموعات جزئية $A_1, \ldots, A_k$ من A بحيث يظهر كل عنصر من عناصر A في مجموعة واحدة فقط من هذه المجموعات.

إن مجموعة الأعداد الزوجية والفردية معًا تشكلان تجزئة لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. فإذا كانت $A_1, \ldots, A_k$ تجزئة معينة للمجموعة A، فإن المجموعات $A_1, \ldots, A_k$ تسمى "قوالب" أو "صفوفًا" أو "أجزاء" أو "مجموعات جزئية". إن كلمة قوالب شائعة الاستخدام في الرياضيات التوافقية (التركيبية). ولهذه الكلمة تعريف مختلف في نظرية البيان. لذا، نستخدم عادة كلمة صفوف أو مجموعات. أما مصطلح المجموعات الجزئية فنستخدمه عند تجزئة رؤوس بيان معين إلى مجموعات مستقلة.

A.8. ملاحظة: اصطلاح يتعلق بالمجتمعات (المجموعات) الكلية.

عندما نكتب "$[n]$" فمن الواضح أن n عدد صحيح غير سالب، وعندما نتكلم عنه بوصفه عدد رؤوس لبيان، فإننا نعلم من السياق أنه عدد طبيعي، وعندما نقول إن العدد موجب دون تحديد نظام الأعداد الذي يحوي هذا العدد، فإننا نعني عددًا حقيقيًّا موجبًا. لذا، فإن كتابة: افترض $x > 0$ تعني: افترض أن x عدد حقيقي موجب. ولكن في العبارة لـ $n \geq 2$ ، افترض أن G بيان على n من الرؤوس، فإن اصطلاحنا هو أن $n \in \mathbb{N}$.

A.9. تعريف: نقول: إن المجموعة A مجموعة منتهية إذا وفقط إذا وُجد ارتباط واحد لواحد بين A و $[n]$ لبعض $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. يشير n إلى حجم A، ونكتبه على الشكل $|A|$.

إن خاصية أولية أُخرى لأنظمة الأعداد هي أنه لا يمكن للمجموعة A أن تكون مرتبطة ارتباطًا واحدًا لواحد مع كل من $[m]$ و $[n]$ إذا كان $m \neq n$. لذا، فإن حجم المجموعة المنتهية هو عدد صحيح معرَّف تعريفًا حسنًا. وعدّ المجموعة يعني تحديد حجمها وتعيينه.

A.10. ملاحظة: كلمة " إذا " في التعريفات اصطلاحٌ شائع عندما نعرِّف خاصية رياضية، حيث نقول: إن شيئًا له خاصية معينة إذا حقق شرطًا معينًا. وبناءً على هذا، يمكن تعويض الشرط بالخاصية، والعكس بالعكس. لذا، فإن "إذا" تعني إذا وفقط إذا، إن هذا الاستخدام الاصطلاحي في التعريفات يعكس سمةَ أن المفهوم الذي يتم تعريفه غير موجود حتى يكون التعريف كاملاً. ■

تنويه: يوجد العديد من الطرق الطبيعية للحصول على مجموعات جديدة من مجموعات قديمة أو معطاة سابقًا.

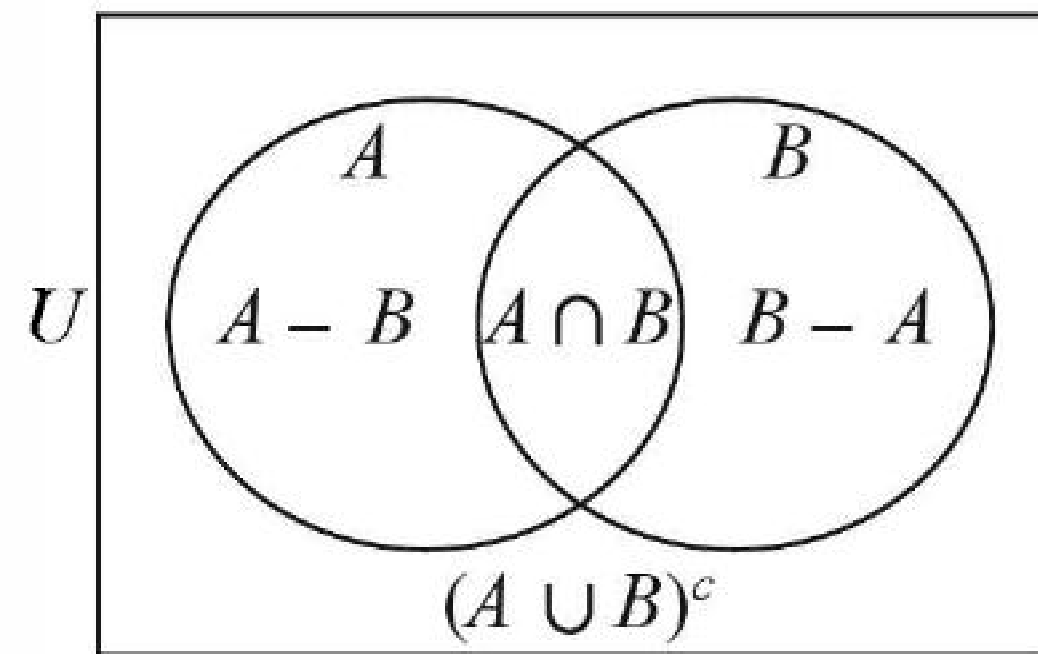
A.11. تعريف: افترض أن A و B مجموعتان، يتألف اتحادهما $A \cup B$ من العناصر الموجودة في A أو في B كلها أو في كليهما. فضلًا عن أن تقاطعهما $A \cap B$ يتألف من العناصر الموجودة جميعها في كل من A و B في الوقت نفسه. والفرق بينهما $A - B$ يتكون من العناصر الموجودة في A جميعها وغير الموجودة في B. أما الفرق التماثلي $A \Delta B$ فيتكون من العناصر جميعها التي تنتمي إلى مجموعة واحدة فقط من المجموعتين A و B.

ونقول: إن المجموعتين منفصلتان إذا كان تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية $\emptyset$ وإذا كانت A مجموعة محتواة في مجموعة كلية U، فإن المتممة $\overline{A}$ لـ A هي مجموعة عناصر U التي لا تنتمي إلى A.

وعندما نتحدث عن أخذ (إيجاد) المتممة لبيان بسيط، فإننا نحافظ على مجموعة الرؤوس دون أي تغيير، ونأخذ متممة مجموعة الأضلاع (نعاملها بوصفها مجموعة أزواج من الرؤوس) ضمن المجموعة الكلية التي تمثل أزواج الرؤوس. وفي أحيان أخرى، نتكلم عن المتممة $\overline{S}$ لمجموعة الرؤوس S في G، وفي هذه الحالة، فإن $\overline{S} = V(G) - S$.

A.12. ملاحظة: في شكل فن (Venn)، يمثل الصندوقُ الخارجي المجموعةَ الكلية المأخوذة في الحسبان، كما أن المناطق الموجودة داخل الصندوق تمثل المجموعات. وترتبط المناطق غير المتداخلة (المتقاطعة) بالمجموعات المنفصلة. إن المناطق الأربعة في شكل فن أدناه الخاص بالمجموعتين A و B تمثل $A \cap B$، A-B، B-A، و $\overline{(A \cup B)}$، لاحظ أن $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

بما أن $A - B$ تتكون من عناصر A غير الموجودة في B، فإن $A - B = A\,\overline{B}$. وبالمثل، فإن الشكل يوحي بأن $\overline{B}$ هي اتحاد $A - B$ و $\overline{(A \cup B)}$، والتي هي منفصلة. إضافة إلى أنه يوحي أيضًا بأننا نحصل على الفرق التماثلي $A \Delta B$ من الاتحاد بحذف التقاطع. ■



A.13. ملاحظة: عندما تكون A و B مجموعتين، فإن $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. إن الاتحاد يبدأ بالعناصر جميعها الموجودة على الأقل في واحدة من هاتين المجموعتين، ونحذف العناصر الموجودة في كليهما.

عندما تكون A و B مجموعتين منتهيتين، فإن $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$. يُحسَبُ كل عنصر في التقاطع مرتين في كل جانب، أما حساب كل عنصر من عناصر الفرق التماثلي فيتم مرة واحدة في كل جانب، ولا يحسب أي عنصر آخر. ■

A.14. تعريف: نعني بقائمة من مدخلات A مجموعة من عناصرها بترتيب معين؛ حيث يسمح بتكرار العناصر. إن العديد k $(k - tuple)$ - هي قائمة تحوي k مدخلة. ونكتب A^k للتدليل على مجموعة العديدات k- التي مدخلاتها من A. وفي الحالة التي تكون فيها $A = \{0,1\}$، فإن A^k تمثل مجموعة العديدات k - الثنائية. الزوج المرتب (x,y) قائمة بمدخلتين. ونعرف الضرب الكارتيزي (الديكارتي) للمجموعتين S و T على الصورة: $S \times T = \{(x,y) : x \in S, y \in T\}$.

لاحظ أن $A^2 = A \times A$، وأن $A^k = \{(x_1,\ldots,x_k) : x_i \in A\}$، نقرأ x_i على الشكل x أدنى i. عندما $S = T = \mathbb{Z}$، فإن الضرب الديكارتي $S \times T$ يكون الشبكة الصحيحة (شبكة إحداثياتها أعداد صحيحة).

وهي تمثل مجموعة نقاط المستوى التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

محددات القياس والبراهين (Quantifiers and Proofs)

بكلام تقريبي، يمكن تحديد صحة العبارة الرياضية أو خطئها، ويتطلب هذا إيجاد قواعد رياضية صحيحة، إضافة إلى قياس المتغيرات وتحديدها.

فعلى سبيل المثال، في الجملة $x^2\text{-}4 = 0$، لا يمكن أن نقول أو أن نحدد ما إذا كانت صحيحة أم خطأ بسبب عدم معرفتنا بقيم x. وتصبح عبارة رياضية إذا سُبِقَتْ بكتابة مثل "عندما $x = 3$" أو $x \in \{-2, 2\}$، أو لبعض الأعداد الصحيحة x.

إذا أصبحت الجملة $p(x)$ عبارة رياضية في حال أخذ المتغير x قيمة في مجموعة معينة S، فإن الجملتين التاليتين تكونان عبارات رياضية.

«لكل $x \in S$، فإن الجملة $P(x)$ تكون صحيحة» «لبعض $x \in S$، فإن الجملة $P(x)$ تكون صحيحة.

15.A. تعريف: في العبارة "لكل $x \in S$، $P(x)$ صحيحة»، إن المتغير x محدد ومقاس كليًّا. ونكتب هذا على الشكل $(\forall x \in S)\ P(x)$ ونقول: إن الرمز $\forall$ هو محدد قياس كلي. أما في العبارة لبعض $x \in S$، فإن $P(x)$ صحيحة، فإن المتغير x محدد ومقاس وجوديًّا. ونكتب هذا على الشكل $(\exists x \in S)p(x)$، ونقول: إن الرمز $\exists$ هو محدد قياس وجودي. وتسمى مجموعة القيم المسموحة للمتغير بالمجتمع الكلي أو بالمجموعة الكلية لهذا المتغير.

16.A. ملاحظة: الكلمات الإنجليزية التي تستخدم في التعبير عن محددات القياس.

إن الكلمتين «كل» و«لكل» تعبران عن محددات القياس الكلية، أما الكلمتان «بعض» و «يوجد» فتعبران عن محددات القياس الوجودية (وجود الشيء أو عدم وجوده). ويمكن التعبير عن محددات القياس الكلي أيضًا من خلال حديثنا عن عنصر اختياري في مجموعتنا الكلية كقولنا «افترض أن x عدد صحيح» أو كقولنا «إذ رسب طالب في الامتحان، فإنه سيرسب في المقرر (المادة)". تجد أدناه قائمة بالمؤشرات الشائعة على التحديد والقياس.

كلي ($\forall$)	(مساعدات)	وجودي ($\exists$)	(مساعدات)
لكل، لكل عنصر		لبعض	
إذا	فإن	يوجد	بحيث
عندما، لـ، معطى		على الأقل واحد	يتحقق له
كل، أي	يحقق	بعض	يحقق
a، اختياري	يجب	له	بحيث إن
اجعل	يكون		

يمكن أن تكون «المساعدات» غائبة. فمثلاً، العبارة «مربع العدد الحقيقي غير سالب». هذه العبارة تعني أن $x^2 \geq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$، وهي ليست عددًا حقيقيًّا واحدًا، ولا يمكن إثبات صحتها أو التحقق منها بإعطاء مثال. عندما نكتب أنه لا توجد للبيان الثنائي الفرع حلقة فردية، فإننا نعني أن كل بيان ثنائي الفرع يخلو من حلقة فردية.

وعندما نكتب، افترض أن G بيان ثنائي الفرع، فإن ذلك يعني أننا نأخذ في الحسبان كلّ بيان ثنائي الفرع. ولكن عندما نأخذ رأسًا اختياريًا في البيان، فهذا يعني أننا نتحدث عن كل رأس من رؤوس هذا البيان. أما عندما نتحدث عن زوج اختياري من رؤوس بيان، فإننا نتكلم عن كل زوج على حدة.

الفرق بين "لكل G من جهة ولكل بيان G من جهة أخرى" هو أننا - في الثانية - حددنا المجموعة الكلية للمتغير G المحدد قياسيًّا تحديدًا كليًّا. ■

إن المحددات القياسية الوجودية تتحدث عن حدود دنيا كقولنا: «يوجد» أو «يوجد اثنان» التي تعني أنه «يوجد اثنان على الأقل» والعبارات مثل: «يوجد وحيد» أو يوجد اثنان بالضبط فتشير إلى المساواة. وقد تكون هذه المساواة واضحة من السياق أحيانًا، إلا أنه لا يوجد ضرر من الحديث عنها صراحة عندما تكون مقصودة».

إن العبارة يمكن أن تحوي أكثر من محدد قياسي، خذ في الحسبان الجملة «توجد بيانات خالية من المثلثات بحيث إن عددها اللوني كبير اختياريًّا». وبالتعبير عن محدداتها القياسية صراحة، فإنها تعني أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد بيان خالٍ من المثلثات، عدده اللوني يساوي n على الأقل. إن التعبير «كبير اختياريًّا» غالبًا ما يعني أو يشير ضمنيًّا إلى محدد قياسي كلي بهذه الطريقة.

وبالمقارنة، فإن التعبير «كبير كفاية» يفرض ضمنيًّا محددًا قياسيًّا وجوديًّا. فعلى سبيل المثال، إن العبارة $2^n > n^{1000}$ عندما تكون n كبيرة كفاية تعني أنه " يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث إن $2^n > n^{1000}$ لكل $n \geq N$ ".

A.17. ملاحظة : يعتمد معنى العبارة التي تحوي أكثر من محدد قياسي على ترتيب هذه المحددات. قارن بين الجملتين التاليتين:

«لكل بيان G يوجد $m \in \mathbb{N}$، بحيث إن درجة $v \in V(G)$ جميعها تساوي m على الأقل".

«يوجد $m \in \mathbb{N}$، بحيث إن لكل بيان G، تكون درجة $v \in V(G)$ جميعها تساوي m».

إن العبارة الأولى صحيحة، أما الثانية فغير صحيحة. لكل بيان (منته) درجة كبرى، لكن لا يوجد أكبر من بين البيانات جميعها. الآن، نكتب العبارتين باستخدام رموز المنطق:

$$(\forall G)(\exists m \in N)(\forall v \in V(G))(d_G(v) \leq m)$$
$$(\exists m \in N)(\forall G)(\forall v \in V(G))(d_G(v) \leq m)$$

في الإنجليزية، غالبًا ما تظهر المحددات القياسية في نهاية الجملة لتجميل القراءة أو تزيينها، كما في المثال "أشعر بالسعادة في كل مرة أتعلم فيها شيئًا جديدًا". وفي الجمل التي تحوي مفاهيم مجردة وتحوي أكثر من محدد قياسي، فإننا نتبنّى اصطلاحات حول الترتيب من أجل تجنب اللبس أو الخلط.

نطبق التحديدات (المحددات) القياسية بالترتيب نفسه الذي تظهر به في الجملة، وعلى وجه الخصوص، نختار متغيرًا بدلالة المتغيرات السابقة.

فعلى سبيل المثال، في العبارة $(\forall G)(\exists m \in \mathbb{N})p(G,m)$ لدينا الحرية في اختيار m بعد معرفة ماهية G. أما في العبارة $(\exists m \in N)(\forall G)p(G,m)$ فيجب أن نختار m واحدة صالحة لكل G. ■

A.18. ملاحظة : نفي العبارات المحددة قياسيًّا

الرمز المنطقي الخاص بالنفي هو $\neg$. إذا كانت العبارة أن كل $x \in S$ تجعل $P(x)$ صحيحة عبارة غير صحيحة، فلا بدّ من وجود بعض $x \in S$ بحيث إن $P(x)$ تكون غير صحيحة. وبالمثل، فإن نفي عبارة محددة بمحدد قياس وجودي يعطي نفيًا لمحدد قياسي كلي. وبالرموز فإن:

$\neg[(\forall x \in S)p(x)]$ لها معنى $(\exists x \in S)(\neg p(x))$ نفسه، وأن $\neg(\exists x \in S)(p(x))$ لها معنى $[(\forall x \in S)\neg p(x)]$ نفسه.

لاحظ أن مجتمع (المجموعة الكلية) التحديد لا يتغير بإجراء عملية النفي على عبارة معينة. فعلى سبيل المثال. إن العبارة غير الصحيحة في ملاحظة A. 17 كانت:

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall G)(\forall v \in V(G))(d_G(v) \leq m)$$

وأن نفيها هو: $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists G)[\neg(\forall v \in V(G))(d_G(v)) \leq m)]$، والتي نبسطها أكثر لتصبح $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists G)(\exists v \in V(G))(d_G(v) > m)$. إن هذه العبارة هي "لكل عدد طبيعي m، يوجد بيان، له رأس درجته أكبر من m". وهي عبارة صحيحة. ■

تسمح الروابط المنطقية (أدوات الربط المستخدمة في المنطق) لنا ببناء عبارات مركبة.

19.A. تعريف: روابط المنطق، في الجدول الآتي، نعرّف العمليات المسماة في العمود الأول من خلال صحة قيمها المحددة في العمود الأخير.

الاسم	الرمز	المعنى	شرط صحة العبارة
النفي	$\neg P$	ليس P	P غير صحيحة (خطأ).
توحيد، عطف	$P \wedge Q$	P و Q	كل منهما صحيحة.
فصل، انفصال	$P \vee Q$	P أو Q	إحداهما صحيحة
ثنائي الشرط	$P \Leftrightarrow Q$	P إذا وفقط إذا Q	لهما قيم الصواب نفسها.
شَرْطي	$P \Rightarrow Q$	P تتضمن Q	تكون Q صحيحة عندما تكون P صحيحة.

20.A. ملاحظة: العطف والفصل محددات قياسية حول صحة مركبات (مكونات) عبارات كل منهما. إن العطف "و" يكون صحيحًا، عندما تكون كل مركبة من مركبات عبارته صحيحة، أما الفصل "أو" فيكون صحيحًا، عندما توجد مركبة من بين مركبات عبارته صحيحة. إن فهمنا للنفي يعطينا تكافؤًا منطقيًا بين $\neg(P \wedge Q)$ و $(\neg P \vee \neg Q)$ من جهة و $\neg(P \vee Q)$ و $(\neg P \wedge \neg Q)$ من جهة أخرى. ■

21.A. تعريف: في العبارة الشرطية $P \Rightarrow Q$، نسمي P فرضًا وQ نتيجة. أما العبارة $Q \Rightarrow P$ فهي عكس العبارة $P \Rightarrow Q$.

22.A. ملاحظة: العبارات الشرطية. إن العبارات الشرطية هي النوع الوحيد في التعريف 19.A الذي يتغير معناه بتبديل أدوار p و Q. لا يوجد تضمين عام بين $P \Rightarrow Q$ وعكسها $Q \Rightarrow P$. خذ في الحسبان العبارات الثلاثة الآتية عن بيان G:

العبارة P: G مسار.

العبارة Q: G بيان ثنائي الفرع.

العبارة R: G خال من الحلقات الفردية.

هنا، نعلم أن $P \Rightarrow Q$ صحيحة، ولكن $Q \Rightarrow P$ غير صحيحة، ومن ناحية أخرى نعلم أن كلًا من $Q \Rightarrow R$ و $R \Rightarrow Q$ عبارتان صحيحتان.

لاحظ هنا أن G متغير، ولقد أسقطناه من الرموز المستخدمة في العبارات لأن السياق واضح. إن المعنى الدقيق للعبارة $P \Rightarrow Q$ باستخدام G هو $\forall G\ (P(G) \Rightarrow Q(G))$.

وتكون العبارة الشرطية غير صحيحة عندما وفقط عندما يكون الفرض والنتيجة غير صحيحين. لذا فإن معنى $G \Rightarrow P$ هو $(\neg p) \vee Q$: إن هاتين العبارتين متكافئتان منطقيًا. وتكون كل عبارة شرطية بفرض غير صحيح صحيحة دائمًا بغض النظر عن صحة النتيجة. إن معنى $\neg P \Rightarrow Q$ هو $p \wedge (\neg Q)$. ■

نضع على الصفحة اللاحقة قائمة طرق لقول إن $P \Rightarrow Q$ باللغة العربية.

إذا كانت P صحيحة، فإن Q تكون صحيحة. تكون P صحيحة فقط إذا كانت Q صحيحة.
تكون Q صحيحة عندما تكون P صحيحة. P شرط كاف لـ Q.
Q صحيحة إذا كانت P صحيحة. Q شرط ضروري لـ P.

مهمة الرياضيات إعطاء براهين للتضمينات. ويمكن تفسير العبارة المحددة قياسيًّا بمحدد قياسي كلي على أنها عبارة شرطية. حيث إن للعبارة "$(\forall G \in \boldsymbol{G})(p(G))$" معنى العبارة نفسها"، وإذا كان $G \in \boldsymbol{G}$، فإن $P(G)$ (افترض أن تكون العبارتان في الحالة التي تكون فيها $\boldsymbol{G}$ عائلة بيانات ثنائية الفرع، و$P(G)$ هي القول بأن لـ G حلقة فردية).

تنويه: طرق الإثبات الأساسية تأتي من المعنى للعبارات الشرطية.

A.23. ملاحظة : برهنة التضمينات.

الطريق المباشر لإثبات أن $P \Rightarrow Q$ هو بافتراض أن P صحيحة، ونستخدم التعليل الرياضي لنستنتج أن Q صحيحة. عندما تكون p هي العبارة " $x \in A$ "، و Q هي «$Q(x)$" فإن الطريق المباشر يرى أن $x \in A$، ويستنتج $Q(x)$. لا يوجد إثبات «بإعطاء مثال». يجب أن ينطبق الإثبات على كل عنصر من عناصر A كمثال ممكن على x.

إن المكافئ العكسي للعبارة: $P \Rightarrow Q$، هو أن $\neg Q \Rightarrow \neg P$. كل عبارة من هاتين العبارتين تفشل فقط في الحالة التي تكون فيها p صحيحة و Q غير صحيحة. لذا، فإن هاتين العبارتين متكافئتان، وهذا يعني إمكانية برهنة أن $P \Rightarrow Q$ عن طريق إثبات أن $\neg Q \Rightarrow \neg P$. وتسمى هذه الطريقة بطريقة المكافئ العكسي.

لقد لاحظنا أن $[p \wedge (\neg Q)] \Leftrightarrow \neg (p \Rightarrow Q)$. لذا، فبإمكاننا أن نبرهن أن $P \Rightarrow Q$ عن طريق برهنة أنه لا يمكن لـ P و $\neg Q$ أن تكونا صحيحتين معًا. وهذه هي طريقة الإثبات بالتناقض.

إن الطريقتين الأخيرتين تؤديان إلى الإثبات غير المباشر، وفي الحالة التي لا يكون فيها الطريق المباشر لبرهنة أن $P \Rightarrow Q$ مُجد، فإننا نقول: "حسنًا، افترض العكس". وعند هذه النقطة، نبدأ من $\neg Q$ ويجب أن نعلم من البداية ما نبحث عنه، هل نرغب في التوصل إلى $\neg P$ (المكافئ العكسي) أم إلى $(\neg G) \wedge P$ للحصول على تناقض. ■

توجد في الكتاب أمثلة على كل طريقة من هذه الطرائق، وإن الإثبات غير المباشر يكون واعدًا عندما يعطي نفيُ النتيجة معلومات مفيدة، وربما يكون هذا الطريق أسهل من إيجاد إثبات مباشر؛ وذلك لأنه يمكننا من استخدام الفرض ونفيِ النتيجة معًا، وإذا كان التناقض الذي حصلنا عليه هو استحالة تحقق الفرض الأصلي وهو $\neg Q$، فبإمكاننا في هذه الحالة كتابة إثبات مباشر بلغة بسيطة وسهلة، أما إذا حصلنا على $\neg P$، فنكون قد برهنا المكافئ العكسي.

A.24. ملاحظة : العبارات الثنائية الشرط.

إن العبارة الثنائية الشرط " $P \Leftrightarrow Q$ " تحمل معنى "$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$" نفسه. ونقرأها P إذا وفقط إذا Q، حيث $Q \Rightarrow P$ تعني "P إذا Q"، و " $P \Rightarrow Q$ " تعني "P فقط إذا Q".

على الرغم من أننا نبرهن أحيانًا العبارات الثنائية الشرط عن طريق سلسلة من التكافؤات، فإننا نبرهن عادةً العبارة الشرطية وعكسها؛ حيث إن الأخيرة أيضًا هي عبارة شرطية، لكل منهما لدينا الطرق الثلاث الأساسية التي ذكرت أعلاه. ولبرهنة أن " $P \Leftrightarrow Q$ "، فيجب أن نبرهن عبارة واحدة في كل عمود في الجدول أدناه من خلال استخدام طرق الإثبات المعروفة وهي: الإثبات المباشر، والمكافئ العكسي، والتناقض على الترتيب. إن إثبات عبارتين في العمود نفسه يؤول لإثبات العبارة نفسها مرتين.■

$$P \Rightarrow Q \qquad\qquad Q \Rightarrow P$$
$$\neg Q \Rightarrow \neg P \qquad\qquad \neg P \Rightarrow \neg Q$$
$$\neg(P \wedge \neg Q) \qquad\qquad \neg(Q \wedge \neg P)$$

تتساءَل الطلبة في بعض الأحيان عن المعنى الدقيق لكلمات مثل نظرية (Theorem)، وتمهيدية (Lemma)، ونتيجة (Corollary) التي تستخدم في التعبير عن النتائج الرياضية وتمييزها. إن كلمة(Lemma) اليونانية تعني (premise)بالإنجليزية، وتمهيدية بالعربية، أما كلمة (therema)اليونانية فتعني بالإنجليزية (Thesis to be proved)، وبالعربية نظرية. لذا، فإن المبرهنة هي نتيجة رئيسة تتطلب جهدًا من أجل إثباتها، أما التمهيدية فهي عبارة أقل حيث تُستخدم عادة للمساعدة على إثبات عبارات أخرى أقوى. في حين تعني كلمة قضية شيئًا نقترحه من أجل أن نبرهنه، ويأخذ هذا جهدًا أقل من جهد إثبات المبرهنة عادة، أما كلمة نتيجة (Corollary) فتأتي من اللاتينية بوصفها تعديلًا لكلمة تعني هدية "gift" ، وعادة تتبع النتيجه مباشرةً من نظرية أو من قضية دون إجراء جهد إضافي.

الاستقراء والتكرار (Induction and Recurrence)

يمكن إثبات العديد من العبارات التي يكون متغيرها عددًا طبيعيًّا عن طريق استخدام الاستقراء الرياضي. في المبرهنة 1.2.1، نصف النسخة الأقوى للاستقراء، أما هنا فسنراجع النسخة العادية من الاستقراء التي يتعلمها معظم الطلبة عندما يصادفون الاستقراء أول مرة. يشتمل الاستقراء على خاصية الترتيب الحسن للأعداد الطبيعية، والتي تنص على أن كلّ مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ تحوي عنصرًا أدنى (أقل)؛ حيث نتعامل معها بوصفها حقيقة بديهية، وبوصفها جزءًا من فهمنا الحدسي لماهية الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. وعلى الرغم من أننا نضع مبدأ الاستقراء كمبرهنة، إلا أنه في الحقيقة يكافئ خاصية الترتيب الحسن للأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

25.A نظرية : (مبدأ الاستقراء) افترض أن $P(n)$ عبارة رياضية لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا تحققت الخاصيتان (a) و (b) أدناه، فإن العبارة $P(n)$ تكون صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$.

a) $P(1)$ صحيحة.

b) إذا كانت $P(k)$ صحيحة لكل $k \in \mathbb{N}$ ، فإن $P(k+1)$ تكون صحيحة.

الإثبات : إذا كانت $P(n)$ غير صحيحة لكل n، فإن مجموعة الأعداد الطبيعية التي تفشل فيها العبارة تكون مجموعة غير خالية. ومن خاصية الترتيب الحسن، يوجد حد أدنى لهذه المجموعة، ويكون هذا الحد عنصرًا من عناصر هذه المجموعة. من (a)، الحد الأدنى لا يمكن أن يكون العدد 1. ومن (b)، نجد أنه لا يمكن أن يكون أكبر من 1. إن هذا التناقض يضمن صحة النتيجة $P(n)$ لكل n. ■

عند تطبيق طريقة الاستقراء، فإننا نبرهن العبارة (a) في المبرهنة 25.A بوصفها خطوة الأساس، والعبارة (b) بوصفها خطوة الاستقراء. إن العبارة (b) هي عبارة شرطية وفرضها "$P(k)$ صحيحة" هو فرض الاستقراء. سنقوم بعرض (تقديم) مثال واحد بلغة رسمية نوعًا ما.

26.A قضية : إذا كانت S مجموعة n من الخطوط في مستوى، بحيث إن كل خطين فيها يتقاطعان في نقطة واحدة، وبحيث لا يشترك ثلاثة منها في نقطة واحدة، فإن S تقطع المستوى إلى $1+n(n+1)/2$ منطقة.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على n لإثبات الادعاء لكل $n \in \mathbb{N}$. افترض أن $P(n)$ هي العبارة التي تنص على أن الادعاء يتحقق لهذه المجموعات جميعها التي تحوي n من الخطوط.

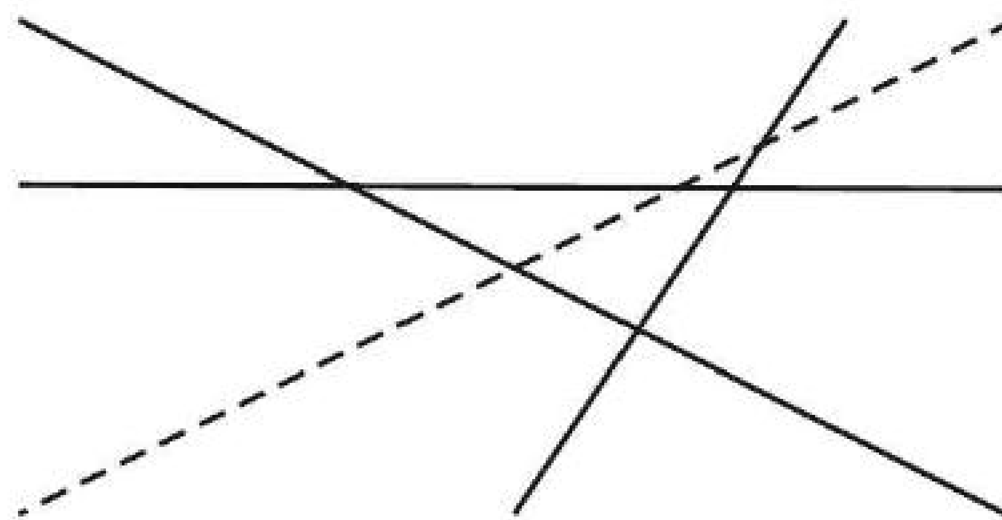
الخطوة الأساس ($P(1)$). بوجود خط واحد، نعلم أن عدد المناطق يساوي 2، وهذا يساوي $1+1(1+1)/2$.

خطوة الاستقراء ($P(k) \Rightarrow P(K+1)$). إن العبارة $p(k)$ هي فرضية الاستقراء. افترض أن S عبارة عن مجموعة مؤلفة من $k+1$ خطًا تحقق الشروط. اختر خطًا L في S (الخط المنقط في الشكل)، واجعل S' هي مجموعة الـ k خطًا التي نحصل عليها بحذف L من S.

بما أن S' تحقق الشروط، فإن فرض الاستقراء ينص على أن S' تقطع المستوى إلى $1+k(k+1)/2$ منطقة. وبإعادة L إلى مكانه الأصلي، فيُقطع بعض المناطق. إن الزيادة في عدد المناطق تساوي عدد المناطق التي يقطعها L؛ حيث يتحرك L من منطقة إلى أخرى وذلك في كل مرة يقطع فيها خطًا من الخطوط الموجودة في S'. وبما أن L يقطع هذه الخطوط جميعها؛ لأنه يقطع كل خط منها مرةً واحدة، فإن الخطوط في S' تقطع L إلى $k+1$ قطعة. وكل قطعة ترتبط بمنطقة يقطعها L. لذا، فإن عدد المناطق التي تشكلها S يزيد بمقدار $k+1$ على عدد المناطق التي تشكلها S'. إذن، عدد المناطق التي تشكلها S يساوي:

$$1+k(k+1)/2+(k+1)=1+(k+1)(k+2)/2$$

وبذلك نكون قد برهنا أن ($P(k) \Rightarrow P(K+1)$). إن مبدأ الاستقراء يضمن تحقق النتيجة لـ $n\in\mathbb{N}$ جميعها. ■



27.A. ملاحظة: يوحي النقاش في القضية 26.A بالعديد من التعليقات والملاحظات حول الإثبات بالاستقراء. أولاً، لاحظ أنه كان بإمكاننا استخدام $n = 0$ بوصفها خطوة الأساس لبرهنة العبارة للأعداد غير السالبة n جميعها.

لاحظ أنه لا يتضح مباشرةً من نص المسألة أن عدد المناطق يكون هو نفسه للمجموعات جميعها التي تحوي n من الخطوط، إلا أن هذا يتضح لأننا برهنا صيغةً لهذا العدد تعتمد على n فقط.

في إثبات خطوة الاستقراء، بدأنا بـ L التي تُعَدُّ مثالاً أو شاهدًا لمسألة أكبر حجمًا. ويؤكد هذا الطريق أننا أخذنا في الحسبان هذه الشواهد جميعها، وسنعود إلى هذه النقطة بعد قليل.

لقد برهنا $P(k+1)$ من $P(k)$ كما اقترح في فرع (b) من المبرهنة 25.A في معظم أمثلة هذا الكتاب، نستخدم صياغة مختلفة منسجمة أكثر مع مبدأ الاستقراء القوي الذي تم قُدّم في الدرس 2.1. لإثبات $P(n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وفي هذا المثال، يمكننا أن نكتب "خطوة الأساس: $n = 1$..." إذن "خطوة الاستقراء: $n > 1$...". ففي إثبات خطوة الاستقراء، نأخذ في الحسبان مجموعة اختيارية S مؤلفة من n خطًا، ونطبق فرض الاستقراء على المجموعة S' التي نحصل عليها بحذف خط واحد L.

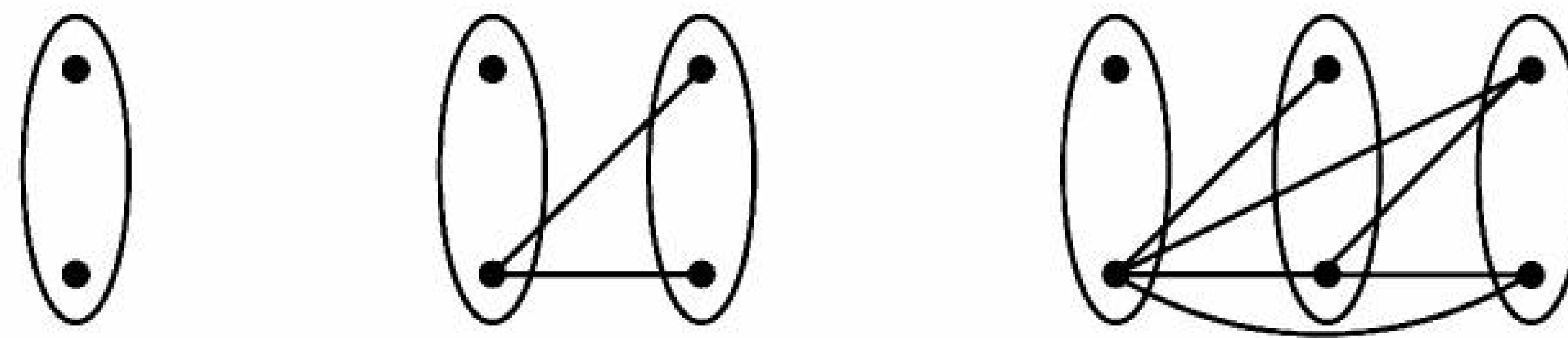
إن محتوى الإثبات هو نفسه في كلتا الصياغتين. إن الصياغة التي وصفناها للتو تؤكد وتشدد على البند الذي يتم برهنة الادعاء حوله. إن خطوة الأساس تحقق مباشرة الادعاء لأصغر قيمة لوسيط الاستقراء. وعندما يكون للوسيط قيمة أكبر، فإن الادعاء حول البند يُبرهن بافتراض أن الادعاء يتحقق لبند سابق، وهذه هي خطوة الاستقراء. إن العودة لها كلما اقتضى الأمر تعطي تحقق الادعاء لكل قيمة لاحقة لهذا الوسيط. ■

يعاني العديد من الطلبة بعض المشاكل عند بداية تعلمهم استخدام الاستقراء في نظرية البيان. وتتلخص هذه المشاكل في جانبين؛ الجانب الأول هو أن العبارة $P(n)$ التي نرغب بإثباتها بالاستقراء هي نفسها عبارة شرطية $A(n) \Rightarrow B(n)$، وأن فرضية الاستقراء هي $A(n-1) \Rightarrow B(n-1)$. لقد عُرض نموذج جاهز لخطوة الاستقراء في هذه الحالة في الملاحظة 25.3.1، كما توجد أمثلة على هذا في هذا الفصل.

أما الجانب الثاني الذي نسميه «مصيدة الاستقراء»، فقد نوقش مطولاً في المثال 26.3.1، وسنعطي مثالاً آخر مستخدمين اللغة التي استخدمت في إثبات $P(n+1)$ من $P(n)$ والتي قد تقود الطالب إلى فخ في بعض الأحيان.

28.A. مثال: مسألة التصافح بالأيدي. افترض أن حفلة التصافح بالأيدي من الرتبة n (أي حفلة من الرتبة n أو حفلة n-) هي حفلة لـ n من الأزواج المتزوجين، حيث إن الأزواج لا يصافحون بعضهم بعضًا، وأن الـ $2n - 1$ فردًا عدا المضيف يتصافحون مع أعداد مختلفة من الأشخاص الموجودين. وهنا سنستخدم الاستقراء في برهنة أن المضيفة تصافح $n - 1$ شخصًا بالضبط.

ننمذج الحفلة بوصفها بيانًا بسيطًا تمثل رؤوسه الأشخاص الموجودين في الحفلة، وتمثل أضلاعه الأزواج الذين يتصافحون. إن درجة الرأس هي عدد شركاء التصافح. وإذا لم يصافح أي زوج (زوجة)، زوجته (زوجها) فإن درجة الرأس تكون بين 0 و $2n - 2$. والشرط في هذه المسألة هو أن الـ $2n - 1$ عدد غير المضيف تكون مختلفة يتضمن أن درجات الرؤوس تمتد من 0 إلى $2n - 2$. يمثل الشكل أدناه البيان الذي يجب أن يكون في حال أن $n \in \{1, 2, 3\}$، إن كل زوج من الرؤوس المحاط بدائرة يعني أن الشخصين متزوجان؛ حيث يظهر المضيف والمضيفة في أقصى يمين كل بيان.



الخطوة الأساس: إذا كانت $n = 1$، فإن المضيفة تتصافح مع 0 شخصًا (والذي يساوي $n - 1$)؛ لأن المضيف والمضيفة لا يتصافحان. خطوة الاستقراء (باطلة): إن خطوة الاستقراء هي أن الادعاء يصلح لحفلات n-. خذ في الحسبان مثل هذه الحفلة. من فرض الاستقراء، إن درجة المضيفة (الرأس الذي يُمثل المضيفة) تساوي $n - 1$، ومن نقاشنا السابق، فإن درجات الرؤوس ما عدا المضيف هي $0, \ldots, 2n-2$. نُشكل حفلة $(n + 1)$- بإضافة ثنائي آخر (زوج وزوجة). افترض أن أحد الزوجين من الثنائي الجديد يصافح كل شخص في الـ n ثنائيًّا الأولى. لذا، فإن درجات الرؤوس التي تمثل هؤلاء الأشخاص تصبح على النحو $1, \ldots, 2n - 1$، فضلًا عن أن درجات الرؤوس التي تمثل الزوج الجديد هي: 0 و $2n$. لذا، فإن الشكل (الهيئة) الأكبر هي الحفلة $-(n + 1)$. وقد زادت درجة الرأس الذي يمثل المضيفة بمقدار 1، لذا، فإن درجة هذا الرأس تساوي n.

خطوة الاستقراء (صحيحة، ومتحققة): إن فرض الاستقراء هو أن الادعاء صحيح لحفلات n – جميعها. خذ في الحسبان حفلة $-(n + 1)$، من نقاشنا السابق، نعلم أن درجات الرؤوس ما عدا درجة الرأس الذي يمثل المضيف هي $0, \ldots, 2n$. افترض أن p_i ترمز إلى الشخص الذي درجته (درجة الرأس الذي يمثله) i من بين هؤلاء. بما أن p_{2n} يصافح الأشخاص جميعهم ما عدا شخصًا واحدًا، والشخص p_o الذي لا يصافح أحدًا يجب أن يكون الشخص المفقود من مصافحة p_{2n}. لذا، فإن p_o يمثل زوجة p_{2n} بالإضافة لذلك، فإن الثنائي المتزوج $S = \{p_o, p_{2n}\}$ ليس المضيف والمضيفة؛ لأن المضيف ليس من المجموعة $\{p_o, \ldots, p_{2n}\}$.

إن كل شخص غير موجود في S يتصافح مع شخص واحد بالضبط في S، وخصوصًا (بالاسم) مع p_{2n}. إذا

حذفنا S للحصول على حفلة أصغر، تبقّى لدينا n من الثنائيات (الزوجات) (وهذا يشمل المضيف والمضيفة) حيث لا يوجد أي شخص يتصافح مع زوجه، وكل شخص يتصافح مع عدد يقل بواحد عن العدد الكلي لكامل الحفلة. إذن، في الحفلة الأصغر، نجد أن الأشخاص يتصافحون مع عدد مختلف منهم ما عدا المضيف.

بحذف المجموعة S، نحصل على حفلة n – (حذف الزوج الموجود في أقصى اليسار في الصورة لـ $n = 3$ يعطينا الصورة في حال أن $n = 2$). وتطبيق فرض الاستقراء على الحفلة - n يخبرنا أنه ما عدا الزوجين في S، فإن المضيفة تتصافح مع $n - 1$ شخصًا. وبما أنها تتصافح مع p_{2n} أيضًا في S، فإنها تتصافح مع n شخصًا في كامل الحفلة $(n + 1)$ –. ■

التعليل الأول في المثال 28.A يسقط في فخ (مصيدة) الاستقراء، لأنه لا يأخذ في الحسبان الحفلات – $(n + 1)$ الممكنة جميعها، بل إنه – فقط - يعد الحفلات التي نحصل عليها بإضافة ثنائي (متزوج) إلى حفلة n – بطريق معين، دون إثبات إمكانية الحصول على كل حفلة – $(n + 1)$ بهذه الطريقة.

البدء بحفلة – $(n + 1)$ اختيارية يجبرنا على إثبات أن كل حفلة – $(n + 1)$ تظهر بهذه الطريقة من أجل الحصول على شكل يمكننا أن نطبق عليه فرض الاستقراء، لا يمكننا حذف أي ثنائي متزوج للحصول على حفلة أقل فقط. بل يجب علينا أن نجد ثنائيًّا S بحيث يتصافح كل شخص خارج S مع شخص واحد فقط في S. وعند ذلك - فقط - نجد أن الحفلة الأصغر تحقق الفرضيات اللازمة لتكون حفلة - n .

إن الحاجة إلى إثبات أن الشيء الأصغر الموجود لدينا يحقق الشروط في فرضية الاستقراء، يحل محل الحاجة إلى إثبات أن الأشياء ذات الحجم الأكبر جميعها تمّ توليدها من خلال إنبات (إنماء) شيء ذي حجم أصغر.

في بعض الأحيان، نجد أن إثبات خطوة الاستقراء يستخدم أكثر من شاهد (مثال) سابق. إذا استخدمنا $P\ (n - 2)$ و $P\ (n - 1)$ لإثبات $P(n)$ دائمًا، فيجب أن نتحقق من صحة $P(1)$ و $P(2)$ وذلك بوصفها بداية. إن إثبات خطوة الاستقراء غير صحيح (باطل) عندما $n = 2$، وذلك بسبب عدم وجود $P(0)$ بوصفها بداية. وأن إثبات خطوة الاستقراء غير صحيح (باطل) عندما $n = 2$ أيضًا لعدم وجود $P(0)$ متاحة للاستخدام.

29.A مثال: افترض أن ... $a_1, a_z,$ معرفة على الشكل $a_1 = 2. a_2 = 8$ و $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ لكل $n \geq 3$. نبحث عن صيغة لـ a_n بدلالة n. الآن، من الممكن أن نخمن الصيغة التي تحقق هذه المعطيات وتناسبها. يعطينا التعريف أن $a_3 = 34$ ،$a_4 = 64$، و$a_5 = 160$. وتحقق هذه القيم جميعها أن $a_n = n\ 2^n$. آخذين في الحسبان اقتراحنا بشأن هذه الصيغة، وبإمكاننا محاولة إثباتها عن طريق الاستقراء.

عندما $n=1$، لدينا $a_1=2=1\cdot 2^1$. وعندما تكون $n=2$، تصبح عندما $a_1=8=2.2^2$ وفي كلتا الحالتين نجد أن الصيغة صحيحة. وفي خطوة الاستقراء، سنقوم بإثبات أن هذه الصيغة صحيحة لكل $n\geq 3$. حيث نفترض أن الصيغة صحيحة للشواهد (الأمثلة) السابقة $n-1$ و$n-2$، وهذا يسمح لنا بحساب a_n باستخدام تعريفها بدلالة القيم السابقة:
$$a_n = 4\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) = 4\left[\left(n-1\right)2^{n-1} - \left(n-2\right)2^{n-2}\right] = \left(2n-2\right)2^n - (n-2)2^n = n\ 2^n.$$
إن صحة الصيغة لـ a_n تنبع من صحتها لكل من $n-1$ و-2، وهذا ينهي الإثبات. ■

في هذا الإثبات، يجب أن نتحقق من صحة الصيغة لقيم $n = 1$، و $n - 2$ في الخطوة الأساس، إن إثبات خطوة الاستقراء غير صحيح (باطل) لـ $n = 2$. والمثال 29.A يحدد قيم ... $a_1, a_2,$ من خلال علاقة معاودة (تكرار). أما الحد العام، فإنه يُحدد عن طريق استخدام حدود سابقة. وبالمثل، إثبات القضية 26.A يحدد

قيم ... $a_1, a_2,$ من خلال علاقة معاودة (تكرار). الحد العام يُحدد عن طريق استخدام حدود سابقة. وبالمثل، إثبات القضية 26.A يعطينا علاقة معاودة للعدد r_n الذي هو عدد المناطق المشكلة من قبل r_n من الخطوط حيث إن $r_n = r_{n-1}+n$، علمًا بأن $r_1 = 2$.

إذا استخدمت علاقة المعاودة k من الحدود السابقة لحساب a_n، فيجب أن يكون لديك في هذه الحالة k من القيم الابتدائية من أجل تحديد الحدود بالضبط، ويسمى هذا معاودة (تكرار) من الرتبة k. إن العبارات التي تُبرهن بالاستقراء، والمتعلقة بمعاودة من الرتبة k تفرض التحقق من صحة k من الشواهد (الأمثلة) في خطوة الأساس. إن التقنيات القياسية (المعيارية) من التوافقية (التركيبية) العدية تعطي حلولاً للعديد من علاقات التكرار دون تخمين الصيغة أو استخدام الاستقراء.

وفي بعض الأحيان، نستخدم حسابات المعاودة أيضًا في نظرية البيان. حيث يمكن أن يكون لدينا قيمة لكل بيان G بدلاً من بيان واحد فقط من كل «حجم» كما يكون الأمر في متتالية. إذا استطعنا التعبير عن القيمة لبيان G بوصفه صيغة بدلالة بيانات عدد أضلاعها أقل (واستطعنا تحديد القيم للبيانات التي ليس لها أضلاع)، فإننا نحصل على معاودة مرة أخرى. ونستخدم هذه التقنية لحساب الأشجار المولدة (الدرس 2.2) والتلوينات الفعلية (الدرس 3.5).

الدوال

تقوم الدالة بنقل (تحويل) عناصر مجموعة معينة إلى مجموعة أخرى.

30.A. تعريف: الدالة f قاعدة من المجموعة A إلى المجموعة B بحيث إنها تُحدد لكل عنصر $a \in A$ عنصرًا وحيدًا $f(a)$ في B، ويسمى $f(a)$ بصورة a تحت f. للدالة f (تكتب $f : A \longrightarrow A$)، تسمى المجموعة A مجال f، في حين تسمى المجموعة B مجموعة الهدف، إن مجموعة صور f هي المجموعة $\{f(a) : a \in A\}$ حيث إن A هي مجموعة مجال f.

يمكننا افتراض أن الكثير من الدوال الأولية دوال معروفة مثل دالة القيمة المطلقة وكثيرات الحدود (كل منها معرف على $\mathbb{R}$). «الحجم» هو دالة، مجالها مجموعة المجموعات المنتهية وهدفها $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

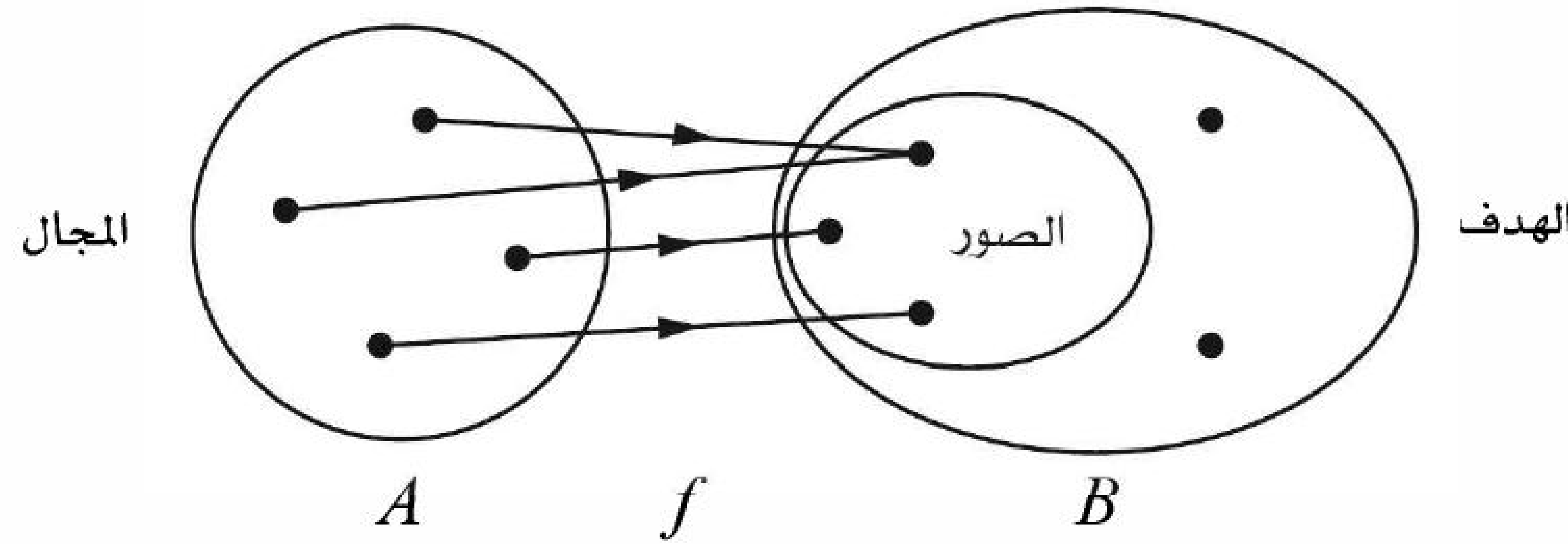
31.A. تعريف: لـ $x \in \mathbb{R}$، نعرف دالة الأرضية $\lfloor x \rfloor$ على أنها أكبر عدد صحيح أقل من x أو يساويه. في حين نعرف دالة السقف $\lceil x \rceil$ على أنها أصغر عدد صحيح أكبر من x أو يساويه. أما المتتالية، فتعرف على أنها دالة مجالها $\mathbb{N}$.

إن دالة كل من الأرضية والسقف تنقل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{Z}$. عندما يكون هدف المتتالية A، فإننا نحصل على متتالية من العناصر في A، ونُعبر عن ذلك على الشكل $a_1, a_2, a_3, \ldots$، حيث $a_n = f(n)$. لقد استخدمنا الاستقراء في الإثبات متتاليات من العبارات، وكذلك في الإثبات صيغ تحدد متتاليات من الأعداد.

ربما نرغب في معرفة مدى سرعة نماء (نمو) دالة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ وعلى وجه الخصوص عند تحليل الخوارزميات. فعلى سبيل المثال، نقول: إن نمو الدالة تربيعي على الأكثر إذا كانت محدودة بكثيرة حدود من الدرجة الثانية، وذلك لقيم جميعها مدخلاتها الكبيرة كفاية. إن نقاشًا أكثر دقة لمعدلات نمو الدوال يظهر في ملحق B.

32.A. ملاحظة : التمثيل التخطيطي. الدالة $f : A \to B$ معرفة على A، وتنقل A إلى B. لنتخيل دالة $f : A \to B$، نرسم منطقة تمثل A، ومنطقة أخرى تمثل B، ثم نرسم من كل $x \in A$ سهمًا إلى $f(x)$ في B. بلغة البيان الموجه، إن هذا يُنتج توجيهًا لبيان ثنائي الفرع، ومجموعتا فرعيه هما: A و B حيث يمثل كل عنصرٍ من عناصر A ذيلاً لضلع واحد بالضبط.

صورة الدالة (مجموعة صور عناصر المجال) تكون محتواة في الهدف. لذا، نرسم منطقة الصورة داخل منطقة الهدف. ■



لوصف أي دالة؛ لا بد من تحديد قيم $f(a)$ لكل $a \in A$. حيث نستطيع وضع قائمة بالأزواج $(a, f(a))$، ونعطي صيغة لحساب $f(a)$ من a، أو نعطي وصفًا بكلمات للقاعدة التي من خلالها نحصل على $f(a)$ من a.

33.A. تعريف: نقول: إن الدالة $f : A \to B$ دالة تناظر إذا تحقق أن: لكل $b \in B$ يوجد عنصر واحد بالضبط $a \in A$ بحيث إن $f(a) = b$.

تحت التناظر، يكون كل عنصر في الهدف صورة لعنصر واحد فقط من عناصر المجال. لذا، عندما نمثل دالة التناظر كما في الملاحظة 32.A، فإن كل عنصرٍ من عناصر الهدف يكون رأسًا لضلع واحدٍ فقط.

34.A. مثال: مزاوجة المتزوجين. افترض أن M تمثل مجموعة الرجال في حفلة، وأن W تمثل مجموعة النساء، إذا كان الحضور يتألف من ثنائيات المتزوجين فقط، فعندئذ يمكننا تعريف دالة $f : M \to W$ بجعل $f(x)$ زوجة x. لكل $w \in W$، يوجد بالضبط عنصر وحيد x في M بحيث إن $f(x) = w$. لذا، فإن f دالة تناظر من M إلى W. ■

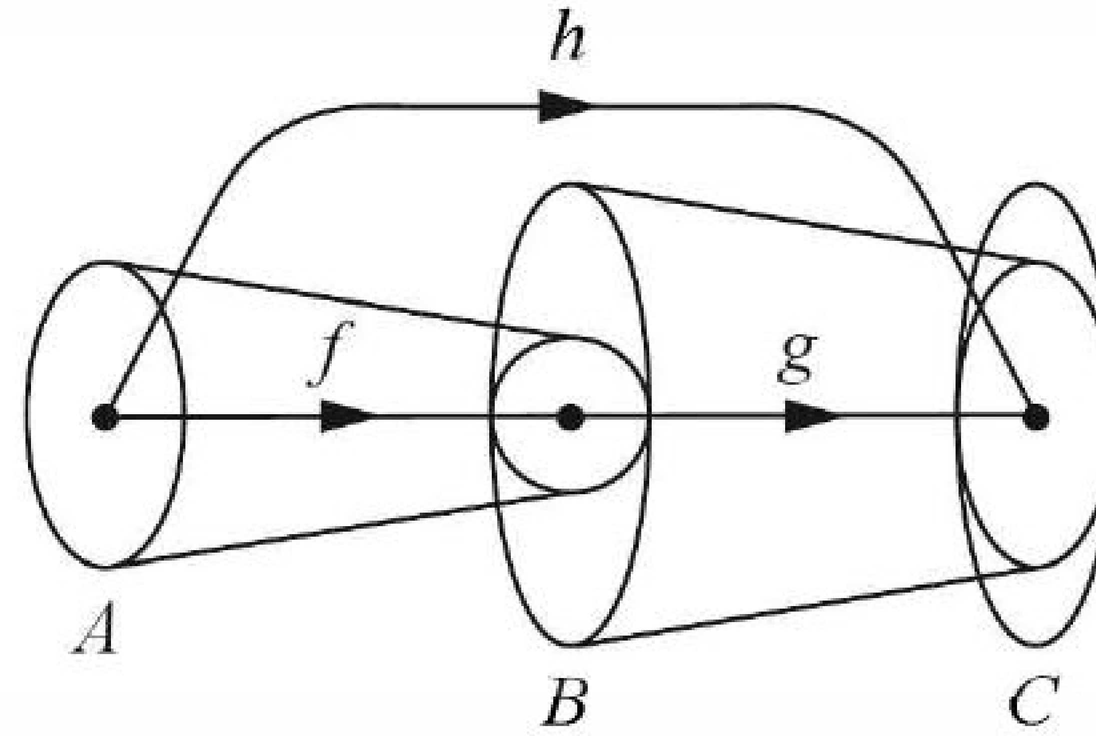
إن دوال التناظر تعمل أزواجًا من عناصر مجموعتين مختلفتين. لذا، فإننا نصف دالة التناظر من A إلى B كذلك. وفي هذا الكتاب نقول بصورة غير رسمية أحيانًا بأن عناصر مجموعة واحدة ترتبط بعناصر مجموعة أخرى. ونعني بهذا وجود ارتباط واحد لواحد طبيعي بين المجموعتين.

عندما تحوي A n من العناصر، فإن تسميتها $a_1, .., a_n$ يعرف تناظرًا من A إلى $[n]$، وبالنظر إلى هذا الارتباط من الاتجاه الآخر، نكون قد عرّفنا تناظرًا آخر من A إلى $[n]$. لاحظ أنه يمكن عكس دوال التناظر جميعها.

35.A. تعريف: إذا كانت f تناظرًا من A إلى B، فإن نظير f هو الدالة $g : B \to A$ بحيث إن لكل $b \in B$ فإن $g(b)$ هي العنصر الوحيد $x \in A$ الذي يحقق أن $f(x) = b$. ونكتب الدالة g على الشكل f^{-1}.

عندما يكون هدف دالة مجالاً لدالة أُخرى، فإنه يمكننا أن نعرِّف الدالة الجديدة من خلال تطبيق الدالة الأولى ثم الدالة الثانية؛ لأن هذا يعطي دالة من مجال الدالة الأولى إلى هدف الدالة الثانية.

36.A. تعريف: إذا كانت $f : A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow C$، فإن تركيب g مع f هو دالة $h : A \longrightarrow C$ معرَّفة على الصورة $h(x) = g(f(x))$ لكل $x \in A$. وعندما تكون h هي تركيب g مع f فإننا نكتب $h = g \circ f$.



من التعريف مباشرة، نستطيع بسهولة إثبات أن تركيب تناظرين يعطي تناظرًا. ونستخدم هذه في القضية 24.1.1 لنتحقق من أن تركيب دوال التشاكل يعطي تشاكلاً.

العد ومعاملات ذات الحدين(Counting and Binomial coefficients)

مناقشة طرق العد (التعداد) بسرعة إلى المجاميع وحواصل الضرب، ويمكن ضبط كتابة هذه الأشياء باستخدام الرموز المناسبة.

37.A. ملاحظة: نعبّر عن المجموعة بكتابة $\sum$ وهي الحرف اليوناني الكبير سيجما "*sigma*". عندما يكون كل من a و b أعدادًا صحيحة، فإن قيمة $\sum_{i=a}^{b} f(i)$ تعبّر عن حاصل جمع الأعداد $f(i)$ حيث إن i تتغير على الأعداد الصحيحة من a إلى b. وتسمى i دليل المجموع، في حين تسمى الصيغة $f(i)$ المجمّع.

تكتب $\sum_{i=a} f(j)$ لإيجاد حاصل جمع قيم الدالة ذات القيم الحقيقة f وذلك على عناصر مجموعة S في مجال f. وفي الحالة التي لا نحدد فيها مجموعة جزئية كما في $\sum_{j} x_j$، فإننا نجمع العناصر على المجال كله. وعندما يكون للمجمع رمزٌ واحدٌ بوصفه متغيّرًا، فإننا نستطيع حذف الدليل السفلي على إشارة المجموع كما في $\sum x_i$. يشير الرمز $\prod$ إلى حاصل الضرب، وهذا هو الحرف اليوناني الكبير باي «*pi*»، إضافة إلى أن التعليقات السابقة المتعلقة بـ $\sum$ تنطبق على $\prod$. ■

لاحظ أن قاعدتين بسيطتين تساعدان على تنظيم عد المجموعات المنتهية من خلال تجزئة المسألة إلى مسائل فرعية. إن هذه القواعد تتبع من تعريف الحجم وخواص دوال التناظر.

38.A. تعريف: تنصّ قاعدة الجمع على أنه إذا كانت A مجموعة منتهية بحيث إن $B_1, \ldots, B_k$ تجزئة لـ A، فإن $|A| = \sum_{i=1}^{m} |Bi|$.

افترض أن T مجموعة يمكن وصف عناصرها باستخدام نهج يشتمل على عدة خطوات $S_1, \ldots, S_m$ بحيث يمكن عمل الخطوة S_i بـ r_i طريقة، بغض النظر عن كيفية إجراء الخطوات $S_1, \ldots, S_{i-1}$. إن قاعدة الضرب

تنص على أن $|T| = \prod_{i=1}^{K} r_i$.

فعلى سبيل المثال، يوجد q^k قائمة بطول k من مجموعة حجمها q. يوجد q خيارًا لكل موقع، وذلك بغض النظر عن خيارات المواقع الأخرى. من قاعدة الضرب، يوجد q^k طريقة لتشكل عديد k- (K- tuple).

A.39. تعريف: تسمى دالة التناظر من مجموعة منتهية S إلى نفسها بتبديلة لـ S. إن هيئة الكلمة للتبديلة f للمجموعة $[n]$ هو قائمة على الصورة $f(1), \ldots, f(n)$ مع الحفاظ على هذا الترتيب. وأن ترتيبًا لعناصر من مجموعة S قائمة من عناصر S (بترتيب معين). نكتب $n!$ (مضروب n) للتدليل على $\prod_{i=1}^{n} i$، واصطلاحًا، نكتب $0! = 1$.

إن هيئة الكلمة لتبديلة لـ $[n]$ يشمل الوصف الكامل للتبديلة. ولأغراض العد؛ نسمي هيئة الكلمة بالترتيبة. لذا، فإن 614325 تبديلة لـ $[6]$. ومع وجهة النظر هذه، فإن تبديلة لـ $[n]$ ترتيب لعناصر $[n]$ جميعها.

A.40. نظرية : يوجد $n!$ تبديلة لمجموعة فيها n من العناصر (ترتيبات دون تكرار). وعمومًا، عدد ترتيبات k من العناصر المختلفة من مجموعة حجمها n يساوي $n\,(n-1)\cdots(n-k+1)$.

الإثبات: نحسب القوائم التي فيها k من العناصر المختلفة من مجموعة حجمها n. لا يوجد مثل هذه القائمة عندما $k > n$، وهذا يتفق مع الصيغة المعطاة.

في هذه القوائم، تبني عنصرًا واحدًا في كل مرة وذلك بتحديد العنصر في الموقع $i + 1$ بعد تحديد العناصر في المواقع السابقة.

يوجد n من الطرق لاختيار صورة العنصر 1، ونعمل هذا لكل طريقة. يُوجد $n - 1$ طريقة لاختيار صورة العنصر 2. وعمومًا، بعد اختيارنا أول i من الصور، فإن تجنب هذه الخيارات يترك لنا $n - i$ طريقًا لاختيار الصورة التالية بغض النظر عن الكيفية التي اتبعناها في أول i من الخيارات. إن قاعدة الضرب تعطي أن $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ هو عدد الترتيبات. ■

تنويه: غالبًا ما يكون ترتيب العناصر في القائمة غير مهم.

A.41. تعريف: اختيار k عنصرًا من $[n]$ هو مجموعة جزئية تحوي k عنصرًا من $[n]$. عدد هذه الخيارات هو (n)، اختر k، واكتبه على الشكل $\binom{n}{k}$.

إذا كان $k < 0$، أو $k > n$، فإن $\binom{n}{k}=0$. في هذه الحالات لا يوجد خيارات لـ k من العناصر من $[n]$. وعندما يكون $0 \le k \le n$، فإننا نحصل على صيغة بسيطة.

A.42. نظرية : للأعداد الصحيحة n و k حيث $0 \le k \le n$، يكون: $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$.

الإثبات: نضع علاقة بين الاختيارات والترتيبات. حيث نحسب ترتيبات k من العناصر من $[n]$ بطريقتين هما: أ- إن التقاط العناصر للمواقع كما في المبرهنة A.40 يعطينا أن عدد الترتيبات هو $n(n-1)(n-k+1)$.

ب- نستطيع أن نختار أولاً مجموعة جزئية فيها k من العناصر، ثم نكتبها بترتيب معين. وبما أن التعريف

يضمن وجود $\binom{n}{k}$ خيارًا، فإن قاعدة الضرب تعطينا أن عدد الترتيبات هو $\binom{n}{k}k!$ لعدد الحجج.

وفي كل حالة، نحسب عدد الترتيبات. لذا، نستنتج أن $n(n-1)\ldots(n-k+1)=\binom{n}{k}k!$. وبالقسمة على $k!$ يكتمل البرهان. ■

يمكن كتابة الصيغة $\binom{n}{k}$ على الشكل $\frac{n!}{(n-k)!k!}$، إلا أن الشكل الموجود في المبرهنة 42.A يميل ليكون مفيدًا أكثر، خاصة عندما يكون k صغيرًا. فعلى سبيل المثال $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ و$\binom{n}{3}=n(n-1)(n-2)/6$ ، حيث تمثل الأولى عدد أضلاع البيان التام على n من الرؤوس، يعكس هذا الشكل التعليل الحسابي ويختصر الـ $(n-k)!$ التي تظهر في البسط والمقام. تسمى الأعداد $\binom{n}{k}$ بمعاملات ذات الحدين؛ لأنها تظهر بوصفها معاملات في القوة n لمجموع حدين.

43.A. نظرية : (نظرية ذات الحدين)، لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$.

الإثبات : يشرح الإثبات عملية ضرب العوامل في حاصل الضرب $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$. ولإيجاد حد في حاصل الضرب؛ يجب أن نختار x أو y من كل عامل. إن عدد العوامل التي تُسهم بـx هو عدد صحيح k في $\{0,\ldots\ldots,n\}$، في حين تسهم الـ $n-k$ عاملاً الباقية في y. إن عدد الحدود التي على الصورة x^ky^{n-k} يساوي عدد الطرق لاختيار k من العوامل المساهمة بـ x. والجمع على k يأخذ الحدود جميعها في الحسبان. ■

باستخدام تعريف الحجم وتركيب دوال التناظر، نجد أن المجموعتين المنتهيتين A و B لهما الحجم نفسه إذا وفقط إذا وُجدَت دالة تناظر من A إلى B. لذا، نستطيع حساب الحجم عن طريق إيجاد دالة تناظر بينهما وبين مجموعة أخرى معروفة الحجم.

بعض الأمثلة البسيطة تشمل عبارات مثل: إن للبيان التام $\binom{n}{2}$ ضلعًا، لذا يوجد $\binom{n}{2}$ 2 بيانًا بسيطًا على مجموعة الرؤوس $[n]$. إن القضية 32.3.1 تستخدم دالة تناظر لحساب الحلقات السداسية في بيان بيترسون، إضافة إلى أن التمرين.32.3.1 يستخدم دالة تناظر لحساب عدد البيانات التي مجموعة رؤوسها هي $[n]$ ودرجاتها زوجية. أما المبرهنة 3.2.2. فإنها تستخدم التناظر لحساب الأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$.

44.A. تمهيدية : لكل $n\in\mathbb{N}$، عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ ذات الحجم الزوجي يساوي عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ ذات الحجم الفردي.

الإثبات : إثبات 1 (تناظر). في كل مجموعة جزئية ذات حجم زوجي، احذف العنصر n إذا ظهر، وأضفه إن لم يظهر. إن هذا يغير الحجم دائمًا بمقدار 1، وينتج مجموعة ذات حجم فردي. وأن هذه الدالة هي دالة تناظر؛ لأن كل مجموعة جزئية فردية تحوي n تظهر فقط من مجموعة جزئية زوجية تحذف n، وكل مجموعة جزئية تحذف n تظهر فقط من مجموعة جزئية زوجية تحوي n.

إثبات 2 (نظرية ذات الحدين). ضع $x=-1$ و $y=1$ في المبرهنة 43.A لتحصل على $\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=(-1+1)^n=o$. (لاحظ أننا برهنّا المبرهنة 43.A باستخدام دوال تناظر) . ■

سنبرهن بعض المتطابقات التي تشتمل على معاملات ذات الحدين لتوضيح بعض التعليلات التوافقية

التي تشتمل على تناظرات وفكرة حساب المجموعة بطريقتين. لاحظ أنه يمكننا إثبات المساواة عن طريق إثبات أن كلًّا من الطرفين يحسبان المجموعة نفسها.

A.45. تمهيدية : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

الإثبات: إثبات 1 (حساب بطريقتين). من التعريف، نعلم أنه يوجد لـ $[n]$ $\binom{n}{k}$ مجموعة جزئية من الحجم k. لاحظ أن طريقة أخرى لحساب اختيار k من العناصر، وهي حساب اختيار $n - k$ من العناصر لنحذفها، ويوجد $\binom{n}{n-k}$ من هذه العناصر.

إثبات 2 (التناظر). إن الطرف الأيسر يحسب المجموعات الجزئية من $[n]$ التي فيها k من العناصر، أما الطرف الأيمن، فإنه يحسب المجموعات الجزئية التي فيها $n - k$ من العناصر، بالإضافة إلى أن عملية «أخذ المتممة» تضمن وجود دالة تناظر بين المجموعتين (الجمعين) . ■

في الغالب، إن الحساب بطريقتين يعني تجميع العناصر بطريقتين، وفي بعض الأحيان العد (الحساب) فقط يعطي حدًّا على المجموعة، وفي هذه الحالة، يبرهن التعليل العدي (الحسابي) وجود متباينة. يوجد الكثير من الأمثلة (الشواهد) على هذه الظاهرة في الوحدة 3 (انظر أيضًا التمرين 31.3.1). هنا سنلزم أنفسنا بالمساويات.

A.46. تمهيدية : (متطابقة الرئيس) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

الإثبات: كل طرف من المساواة يحسب كيفية الحصول على لجان في كل منها k من الأشخاص، ويعين لها رئيس من بين مجموعة من n شخصًا. عن اليسار، نختار اللجنة، ثمّ نختار منها الرئيس، أما عن اليمين، فإننا نختار الرئيس، ثم نختار باقي أعضاء اللجنة. ■

العديد من الطلبة ينظر للصيغة الآتية على أنها أول تطبيق للاستقراء، إلا أنه أيضًا يمكن برهنتها بسهولة عن طريق حساب (عد) مجموعة بطريقتين.

A.47. تمهيدية $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

الإثبات: الطرف الأيمن هو $\binom{n+1}{2}$ ، ويمكننا النظر إلى هذا على أنه حساب الفترات غير التافهة التي أطرافها في المجموعة $\{1,\dots n+1\}$. من جانب آخر، نستطيع تجميع الفترات بحسب الطول؛ حيث توجد فترة واحدة طولها n، وفترتان من الطول $n - 1$، وهكذا حتى نصل إلى أنه توجد n فترة طول كل منها يساوي $\binom{l}{k}$. ■

يمكن تعميم التمهيدية A.47 $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+}$. لبرهنة هذا عن طريق الحساب؛ نُجزِّئ أولاً بتجزئة مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة $[k + 1]$ التي تحوي $n + 1$ عنصرًا إلى زمر بحيث إن حجم الزمرة i يساوي ، ثم نحسب معاملات ذات حدين عن طريق التكرار.

A.48. تمهيدية : (صيغة باسكال)، إذا كان $n \geq 1$ ، فإن $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

الإثبات: نحسب المجموعات k– (المجموعات التي تحوي k عنصرًا) في $[n]$.

يوجد $\binom{n-1}{k}$ من هذه المجموعات التي لا تحوي n، ويوجد $\binom{n-1}{k-1}$ من هذه المجموعات تحوي n. ■

بإعطاء الشروط الابتدائية لـ $n = 0$ وهي $\binom{o}{o} = 1$، و $\binom{o}{k} = 0$ لـ $k \neq 0$، فإنه يمكن استخدام صيغة باسكال لإعطاء إثبات استقرائي للعديد من العبارات المتعلقة بمعاملات ذات الحدين، بما في ذلك كلّ من المبرهنتين 42.A، و 43.A.

49.A. ملاحظة: (معاملات متعددات الحدود). يمكن تعميم نظرية ذات الحدين ومعاملاتها إلى متعددات الحدود. عندما $\sum n_i = n$، فإن معامل متعددة الحدود $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ هو معامل $\Pi x_i^{n_i}$ في تمديد $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^n$، وقيمتها تساوي $n!/\Pi n_i!$. وتظهر الحدود على الشكل $\Pi x_i^{n_i}$ في التمديد فقط عندما $\sum n_i = n$. وبخلاف ذلك، لا يوجد أي شيء نحسبه (نعده)، ونقول إن $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = 0$ عندما $\sum n_i \neq n$.

المساهمات لهذا المعامل ترتبط بعديدات -n التي هي ترتيبات لـ n من الأشياء، باستخدام n_i نسخة من الشيء i لكل i. إن الحصول على نسخة i في موقع j يرتبط باختبار الحد x_i من العامل $(x_1 + \ldots + x_k)j$.

نشتق الصيغة $n!/\Pi n_i!$. من خلال حساب هذه الترتيبات. يوجد $n!$ من الترتيبات لـ n من الحدود المختلفة. إذا افترضنا أن هذه الأشياء مختلفة، فإننا نحسب كل ترتيبة $\Pi n_i!$ مرة؛ لأن تبديل النسخ لشيء واحد لا يغير الترتيبات.

في النتيجة 2.2.4، ترتبط هذه الترتيبات بالأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$، ولها درجات رؤوس محددة. وعندما نضع $x_i = 1$ لكل i، فإننا نحصل على العدد الكلي للعديدات -n المشكلة من k نوعًا من الحروف على تضاعفات التكرار جميعها. وبذلك، فإن النتيجة هي k^n. ■

العلاقات (Relations)

إذا أعطينا شيئين s و t ليسا بالضرورة من النوع نفسه، فلربما نسأل عما إذا كانا يحققان علاقة معينة. افترض أن S مجموعة الأشياء من النوع الأول، وأن T مجموعة الأشياء من النوع الثاني. إن بعض الأزواج المرتبة (s, t) ربما تحقق العلاقة، في حين لا يحقق بعضها الآخر ذلك، والتعريف الآتي يلخص هذه الفكرة.

50.A. تعريف: عندما تكون كلّ من S و T مجموعة، فإن أي مجموعة جزئية من $S \times T$ هي علاقة بين S و T، أما العلاقة على S فهي مجموعة جزئية من $S \times S$.

عادة ما نحدد العلاقة بوضع شرط على الأزواج. في الدرس 1.1 نعرف عدة علاقات ترتبط ببيان G. إن علاقة الوقوع بين $S=V(G)$ و $T = E(G)$ هي مجموعة الأزواج المرتبة (v, e) حيث $v \in V(G)$، و $e \in E(G)$، و x نقطة طرفية لـ e. فضلًا عن أن علاقة التجاور على المجموعة $V(G)$ هي مجموعة الأزواج المرتبة (x,y) من الرؤوس. بحيث إن x و y نقطتان طرفيتان لضلع.

51.A. ملاحظة: افترض أن R علاقة على مجموعة S، عندما نناقش عدة حدود من S، فإننا نستخدم الصفة زوجًا زوجًا لتحديد أن كل زوج من بين هذه الحدود يحقق R. لذا، يمكننا الحديث عن عائلة من المجموعات المنفصلة زوجًا زوجًا، أو عائلة من البيانات المتشاكلة زوجًا زوجًا. إن المجموعة المستقلة في بيان هي مجموعة الرؤوس غير المتجاورة زوجًا زوجًا، ونعني بمجموعة الأشياء المختلفة كلّ مجموعة مؤلفة من أشياء غير متساوية زوجًا زوجًا.

نحتاج إلى المصطلح "زوجًا زوجًا"؛ لأن العلاقة معرّفة للأزواج، وللسبب نفسه، لا نستخدم "زوجًا زوجًا"

عندما نتحدث عن شيئين فقط. فعندما يكون بيانان متشاكلين، لا نقول إنهما متشاكلان زوجًا زوجًا. وبالمثل نقول: إن النقاط الطرفية لضلع تكون متجاورة ولا نقول: إنها متجاورة زوجًا زوجًا، إن بعض الأزواج المعينة تحقق علاقة التجاور. ■

لتحديد علاقة بين S و T، يمكننا وضع قائمة بالأزواج التي تحققها. ومن المناسب كثيرًا أن نجعل S دليلاً على الصفوف، و T دليلاً على الأعمدة لشبكة من المواقع تسمى مصفوفة. عندئذٍ يكون بإمكاننا أن نحدد العلاقة من خلال تسجيل 1 في الموقع الموجود في صف s وعمود t إذا كان الزوج (s,t) يحقق العلاقة، ونسجل 0 إذا كان الزوج (s, t) لا يحقق هذه العلاقة. لذا، فإن مصفوفات التجاور والوقوع لبيان هي المصفوفات التي تُسجل علاقات التجاور والوقوع (انظر التعريف17.1.1).

إن الشرط "لهما النوعية نفسها" يعرِّف علاقة على $\mathbb{Z}$. إذا تحقق أن كلًّا من x و y عددان زوجيّان أو عددان فرديان، فإن الزوج (x,y) يحقق هذه العلاقة. وبخلاف ذلك، فإن هذا الزوج لا يحقق هذه العلاقة. إضافة إلى أنّ الخواص الأساسية للنوعية تقود إلى صف مهم من العلاقات.

A.52. تعريف: تُعرَّف علاقة التكافؤ على مجموعة S على أنها علاقة R على S بحيث إنه لخيارات العناصر المختلفة جميعها $x, y, z \in S$ يتحقق أن:

a) $(x, x) \in R$ (خاصية الانعكاس)

b) $(x, y) \in R$ تضمن أن $(y, x) \in R$ (خاصية التماثل).

c) $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$ تعطي أن $(x, z) \in R$. (خاصية التعدي).

لكل مجموعة S، لاحظ أن علاقة المساواة $R = \{(x, x) : x \in S\}$ هي علاقة تكافؤ على S. في القضية 24.1.1 ، نبرهن أن علاقة التشاكل هي علاقة تكافؤ على البيانات. لاحظ أن الرمز $G \cong H$ لهذه العلاقة يوحي بنوع من المساواة.

A.53. تعريف: إذا أُعطينا علاقة تكافؤ على S، فإن مجموعة العناصر التي تكافئ $x \in S$ هي صف التكافؤ الذي يحوي x.

صفوف التكافؤ لعلاقة تكافؤ على S تشكل تجزئةً لـ S؛ حيث إن العنصرين x و y ينتميان إلى الصف نفسه إذا وفقط إذا كان الزوج (x,y) يحقق هذه العلاقة، وعكس العبارة السابقة يتحقق أيضًا. فإذا كانت $A_1, \ldots, A_k$ تجزئة S، فإن الشرط «x و y يكونان موجودين في المجموعة نفسها في التجزئة"، يعرِّف علاقة تكافؤ على S.

لاحظ أن النوعية (فردي أو زوجي) تجزِّئ الأعداد الصحيحة إلى صفي تكافؤ بحسب باقي قسمة العدد على 2. إن هذه الفكرة قابلة للتعميم لأي عدد طبيعي.

A.54. تعريف: افترض عدداً طبيعيًا n، يكون العددين الصحيحين x، y شكلي متطابقين من n إذا كان

$x - y$ يقبل القسمة على n. عندها نكتب هذه النتيجة على صورة $y \equiv x$ مود n. حيث n هو الشكل.

55.A. نظرية : لكل $n\in\mathbb{N}$، إن التطابق بمقياس n هو علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

الإثبات : خاصية الانعكاس: $x\text{-}x = 0$، وهذا يقبل القسمة على n

خاصية التماثل: إذا كان $x \equiv y \mod n$ ، فإن n يقسم $x - y$ (من التعريف). لذا، فإن n يقسم $y - x$، لأن n يقسم m إذا وفقط إذا تحقق أن n يقسم $-m$. لذا، فإن $y \equiv x \mod n$.

خاصية التعدي: إذا كان $n|(x - y)$ و $n|(y - z)$، فتوجد أعداد صحيحة a و b بحيث إن $x - y = an$ و $Y - z = bn$ ، وبجمع هاتين المعادلتين، نجد أن $x - z = (a + b)n$. لذا، فإن $n\backslash(x - z)$، إذن، العلاقة متعدية. ■

56.A. تعريف : صفوف تكافؤ العلاقة "تطابق بمقياس n" على $\mathbb{Z}$ هي صفوف البواقي أو صفوف التطابق بمقياس n. ونكتب مجموعة صفوف التطابق هذه على الشكل $\mathbb{Z}_n$ أو $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

يوجد n من صفوف البواقي بمقياس n. لكل $0 \le r < n$، إن الصف رقم r في $\mathbb{Z}_n$ هو $\{kn + r : k \in Z\}$. والعددان a و b يقعان في الصف رقم r إذا وفقط إذا كان لهما الباقي نفسه عند القسمة على n. لذا، فإن العبارة $m \equiv r \mod n$ لها المعنى نفسه الذي يشير إلى أن "m تزيد بمقدار r على أحد مضاعفات n»

مبدأ طواقي الحمام (The pigeonhole principle)

مبدأ طواقي الحمام مفهوم بسيط يؤدي إلى براهين رائعة، ويقلل تحليل الحالات. في كل مجموعة أعداد، يقع المتوسط بين أصغر وأكبر قيمة. وعند التعامل مع الأعداد الصحيحة، فإن مبدأ طواقي الحمام يسمح لنا بأخذ السقف والأرضية للمعدل (المتوسط) في الاتجاه المنشود.

57.A. تمهيدية : (مبدأ طواقي الحمام) إذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من kn شيئًا، وجزّأناها إلى n صفًّا، فإن أحد هذه الصفوف يجب أن يحوي أكثر من k شيئًا.

الإثبات : إن المكافئ العكسي ينص على أنه إذا وضعنا k شيئًا على الأكثر في كل صف، فإن مجموع هذه الأشياء الكلي يساوي kn على الأكثر. ■

يختصر مبدأ طواقي الحمام ، وتحليل الحالة من خلال السماح لنا باستخدام معلومات إضافية حول عنصر متطرف لمجموعة. هذه الفكرة البسيطة يمكن أن تظهر على نحو غير متوقع، إلا أن استخدامها فاعل جدًّا، فعندما نجد أننا بحاجة إلى استخدام مبدأ طواقي الحمام، فلا توجد أي مشكلة في تطبيقه: نحتاج إلى قيمة كبيرة كفاية في مجموعتنا، ويزّودنا هذا المبدأ بهذه القيمة.

بعض تطبيقات مبدأ طواقي الحمام دقيقة جدًّا. والدرس 3.8 يعطي تقديمًا للعديد منها. وتظهر الدقة عندما لا تكون كيفية تعريف الأشياء والصفوف واضحة، بحيث يمكن عندها تطبيق مبدأ طواقي الحمام.

القضية 15.3.1 تبرهن القضية الآتية باستخدام الملاحظة 13.A. هنا نستخدم مبدأ طواقي الحمام بدلاً من ذلك.

58.A قضية: إذا كان G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس بحيث إن $\delta(G) \geq (n - 1)/2$، فإن G مترابط.

الإثبات: اختر $u,v \in V(G)$. إذا كان $u \not\leftrightarrow v$ ، فيوجد على الأقل $n - 1$ ضلعًا تربط $\{u,v\}$ إلى بقية الرؤوس. بما أن $\delta(G) \geq {(n-1)}/{2}$ ، فيوجد $n - 2$ رأسًا آخر. لذا، فإن مبدأ طواقي الحمام يضمن أن أحد هذه الرؤوس يستقبل ضلعين من هذه الأضلاع. وبما أن G بسيط، فإن هذا الرأس يكون جارًا مشتركًا لكل من u و v.

إذن، لكل رأسين $u,v \in V(G)$، نكون قد برهنا أن u و v متجاوران، أو أنّ لهما جارًا مشتركًا. لذا، فإن G مترابط. ■

إن هذا المبدأ يمكن أن يكون مفيدًا في العبارات المتعلقة بالأشجار، حيث يزيد عدد الرؤوس على عدد الأضلاع بمقدار 1. إذا كان كل رأس يختار ضلعًا بطريقة معينة، فإن ضلعًا يجب أن يتم اختياره مرتين، والفكرة هي في تصميم الاختيار بحيث تتحقق النتيجة المطلوبة عندما يتم اختيار ضلع مرتين. التطبيقات على هذه الفكرة موجودة في التمهيدية 10.1.8، وفي المبرهنة 8.3.2 كذلك.

مبدأ طواقي الحمام هو النسخة المنفصلة للعبارة: إن معدل مجموعة من الأعداد يكون بين أصغر وأكبر قيمة، لقد تم الحديث عن هذه العبارة صراحة لدرجات الرؤوس في النتيجة 1.3.4 وقد نُشِرَت تطبيقات أخرى في هذا الكتاب.

ملحق (Appendix B)

الأمثلية والتعقيد (Optimization and Complexity)

يخطّط منــدوب مبيعات لزيارة n - 1 من المــدن الأخرى والعودة إلى مدينته؛ حيــث يهدف إلى تقليل الفترة الزمنية الكلية التي تســتغرقها هذه الرحلة. إذا عيّنا وزنًا لكلّ ضــلع في K_n مساويًا لزمن الرحلة بين المدينتين المقابلتين، فإنّنا نبحث عن حلقة مولّدة بأصــغر وزن كلّيّ. وهذه هي **مسألة مندوب المبيعات المتجوّل** (TSP) (Traveling Salesman Problem). وهي تشــبه كما يبدو الشّــجرة المولّدة الصــغرى. وحتى الآن، لا تملك خوارزمية جيّدة.

بصورة مشابهة، وعلى الرّغم من امتلاكنا خوارزميّة جيّدة لإيجاد موائمات كبرى، فلا نملك خوارزميّة لإيجاد أكبر حجم لمجموعة مستقلّة من الرؤوس، وبما أنّ المذكور أولاً حالة خاصة من المذكور لاحقًا للبيانات الخطّانيّه، فليس من المستغرب إذن أنْ تحلّ بطريقة أسهل.

صعوبة التحكم (Intractability)

عرَّفنا خوارزميّة جيّدة (التعريف 3.2.3) في زمن تشغيل محدّد بدالة كثيرة حدود بدلالة حجم المدخلات. إنّ إحدى الخوارزميّات لـ TSP تأخذ في الحسبان الحلقات المولّدة جميعها، وتختار أقلّها تكلفة، ولا تعدّ هذه الخوارزمية جيدة؛ لأنّ K_n يملك $(n\text{-}1)!/2$ حلقة مولدة، وهذا يكبر بصورة أسرع أيّ دالة كثيرة حدود بدلالة n. إنّ حساب البيانات التي لها حجم ضخم يأخذ وقتًا كبيرًا، والتّطبيقات العمليّة تتطلّب حلّ مسائل TSP على بيانات لها المئات أو الألوف من الرّؤوس.

لم يستطع أحد إيجاد خوارزميّة جيّدة، ولكن لم يستطع أحد كذلك أنْ يبرهن عدم وجودها. تنتمي مسائل TSP إلى صفٍّ كبير من المسائل التي تملك الخاصّيّة التي تفيد أنّ أيّ خوارزميّة جيّدة لأيّ مسألة من هذه المسائل سوف تؤدي إلى خوارزميّة جيّدة لكلّ واحدة منها؛ فخوارزميّة جيدة لـ B تؤدي إلى خوارزميّة جيدة لـ A إذا استطعنا «اختزال» مسألة A إلى مسألة B.

وبوصفه مثالاً سهلًا على هذا، نستطيع استخدام خوارزميّة جيدة لـ TSP (مسألة B) لتَّعرُّف البيانات الهاملتونيّة (مسألة A). من بيان G، شَكِّل مثالاً لـ TSP على مجموعة الرّؤوس V(G) بتعيين الوزن 0 لأزواج الرّؤوس التي تكون أضلاعًا في G، والوزن 1 للأزواج التي لا تكون أضلاعًا في G. يملك البيان G حلقة هاملتونيّة إذا وفقط إذا كانت تكلفة الحلّ الأمثل لهذا المثال لـ TSP تساوي 0. يعدّ زمنُ التحويل كثيرةَ حدود بدلالة $n(G)$. لذلك، فإنّ خوارزميّة لـ TSP تنتج خوارزميّة جيدة لاختبار الحلقات المولّدة، ونستنتج أنّ صعوبة مسائل TSP تكون كصعوبة مسائل الحلقات الهاملتونيّة على الأقل.

في المناقشة الرسمية، نأخذ في الحسبان **مسائل اتخاذ القرار** (**Decision Problems** فقط)، حيث يكون الجواب نعم أو لا. وهذا منطقي لتّعرُّف البيانات الهاملتونيّة. ولكن TSP مسألة أمثلية، وعند صياغتها

بوصفها مسألة قرار (تدعى حلقة مولدة صغرى)، فإنّ مدخلاتها تكون بيانًا موزونًا G وعدد k، وتكون المسألة هي فحص ما إذا كان G يملك حلقة مولدة مع وزن k على الأكثر. يمكن تطبيق مسألة القرار هذه عدة مرات (على الأكثر عدد كثير حدود من التطبيقات) لإيجاد الوزن الأصغر لحلقة واحدة مولدة. وبالمثل، فإنّ مجموعة مستقلّة كبرى ستأخذ بيان G وعددًا صحيحا k بوصفها مدخلات، وتفحص $\alpha(G) \geq k$ كذلك.

الحكم على خوارزميّة بيان سيكون من خلال زمن تشغيلها الأكبر (في أسوأ حالتها) عبر مدخلات على n رأسًا كدالّة بدلالة n. وأنّ **التعقيد** (Complexity) لمسألة القرار هو زمن التشغيل الأصغر لأسوأ حالة عبر خوارزميّات الحلول جميعها، مرة أخرى كدالة بدلالة حجم المدخلات.[1] وفي وصف النّمو لدالّة g، فإنّنا نقارنها بدالة مرجع f. ونعرف العديد من مجموعات دوال بدلالة f؛ حيث إنّ المجموعتين $O(f)$ و $\Omega(f)$ تصفان دوال محدودة من أعلى ومن أسفل بمضاعفات f. في حين أن الدّوال في $\Theta(f)$ تنمو تقريبًا بمعدل نمو f نفسه، أمّا الدّوال في $o(f)$ فإنها تنمو بصورة أكثر بطئًا. في حين تنمو الدّوال التي في $\omega(f)$ بصورة أسرع.

$$O(f) = \{g\colon \exists c, a \in \mathbb{R} \text{ بحيث } |g(x)| \leq c\,|f(x)| \text{ لكل } > a\}$$
$$\Omega(f) = \{g\colon \exists c, a \in \mathbb{R} \text{ بحيث } |g(x)| \geq c\,|f(x)| \text{ لكل } > a\}$$
$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$
$$o(f) = \{g\colon |g(x)| / f(x)| \to 0\}$$
$$\omega(f) = \{g\colon |g(x)| / f(x)| \to \infty\}$$

إنّ صفَّ المسائل الذي له تعقيد ككثيرة حدود (يُحَلُّ بخوارزميّة جيدة) يسمى"P". لقد ناقشنا خوارزميّات محدّدة فقط؛ حيث تؤدي كلّ مدخلة إلى حساب زمن كثيرة حدود واحدة بالضبط.

الآن، سنأخذ في الحسبان خوارزميّات غير محدّدة. فللعديد من مسائل القرار التي لم تُعرف لها خوارزميّة جيدة، هناك براهين قصيرة لإجابات نعم. فعلى سبيل المثال، إذا حزرنا التّرتيب الصّحيح للرّؤوس في مسألة الحلقات الهاملتونيّة (معينة بمتتالية مؤلّفة من $O(n \log n)$ بت)، فإنّنا نستطيع التّحقق بشكل سريع أنّ هذا التّرتيب يشكّل حلقة مولّدة.

إنّ أيّ **خوارزميّة كثيرة حدود زمنية غير محددة** (nondetermisitic polynomial-time algorithm) تجرب القيم جميعها لمتتالية كثيرة حدود طولية من البتات آنيًّا، وذلك بتطبيق حساب كثيرة حدود زمنية لكل حزر (كثرة حدود بدلالة الطول للمدخلة). إذا كان أيّ حزر يظهر جواب نعم لمسألة القرار، فإنّ الخوارزميّة تقول نعم. وخلاف ذلك، فإنّ الجواب يكون لا. وهذا يكافئ القول إنّه عندما يكون الجواب نعم، فإن يوجد لهذه إثبات بكثيرة حدود زمنية، إضافة إلى أنّ عدم التّقرير لا يقع في الجواب، بل في اختيار المسار الحسابيّ.

يُسمى صفُّ المسائل القابلة للحلّ خوارزميّات كثيرة حدود زمنيّة غير محددة "NP". إنّ الآلة التي تملك القوة لتتبّع العديد من مسارات الحسابات المتوازية تستطيع كذلك تتبّع إحداها. لذلك، فإنّ $\text{P} \subseteq \text{NP}$. ويعتقد بصورة شائعة أنّ $\text{P} \neq \text{NP}$. إلاّ أنّ هذا غير مبرهن، لذا، لا يمكن أنْ نأخذ NP لتعني "ليست كثيرة حدود". وبدلاً من ذلك، نستخدم الحدّ غير الرّسميّ **صعب التّحكم** (intractable) للمسائل في NP التي تكون صعوبتها كصعوبة المسائل في NP جميعها بصورة أساسيّة.

---

[1] تقنيًّا، الحجم (size) لمثال مسألة هو طولها في تشفير ما، وإنّ قياس الحجم لمسألة بيان بعدد الرّؤوس يكفي لتحقيق الهدف. تكون دالة ما محدودة بكثيرة حدود بدلالة n إذا وفقط إذا كانت محدودة بكثيرة حدود بدلالة n^2 أو n^3. لذلك، فإنّ التمييز غير مهم، إلا إذا كان من الممكن أنْ تملك المدخلة أوزانًا ضلعيّة كبيرة.

يُطلق الوصف **صعب** – NP (NP- hard) على مسألة ما إذا أمكن استخدام خوارزميّة كثيرة الحدود الزّمنيّة الخاصة بها لبناء خوارزميّة كثيرة حدود زمنيّة لكلّ مسألة في NP. أمّا الوصف تام – NP، (NP- complete) ، فيُطلق على المسألة التي تنتمي إلى NP وكانت صعب – NP. وإذا كانت مسألة تام – NP تنتمي إلى P، فإنّ P = NP. لاحظ أنه لا تُعرَف خوارزميّة كثيرة حدود زمنيّة لأيّ من العديد من المسائل تام – NP. وهذا يدعم الاعتقاد السائد بأنّ P ≠ NP . وقد قدّم كلٌ من جيري وجونسون [1979] مقدمة شاملة لهذا الموضوع.

إذا أُعطينا مسألة تام – NP، فإنّ خاصّيّة تام – NP لمسائل أخرى تتبع من تعليلات تقوم على مبدأ الاختزال كما اقترح سابقًا. ونقدّم في هذا الملحق العديد من هذه التّعليلات. وهنا نضع قائمة بالتّعقيدات لبعض المسائل التي نوقشت في هذا الكتاب.

يستخدم الأسلوب القياسيّ في علم الحاسوب أسماء بحروف كبيرة لمسائل القرار. ولأيّ مسألة يحتوي اسمها على أمثليّة، فإنّ مسألة القرار هي فحص ما إذا كانت القيمة هي قيمة قصوى لعدد معطى بوصفه جزءًا من المدخلات. وعلى أيّ حال، فإنّ المتغيرات في الاسم مثبتة بوصفه جزءًا من نصّ المسألة. ويعدّ هذا تمييزًا مهمًّا. فعلى سبيل المثال، فإنّ مجموعة مستقلة من الدرجة k لـ k مثبتة هي في P، لأنّ عدد المجموعات من الدرجة k للرّؤوس هي كثيرة حدود في n درجتها k عندما تكون k مثبتة، ونستطيع فحصها كلّها للاستقلالية بصورة بسيطة. ومن ناحية أخرى، فإنّ مجموعة مستقلة كبرى تكون تام – NP؛ وهذه هي المسألة لفحص ما إذا كان G يملك مجموعة مستقلة حجمها k على الأقل ، حيث k جزء من المدخلات (يمكن أنْ تنمو مع n).

مسائل في P	مسائل تام- NP
مجموعة مستقلة من الدرجة k	مجموعة مستقلّة كبرى
خصر (أصغر حلقة)	محيط (أطول حلقة)
حلقة (دارة) أويلريّة	حلقة هاملتونيّة
قطر	أطول مسار، مسار هاملتونية
ترابط	
قابل للتّلوين من الدرجة 2	قابل للتّلوين من الدّرجة k (لأيّ k مثبتة حيث $k \geq 3$)
مواءمة كبرى	قابل للتّلوين الضّلعيّ من الدّرجة $\Delta(G)$
سويّة	جنس (نوع)

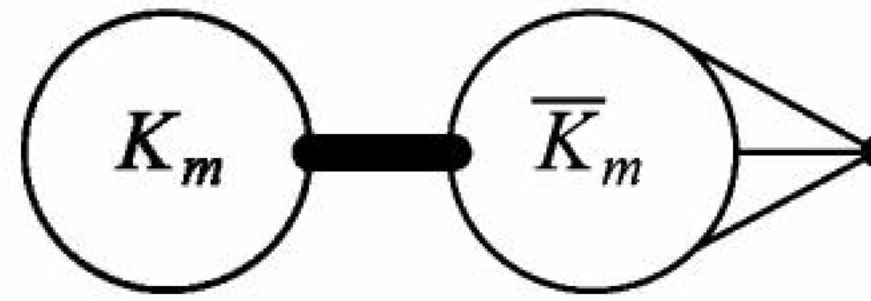
ترتبط خاصّيّة تام – NP بنقص الشّروط الضّرورية والكافية للإجابة بنعم، والقابلة للفحص بصورة سهلة، فضلًا عن أنّ أيّ **تمييز جيد** (good characterization) هو تمييز لشرط قابل للفحص بدلالة كثيرة حدود زمنية. لاحظ أنّ التّمييز للبيانات الأويلريّة جيد، ويمكن حل مسائل الخصر والقطر، وقابلية التلوين من الدّرجة 2 جميعها من خلال كثيرة حدود زمنية باستخدام البحث الأفقيّ أولاً. إنّ السّلوك ككثيرة حدود هو أقلّ وضوحًا للتّرابط، إلا أنّ علاقات أصغر- أكبر مثل نظرية منجر تقود عمومًا إلى خوارزميّات كثيرة حدود زمنية أمثليّة، وغالبًا ما تكون معتمدة على طرق تدفّق الشّبكات (البند 4.3).

الموجهات والحدود (Heuristics and Bounds)

ما زال البائع المتجول ينتظر التّعليمات. إنّ خاصية تام – NP لا تنهي الحاجة إلى جواب. لذا، سوف نبحث عن خوارزميّات موجهة توجد حلولاً قريبة من الأمثليّة. وربما نستطيع أنْ نضمن كم من الممكن أنْ تكون النتيجة بعيدة عن الحلّ الأمثل. فعلى سبيل المثال، قد نقبل بامتلاك حلّ تكلفته على الأكثر ضعفا الحلّ الأمثل عندما تكون لدينا خوارزميّة تستطيع توليد مثل هذا الحلّ بصورة سريعة. وبوجه دائم، فإنّ أيّ **خوارزميّة تقريب** (Approximation algorithm) تولّد حلًّا تكون نسبته إلى الحلّ الأمثل محدودة بثابت[1].

يعدّ الجشع تجربة بسيطة. فلمسألة الشجرة المولدة الصغرى، تكون النتيجة أمثليّة. ولكن في مسائل أخرى، قد يكون إنجاز خوارزميّات الجشع سيّئًا جدًّا. خذ في الحسبان مجموعة مستقلّة كبرى. ولاحظ أنّه يمكن توليد مجموعة مستقلّة كبرى بصورة تكراريّة من خلال اختيار رأس وحذفه مع جيرانه. كيف يجب أنْ نختار الرأس التالي؟ إذا قمنا بالاختيار الصحيح دائمًا، فإنّ النّتيجة تكون مجموعة مستقلّة كبرى. ونحصل على تجربة شرهة باختيار رأس ذي درجة صغرى من الرّؤوس المتبقّية، بسبب أنّ هذا يترك المجموعة الأكبر من المرشحين للمجموعة المستقلّة. ويمكن أنْ تكون النتيجة سيّئة بصورة اختياريّة.

B.1. مثال: حلُّ الخوارزميّة الجشعة. خذ في الحسبان $(K_1+K_m)\vee\overline{K_m}$. لاحظ أنَّ هذا البيان يملك رأسًا واحدًا درجته m، و m من الرّؤوس درجتها $m+1$، و m من الرؤوس درجتها $2m-1$. إنّ التّجربة الشّرهة تختار الرّأس الذي درجته صغرى وتحذفه مع جيرانه، تاركة عصبة. لذلك، فإنّ خوارزميّة الشّراهة تعثر على مجموعة مستقلة حجمها 2. ولكن في الحقيقة، فإنَّ $\alpha(G)=m$. ■



وعلى الرّغم من ذلك، فإنّ الخوارزميّة الشّرهة تعمل جيّدًا على بيانات كبيرة مولّدة بصورة عشوائيّة. في هذا النموذج (انظر بند8.5)، تجد مجموعة مستقلة دائمًا حجمها على الأقل نصف حجم المجموعة الكبرى تقريبًا. يقدم التمرين 12 تجربتين لغطاء رأسيّ أصغر؛ إحداهما تفشل كما في المثال B.1، ولكن الأخرى تنجح في إعطاء خوارزميّة تقريب.

بعدها، نأخذ في الحسبان تجارب بسيطة لـ TSP، حيث $\{v_1,\ldots,v_n\}$ الرّؤوس، أمّا w_{ij} فترمز إلى وزن الضّلع v_iv_j. الآن، من رأس بداية عشوائيّ، يبدو أنّ التّحرّك إلى رأس جديد من خلال الضّلع الواقع على هذا الرأس والأقل تكلفة يُعدُّ منطقيًّا. وبصورة مستمرة، فإنّنا نتحرك إلى أقرب جار للرّأس الحاليّ لم يتمّ الوصول إليه سابقًا. هذه هي خوارزميّة "الشّراهة" التي تعمل بصورة سريعة. إنها تجربة **الجار الأقرب** (nearest-neighbor).

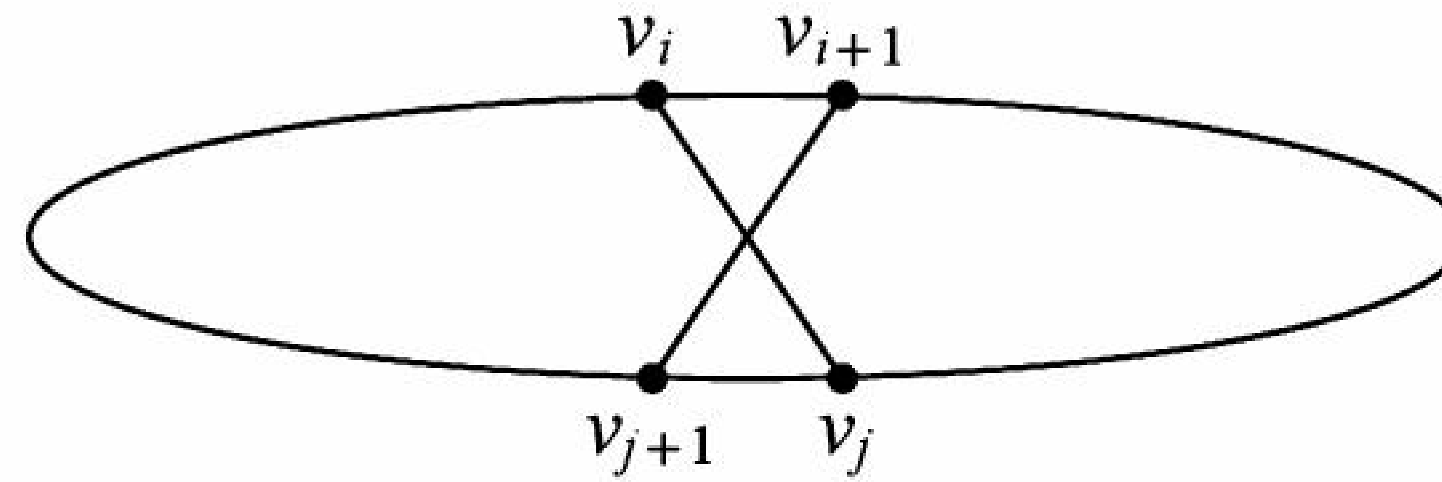
B.2. مثال: فشل موجه الجار الأقرب. نأخذ بعين الاعتبار وزن 0 على المسار الهاملتوني P، والوزن n^2 على الخواص المتبقية. لهذا المثال دورات ممتدة من الوزن n، ولكن موجه الجار الأقرب تنتج دورة من الاوزان على الأقل بقيم n^2 من الرأس الأول. لذا يكون ثمن الدورة الناتجة بواسطة اللوغارثيم غير محدود بثابت متعدد التكلفة الأمثل، وهي كذلك ليس تقريب للوغارثيم. ■

يوجد العديد من التّجارب المشابهة، حيث يمكن أنْ نحاول تنمية حلقة بأخذ رأس واحد في كلّ مرّة، وبصورة شرهة نمتصّ الرّأس الذي يسبب إدخاله في الحلقة الزيادة الأقل في التكلفة. تمتلك تجربة **الإدخال الأقرب** (nearest insertion) فرصة أفضل من تجربة الجار الأقرب؛ لأنّه عند مرحلة i في تجربة الجار الأقرب، فإنّنا نختار بين $n-i$ من البدائل، أمّا عند المرحلة i في تجربة الإدخال الأقرب، فإنّنا نختار بين

$(n - i)i$ من البدائل (أيها ستضاف، ومكان إدخالها). وعلى الرّغم من ذلك، فإنّ هذه ليست خوارزمية تقريب أيضًا (التمرين 7).

يعدُّ طريق اقتراب آخر بداية مع حلقة مولّدة مرشّحة ومحاولة تحسينها. إنّ المحافظة على حلّ قابل للتّحقيق (حلقة فعليّة) وإدخال تغييرات طفيفة عليه لتحسينه يدعى بحثًا محليًّا (local search). لاحظ أنّ السّماح بالتغييرات يأخذنا خارج نطاق الخوارزميّات الشّرهة، وربّما يكون الأداء بصورة أفضل.

لتحسين الحلقة الحاليّة، نأخذ في الحسبان تغيير زوج من الأضلاع. إذا كانت $(v_1,\dots,\ v_n)$ حلقتنا، فإنّنا نستطيع تعويض الأضلاع $v_i\ v_j$ و $v_{i+1}\ v_{j+1}$ بدلاً من $v_i\ v_{i+1}$ و $v_j\ v_{j+1}$ لنحصل على حلقة جديدة (يقود التّبديل المحتمل الآخر إلى حلقتين منفصلتين بدلاً من حلقة واحدة). ويكون التّبديل نافعًا إذا كان $w_{i,j} + w_{i+1,j+1} < w_{i,i+1} + w_{j,j+1}$. إنّ الحلقة الحالية تملك $\binom{n-1}{2} = \binom{n}{2}-n$ زوجًا من أضلاع غير واقعة على بعضها مع مراعاة التّبديل. إنّ خوارزمية لِنْ وكيرنجان (Lin- Kernighan) [1973] التي ثبت صعوبة تحسينها عمليًّا بصورة لافتة للنّظر، تأخذ في الحسبان الانتقال والتّبديل بين ثلاثة أضلاع في المرّة الواحدة.



تبدو المبرهنة الآتية أنّها تقضي على جهود إيجاد خوارزميّة تقريب لـ TSP العامّة.

3.B. نظرية : (Sahni- Gonzalez) {1976}) إذا وجد ثابت $c \geq 1$، وخوارزميّة كثيرة حدود زمنية A، بحيث تنتج A لكلّ مثال لـ TSP حلقة مولدة مع تكلفة على الأكثر c ضرب الأمثل، فإنّ P = NP.

الإثبات : سوف نبيّن بأنّ خوارزميّة مثل A يمكن أنْ تُستخدم في بناء خوارزميّة كثيرة حدودٍ زمنيّة لحلقة هاملتونيّة تكون تام - PN (نتيجة 11.B). إذا أعطيت بيان G على n من الرّؤوس، فأنشئ مثالاً لـ TSP على مجموعة الرّؤوس نفسها بوضع $w_{ij} = 1$ إذا كان $v_i v_j \in E\left(G\right)$، و $w_{i\,j} = cn$ خلاف ذلك.

في هذا المثال لـ TSP، فإنّ كلّ حلقة مولدة تكلفتها على الأكثر cn تملك تكلفة تساوي n تمامًا وتكون مرتبطة بحلقة مولّدة من المدخلة الأصليّة G، وبما أنّ A تنتج حلًّا تكلفته على الأكثر c ضرب الأمثل، فإنّها تنتج حلًّا تكلفته n إذا وفقط إذا كان G يملك حلقة مولّدة. لذلك، فإنّ خوارزميّة كثيرة الحدود خاصتنا لحلقة هاملتونيّة تولّد مثالاً لـ TSP كما ذكر، وتشغل A على هذا المثال. ويكون البيان G هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كانت A تنتج حلقة تكلفتها n. ■

إنّ خوارزميّات التّقريب موجودة لبعض الصّفوف الخاصّة لمسائل TSP. ولنبرهن أنّ خوارزميّة ما هي خوارزميّة تقريب، فنحتاج إلى حدّ سفليّ على الحلّ الأمثل.

لتكن M التكلفةَ لشجرة مولّدة صغرى في بيان موزون G. إذا حذفنا ضلعًا من الحلقة الأمثل في G، فإنّنا

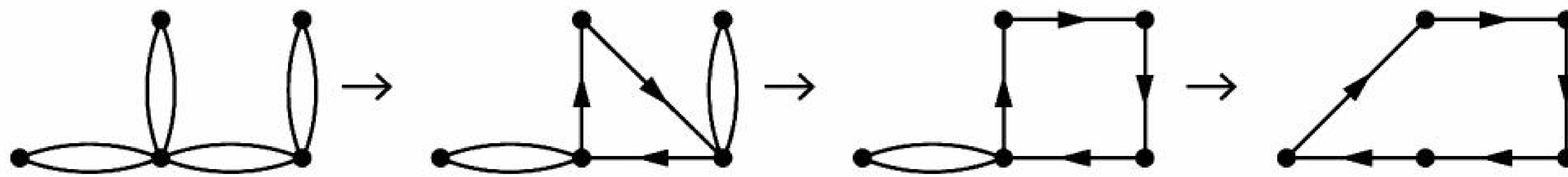
نحصل على مسار مولّد، وبما أنّ هذه شجرة مولدة، فإنّ تكلفتها تساوي M على الأقلّ. والتّكلفة للحلقة الأمثل هي M على الأقلّ، بالإضافة إلى التّكلفة الصغرى لضلع ليس موجودًا في شجرة ما ذات تكلفة M. ونستطيع تشغيل خوارزميّة كرسكال لأشجار مولّدة صغرى لحساب هذا الحدّ.

4.B نظرية : على الصّفّ لمسائل مندوب المبيعات المتجوّل حيث تحقق المدخلة المتباينة المثلثيّة، توجد خوارزميّة تقريب تعثر على حلقة مولّدة تكلفتها ضعفا الأمثل على الأكثر.

الإثبات: يعني تحقيق المتباينة المثلثيّة أنّ مصفوفة التّكاليف تحقق $w_{i,j} + w_{j,k} \geq w_{i,k}$ لكلّ i . j . k. ونعرف أنّ التّكلفة للحلقة الأمثل تكون M على الأقل، حيث M هي التّكلفة للشّجرة المولّدة الصّغرى. نستخدم المتباينة المثلثيّة والشّجرة المولّدة الصّغرى لنحصل على حلقة مولّدة تكلفتها $2M$ على الأكثر.

ابدأ بمضاعفة كلّ ضلع في شجرة مولّدة صغرى كالتي عن اليسار في الأسفل، ممّا يجعل الدّرجات جميعها زوجية، لذلك توجد دارة أويلريّة تملك $2n$ ضلعًا، وتكلفة كلّيّة $2M$. بصورة متعاقبة سوف نقلّل عدد الأضلاع دون زيادة التّكلفة حتى يبقى n من الأضلاع فقط. وبالمحافظة على الخاصّيّة التي تشير إلى أنّ الدّارة تزور الرّؤوس جميعها، فإنّنا نؤكّد أنّ الدّارة في النهاية تكون حلقة مولّدة مع تكلفة $2M$ على الأكثر.

إذا امتلكت دارة ما أكثر من n ضلعًا، فستزور رأسًا ما أكثر من مرّة، فلنقل خلال الأضلاع $v_i \to v_j \to v_k$ و $v_r \to v_j \to v_s$. إذا استبدلت الضّلعين $v_i v_j$ و $v_j v_k$ بالضلع $v_i v_k$، فستبقى الدّارة تزور الرّؤوس الأصليّة كلّها. فضلًا عن ذلك، تضمن المتباينة المثلثيّة أنّ التّكلفة الكلّيّة للأضلاع ليست أكبر من ذي قبل. في الشّكل أدناه، نوجّه الأضلاع لاقتراح سلسلة متوالية معيّنة من الدّارات. ■



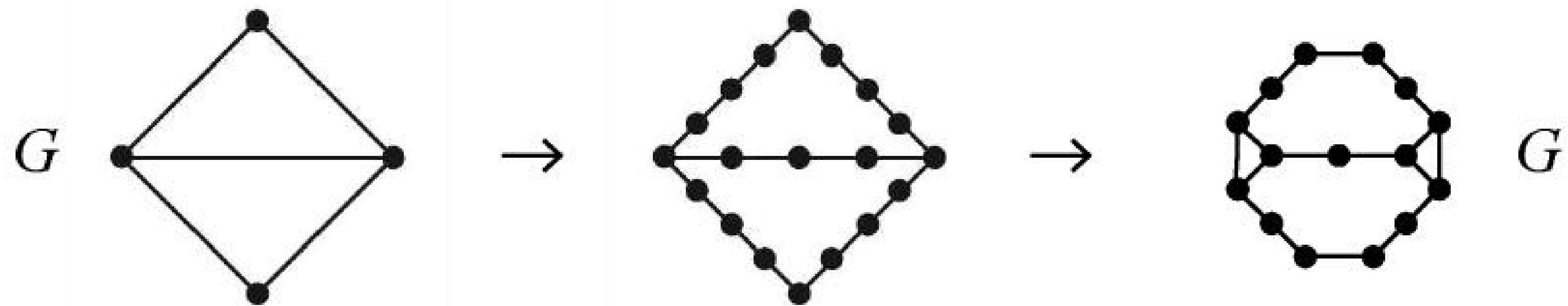
لقد أُعيد اكتشاف الخوارزميّة في المبرهنة 4.B مرات عدّة؛ حيث حَسّن كريستوفيدز [1976] نسبة الأداء 2/3. لاحظ أنّه بعد إيجاد شجرة مولّدة صغرى، فإنّنا لا نحتاج إلى مضاعفة الأضلاع جميعها للحصول على دارة أويلريّة؛ ويكفي إضافة أضلاع لأزواج رؤوس في الشّجرة، درجاتها فرديّة. يملك البيان الناتج دارة أويلريّة، والجزء اللاحق من الخوارزميّة ينتج حلقة مولّدة مع تكلفة M على الأكثر إضافة إلى تكلفة المواءمة. وللحصول على نسبة الأداء 2/3، فيكفي أنْ نبيّن وجود مواءمة مماثلة تكلفتها نصف التّكلفة للحلقة الأمثل على الأكثر (التمرين 8). ويملك التّحسين قيمة لأنّه يمكن إيجاد مواءمة وزن صغرى تشبع الرّؤوس التي درجاتها فردية في الشّجرة باستخدام كثيرة حدود زمنيّة.

براهين خاصّيّة تام NP- (NP- Completeness)

التّحويل (transformation) من مسألة A إلى مسألة B هو إجراء يحول أمثلة في A إلى أمثلة في B، بحيث يكون الجواب لـ A على المثال الأصليّ محدّدًا من خلال الجواب لـ B على المثال المحوّل. إذا كان لدينا تحويل (كثيرة حدود زمنية) فاعل من A إلى B، وخوارزميّة فاعلة لـ B، فسيكون لدينا خوارزميّة فاعلة لـ A. ونقول إنّ A **تختزل** (reduce to) أو تحوّل (transforms) إلى B.

إذا كانت A صعب – NP، وتختزل إلى B من خلال تحويل متعدد الحدود الزمنية، فإنّ B تكون صعب – NP أيضًا (خوارزميّة كثيرة حدود لـ B تعطي خوارزمية كثيرة حدود لـ A ومن ثم لـ NP) جميعها. إذا كانت B في – NP أيضًا، فإنّنا نقول إنّ B تام – NP من خلال **الاختزال من** (reduction from) أو **تحويل من** A (transformation from).

يكون اتجاه الاختزال حاسمًا؛ فعلى سبيل المثال، تختزل دارة أويلريّة بسهولة إلى حلقة هاملتونيّة. افترض أنّ G بيان معطى بوصفه مدخلة. استبدل كلّ ضلع بمسار مكوّن من أربعة أضلاع تمرّ بثلاثة رؤوس جديدة، ثمَّ أضف أضلاعًا لتجعل جيران كلّ رأس أصليّ متجاورة زوجًا زوجًا، واحذف $V(G)$. يكون البيان G أويلريًّا إذا وفقط إذا كان البيان الناتج G' هاملتونيًّا. إنّ تطبيق خوارزميّة على حلقة هاملتونيّة لـ G' يمكن أنْ يحدّد ما إذا كان G أويلريًّا. وهذا يخبرنا أنّ حلقة هاملتونيّة تكون صعبة على الأقلّ بوصفها دارة أويلريّة، بإهمال عامل كثيرة حدود. وبما أنّ دارة أويلريّة تكون سهلة (في P)، فإنّنا لا نتعلم شيئًا حول استخدام التّعقيد لحلقة هاملتونيّة.



تتطلب طريقة الاختزال تتطلّب مسألة تام – NP ابتدائية. وقد قدّم كوك (Cook) [1971] التّحقّقية بوصفها مسألة مماثلة. تأخذ التّحقّقيّة صيغة منطقيّة معبّرًا عنها بوصفها قائمة من العبارات بوصفها مدخلة. وكلّ عبارة هي تشكيلة حروف (متغيّرات أو نفي المتغيّرات). وتعدُّ العبارة صحيحة عندما يكون أحد حروفها صحيحًا على الأقلّ. وتكون العبارة **قابلة للتّحقّق** (Satisfiable) إذا وجد تعيين لقيم صحيحة للمتغيّرات بحيث تجعل كلّ عبارة صحيحة. والسؤال هنا عما إذا كان مثل هذا التّعيين موجودًا.

برهن كوك أنّه لكلّ مسألة A في NP، هناك مثال للتّحقّقيّة يمكن أنْ ينتج من خلال كثيرة حدود زمنيّة من مثال ما لـ A، بحيث يكون الجواب لمثال التّحقّقيّة الجواب نفسه للمثال A. لذلك فإنّ كلّ مسألة في NP تختزل إلى مسألة تحقّقيّة.

لا حاجة إلى تكرار هذا الجهد لكلّ مسألة تام – NP . ولبرهنة أنّ B هي صعب – NP، فإنّنا نستطيع اختزال التّحقّقيّة لـ B. يمكن اختزال أيّ مسألة تام – NP لتبيّن أنّ B هي صعب – NP . ومع المزيد من الخيارات، فإنّ إيجاد البراهين يصبح أكثر سهولة من حيث المبدأ. ولكن في أثناء الممارسة، فإنّ القليل من مسائل تام – NP الأساسيّة تصلح كمسألة تام – NP المعروفة في معظم براهين خاصّيّة تام – NP .

بدءًا من التّحقّقيّة، فقد زودنا كارب (Karp) [1972] بـ 21 مسألة مشابهة تتضمن العديد من المسائل الأساسيّة في نظريّة البيان؛ إذ تتضمن حلقة هاملتونيّة ومجموعة مستقلّة كبرى. فضلاً عن أنها تساعد على امتلاك نسخة معدّلة من مسألة تام – NP مقيّدة قدر الإمكان. ومع ذلك، فإنّها تبقى تام – NP . وعلى الرّغم من أنّ المرونة لنسخة معدّلة مقيدة تكون أقل، إلا أنّه من السهل اختزالها إلى المسألة التي نحاول إثبات أنّها تام – NP ؛ فعلى سبيل المثال، تبقى التّحقّقيّة تام – NP عندما تُقيَّدُ بالشّرط الذي يشير إلى أنّ كلّ عبارة تملك ثلاثة أحرف. وتدعى المسألة المقيّدة تحقّقيّةَ- 3 أو 3-SAT. ويبرهن هذا أنّها تام – NP آخذين في الحسبان مثالاً عشوائيًّا للتّحقّقيّة، واستبدال كلّ عبارة بتشكيلة مكافئة من العبارات على ثلاثة أحرف (وهذا يكلّف إضافة بعض المتغيّرات الإضافيّة). إن 3-SAT مقيّدة بصورة كافية؛ لأنَّ العديد من براهين خاصّيّة تام – NP تستخدم اختزالاً من 3-SAT. حتى إنّه من الأسهل اختزال المقيّدة بصورة أكثر من 2-SAT، ولكنّ 2-SAT تكون قابلة للحلّ في كثيرة حدود زمنيّة، وهي مقيّدة جدًّا.

سوف نبدأ من 3-SAT؛ لأنّ الخاصّيّة تام – NP للتّحقّقيّة واختزالها إلى 3-SAT لا تتضمّن نظريّة البيان. إضافة إلى أنّ الاختزالات إلى قابليّة التّلوين من الدّرجة 3، والمسار الهاملتونيّ الموجّه يتبع تقديم جيبونز (Gibbons) [1985].

5.B. تعريف: تحقّقيّة – 3 (3-SAT)

مثال: مجموعة من **المتغيّرات** المنطقيّة $U=\{u_j\}$، و مجموعة $\mathbf{C}=\{C_i\}$ من **العبارات** حيث تتكوّن كلّ عبارة من ثلاثة أحرف، ويكون الحرف متغيّرًا u_i أو نفيه $\overline{u_i}$.

سؤال: هل يمكن وضع القيمة لكلّ متغيّر لتكون صائبة أو غير صائبة بحيث تكون كلّ عبارة "متحقّقة" (تحتوي على حرف قيمته صائبة على الأقل)؟

6.B. نظرية : (كارب [1972] Karp) 3-SAT هي تام – NP .

الإثبات: (التمرين 14). ■

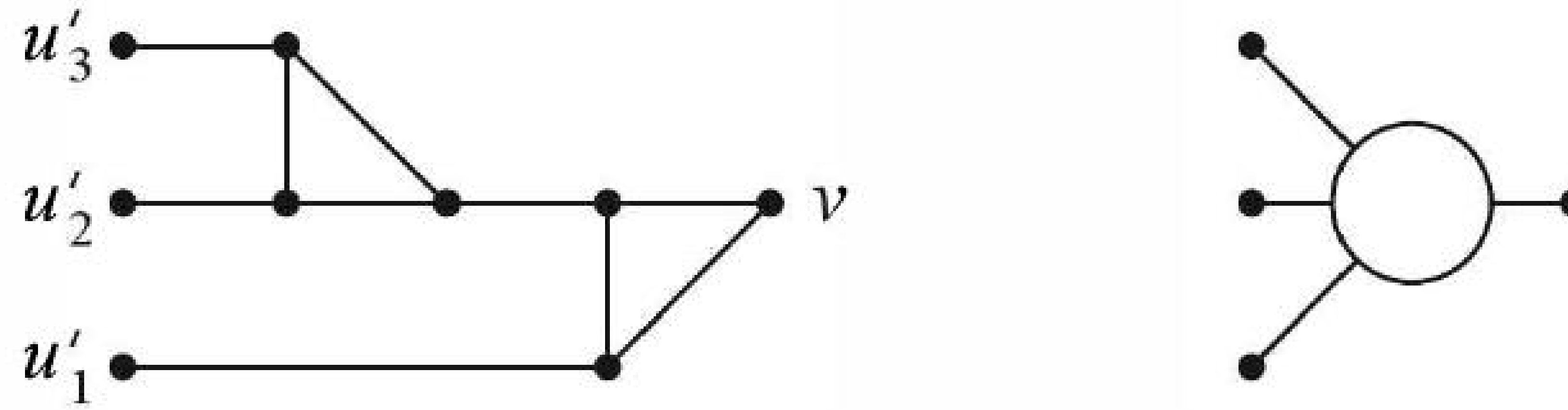
7.B. نظرية : (ستوكمير[1973] (Stockmeyer)) إنّ قابليّة التّلوين من الدّرجة 3 هي تام – NP .

الإثبات: أعطينا في هذه المسألة بيانًا، وسُئلنا عما إذا كان هذا البيان قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3. إذا كان الجواب نعم، فإنّه يوجد تلوين فعليّ من الدّرجة 3. ونستطيع التّحقّق من أنّ التّلوين يكون فعليًّا في زمن تربيعيّ. لذلك، فإنّ قابلية التّلوين من الدّرجة 3 تكون في NP. ولإثبات أنّه صعب – NP ؛ سوف نختزل 3-SAT إلى قابليّة تلوين من الدّرجة 3.

خذ في الحسبان مثالاً على 3-SAT مع متغيّرات $U=\{u_j\}$، وعبارات $\mathbf{C}=\{C_i\}$. سوف نحوّل هذا إلى بيان G بحيث يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3 إذا وفقط إذا كان المثال على 3-SAT قابلاً للتّحقّق. سوف نستخدم البيان

المساعد H المرسوم على الصفحة اللاحقة ونسميه $\{u'_1,u'_2,u'_3\}$ **بالمدخلات** (inputs) وv **بالمخرجة**

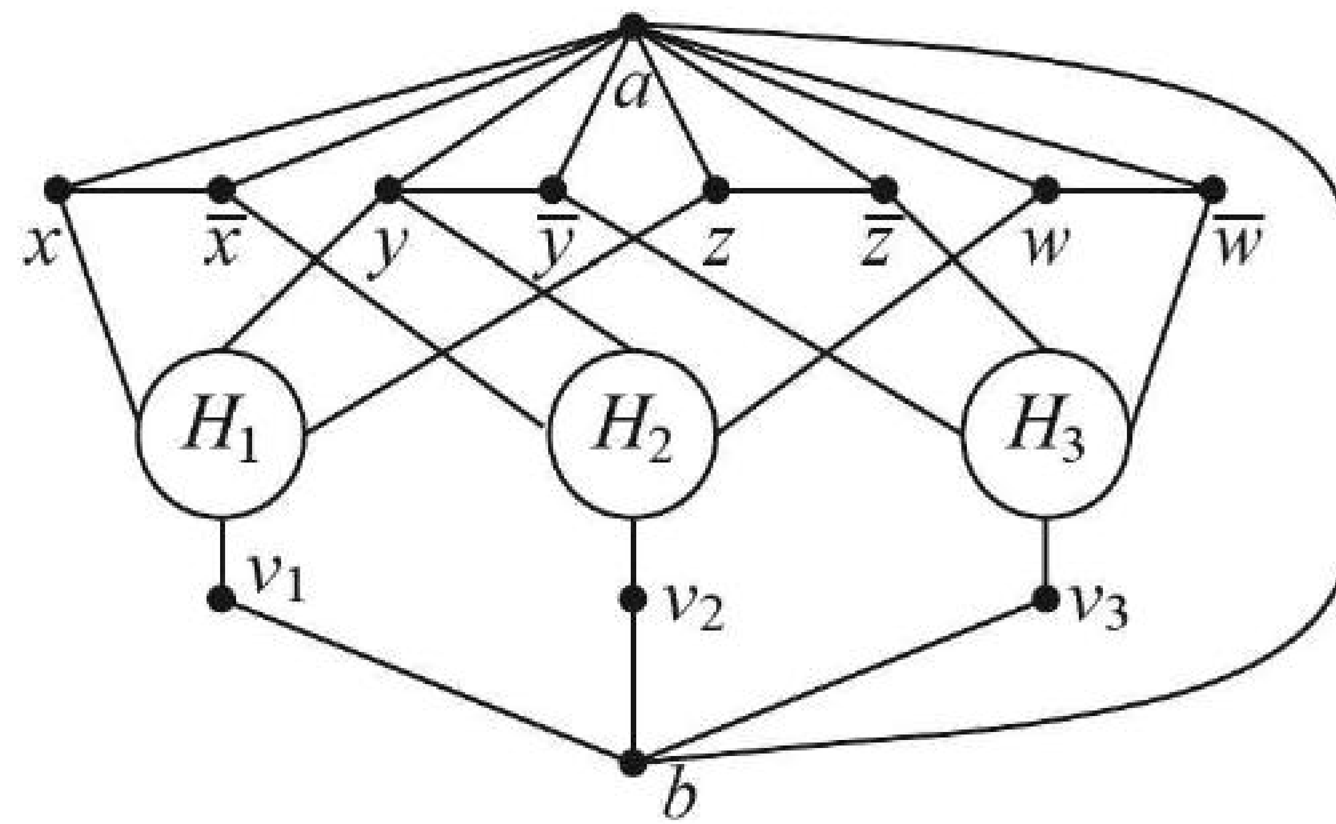
(output). وعندما نستخدم H في التّحويل، فسنقرّنه ببيان أكبر عند المدخلات، كما هو مقترح عن اليمين.



سنأخذ في الحسبان تلوينات من الدّرجة 3 باستخدام مجموعة الألوان $\{0,1,2\}$. وكلّ تلوين فعليّ من الدّرجة 3 لـ H تكون فيه المدخلات جميعها تملك اللون 0 يعين أيضًا اللون 0 لـ v. ومن ناحية أخرى، إذا استقبلت المدخلات ألوانًا ليست 0 كلّها، فإنّ هذا التّلوين يوسَّع إلى تلوين فعليّ من الدّرجة 3 في H، والذي لا يملك فيه v اللّون 0.

من مثالنا على 3-SAT، سوف ننشئ بيانًا G يملك رؤوسًا u_j و $\overline{u_j}$ لكلّ متغير في U، ونسخة H_i من H لكلّ عبارة C_i، ويملك رأسين خاصّين a,b. لاحظ أنّ الرّؤوس a، u_j، $\overline{u_j}$ تشكّل مثلثًا لكلّ j. ولكلّ عبارة C_j، فإنّ البيان الجزئيّ H_i يقترن بالبيان المشكّل حتى الآن عند الرّؤوس للحروف في C_i. إضافة إلى أنّ الرّأس للحرف الذي دليله j في C_i يقوم بدور u'_j في H_i. وما عدا هذه الرّؤوس المقرونة، فإنّ البيانات الجزئيّة H_i تكون منفصلة زوجًا زوجًا.

أخيرًا، لاحظ أنّ الرّأس b يكون مجاورًا لـ a وإلى رأس المخرجة v_i لكلّ H_i. وقد رسمنا أدناه البيان G الناتج عن مثال على 3-SAT الذي يملك أربعة متغيّرات وثلاث عبارات.



إنّ تعيين قيم صواب تحقّقيّة لـ $\{c_i\}$ يعطي تلوينًا فعليًّا f من الدّرجة 3 لـ G. وعندما يكون u_i صائبًا في التّعيين، ضع $f(u_i)=1$ و $f\left(\overline{u_i}\right)=0$؛ وبخلاف ذلك، ضع $f(u_i)=0$ و $f\left(\overline{u_i}\right)=1$. ولكلّ عبارة، فإنّ حرفًا ما يكون صائبًا. لذلك، فإنّه لكلّ H_i يتحقّق أنّ واحدًا على الأقل من $\{u'_3, u'_2, u'_1\}$ يملك اللّون 1. ومن خلال ملاحظتنا حول H، نستطيع توسيع f بحيث يملك v_i كلّه لونا غير اللّون 0. ونكمل التّلوين الفعليّ من الدّرجة 3 بوضع $f(a)=2$ و $f(b)=0$.

وبالعكس، افترض أنّ G يملك تلوينًا فعليًّا f من الدّرجة 3. ومن خلال إعادة تسمية الألوان إذا كان ذلك ضروريًّا، يمكن افتراض أنّ $f(a)=2$ و $f(b)=0$. وبما أنّ $f(a)=2$، فإنّ لكلّ متغير حرفين؛ الأوّل ملوّن باللّون 0 والآخر ملوّن باللّون 1. خذ في الحسبان التعيين الصّائب الذي يكون فيه المتغيّر u_j صائبًا أو غير صائب عندما $f(u_j)$ هي 1 أو 0 على التّرتيب. سوف ندّعي أنّ هذا التّعيين يحقّق الصّواب. وبما أنّ $f(b)=0$،

فإنّ كلّ رأس مخرج v_i يملك لونًا غير صفريّ. ومن خلال ملاحظتنا حول H، فإنّ الرّؤوس التي تقابل المدخلات في H_i لا يمكن أنْ تملك جميعها اللّون 0. وبناءً على ذلك، فإنّ كلّ عبارة ستحتوي على حرف واحد صائب على الأقلّ. ■

يوسّع تمرين 2 هذا إلى قابلية التّلوين من الدّرجة k لكلّ k مثبتة و$3 \leq k$. ولكلّ k، تكون حالة خاصة من العدد اللّونيّ، والتي تكون كذلك تام – NP .

8.B نظرية : (كارب [1972] Karp) إنّ المجموعة المستقلّة، والعصبة، والغطاء الرّأسيّ جميعها تام – NP .

الإثبات: يمكن التّحقّق من الجواب نعم للسؤال فيما إذا كان بيان مُدخل G يملك مجموعة مستقلة كبيرة؛ مثل كبر العدد الصحيح مدخلاً k بإظهار المجموعة واختبار (في زمن تربيعيّ) أنّ رؤوسها مستقلة. لذلك، فإنّ أي مجموعة مستقلّة تكون في NP.

ينصّ التمرين 31.1.5 على أنّ G يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة m إذا وفقط إذا كان $G\square K_m$ يملك مجموعة مستقلّة حجمها $n(G)$. وهذا التّحويل يختزل العدد اللّونيّ إلى مجموعة مستقلّة. يكون البناء لـ $G\square K_m$ تربيعيًّا في $n(G)$؛ لأنّ العدد اللّونيّ يكون واضحًا إذا كان $m > n$. لذا، نستنتج أنّ مجموعة مستقلّة تكون صعب – NP .

بما أنّ العصب في G تكون مستقلة في $\overline{G}$ ، فإنّ عصبة ومجموعة مستقلّة متكافئتان على هيئة كثيرة حدود. وبما أنّ $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$ (التمهيديّة 21.1.3)، فإنّ مجموعة مستقلّة وغطاءً رأسيًّا متكافئتان على هيئة كثيرة حدود. ■

سوف نركّز لاحقا على مسائل بيانات مستعرضة من خلال مسارات مولّدة وحلقات. تكون مسائل البيانات الموجّهة أكثرَ من مسائل البيان عامّة؛ لأنّنا نستطيع نمذجة البيانات باستخدام بيانات موجّهة متماثلة. لذلك، قد يكون من الأسهل إثبات نسخة من بيان موجّه لمسألة صعب – NP، ثمّ الحصول على النّسخة الخاصّة للبيانِ من خلال قيد بسيط.

9.B تعريف: إذا أُعطينا الرأسين x، y في بيان موجّه D، فإنّ مسألة المسار الهاملتونيّ الموجّه هي ما إذا كان D يملك مسارًا مولّدًا من x إلى y.

10.B نظرية : (كارب [1972] Karp) إنّ أيّ مسار هاملتونيّ موجّه هو تام – NP .

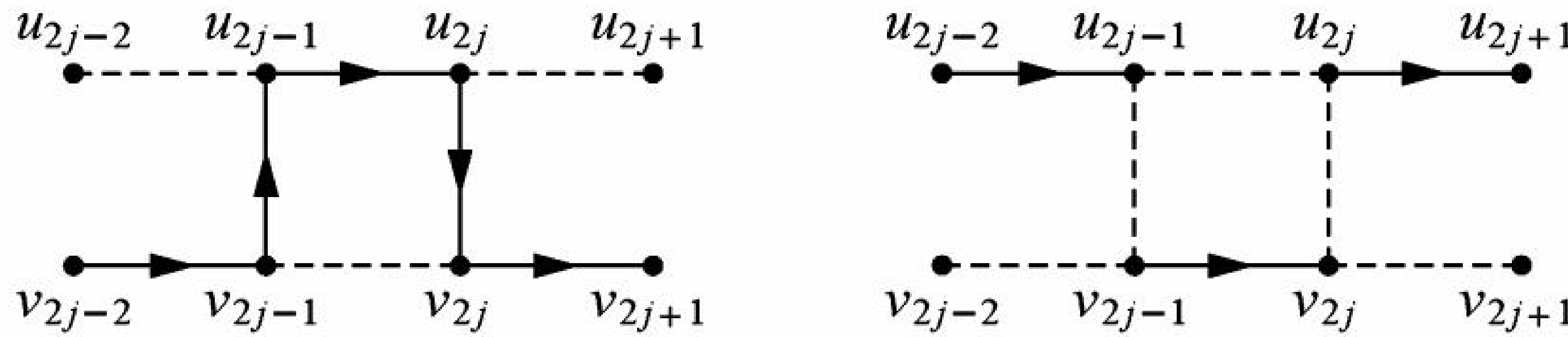
الإثبات: يمكن التّحقّق من أيّ مسار مولّد من x إلى y في بيان موجّه D في زمن خطّيّ. لذلك، فإنّ مسارًا هاملتونيًّا موجّهًا يكون في NP. ولإثبات أنّه صعب – NP ، فإنّنا سوف نختزل غطاءً رأسيًّا لمسار هاملتونيّ موجّه.

افترض غطاءً رأسيًّا يتكون من بيان G وعدد صحيح k. نريد معرفة ما إذا كان G يملك غطاءً رأسيًّا حجمه k على الأكثر سوف ننشئ بيانًا موجّهًا D يملك مسارًا هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان G يملك غطاءً رأسيًّا حجمه k على الأكثر. نضع دليلاً للأضلاع الواقعة على كلّ رأس بصورة عشوائيّة. وعندما يكون الضلع $uv = e$ هو الضّلع الذي دليله i الواقع على u، والضّلع الذي دليله j الواقع على v، فإنّنا نكتب $e_i(u) = e = e_j(v)$.

لبناء D، سوف نبدأ بـ $k + 1$ رأسًا خاصًّا $z_k, \ldots, z_0$. لكلّ $v \in V(G)$، ونضيف مسار $(v) = v_1, \ldots, v_{2r}$ لـ D، حيث $r = d_G(v)$. ونضيف أضلاعًا من كلّ من $z_{k-1}, \ldots, z_0$ إلى البداية لكلّ $P(v)$، ومن النّهاية لكلّ $P(v)$ إلى كلّ من $z_k, \ldots, z_1$. أيضًا، ولكلّ ضلع $e = e_i(u) = e_j(v)$ في $E(G)$، سوف نُكوّن الأضلاع $u_{2j}\, v_{2j-1}$، $u_{2i-1} v_{2j-1}$ و $v_{2j}\, u_{2j}$.

افترض أنّ G يملك غطاءً رأسيًّا حجمه k، ويتكون من الرّؤوس $v^1, \ldots, v^k$. سوف نشكّل مسارًا من z_0 إلى z_k في D من خلال $z_0, P(v^1), z_1, \ldots, P(v^k), z_k$. إنّ هذا المسار يهمل كلًّا من $P(u)$ لكلّ رأس غير

مغطى u. وسوف نمتصّ هذه الرّؤوس بأزواج، وبامتصاص كلّ زوج $u_{2i-1}u_{2i}$ من خلال عمل تحويلة من المسار $P(v)$ إلى الرّأس الذي يغطّي الضّلع $uv = e_i(u) = e_j(v)$. والتحويلة هي $v_{2j-1}u_{2j-1}u_{2j}v_{2j}$ كما هو مبين أدناه. ولأن الرأسين v_{2j} و v_{2j-1} مرافقان لضلع واحد فقط، فإنّ كلّ تحويلة مماثلة تكون مطلوبة مرّة واحدة على الأكثر. وبعد تضمين التّحويلات جميعها، سوف يكون لدينا مسار هاملتونيّ من z_0 إلى z_k في D.



وبالعكس، افترض وجود مسار مثل Q. لاحظ أنّ كلّ رأس لـ $P(u)$ ما عدا الأوّل والأخير يملك درجتي دخول وخروج 2 لكلّ $u \in V(G)$. سوف نبيّن أوّلاً لكلّ $i \geq 1$ و $u \in V(G)$ أنّ $u_{2i}\, u_{2i+1} \in E(Q)$ إذا وفقط إذا كان $u_{2i-2}u_{2i-1} \in E(Q)$، حيث لـ $i = 1$، نأخذ u_0 لتعني عنصرًا ما من $\{z_r\}$. وبالمثل، عندما $i = d(u)$، فإنّنا نأخذ u_{2i+1} لتعني عنصرًا ما من $\{z_r\}$. وبما أنّ الضّلع الذي دليله i الواقع على u حَسَنَ التّعريف، فإنّنا نستطيع وضع الرّأس v والدّليل j بحيث $e_j(v) = e_i(u)$.

إذا كان $u_{2i-2}\, u_{2i-1} \notin E(Q)$، فإنّ Q يجب أنْ يدخل u_{2i-1} من v_{2j-1}. وهذا يؤدّي إلى أنّ Q يمكن أنْ يترك فقط u_{2i-1} على $u_{2i-1}u_{2i}$، ويستطيع دخول v_{2j} فقط على $u_{2i}v_{2j}$. وهذا بدوره يعطي أنّ $u_{2i}u_{2i+1} \notin E(Q)$.

أمّا إذا كان $u_{2i-2}u_{2i-1} \in E(P)$، فإنّ P لا يستطيع ترك v_{2j-1} على $v_{2j-1}u_{2i-1}$، ويجب أنْ يترك v_{2j-1} على $v_{2j-1}v_{2j}$ وهذا يؤدّي إلى أنّ Q يدخل v_{2j} على $v_{2j-1}v_{2j}$ وليس على $u_{2i}v_{2j}$. لذلك، فإنّ Q لا يترك u_{2i} على $u_{2i}v_{2j}$، ويجب أنْ يترك Q على $u_{2i}u_{2i+1}$. (في هذه الحالة، يمكن لـ Q أنْ يتضمّن $\{u_{2i-1}u_{2i}\ ,\ v_{2i-2}v_{2i-1}\ ,\ v_{2i}v_{2i+1}\}$ أو $\{u_{2i-1}v_{2i-1}\ ,\ v_{2i}u_{2i}\}$).

الآن، ضع $S = \{v \in V(G) : z_i v_1 \in Q\}$؛ هذه هي الـ k رأسًا في G التي أدخلت نسخها الأوليّة من $z_0, \ldots, z_{k-1}$ من خلال Q. وتبيّن مناقشتنا أنّه لكلّ ضلع uv حيث $u \notin S$ تعطي أنّ $v \in S$. لذلك، فإنّ S غطاء رأسيّ ويكون لدينا الاختزال المطلوب لغطاء رأسيّ إلى مسار هاملتونيّ موجّه. ■

11.B نتيجة: (كارب [1972] Krap) تكون أيّ حلقة هاملتونيّة موجّهة، وأيّ مسار هاملتونيّ وأيّ حلقة هاملتونيّة جميعها تام - NP.

الإثبات: تكون هذه المسائل جميعها في NP. ولاختزال مسار هاملتونيّ موجّه إلى حلقة هاملتونيّة موجهة، أضف رأسًا واحدًا z وضلعين vz و zu لمثال يتطلّب مسارًا مولّدًا من u إلى v في D.

إن اختزال مسار هاملتونيّ (مع نقاط طرفيّة محدّدة) إلى حلقة هاملتونيّة يكون الشّيء نفسه.

ولاختزال مسار هاملتونيّ موجّه إلى مسار هاملتونيّ؛ خذ في الحسبان مثالاً يتطلّب مسارًا من u إلى v في D. ولتشكيل مثال G على مسار هاملتونيّ؛ قسّم أولاً كلّ رأس x إلى مسار x^-, x^0, x^+ وليكن x^- هو الرّأس الذي يرث الأضلاع كلّها التي مقدماتها على x، وليكن x^+ هو الرّأس الذي يرث الأضلاع جميعها التي ذيولها عند x. إنّ أيّ مسار مولّد من u إلى v في D يصبح مسارًا مولّدًا من u^- إلى v^+ في G، وذلك باستبدال كلّ رأس x بالمتتالية x^-, x^0, x^+.

وبالعكس، بما أنّ أيّ مسار من u^- إلى v^+ في G يجب أنْ يزور كلّ x^0، فعليه اجتياز المسارات جميعها التي على شكل x^-, x^0, x^+، إلى الأمام أو إلى الخلف ؛ وبسبب عدم وجود رؤوس متجاورة لها الإشارة نفسها ، فيجب أنْ تكون الاجتيازات جميعها في الاتجاه نفسه، وتبقى ثمّ، فإنّها تنكمش إلى المسار من u إلى v المطلوب في D. لذا، فإنّ G يملك مسارًا مولّدًا من u^- إلى v^+ إذا وفقط إذا كان D يملك مسارًا مولّدًا من u إلى v. ■

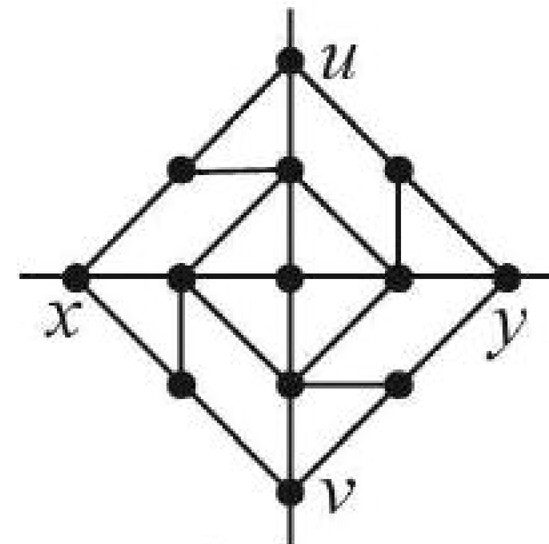
يبحث استكشاف للحدّ بين P وتام -NP عن مسائل أكثر تقييدًا والتي ما تزال تام -NP، وعن صفوف أكبر من المدخلات التي يوجد لها خوارزميّات حلول على هيئة كثيرات حدود زمنيّة. تزودنا المناقشة السّابقة ببراهين أسهل لخاصية تام -NP، وتضع حدودًا على النّجاحات للنّوع التّالي. وهدفنا اللّاحق هو توسعة قابليّة التّطبيق لخوارزميّات جيّدة.

سوف نوضّح هذه العمليّة بإثبات أنّ قابلية التّلوين من الدّرجة 3 تبقى تام -NP لبيانات السّويّة.

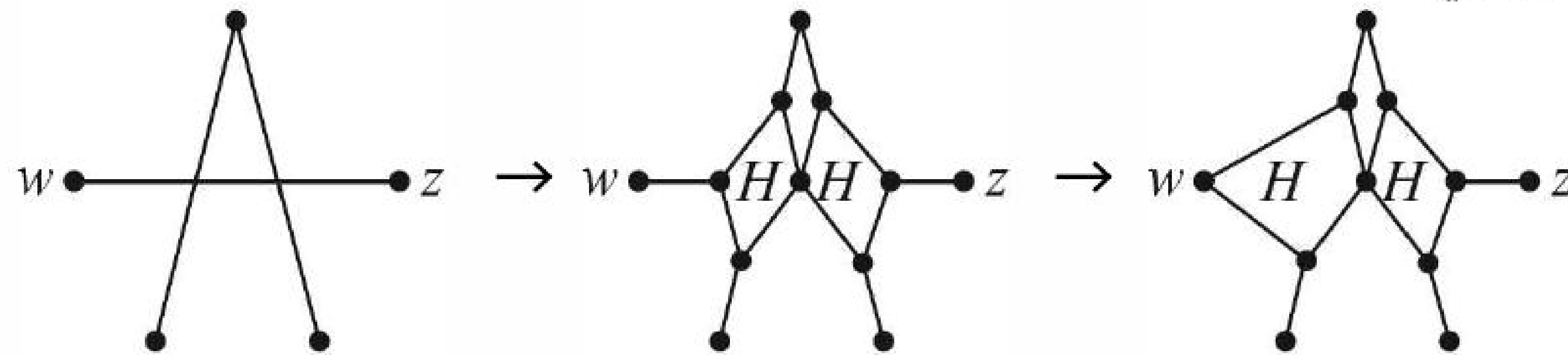
12.B. نظرية : (ستوكمير [1973] Stockmeyer، انظر أيضًا جيري وجونسون وستوكمير [1976])
التّلوين الثّلاثيّ السّويّ عبارة عن تام -NP.

الإثبات : كالعادة، يمكن التّحقق بسهولة من أنّ تلوينًا من الدّرجة 3 يكون تلوينًا فعليًّا. سوف نختزل قابليّة التّلوين من الدّرجة 3 إلى قابليّة تلوين ثلاثيّ سوّيّ. افترض أنّ G بيان معطى. سوف ننشئ بيانًا سويًّا G' قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3 إذا وفقط إذا كان G' قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3.

خذ في الحسبان رسمًا لـ G في المستوى. سوف نضع بدل كلّ تقاطع «أداة» سويّة لها تأثير نشر اللّون عبر التّقاطع في تلوين من الدّرجة 3. في كلّ تلوين فعليّ من الدّرجة 3 للبيان H في الأسفل، لاحظ أنّ u و v يملكان اللّون كما يفعل كلّ من x و y (التمرين17). وتشير الأضلاع الجزئيّة إلى مكان ربط نسخ من H مع بقيّة البيان.



في الرسم لـ G، قُطِعَ كلّ ضلع متضمّن في k من التّقاطعات إلى $k + 1$ قطعة من خلال التّقاطعات. وعلى كلّ قطعة، أضف رأسًا جديدًا. واستبدل كلّ تقاطع بنسخة من H موصولة من خلال نهاياتها بالرّؤوس الجديدة على القطع الأربع التي تقع على التّقاطع أخيرًا، لكلّ ضلع أصليّ wz، اختر نقطة طرفيّة، وقلّص الضّلع الذي بينها وبين الرّأس الذي على القطعة wz والواقع عليها لاحظ أنّ الضّلع غير المتضمّن في تقاطعات يعود إلى حالته الأصليّة.



في تلوين فعليّ من الدرجة 3 للبيان الجديد G'، لاحظ أنّ نشر اللّون عبر الأدوات يتطلّب أنْ تملك النقاط الطّرفيّة لكلّ ضلع أصليّ ألوانًا مختلفة. لذلك، فإنّ تقييد هذا التّلوين للرّؤوس الأصليّة يعطي تلوينًا من الدّرجة 3 للبيان G.

وبالعكس، إذا أُعطينا تلوينًا فعليًّا من الدّرجة 3 لـ G، فإنّنا نستطيع أنْ نبدأ عبر كلّ ضلع من النّقطة الطّرفيّة المستخدمة في نسخة من H، ونشر الألوان إلى 3 ألوان فعليّة في G'. ونستطيع القيام بذلك لأنّ H يملك تلوينًا فعليًّا من الدّرجة 3 يكون فيه لـ y و x و v و u اللّون نفسه، ويملك تلوينًا فعليًّا من الدّرجة 3 يملك فيه كلّ من x و y لونًا يختلف عن لوني u و v (التمرين 17). ■

أيضًا، فإنّ أيّ حلقة هاملتونيّة تبقى تام -NP للبيانات السّويّة. وفي الحقيقة، فإنّها تبقى تام -NP

لبيانات سويّة منتظمة من الدّرجة 3 ومترابطة من الدّرجة 3، ولا تملك وجهًا طوله أقلّ من 5 (انظر جيري وجونسون وتارجان [1976]). وتكون أيضًا تام -NP لبيانات- ثنائيّة الفرع (انظر كريشنامورثي [1975]). ولبيانات خطّيّة (انظر بيرتوسي Bertossi [1981]؛ وكذلك التمرين 14). لاحظ أنّ التّقييد لقابلية التّلوين من الدّرجة 3 على بيانات خطّيّة هو كقابليّة التّلوين الضّلعيّ من الدّرجة 3 للبيانات؛ وهذا يكون تام -NP حتى لبيانات منتظمة من الدّرجة 3، بواسطة الاختزال من 3-SAT (هولير [1981] Holyer).

تمارين (Exercises)

1.B. (−) باستخدام الخوارزميّات التي طُوّرت في هذا الكتاب، صِفْ خوارزميّة جيّدة لحساب $\alpha(G)$ عندما يكون G بيانًا ثنائيّ الفرع.

2.B. (!) استخدم المبرهنة B.7 لتبرهن أنّ قابليّة التّلوين بـ k من الألوان هي تام -NP لكلّ قيمة مثبتة لـ k بحيث تساوي هذه القيمة 3 على الأقلّ.

3.B. أعطِ خوارزميّة كثيرة حدود بالنّسبة للزّمن إلى التّلوين الثّنائيّ.

4.B. برهن أنّ الحلقة الهاملتونيّة والمسار الهاملتونيّ متكافئان بالنسبة إلى كثيرة حدود. أيْ، برهن أنّ أيّ خوارزميّة كثيرة حدود زمنيّة لأيّ منهما يمكن استخدامها للحصول على كثيرة حدود زمنيّة حتى النّهاية.

5.B. إنّ اختبار وجود حلقة ذات طول مثبت k في بيان معطى على n من الرّؤوس يمكن أنْ يتمّ بزمن محدود بأحد مضاعفات $k!n^k$. انظر إلى كلّ مجموعة جزئيّة من الرّؤوس من المجموعات $\binom{n}{k}$ التي حجم كلّ منها يساوي k باتّباع دور معيّن، واختبر التّرتيبات الممكنة جميعها. بما أنّ k ثابت، فإنّ هذه كثيرة حدود زمنيّة. ولحلقة رباعيّة، نجد أنّ زمن تشغيل هذه الخوارزميّة هو $O(n^4)$. جد خوارزميّة تختبر وجود حلقة رباعيّة بزمن مقداره $O(n^2)$، (Richard-Liestman [1985]).

6.B. افترض أنّ G بيان معطى، وأنّ k عدد صحيح. إنّ مسألة الشّجرة المولّدة ذات الدّرجة الصغرى تسأل عما إذا كان يوجد لـ G شجرة مولّدة T، بحيث $\Delta(T) \leq k$ فضلًا عن أنّ مسألة أطول مسار تسأل عما إذا كان يوجد لـ G مسار طوله يساوي k على الأقلّ. في مسألة المسار -k، لاحظ أنّ k ليس جزءًا من المدخلات، إضافة إلى أنّ السؤال هو: هل يوجد لـ G مسار طوله k على الأقل؟

a) برهن أنّ الشّجرة المولّدة ذات الدرجة الصغرى وأطول مسار يكونان تامّين -NP.

b) برهن أنّ المسار -k يكون موجودًا في P لكلّ k حيث k مُثبت.

7.B. ابْنِ عائلة أمثلة لتبرهن أنّ نسبة الأداء لأقرب إدخال لمساعد كشف للـ TSP غير محدودة بأيّ ثابت.

8.B. (!) افترض شاهدًا للـ TSP حيث تحقّق التّكاليف المتباينة المثلثيّة. برهن أنّ مواءمة للرّؤوس ذات الدّرجات الفرديّة في شجرة مولّدة صغرى تستخدم أضلاعًا لها تكلفة كلّيّة تساوي نصف التّكلفة لحلقة مولّدة على الأكثر. استنتج أنّ نسبة أداء خوارزميّة كرستوفايدز تساوي 2/3 على الأكثر.

9.B. برهن أنّه لحلّ مسألة الـ TSP بالضبط، يكفي أنْ يكون لدينا خوارزميّة تحلّ الـ TSP عندما تحقق أوزان الأضلاع المتباينة المثلثيّة. (مساعدة: إذا أعطينا مثالًا اختياريًّا للـ TSP، فجد مثالًا على TSP بزمن بحسب كثيرة حدود، وحيث إنّ أوزان الأضلاع تحقق المتباينة المثلثيّة $\left(w_{ij} + w_{jk} \geq w_{ik}\right)$ وأنّ مجموعة الجولات المثلى هي نفسها كما في المثال الأصليّ).

10.B. برهن أنّ 2-SAT ينتمي إلى P.

11.B. يوجد في مدينة ما نظام طرق معيّن، ولكن هذه المدينة تمتلك آلة واحدة فقط لإزالة الثّلوج التي يجب

إزالتها من شوارعها الضّيّقة. افترض أنّ الثّلج يُزال تمامًا من خلال مرور الآلة بالشّارع مرّة واحدة فقط. وتوجد طرق زراعيّة يمكن استخدامها لتغيير الموقع بشرط عدم إزالة الثّلج من هذه الطرق. لذا، يوجد لدينا بيان موزون فيه نوعان من الأضلاع؛ النّوع الأوّل من الأضلاع هو التي يجب تتبعها وإزالة الثّلج عنها، أمّا النّوع الثّاني فهو الأضلاع التي ليست بحاجة إلى تتبّع. ترغب المدينة بالحصول على خوارزميّة تستطيع من خلالها إيجاد حلقة ذات طول أصغر تمرّ على الأضلاع جميعها من النّوع الأوّل في مثل هذا البيان. برهن أنّ هذه المسألة من نوع صعب -NP وذلك من خلال الاختزال من مسألة حلقة هاملتونيّة.

12.B خوارزميّات مساعدة للكشف عن أغطية الرّؤوس. خوارزميّة 1: ضمّن رأسًا ذا درجة كبرى، احذف، وكرّر العمليّة حتى يصبح البيان المتبقّي مجموعة مستقرّة. خوارزميّة 2: اختر ضلعًا اختياريًّا ضمن طرفي هذا الضّلع، احذفهما، ثمّ كرّر هذه العمليّة حتى يصبح البيان المتبقّي مجموعة مستقلّة. ربما يظهر أنّ مساعد الكشف في خوارزميّة 1 أكثر قوة، إلاّ أنّ للخوارزميّة 2 ضمان أداء أفضل:

a) برهن أنّ خوارزميّة 2 تنتج دائمًا غطاء رؤوس حجمه ضعف الحجم الأصغر $\beta(G)$ على الأكثر.

b) برهن أنّ خوارزميّة 1 ربّما تنتج غطاء رؤوس حجمه قرابة $\text{Log}\ \beta(G)$ مضروبًا في الأصغر. (مساعدة: ابْنِ بيانًا ثنائيّ الفرع G بحيث تختار خوارزميّة 1 قرابة $\beta(G)/i$ رأسًا درجة كلّ منها تساوي i لكلّ $1 \le i \le \beta(G)$.

13.B يكون البيان G حرجًا بالنّسبة إلى α إذا تحقق أنّ $\alpha(G-e) > \alpha(G)$ لكلّ $e \in E(G)$. برهن أنّه لا يوجد رأس- قطع لبيان مترابط حرج بالنّسبة إلى α. (مساعدة: إذا كان e_1, e_2 ضلعين يقعان على رأس قطع x، فاستخدم المجموعات المستقلّة الكبرى في $G\text{-}e_1$ و $G\text{-}e_2$ لبناء مجموعة مستقلّة في G تحوي أكثر من $\alpha(G)$ رأسًا).

14.B لاحظ أنّ التّحقّقيّة تختلف عن التّحقّقيّة الثّلاثيّة (3-SAT) في أنّه يمكن أنْ يكون للعبارات حجوم اختياريّة. برهن أنّ أيّ عبارة تحوي أكثر من ثلاثة أحرف يمكن تحل محلها عبارة ذات ثلاثة أحرف (نسمح بإضافة بعض المتغيّرات الجديدة) بحيث تتحقّق العبارة الأصليّة إذا وفقط إذا كانت الشواهد الجديدة للـ 3-SAT متحققة. استنتج أنّ التّحقّقيّة تختزل إلى 3-SAT (Karp [1972]).

15.B (!) إذا علمت أنّ الحلقة الهاملتونيّة تكون تام - NP للبيانات المنتظمة من الدّرجة 3، برهن أنّ حلقة التّغطية هي تام -NP. هذا هو السؤال فيما إذا كان البيان المعطى G يحوي مسربًا مغلقًا يشتمل على نقطة طرفيّة لكلّ ضلع على الأقلّ. برهن أنّ البيان الخطّانيّ لـ G يكون هاملتونيًّا إذا وفقط إذا وجد لـ G حلقة تغطية. استنتج أنّ الحلقة الهاملتونيّة تكون تام -NP للبيانات الخطّانيّة.

16.B تُعَدُّ مسألة المجموعة المسيطرة بيانًا معطى H وعددًا صحيحًا k، وتسأل عما إذا كان يوجد لـ H مجموعة مسيطرة حجمها يساوي k على الأكثر (تعريف 26.1.3):

a) إذا كان G بيانًا معطى، فاجعل G' هو البيان الذي نحصل عليه بإضافة نسخة إضافيّة من كلّ ضلع من أضلاع G، وتقسيم نسخة واحدة من كلّ ضلع (لذا، يُستبدل بكلّ ضلع مثلثًا يشتمل على رأس جديد). برهن أنّه يوجد لـ G غطاء رؤوس حجمه يساوي k على الأكثر إذا وفقط إذا وُجد لـ G' مجموعة مسيطرة حجمها k على الأكثر.

b) استخدم تمام -NP لغطاء الرؤوس لتبرهن تمام -NP للمجموعات المسيطرة.

17.B برهن الادعاء الموجود في المبرهنة 12.B المتعلّق بالتّلوين الثّلاثيّ للجزء H.

18.B (*) استخدم مسارا هاملتونيًّا في بيان موجّه لتبرهن أنّ تقاطع الماترويد الثّلاثيّ يكون تام -NP.

19.B (*) استخدم مواءمة 3-D لتبرهن أنّ تقاطع الماترويدات الثّلاثيّ هو تام -NP. إذا أعطينا حشدًا من الثّلاثيّات على الشّكل (x_1,x_2,x_3) حيث $x_i \in V_i$، وكانت المجموعات V_1,V_2,V_3 غير متقاطعة (منفصلة). فإنّ المواءمة D-3 هي مسألة إيجاد أكبر عدد من الثّلاثيّات بحيث يظهر كلّ عنصر على الأكثر في واحدة من الثّلاثيّات التي تمّ اختيارها. (بالمقارنة، نعلم أنّ مواءمة ثنائيّ الفرع هي مسألة مواءمة 2 - D حيث تكون المجموعات أزواجًا).

ملحق (Appendix C)

مساعدات لحلّ بعض التمارين المختارة (Hints for Selected Exercises)

نورد في هذا الملحق بعض خطوط الإرشاد العامة، وبعض الاقتراحات المحددة المتعلقة بحلول بعض التمارين المختارة. ونتوقع من خلال هذه الاقتراحات أن نساعد الطلبة الذين يعانون بعض المشاكل على البدء بإيجاد البراهين وكتابتها.

مناقشة عامة (General Discussion)

الخطوة الأولى في حلّ أيّ مسألة هي التأكد من فهم المطلوب فيها، بُرهنت وتتطلب بعض المسائل التحقق من بعض العبارات الرياضية، وربما تمثل التعريفات خارطة طريق للأشياء التي يلزم التحقق من صحتها؛ ففي بعض الأحيان، نجد أن العبارة المنشودة تنبع من نظرية بُرهنت سابقًا. عندها، يجب التحقق من أن فرضيات المبرهنة متحققة لكي نستطيع تطبيقها.

وربما تشتمل بعض المسائل الأخرى على إجراء بعض الأشياء التجريبية اللازمة لاكتشاف العبارة التي يلزم إثباتها. وفي بعض الأحيان، نختبر الحالات الصغيرة لاكتشاف النمط العام وإثباته بالاستقراء وفي بعض المسائل الأخرى، يكون من المفيد اختبار تحقق المسألة على بعض الأمثلة؛ لأن ذلك ربما يوحي أحيانًا عن كيفية التحقق من صحة العبارة.

افهم التعريفات، واستخدمها بحرص وحذر. ولا يلزم وجود رأس معزول للبيان غير المترابط. إن العرى والحلقات مفاهيم مختلفة وعليك التفريق بين كلمتي أعظم وأعظمي. غطاء الرؤوس هي مجموعة من الرؤوس، أما غطاء الأضلاع فهو مجموعة من الأضلاع. البيان الذي درجة ترابطه تساوي 3 يكون مترابطًا من الدرجة 2 (مترابط ثنائي)، أما البيان الذي عدده اللوني يساوي 3، فيكون قابلاً للتلوين بـ 17 لونًا.

عندما نبحث عن إثبات مباشر لعبارة شرطية، فبإمكاننا العمل من طرفي المسألة. اعمل قائمة بالعبارات التي تتبع من الفرضيات، وقائمة أخرى بالعبارات الكافية لإعطاء الاستنتاج. وعندما تظهر عبارة في كلتا القائمتين، فإننا نكون قد حللنا المسألة.

عندما تفشل الطريق المباشر للإثبات، اعمل قائمة بالأشياء التي تتبع في حال فرض أن النتيجة غير صحيحة إذا وجد شيء في هذه القائمة يتناقض مع شي في النتائج التي تتبع من الفرضيات (أو يتناقض مع أي من العبارات الصحيحة المعرفة)، فهذا يشير إلى أن المسألة قد حُلّت باستخدام طريقة الإثبات بالتناقض مرة أخرى.

الإثبات بالتناقض يناسب العبارات المتعلقة بالاستحالة (أي استحالة حدوث خاصية معينة) لإثبات شيء موجود، فغالبًا ما يكون بإمكاننا بناء مثال، وإثبات أن لهذا المثال الخواص المنشودة، وهذه هي الطريقة المباشرة في هذه الحالة.

يمكن تفسير معظم العبارات الشرطية بوصفها عبارات محددة قياسيًّا بصورة كلية أو عامّة؛ فإثبات العبارة المحددة قياسيًّا بصورة كلية، يجب أن يتحقق لكل قيمة من قيم المتغير المعطى في المجموعة الكلية. وربما تساعد الأمثلة على فهم المسألة أو توضيح الإثبات، إلا أن الأمثلة في نفسها لا تشكل إثباتا للمسألة. إن توضيح أن للمثال الخواص المنشودة بلغة تنطبق على الأمثلة الممكنة جميعها، يمكن أن يؤدي إلى إثبات العبارة المنشودة.

في أغلب الأحيان، نجد أن الاستقراء يقع في إثبات العبارات التي تحوي عددًا طبيعيًّا كوسيط أو متغير. كن حذرًا من مصيدة الاستقراء! (لقد تم مناقشتها في المثال 26.3.1 وفي المثال A . *28*) تذكر النموذج المعد سلفًا لإثبات العبارات الشرطية بوساطة الاستقراء (الملاحظة 25.3.1). وأن اكتشاف الحالات الصغيرة (القيم الصغيرة) يمكن أن يساعد على فهم المسألة المراد إثباتها، أو فهم الطريقة التي يمكن أن تنتقل بها من قيمة للوسيط إلى القيمة التي تليها، إلا أن مثل هذا النقاش لا يشكل جزءًا من الإثبات النهائي فيما عدا ما نحتاج إليه في الخطوة الأساس.

تستخدم بعض التقنيات الأخرى كلًّا من مبدأ القيم القصوى وصناديق الحمام. أحيانًا، نتعامل مع أصغر مثال ناقض لعبارة منشودة، ومن ثم نستخدم وجوده للحصول على مثال ناقض أصغر، ويمكن رؤية ذلك بوصفه استقراءً أو تناقضًا أو تطرفية (قيم قصوى).

ربما لا يكون الأسلوب (أو التقنية) التي تعطي حلًا لمسألة معينة واضحًا ففي بعض الأحيان، نجد أن هناك أكثر من طريق يصلح للإثبات، وبذلك نحصل على براهين مختلفة للمسألة نفسها. يقوم الرياضيون بإيجاد البراهين من خلال العمل بجد واجتهاد. إن الصلابة والمرونة ميزتان؛ فعلينا تجريب التقنيات التي يمكن تخيلها جميعها لحل مسألة معينة. فضلًا عن أن ممارسة حلّ المسائل تزيد الفهم، وتُسرع عملية إيجاد البراهين.

الخطوة الأخيرة هي إعطاء تفسير وشرح تام بحذر للحل، وكتابة الإثبات يمكن أن تُظهر الدقة المختفية أو الحالات التي تم تمحيصها. كما أنها يمكن أن تشرح وتوضح أفكارًا يمكن أن تكون غير ذات صلة. إضافة إلى أن إنتاج حل مكتوب كتابة جيدة يجب أن يشتمل على مراجعات مكررة. ومن المفيد كتابة الحل مسبقًا، ووضعه جانبًا، وقراءته ثانية قبل تسليمه؛ وذلك لرؤية ما إذا كان هذا الحل ما زال تامًا ومقنعًا وشاملاً؛ لأن عملية كتابة الحل تساعد على تطوير مهارات مفيدة كالقدرة على التعبير عما في النفس بصورة مختصرة وواضحة ودقيقة.

مساعدات محددة إضافية (Supplemental Specific Hints)

14.1.1. يساعد التناقض غالبًا على الاستنتاجات غير الموجودة. افترض أن مثل هذا التفكيك موجود، فما الاستنتاجات التي تستنتجها حول اللوح؟

25.1.1. استنتاج آخر غير موجود. افترض وجود حلقة سباعية، واستخدم خواص بيان بيترسون لتحصل على تناقض.

26.1.1. خذ في الحسبان ضلعًا في G (يمكن أن تبدأ برأس).

27.1.1. ابدأ برأس في G.

29.1.1. خذ في الحسبان مجموعة المعارف الشخصية أو اللامعارف (أيهما أكبر) لشخص معين.

32.1.1. اهتم بنوعية حجم كل مجموعة من مجموعتي التجزئة.

34.1.1. بما أنه يجب أن تكون البيانات الجزئية الثلاث متشاكلة زوجًا زوجًا، فإن هذا يساعد على اختيار رسم للبيان يكون له تماثل ثلاثي الطية.

37.3.1. قارن المساهمات من أطراف المسارات بالمساهمات من الرؤوس الداخلية.

38.3.1. احصل على تفكيك من تجزئة ثنائية، واحصل بالمقابل على تجزئة ثنائية من تفكيك.

15.2.1. ماذا يحدث عندما يتكرر رأس؟

17.2.1. استخدم خاصية التعدي لعلاقة الربط.

18.2.1. ارسم G لبعض قيم n الصغيرة من أجل معرفة ماذا سيكون الجواب، ثم برهن ذلك.

19.2.1. للحد الأعلى؛ استخدم الحقيقة الآتية: عندما يكون القاسم المشترك الأعظم بين العددين a وb يساوي 1، فإن هذا يوجد أعدادًا صحيحة pوq، بحيث إن $pa + qb = 1$.

26.2.1. التوصيف المميز للبيانات الثنائية الفرع يجعل هذا سهلاً.

28.2.1. المسألة لا تحصر الانتباه إلى البيانات الجزئية المستحدثة.

38.2.1. استخدم الاستقراء والتمهيدية 25.2.1.

40.2.1. إذا كان كل من P و Q منفصلين، فخذ في الحسبان مسارًا أقصر من $V(P)$ إلى $V(Q)$، واحصل على تناقض.

12.3.1. ربما يساعد على ذلك بناء مثال في الحالة $k=1$، ثم عمّم ذلك.

15.3.1. للفرع (b)؛ افتراض المتممات.

18.3.1. على فرض أن e ضلع – قطع، و H مركبة من مركبات $G - e$، احسب عدد أضلاع H من خلال وجهة نظر كل مجموعة من مجموعتي التجزئة. وستحصل على تناقض بوضع مساواة بين هذه الصيغ.

19.3.1. للفرع الثاني؛ اجعل البيانات المنشودة ترتبط ببيانات منتظمة من الدرجة 3.

22.3.1. في فرع (a)، ماذا يحدث إذا وجد لرأس خارجي ثلاثة جيران في $V(\mathrm{C})$؟ للفرع (b)؛ إن الفرع (a) يعطينا حدًّا واحدًا على عدد الأضلاع بين $V(\mathrm{C})$، و $V(\mathrm{G}) - V(\mathrm{C})$، فضلًا عن أن الفرض على الدرجة الصغرى يعطينا حدًّا آخر.

28.3.1. عندما يكون k زوجيًّا، جد تشاكلاً. ولكن عندما يكون k فرديًّا، فجد حلقة فردية في Q'_k.

31.3.1. للفرع (a)، افترض مثال 18.3.1.

33.3.1. للفرع (a)؛ جد ارتباطًا واحدًا لواحد بين العناصر غير المجاورة لـ x، وأزواج جيران x.

34.3.1. خذ في الحسبان رأسين متجاورين x, y، وجد ارتباط واحد لواحد بين $V(\mathrm{x})$ و $V(\mathrm{y})$.

43.3.1. للبناء؛ لاحظ أن البيانات المنتظمة غير صالحة؛ لأننا نحتاج إلى رؤوس درجاتها عالية، وكذلك إلى رؤوس أخرى درجاتها متدنية، إلا أن الرؤوس جميعها يجب أن تكون مجاورة لرؤوس درجاتها عالية.

50.3.1. لكل n، ابن مثالاً بأضلاع قليلة، واستخدم الاستقراء على n لتبرهن أن هذا أفضل ما يمكن. إن صيغة جمع الدرجاتَ تعطي أنه يوجد للبيان البسيط الذي له n من الرؤوس وعدد أضلاعه أقل من $n3/2$ رأس درجته تساوي 2 على الأكثر.

53.3.1. عرِّف بيانًا لعمل نموذج لأزواج الأشخاص الذين ما زال بإمكانهم اللعب معًا. ما الشرط الذي يسمح بلعب شوط (دور) إضافي؟

55.3.1. للفرع (a)، برهن أولاً أن $\Delta(G) \geq \mathrm{n(G)}/2$. وللفرع (b)؛ برهن أن $\overline{G}$ يجب أن يكون غير مترابط.

57.3.1. احتفظ بالنموذج المعد سلفًا الموجود في الملاحظة 25.3.1. حاضرًا في ذهنك.

63.3.1. أي إثبات استقرائي للكفاية يجب أن يتحقق من أن «الشيء الأصغر» يحقق الشرط قبل تطبيق فرضيات الاستقراء.

16.4.1. للفرع (a)؛ اجعل تعريف l حاضرًا في ذهنك.

23.4.1. بيّن أنه يمكن تغيير التوجيه غير المتوازن لتقليل (تصغير) عدم التوازن.

25.4.1. أعط توجيهًا يحوي أكثر من رأسين، بحيث تكون درجة خروج كل منهما فردية، ثمّ اعمل تبديلًا (تغيرًا) مناسبًا.

29.4.1. استخدم الترابط بقوة لـ D، والحلقة الفردية المرجعية في G في بناء حلقة فردية في D.

34.4.1. برهن أن درجة الدخول تساوي درجة الخروج لكل رأس في البيان الجزئي F من G الذي يتكون من أضلاع موجهة عكسيًّا في H. قرب G من H عن طريق إيجاد حلقة ثلاثية عكسية تشتمل على رأس له درجة خروج عظمى في F.

37.4.1. استخدم الاستقراء القوي على رتبة الدوري.

38.4.1. في أحد الاتجاهين، برهن وجود مثل هذا الدوري على n من الرؤوس، وذلك إذا وجد دوري على $n - 2$ من الرؤوس. كن حذرًا عندما $n = 6$.

2.1.2. في الفرع (b)، تشتمل العبارة على إمكانية إضافة نسخ مضاعفة من الأضلاع الموجودة أصلاً (سابقًا).

17.1.2. قارن بإثبات $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B, C}$ في المبرهنة 4.1.2.

25.1.2. استخدم الاستقراء على n، ولخطوة الاستقراء؛ احذف ورقة.

27.1.2. احتفظ بالمحدد القياسي في ذهنك. برهن أن الشرط على قائمة الأعداد كافٍ وضروري لوجود

شجرة درجات رؤوسها $d_1, ..., d_n$. ويجب إثبات تضمينين.

29.1.2. احسب الأضلاع بطريقتين.

31.1.2. خذ في السحبان المكافئ العكسي.

33.1.2. يجب إثبات تضمينين، كل منهما يتعامل مع بيان مترابط على n من الرؤوس.

34.1.2. استخدم الاستقراء على n.

40.1.2. عبر عن G كاتحاد لعدد مناسب من المسارات. ماذا يمكن أن نعمل إذا لم تكن هذه المسارات متقاطعة زوجًا زوجًا؟

41.1.2. استخدم شجرة مولدة لأحد المركبات.

47.1.2. في الفرع (a)، تذكر أن اتحاد المسارين من u إلى v، ومن v إلى w ليس بالضرورة مسارًا من u إلى w.

59.1.2. في المسألة، كلٌّ من n و k مثبت. ويجب إعطاء الجواب بدلالة هذين الوسيطين.

61.1.2. كوّن G' من $G - x - y$ بإضافة k ضلعًا منفصلاً تربط $N_G(x)$ إلى $N_G(y)$.

5.2.2. لكل حلقة خماسية؛ خذ في الحسبان عدد الأضلاع التي ستستخدم.

7.2.2. من التماثل، نعلم أن كل ضلع في K_n يقع في العدد نفسه من الأشجار المولدة لـ K_n.

9.2.2. استخدم شيفرة برفر.

19.2.2. في الشجرة التي مجموعة رؤوسها $[n]$. اقطع الضلع عند الرأس n على المسار من n إلى 1.

24.2.2. ابن الأضلاع بترتيب متناقص بحسب الفرق بين طرفي كل ضلع.

29.2.2. إذا لم تكن الشجرة جرارة، فإنها تحوي الشجرة Y الموجودة في المثال 18.2.2.

33.2.2. افترض الرؤوس التي يمكن الوصول إليها بمسار من الجذر.

11.3.2. ماذا يحدث إذا كانت الشجرة المولدة ذات الوزن الأصغر تحوي ضلعًا وزنه أكبر من الوزن الأكبر في الشجرة المولدة التي تمثل عنق الزجاجة؟

13.3.2. افترض أثقل ضلع في T'، وذلك من بين الأضلاع غير الموجودة في T.

31.3.2. في خطوة الاستقراء. قم جزّئ مجموعة الكلمات في شفرة أمثل إلى مجموعتين بحسب الجزء (القطعة) الأول (الأولى).

8.1.3. افترض الفرق التماثلي لمواءمتين كاملتين.

9.1.3. استخدم غطاء رؤوس، أو قارن مواءمة عظمى بمواءمة أعظمية مستخدمًا الفرق التماثلي.

16.1.3. استخدم الاستقراء على k.

24.1.3. حول هذا إلى مسألة بيانات.

25.1.3. جد مصفوفة تباديل مناسبة، وعدّل ما تبقى بمعامل ثابت لتطبيق فرضيات الاستقراء.

26.1.3. استخدم النتيجة 13.1.3 للفرع (a)، والاستقراء على n للفرع (b).

29.1.3. ماذا تقول نظرية كونج وإيجرفاري عن مسألة غطاء الرؤوس عندما لا توجد (G) مواءمة من الحجم k .

30.1.3. يتطلب هذا إيجاد حد ومثال يحقق هذا الحد.

39.1.3. إعتبر الأضلاع التي تربط مجموعة مستقلة عظمى بمتممتها.

11.2.3. افترض أن أول حدوث لمثل هذا الرفض في خوارزمية مشاريع الزواج هي أن a ترفض x حتى في الحالة التي تمثل فيها xa زوجًا في مواءمة مستقرة M. إذا رفضت a x من أجل y، فلاحظ أن y يزاوج مع امرأة b في M ماذا يمكن أن نستنتج حول ما يفضله هؤلاء الأشخاص؟

2.3.3. لا يعدّ غطاء الرؤوس قويًّا بصورة كافية لإثبات أمثلية المواءمة.

7.3.3. هذا سهل عندما يكون k زوجيًّا، أما إذا كان فرديًّا، فقم ببناء مثال للحالة $k = 3$ وعمم ذلك.

11.3.3. استخدم نظرية توت.

12.3.3. لإثبات وجود مواءمة حجمها يساوي الوزن لغطاء معمم؛ اجعل T تساوي مجموعة عظمى من الرؤوس تكبر كمية $o(G-T)$ - $|T|$ (النقص).

14.3.3. أثبت أن $o(G-S)-|S|$ تكون صغيرة كفاية وذلك لكل $S \subseteq V(G)$. وهناك طريق آخر لحلّ المسألة، وهو أن تجعل X مجموعة بها k من الرؤوس تولد أصغر عدد من الأضلاع، وبعد ذلك تبرهن وجود مواءمة من X إلى $\overline{X}$.

16.3.3. عمّم التعليل الموجود في النتيجة 8.3.3 .

17.3.3. إذا أعطيت رأسين متجاورين x ،y ، فحقق شرط توت لـ $G - x - y$.

18.3.3. فكر في حجم مناسب لمجموعة توتية S (Tutte set) وعدد مناسب من المركبات الفردية في $G - S$

19.3.3. استخدم النتيجة 8.3.3 للحصول على عامل أحادي. جمّع نسخًا من P_4 عن طريق الأخذ في الحسبان تدويرًا منسجمًا للحلقات في العامل الثنائي المتبقي .

5.1.4. برهن أن G' مترابط، ولا يوجد له رأس قطع. يوجد كذلك إثبات قصير باستخدام المسارات المنفصلة داخليًّا

10.1.4. المبرهنة 11.1.4 والنتيجة 5.3.1. تعطي إثباتا قصيرًا.

14.1.4. برهن المكافئ العكسي .

17.1.4. برهن أولاً أنه إذا كان $|[S,\overline{S}]|=3$ ، فإن حجم كل من S و $\overline{S}$ يكون فرديًّا .

18.1.4. للفرع الأول؛ برهن أنه يوجد للبيان الجزئي المستحدث من الجانب الأصغر لضلع قطع والذي له ضلعان على الأكثر، العديد من الأضلاع لتفادي وجود مثلث .

23.1.4. حقق شرط توت. تذكر أن الشرط الممنوع هو عدم وجود النجوم الكبيرة بوصفها بيانات مستحدثة، وليس النجوم الكبيرة فقط.

26.1.4. يمكن إثبات الضرورة من خلال تتبع الحلقات حلقة حلقة. وللكفاية، عرف بيانًا مساعدًا رؤوسه هي مركبات $G - F$، برهن أن هذا البيان ثنائيّ الفرع من أجل الحصول على التجزئة المنشودة لمركبات $G - F$.

27.1.4. تذكر أن ضلع القطع يكون رابطة إذا وفقط إذا كانت رؤوس كل جانب من جانبي القطع تحدث بيانًا جزئيًّا مترابطا.

6.2.4. استخدم التفكيك للمقابض .

14.2.4. مبدئيًّا، يشكل هذا النسخةَ الضلعية للمبرهنة 2.2.4 بالإضافة إلى الاستنتاج. والنقاط المشتركة تحدث بالترتيب نفسه على المسارين .

21.2.4. ماذا نعرف عن البيانات المترابطة التي لها رأسان على الأكثر، درجة كل منهما فردية؟

23.2.4. من بيان ثنائي الفرع G، صَمِّمْ بيان H، بحيث يوصل تطبيق نظرية منجر على H إلى النتيجة التي نحتاج إليها على G .

28.2.4. استخدم تمهيدية التوسع التمديد ومبرهنة منجر.

13.3.4. صمّم شبكة بحيث يوجد تحديد (تعيين) للمشاركين في مجموعات (زمر) إذا وفقط إذا كانت قيمة تدفق الشبكة تساوي $\sum m_i$. استخدم نظرية فورد وفولكرسون للتعبير عن مثل هذا التدفق بدلالة القطوع (جمع قطع). برهن أن الشرط المعطى على المعطيات يكافئ الشرط الموجود على القطوع من المنبع (المصدر) إلى المصب (البالوعة).

20.1.5. إحدى الطرق هي أن تبرهن المكافئ العكسي، إضافة إلى طريقة أخرى هي من خلال حذف حلقة فردية.

22.1.5. نحتاج إلى ترتيب بحيث إنه عندما تتم مقابلة (مواجهة أو وصول) أي رأس، فإنه يوجد لذلك الرأس جاران على الأكثر من بين الرؤوس التي تسبقه في الترتيب.

23.1.5. تشتمل الحدود الدنيا على الحساب و (أو) مبدأ طواقي الحمام. إن الجزء المثير (الممتع) هو أن نعطي بناءً لإثبات أن البيان قابل للتلوين بـ $k + 2$ لوناً، بحيث إن $k + 1$ لا تقسم n.

26.1.5. (كذلك المسألة التالية) احصل على عصبة وتلوين فعلي من الحجم نفسه.

30.1.5. إذا أعطيت تلويناً فعليًّا بـ r من الألوان للبيان G_n، فأنتج حشدًا من المجموعات الجزئية المختلفة من الألوان. ترتبط كل مجموعة بعنصر من n وبالعكس، وضّح كيف تستخدم مثل هذا الحشد لإنتاج تلوين فعلي.

31.1.5. من تلوينٍ فعلي بـ m من الألوان، ابنِ مجموعة من الحجم نفسه من مجموعة مستقلة كبيرة بما فيه الكفاية، وابنِ تلويناً فعليًّا بـ m من الألوان.

32.1.5. كما في المبرهنة 23.2.1، يمكنك أن تستخدم الاستقراء لتشفير الألوان كثنائيات من عديد -k، وطبق مبدأ طواقي الحمام.

39.1.5. احصل على متباينة تربيعية لـ k بدلالة m من خلال استخدام حدود عليا ودنيا على $e(G)$.

41.1.5. باستخدام فرضيات الاستقراء، لا ينتهك بيان جديد الحد إلا إذا حذفنا رأسًا، ووجدنا تناقضًا بين العدد اللوني لكل من البيان ومتممته. هل يمكن حدوث ذلك في الحالة التي يكون فيها مجموع الأعداد اللونية يساوي القيمة العظمى سلفًا؟

44.1.5. احصل على الحد الأعلى من الفرع (a). وللحد الأدنى؛ استخدم التوجيه الموجود في المبرهنة 21.1.5 نفسه.

51.1.5. عدّل تلويناً فعليًّا بـ k من الألوان، بحيث يصبح تلويناً فعليًّا بـ $k + 1$ من الألوان له قيم محددة سلفًا على رؤوس P.

2.2.5. افترض المتممة.

9.2.5. بما أن G' مترابط، إذن يكفي أن نفترض حذف الأضلاع من G'، انظر ملاحظة 12.2.5.

15.2.5. استخدم الجوارات الكبيرة بوصفها صفوفًا لونية، في حين يبقى هناك رؤوس ذات درجات عالية، ثم طبقّ نظرية بروك.

17.2.5. للفرع (b)، افترض المتممة.

19.2.5. عدّل $K_{n-a} + \overline{K}_a$ لتحصل على $T_{n,r}$، وعَدِّد (احسب) التغييرات في عدد الأضلاع.

21.2.5. إن إثبات المبرهنة 9.2.5 يحول البيان الذي ليس له عصبة من الدرجة $r + 1$ إلى بيان متعدد الفروع من الدرجة r له عدد الأضلاع نفسه على الأقل. يزداد عدد الأضلاع بإحكام، إلا إذا تحققت المساواة في كل خطوة من خطوات الحساب. ماذا نحتاج لتحقيق المساواة؟

27.2.5. للحد الأعلى، إن حذف أضلاع حلقة من مثال ناقض يترك غابة، وهذا يحصر الخصر ويحدده. إن الاختزال للحالة $\delta(G) \geq 3$ يتطلب أن يكون $n \leq 8$، وهذا يتناقض مع تمرين 26.2.5.

28.2.5. للحد الأعلى، اختزل للحالة $\delta(G) \geq 3$، وافترض حلقة أقصر C.

إن حذف $V(C)$ يترك غابة، وأوراقها تمتلك ثلاثة جيران على الأقل على C.

29.2.5. للفرع (b)، إذا كان الفرق في الحجم بين أكبر وأصغر صف لوني أكثر من 1، فاستخدم الفرع (a) لتغيير التلوين بالطريقة المناسبة.

32.2.5. يستخدم الفرع (a) خواص البيانات الحرجة من الدرجة k لـ G وH وفي الفرع (c)، يمكن إعطاء أمثلة صريحة من الرتبة 4،6، و8، ثمّ تطبيق فرع (a).

40.2.5. لحساب العدد اللوني؛ افترض مجموعات مستقلة. ولمنع تقسيمات البيانات التامة افترض قطوع رؤوس. إن أي تقسيم لـ K_k يجب أن يحوي k - 1 مسارًا منفصلاً داخليًّا زوجًا زوجًا تربط بين رأسين من رؤوسه التي درجتها k - 1 .

43.2.5. استخدم الاستقراء على k في خطوة الاستقراء، أهمل مجموعة جزئية مناسبة من $V(G)$.

44.2.5. اختزل للحالة $\delta(G) \geq k - 1$، ثم استخدم الاستقراء على k.

3.3.5. إذا كانت $\chi(G; k) = k^4 - 4k^3 + 3k^2$، فكم رأسًا وضلعًا يوجد للبيان G؟

4.3.5. للفرع (a)؛ استخدم التكرار اللوني أو نظرية 10.3.5.

6.3.5. فسر (علل) كيف تظهر المساهمات في معاملات $k^{n(G)-1}$ عند حساب $\sum_{r=1}^{n} P_r(G)k_{(r)}$.

12.3.5. استخدم التكرار اللوني للفرع (a). وللفرع (b)، ارجع إلى التمرين 40.3.1 المتعلق بأكبر عدد من الأضلاع في بيان على n من الرؤوس وعدد مركباته r .

18.3.5. يضمن الفرع (a) أن الفرع (b) يحتاج إلى إجراء عملية حسابية واحدة. إن التعبير عن كثيرة الحدود اللونية بوصفها حاصل جمع كثيرتي حدود لونيتين يشتمل على إضافة ضلع كما في المثال 9.3.5 .

23.3.5. استخدم ترتيب حذف مبسطي .

26.3.5. للفرع (a) استخدم ترتيب حذف مبسطي، يمكن أن يكون الرأس المبسطي موجودًا في $H \cap G$ أو لا يكون. وللفرع (b)، لاحظ أن $N(x)$ ربما يساوي $V(G) - x$ أو لا يساويه.

28.3.5. ابنِ ترتيب حذف مبسطي لـ G، وتوجيهًا متعديًا لـ $\overline{G}$.

20.1.6. ما بيانات المستوى التي تحوي وجهًا واحدًا؟ وعندما يحوي بيان المستوى أكثر من وجه، فما نوع الأضلاع التي يمكن أن نحذفها لتقليل عدد الأوجه؟

24.1.6. في خطوة الاستقراء، احذف ضلعًا لحلقة.

25.1.6. استخدم صيغة أويلر..

28.1.6. يمكن إثبات هذا بتطبيق صيغة أويلر لبيان سوي مناسب، إضافة إلى أنه يمكن استخدام الاستقراء في إثبات المطلوب.

30.1.6. قلّد إثبات المبرهنة 23.1.6.

6.2.6. من أجل تطبيق الادعاء وفرضيات الاستقراء؛ جد رأسًا مناسبًا لحذفه من بيان أكبر.

7.2.6. إذا أعطيت البيان G من أجل اختباره، فابنِ البيان H بحيث يكون G سويًّا خارجيًّا إذا وفقط إذا كان H سويًّا، ومن ثم يمكن تطبيق نظرية كوراتوسكي على H.

8.2.6. نحتاج إلى الأخذ في الحسبان عدة حالات تتعلق بكيفية ترتيب أي تقسيم لـ K_5 في البيان .

9.2.6. البناء، ابدأ بـ $n = 5$. صغّر الحد الأعلى لافتراض البيانات السوية التي لها $2n$ ضلعًا، والتي درجتها الصغرى تساوي 3 على الأقل وتحوي مثلثًا. وفي كل حالة، احصل على حلقات منفصلة، أو تقسيم لـ $K_{3,3}$.

11.2.6. افترض أن H' بيان جزئي قابل للانقباض إلى H. خذ في الحسبان البيانات الجزئية من H' التي تتقلص (تنقبض) لرؤوس H.

5.3.6. استخدم نظرية الألوان الأربعة.

9.3.6. عندما يكون طول C=4، فإن استبدال الداخل (أو الخارج) بضلع واحد بين رؤوس متضادة في C يسمح للفرد بالحصول على تلوين بأربعة ألوان لفلقة C– التي تستخدم ألوانًا مختلفة على رأسين متضادين من رؤوس C

12.3.6. للبناء؛ استخدم مجموعات من ثلاثة رؤوس لبناء "خلوات" بحيث لا يوجد أي حارس يرى أكثر من خلوة واحدة.

19.2.6. أثبت أن اتحاد هذين البيانين هو $C_5 \vee K_6$.

20.3.6. برهن أن الحد الأدنى الناتج عن قضية 10.3.6 يساوي $r/2$ على الأقل عندما $s>(r-2)^2/2$ ويعطينا تفكيكًا إلى $r/2$ بيانيًّا جزئيًّا سويًّا.

25.3.6. خذ في الحسبان الضرب الكارتيزي للحلقات.

27.3.6. افترض النسخ من $K_{m,n}$ في أي رسم لـ $K_{m+1,n}$.

38.3.6. (كذلك المسألة التالية). خذ في الحسبان ما يحدث عندما يتحرك رأس عبر ضلع وللفرع الثاني؛ افترض رسمًا يسهل فيه عدّ التقاطعات .

11.1.7. للضرورة في فرع (b)؛ برهن أن معدل درجة الرؤوس يجب أن يكون 2 .

16.1.7. اجعل $G = L(H)$، استخدم H لتبرهن أن $S \subseteq V(G)$عدد مركبات $G - S$ يساوي $|S|+1$ على الأقل.

17.1.7. استخلص طمرًا لـ G من طمر لـ $L(G)$.

20.1.7. افترض تعريف 20.4.1 .

24.1.7. ربما تكون معالجة الحالة $H = K_2$ أولاً مفيدة على الرغم من عدم حاجتنا إلى إثبات هذه الحالة منفصلة عن الحالة العامة.

26.1.7. كل ضلع يقع على رأس قطع يجب أن يظهر في أحد الألوان.

33.1.7. برهن أننا نستطيع عمل تحسين عندما يظهر لون بكثرة، وعندما يكون اللون الثاني غير كافٍ .

17.2.7. اختزل المسألة للحالة التي يكون فيها البيانان الهاملتونيان حلقتين.

23.2.7. لكل k، حدد أكبر حجم لـ S بحيث يوجد لـ $G - S,\ k$ من المركبات .

29.2.7. اكتب الشرط المشتمل على درجات G، و $\overline{G}$ بدلالة درجة G فقط، ثمّ بين أن G تحقق شرط كفتال للمسارات المولدة.

31.2.7. استخدم نظرية كفتال وإيردوز.

32.2.7. كن حذرًا حول كيفية تعديل التحويل للدرجات، صياغة الشرط صحيحة. (نظرية 19.2.7) .

3.3.7. البيان الثنوي منتظم من الدرجة 3 .

4.3.7. افترض الأوجه الداخلية والخارجية لحلقة مولدة كلّ على حدة .

5.3.7. انقل هذه المسألة إلى عبارة بُرهنت سابقًا .

17.3.7. اختزل هذا لدراسة البيان الذي حُلِّلَ في المثال 6.3.7.

18.3.7. عدِّل البيان للحصول على الحالة التي تنطبق فيها نظرية جرينبرج .

21.3.7. إذا أعطيت ثلاثة ألوان على $\{x_{i-1}x_i,\ y_{i-1}y_i,\ z_{i-1}z_i\}$، فخذ في الحسبان إمكانية الألوان الثلاثة على $\{x_ix_{i+1},\ y_iy_{i+1},\ z_iz_{i+1}\}$.

ملحق (Appendix D)

مسرد المصطلحات (Glossary of Terms)

بالإضافة إلى المصطلحات المختلفة في هذا الكتاب، فإن قائمة المصطلحات هذه تحتوي على بعض المصطلحات المتعلقة بالمواضيع المطروحة، والتي يمكن للقارئ أن يواجهها في دراساته الإضافية لهذه المواضيع. ويشمل هذا بعض المصطلحات البديلة التي يستخدمها مؤلفون آخرون.

تمثل المفردات شرحًا غير رسمي للتعريف. وتشير الأرقام المستخدمة داخل الأقواس إلى رقم الصفحة التي ورد بها التعريف الكامل، أو الصفحة التي استخدم فيها المصطلح للمرة الأولى. عندما تستخدم"G" دون تحديد، فإنها تشير إلى بيان، أو ربّما بيان موجّه، أما "D"، فتشير إلى بيان موجه، في حين تشير v أو e إلى رأس أو ضلع، إضافة إلى n التي تشير إلى عدد الرؤوس.

خاصية الامتصاص (الماترويدات) [351]: $r(X) = r$ $r(X \cup f)$ $= (X \cup e)$ تتضمن أن: $r(X)=f(X \cup f \cup e)$

لا حلقي [67] : خال من الحلقات.

توجيه لا حلقي [203.208] : توجيه دون حلقات.

مصفوفة التجاور A [6] : المدخلة $a_{i,j}$ تساوي عدد الأضلاع من الرأس i إلى الرأس j.

علاقة التجاور: مجموعة من الأزواج المرتبة أو غير المرتبة التي تشكل أضلاعًا في بيان أو في بيان موجه.

مجموعة تجاور $N(v)$: مجموعة الرؤوس المجاورة لـ v.

متجاورة [2] : الرؤوس التي هي نقاط طرفية لضلع. وتستخدم أحيانًا لوصف أضلاع لها نقاط طرفية مشتركة.

يقترن: يكون مجاورًا لـ

قرين: مصفوفة مرافقات المعاملات.

في أغلب الأحيان [430] : لها احتمالية مقاربة 1.

مسار متناوب -M: مسار يتناوب بين أضلاع في M وأضلاع ليست في M أيضًا.

السلف [100]: في شجرة مجذرة، رأس على المسار إلى الجذر.

مضاد سلسلة: عائلة من المفردات غير القابلة للمقارنة زوجًا زوجًا (تحت علاقة ترتيب).

مضاد عصبة: مجموعة مستقرة.

مضاد فجوة: بيان جزئي مستحدث بشكل متممة حلقة.

خوارزمية التقريب [496]: خوارزمية كثيرة الحدود بالنسبة إلى الزمن، ونسبة أدائها محدودة.

مخطط تقريب [496]: عائلة من خوارزميات التقريب لها نسبة أداء جيدة بصور اختيارية.

الشجراني: غابة موجهة فيها الدرجة الخارجة لكل رأس تساوي 1 على الأكثر.

التشجير $\gamma(G)$ [372]: أقل عدد من الغابات يغطي الأضلاع.

قوس: ضلع موجه (زوج مرتب من الرؤوس).

مترابط قوسيًّا من الدرجة k: مثل مترابط ضلعيًّا من الدرجة k للبيانات الموجهة.

نقطة مفصلة: رأس، حذفه يزيد عدد المركبات.

مسألة الواجب (الفرض المنزلي) [126]: صغّر (أو كبّر) مجموع أوزان الأضلاع في مواءمة كاملة لبيان ثنائي الفرع تام، متساوي حجم الفرعين.

النجم الثلاثي [346]: ثلاثة رؤوس مختلفة بحيث إن كل زوج منها مربوط بمسار يتفادى جوار الثالث.

لا متماثل: لا يوجد له أي تشاكل ذاتي مختلف عن التشاكل المحايد.

مقارب [431]: له نسبة تقترب من 1 .

خاصية التوسيع (الماترويدات) [352]: $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ حيث $|I_2|>|I_1|$ تتضمن وجود $e \in I_2 - I_1$ بحيث إن $I_1 \cup e \in \mathbf{I}$.

المسار الموسع [109]: للمواءمة هو مسار متذبذب يمكن استخدامه لزيادة حجمها؛ وللتدفق، يزيد من قيمة التدفق.

التشاكل الذاتي [14]: تبديلة للرؤوس تحافظ على علاقة التجاور.

زمرة التشاكل الذاتي $\acute{e}$: زمرة التشاكلات الذاتية تحت عملية تركيب التشاكلات.

معدل الدرجة: $\sum d(v)/ n(G) = 2e(G)/n(G)$.

متباينة أزوما (Azuma):حد على الاحتمالية في نهاية التوزيع.

الرجوع بالأثر (استرجاع الأثر) [156]: البحث بعمق أولاً (البحث العمودي أولاً).

البيان المتوازن [434]: هو البيان الكامل، وهو البيان الجزئي الذي له أكبر معدل درجة رؤوس.

متعدد الفرع من الدرجة k المتوازن: تختلف مجموعات التجزئة لرؤوسه بعضها عن بعض من حيث الحجم بمقدار 1 على الأكثر (انظر متساوي التجزئة).

عرض النطاق: الأصغر، على ترقيم الرؤوس بأعداد صحيحة مختلفة، لأكبر فرق بين العلامات الدالة على الرؤوس المتجاورة.

مركز الكتلة [78]: رأس يصغر مجموع المسافات للرؤوس الأخرى.

أساس (ماترويدات) [349]: مجموعة مستقلة كبرى.

خاصية تبادل الأساس (ماترويدات) [351]: لكل $B_1,B_2 \in \mathbf{B}$ و $e \in B_1 - B_2$ يوجد عنصر $f \in B_2 - B_1$ بحيث إن $B_1 - e + f$ هي أساس.

بيان بيرج [340] (Berge): بيان ليس له فجوة فردية أو مضاد فجوة فردية.

أفضل ما يمكن: تصبح غير صحيحة عند إهمال بعض الشروط.

الشجرة الثنائية المركز: الشجرة التي مركزها ضلع.

عصبة ثنائية [9]: بيان ثنائي الفرع تام.

ثنائي الترابط: مترابط من الدرجة 2.

قابل للتمثيل كبيان ثنائي [65،185]: زوج من المتتاليات التي يمكن تحقيقها كدرجات رؤوس لمجموعتي التجزئة في بيان ثنائي الفرع بسيط.

البيان الثنائي -X,Y [24]: بيان ثنائي الفرع، مجموعتا تجزئته هما: X , Y.

مصفوفة ثنائية (أو متجه): المدخلات في $\{0,1\}$ جميعها.

ماترويد ثنائي [357]: يمكن تمثيله على الحقل الذي يحوي عنصرين.

شجرة ثنائية [101]: شجرة مجذرة (لها جذر) يوجد فيها طفلان على الأكثر لكل رأس غير ورقة.

معاملات ذات الحدين [487] $\binom{n}{k}$: عدد طرق اختيار k لعنصر من مجموعة بها n من العناصر ويساوي $[n!(n-k)!]/n!$.

ثنائي الفرع [422]: عدد البيانات الجزئية الثنائية الفرع اللازمة لتجزئة الأضلاع.

بيان ثنائي الفرع [4]: البيان الذي يمكن تغطية رؤوسه بمجموعتين مستقلتين.

عدد رامزي لثنائي الفرع: للبيان لثنائي الفرع G، هو أصغر عدد n، بحيث إن أي تلوين ثنائي لأضلاع $K_{n,n}$ يجبر G أن يكون أحادي اللون.

التجزئة الثنائية [24]: تجزئة لمجموعة الرؤوس إلى مجموعتين مستقلتين.

ماسة بيركوف (Birkoff) [259]: هيئة مختصرة خاصة لمسألة الألوان الأربعة.

قالب [155]: (1) بيان جزئي أكبر ليس له رأس قطع (2) بيان ليس له رأس قطع (3) صف في تجزئة مجموعة.

بيان قالب النقطة الفاصلة [156]: بيان ثنائي الفرع بسيط، تكون قوالبه مجموعات التجزئة ورؤوس الفصل، وعلاقة التجاور هي الاحتواء.

بيان القالب: بيان تقاطع قوالب G.

البرعم [142]: حلقة فردية تظهر في خوارزمية إدموندز لمواءمة عامة.

رابطة [154]: قاطعة أضلاع أصغريه.

ماترويد الروابط [362]: ثنائي لماترويد حلقة لبيان.

فضاء الروابط [452]: المتمم العمودي لفضاء الحلقات، التركيبات الخطية للروابط (على حقل يحوي عنصرين).

طمر الكتاب: تفكيك لـ G إلى بيانات سوية خارجية بترتيب متناغم للرؤوس (كما على العمود الفقري لكتاب).

باقة: بيان يتألف من رأس واحد ومجموعة من العرى.

رأس تفريع (تغصين) [249]: رأس، درجته تساوي 3 على الأقل.

التغصين (التفريع): بيان موجه، تساوي درجة الدخول لكل رأس فيه 1 ما عدا رأسًا واحدًا درجة دخوله تساوي 0.

تفريع - r [404]: تفريع جذره r.

البحث الأفقي أولاً [99]: بحث عن الرؤوس بترتيب بحسب بعدها عن الجذر.

الشجرة الأفقية الأولى: الشجرة التي يولدها البحث الأفقي أولاً بدءًا من الجذر.

الجسر [304]: ضلع – قطع.

جسر – H لـ G: الشظية – H (يستخدم من قبل مؤلفين آخرين).

بيان خال من الجسور [304]: بيان ليس له أضلاع – قطع.

نظرية برُوكس: $\chi(G) \le \Delta(G)$ وذلك للبيانات المترابطة، ما عدا العصب والحلقات الفردية.

الصبار [160]: بيان مترابط، بحيث يظهر كل ضلع من أضلاعه في حلقة واحدة على الأكثر.

قفص من نوع [49] (k,g) –: بيان منتظم من الدرجة k، رتبته أصغر ما يمكن وذلك من بين البيانات التي يساوي خصرها g.

السعة [176،178]: حد على التدفق (1) من خلال ضلع في شبكه، (2) عبر قطع.

ضرب كارتيزي $G_1 \square G_2$: البيان الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1)\times V(G_2)$ وأضلاعه معطاة على الشكل $(u_1,u_2) \leftrightarrow (v_1,v_2)$ إذا تحقق أن

(1) $u_1 = v_1$ و $u_2 \leftrightarrow v_2$ في G_2 أو (2) $u_2 = v_2$ و $u_1 \leftrightarrow v_1$ في G_1.
الجرارة [88]: شجرة فيها ممر واحد يحوي احدى النقاط الطرفية لكل ضلع على الأقل.
صيغة كيلي [81]: عبارة تنص على وجود n^{n-2} شجرة مجموعة رؤوسها $[n]$.
خلية ثنائية [268]: على السطح هي منطقة متماثلة بصورة استمرارية مع قرص، بمعنى أن كل منحنى مغلق قابل للتقليص إلى نقطة.
طمر خلية ثنائية [72]: طمر تكون فيه كل منطقة عبارة عن خلية ثنائية.
المركز [72]: البيان الجزئي الذي تحدثه الرؤوس التي اختلافها المركزي أقل ما يمكن.
الشجرة المركزية [78]: شجرة مركزها رأس واحد.
السلسلة α, β –: مسار تتذبذب ألوانه بين اللونين α و β.
كثيرة الحدود المميزة $\phi(G;\lambda)$ [453]: كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة التجاور للبيان، وجذورها هي القيم الذاتية (eigen values).
الأطفال [100]: في شجرة مجذرة، هي جيران الرأس الحالي البعيدة عن الجذر.
مسألة ساعي البريد الصيني [408]: مسألة إيجاد أرخص ممر مغلق يغطي الأضلاع جميعها في بيان موزون ضلعيًا.
عدد الاختيار [408]: قابلية الاختيار.
قابل للاختيار -χ [408]: للقوائم التي من الحجم χ جميعها المعينة لرؤوس G، يوجد تلوين فعلي يختار لونًا لكل رأس من قائمته.
وتر [225]: ضلع يربط بين رأسين غير متتابعين في مسار أو في حلقة.
بيان وتري [225]: لا توجد فيه حلقات غير وترية.
حلقة لا وترية [225]: حلقة مستحدثة طولها 4 على الأقل.
مسار لا حلقي: مسار يُشكل بيانًا جزئيًا مستحدثًا.
الدليل اللوني $\chi'(G)$ [275]: العدد اللوني للأضلاع.
العدد اللوني $\chi(G)$ [5.191]: أقل عدد من الألوان في تلوين فعلي.
كثيرة الحدود اللونية $\chi(G;k)$ [220]: كثيرة حدود، قيمتها عند k تساوي عدد التلوينات الفعلية لـ G باستخدام الألوان $\{1, \ldots, k\}$.
المعاودة (التكرار) اللونية: علاقة معاودة (تكرار) لكثيرة الحدود اللونية.
لوني من الدرجة k [192]: عدده اللوني يساوي χ.
بيان الدائرة [341]: بيان التقاطع لأوتار دائرة.
الدارة [27.60]: صف تكافؤًا لمسارب مغلقة دون تحديد رأس بداية (بيان زوجي)، (تنويه– يستخدمها بعض المؤلفين لتعني حلقة).
البيان المستدير: بيان يُبنى على دائرة بمسافات متساوية بين رؤوسه حيث يعتمد التجاور فيه على المسافة فقط.
بيان أقواس الدائرة [341]: بيان التقاطع لأقواس دائرة.
دوران (جريان) [187]: تدفق في شبكة، بحيث إن محصلة التدفق تساوي 0 عند كل رأس.
المحيط [293]: طول أطول حلقة.
الفقرة (العبارة) [499]: جمع من الأحرف في صيغة منطقية (بولينية) (Boolean).
المخلب [12]: البيان $K_{1,3}$
خال من المخالب: ليس له $K_{1,3}$ كبيان جزئي مستحدث.
العصبة [4]: مجموعة من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا (يستخدم من قبل العديد من المؤلفين ليعني بيانًا تامًا).
غطاء العصب [226]: مجموعة من العصب تغطي الرؤوس (أقل حجم $=\theta(G)$).
التفكيك لعصب: تجزئة مجموعة الأضلاع إلى بيانات جزئية تامة.
غطاء الأضلاع بعصب: مجموعة من البيانات الجزئية التامة التي تغطي الأضلاع.
تحديد العصب: عملية تحافظ على الكمال، وتدمج العصب في بيانين.
عدد العصب $\omega(G)$: أكبر رتبة لعصبة في G.
عدد تجزئة العصب: أقل حجم تفكيك لعصب.
شجرة العصب [327]: تمثيل تقاطع لبيانات وترية. يتألف من شجرة مضيفة، بالإضافة إلى دالة تناظر بين رؤوس هذه الشجرة والعصب الأعظمية لـ G بحيث تحتوي هذه العصب على رأس تشكل شجرة جزئية من الشجرة المضيفة.
مصفوفة وقوع رأس – عصبة [328]: مصفوفة 0,1- فيها المدخلة (i,j) تساوي 1 إذا كان رأس j ينتمي إلى عصبة أعظمية i.
أذن مغلقة [164]: مسار بين رأسين قديمين (ربما متساويين) عبر رؤوس جديدة.
التفكيك لآذان مغلقة [116]: بناء بيان من حلقة من خلال إضافة آذان فعلية.
مجموعة مغلقة (ماترويدات) [360]: مجموعة تساوي ما تولده.

ممر مغلق [20]: ممر يبدأ بالرأس نفسه وينتهي به.

إغلاق [289،360]: (1) البيان $C(G)$ الذي يحصل عليه من G بإضافة أضلاع (ضلعًا ضلعًا) تربط بين الرؤوس غير المتجاورة بحيث يساوي مجموع الدرجات $n(G)$، (2) الصورة تحت مؤثر إغلاق.

مؤثر إغلاق [360]: مؤثر قابل للتمدد، يحافظ على الرتبة، وجامد.

مرافق أساس [360]: أساس للماترويد الثنوي.

مرافق حلقة [360]: حلقة في الماترويد الثنوي.

زوج مرافق حرج: رأسان غير متجاورين، بحيث إن إضافتهما بوصفهما ضلعًا تزيد عدد العصب.

ماترويد مرافق الحلقات [362]: الماترويد الثنوي لماترويد الحلقات.

فضاء مرافق الحلقات: فضاء الروابط.

مرافق بيان [202]: بيان خال من p_4 (يكافئ متممة بيان مصغر).

صف لوني [191]: مجموعة الأشياء التي لها اللون نفسه في تلوين معين.

حرج اللون (حرج لوني) [192] بيان يتحقق فيه أن لكل بيان جزئي منه عددًا لونيًا أصغر.

لوني من الدرجة -k [191]: له تلوين فعلي بـ k من الألوان على الأكثر.

تلوين من الدرجة -k [191،380]: تجزئة لـ k من المجموعات.

تلوين P: تجزئة للرؤوس إلى مجموعات جزئية تولد بيانات لها الخاصية P.

ماترويد أعمدة $M(A)$ [351]: هي ماترويد، بحيث إن مجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية المستقلة خطيًا من أعمدة المصفوفة A.

شفرة خالية من فاصلة: لا توجد كلمة شفرة بوصفها مقدمةً (بداية) لشفرة أخرى.

نظام مشترك للتمثيلات المختلفة (CSDR) [171]: إذا أعطينا عائلتين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ من المجموعات فإن الـ $CSDR$ هي مجموعة من العناصر التي تشكل SDR لـ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$.

بيان مقارنة [228]: بيان له توجيه متعدٍّ.

المتممة $\overline{G}$ [3]: بيان، أو بيان موجه بسيط له مجموعة رؤوس G نفسها، معرف من خلال $uv \in E(\overline{G})$ إذا وفقط إذا كان $uv \notin E(G)$.

تصغير متممة [344]: قابل للاختزال لبيان تافه من خلال تكرار أخذ متممة المركبات.

البيان التام K_n [9]: بيان بسيط، كل رأسين فيه يكونان متجاورين.

البيان المتعدد الفرع -k التام $K_{n1,\ldots,nk}$ [207]: بيان متعدد الفرع، عدد مجموعات رؤوسه الجزئية يساوي k، يتجاور فيه أي رأسين لا ينتميان إلى المجموعة الجزئية نفسها (أحجام مجموعاته الجزئية هي $n_1, \ldots, n_k$).

خلية تامة الوسم [388]: منطقة مبسطية بعلامات دالة مختلفة على الزوايا.

درجة التعقيد [404]: أسوأ حالة لعدد العمليات اللازمة، بوصفها دالة لحجم المدخلات.

المركبة [22]: أكبر بيان جزئي مترابط.

المركبة -S لـ G: انظر الفلقة -S.

تركيب $G_1[G_2]$ [332]: البيان الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1) \times V(G_2)$، والمعرف على الشكل $(u_1,u_2) \leftrightarrow (v_1,v_2)$ إذا وفقط إذا كان $u_1 \leftrightarrow v_1$ في G_1 أو $u_1 = v_1$ و $u_2 \leftrightarrow v_2$ في G_2.

بيان تعارض [252]: بيان، رؤوسه هي الجسور لحلقة، حيث تكون الجسور متجاورة (متعارضة) عندما يكون لها ثلاث نقاط طرفية مشتركة، أو أن يكون لها أربع نقاط طرفية متناوبة على الحلقة.

أوتار متعارضة: وتران، تتناوب نقاطهما الطرفية على حلقة معينة.

التجزئات المترافقة: تجزئتان لـ n، تعطي إحداهما حجم الصفوف، أما الأخرى فتعطي حجم الأعمدة لشكل فيريرز (Ferrers diagram).

مترابط [6]: يحوي مسارًا من u إلى v لكل زوج من الرأسين u و v.

مترابط من الدرجة -k [149،164]: درجة ترابطه تساوي k على الأقل.

علاقة الربط (الوصل) [21]: علاقة يحققها الرأسان x و y إذا وُجِدَ مسار من x إلى y.

الترابطية (درجة الترابط) $\kappa(G)$ [149،164]: أصغر عدد من الرؤوس، بحيث إذا حُذِفَت هذه، يصبح البيان غير مترابط، أو يصبح عبارة عن رأس واحد (أحيانا تسمى درجة "الترابط للرؤوس" وكذلك من أجل الوضوح).

خاصية الواحدات المتتابعة (للصفوف) [176]: توجد تبديلة للأعمدة بحيث تظهر الواحدات متتابعة في كل صف.

قيود المحافظة [186]: للتدفق، تعني أن محصلة التدفق تساوي 0 عند كل رأس.

التقريب (التدوير) المنسجم أو الملائم [84]: تحويل المعطيات ومجاميع الصفوف (الأعمدة) في مصفوفة إلى أقرب الأعداد الصحيحة أعلى أو أسفل، بحيث تبقى مجاميع الصفوف (الأعمدة) صحيحة.

خطوات البناء: خطوات التكرار (المعاودة) لبناء أعضاء صف من البيانات من بيان (بيانات) أساسية أصغر.

الانقباض (التقليص) [84]: أن يحل محل الضلع uv رأس w يقع على الأضلاع جميعها التي كانت واقعة أصلاً على u أو v.
العكس D^{-1}: تحصل عليه من بيان موجه D من خلال تبديل الرأس مع ذيل ضلع.
الطمر المحدب [248]: بيان مستوى، فيه كل وجه محدود مجموعة محدبة، أما الحدود الخارجية فهي مضلع محدب.
دالة محدبة [443]: تحقق المتباينة $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$، لكل a, b ولكل $0 \leq \lambda \leq 1$.
شكل رباعي محدب: لا يقع أي رأس من رؤوسه داخل المثلث الذي تشكله الرؤوس الثلاثة الأخرى.
التكلفة [125]: اسم الدالة الموضوعية للعديد من مسائل إيجاد القيم الصغرى الموزونة.
مرافق شجرة: بالنسبة إلى البيان، تعني الأضلاع التي لا تنتمي إلى شجرة مولدة معطاة.
غطاء (تغطية) -**F**: تغطية لمجموعة أضلاع ببيانات جزئية في العائلة **F**.
ضلع مربع [122،339]: ضلع، يزيد عدد الاستقلال إذا حُذفَ.
بيان حرج [192]: مصطلح يستخدم للعديد من خواص البيانات، حيث يشير إلى أن حذف رأس (أو ضلع، بحسب السياق) يلغي الخاصية المعطاة.
بيان حرج من الدرجة -k [192]: عادة تعني حرجًا لونيًّا، عدده اللوني k.
حرج الترابط الثنائي: إن حذف ضلع يلغي خاصية الترابط الثنائي.
التقاطع [234]: في الرسم لبيان، فإن هذا يعني تقاطعًا داخليًّا لضلعين.
عدد التقاطع $\upsilon(G)$ [262]: أصغر عدد للتقاطعات عند رسم G في المستوى.
المكعب Q_k [36]: المكعب ذو البعد k.
بيان تكعيبي [304]: بيان منتظم من الدرجة 3.
قطع $[S, \bar{S}]$ [166]: الأضلاع من مجموعة جزئية من الرؤوس إلى متممتها (وخصوصًا في الشبكات).
ضلع – قطع [23]: ضلع، يزيد عدد المركبات إذا حُذِف.
مجموعة قطع (فصل): مجموعة فاصلة من الرؤوس.
رأس قطع [23]: رأس، يزيد عدد المركبات إذا حُذفَ.
حلقة [5,55]: بيان بسيط، يمكن وضع رؤوسه على دائرة، وتكون هذه الرؤوس متجاورة إذا وفقط إذا ظهرت بالتتابع على الدائرة.
(تنويه– تستخدم من قبل بعض المؤلفين الآخرين لتعني بيانًا زوجيًّا).
غطاء حلقات مزدوج [312]: قائمة من الحلقات، بحيث يظهر كل ضلع في مفردتين من مفردات القائمة.
حلقة [9] -K: حلقة طولها k، تتألف من k رأسًا و k ضلعًا.
ماترويد الحلقات [350] $M(G)$: ماترويد، داراته هي حلقات G.
الرتبة الحلقية: بُعد فضاء الحلقات، ويساوي عدد الأضلاع – عدد الرؤوس + عدد المركبات.
فضاء الحلقات [452]: الفضاء الصفري لمصفوفة الوقوع: ترتبط العناصر بالبيانات الجزئية الزوجية.
مقدار الترابط – الضلعي الحلقي: عدد الأضلاع التي يجب أن تحذف من أجل فصل مركبة بحيث تحوي كل مركبة من المركبات المتبقية حلقة.
مترابط ضلعي حلقي من الدرجة k: مقدار ترابطه الضلعي الحلقي يساوي k على الأقل.
بيان دوبروجن [61]: بيان موجه يُشفر الانتقال الممكن بين عديد -k، وترتيبه -n عند استلام الأحرف الإضافية.
مسألة قرار (تقرير) [494]: مسألة حسابية جوابها نعم أو لا.
التفكيك (التحليل) [11]: كتابة بيان G على هيئة اتحاد لبيانات جزئية منفصلة ضلعيًّا.
تفكيك [397] – **F**: تفكيك باستخدام بيانات في العائلة **F**.
عدد تفكيك –**F** لـ G: أصغر عدد من البيانات في تفكيك -**F** لـ G.
الدرجة [6,34] $d(v)$: (1) لرأس: هي عدد مرات ظهور هذا الرأس في الأضلاع (ربما تعد من رؤوس هذا البيان).
متتالية الدرجات [44] $d_1 \geq \ldots \geq d_n$: قائمة بدرجات الرؤوس، تفهرس عادة بدليل غير متناقص بغض النظر عن ترتيب الرؤوس.
مجموعة الدرجات: مجموعة درجات الرؤوس (تظهر كل درجة مرة واحدة فقط).
صيغة مجموع الدرجات: $\Sigma d(v) = 2e(G)$.
طريقة الحذف [428]: تقوية لتعليل وجود شيء بطريقة الاحتمالات.
الطلب [184]: قيود على المَصابّ في شبكات النقل.
الكثافة [435]: نسبة عدد الأضلاع إلى عدد الرؤوس.
الضلع التابع [231]: ضلع في توجيه لا حلقي، بحيث ينتج عكسه حلقة.
المجموعة التابعة (غير المستقلة) (ما ترويدات) [349]: مجموعة تحوي حلقة (دارة).
البحث بعمق (العمودي) أولاً [156]: البحث باسترجاع (الرجوع) الأثر من رأس، وذلك بدءًا من عند أحدث رأس تام الوصول إليه، ودعمه في الحالة التي لا يوجد فيها جيران جدد.

خلف (سلالة) [100] x: في الشجرة ذات الجذر؛ هي عناصر الشجرة الجزئية التي جذرها x.
عدد رامزي القطري [385]: عدد رامزي لمثال (شاهد) عندما تكون العتبات (البدايات أو ما يستهل به) (أعداد أو بيانات) متساوية.
القطر [70]: القيمة العظمى للمسافات $d(u,v)$ بين الرؤوس.
بيان موجه [53]: بيان له توجيه.
خوارزمية ديجكسترا [97]: خوارزمية لحساب أقصر المسارات من رأس واحد.
نظرية دل ورث [413] (Dilworth): أكبر عدد للعناصر غير القابلة زوجًا زوجًا يساوي أصغر عدد من المجموعات الجزئية المرتبة كليًّا واللازمة لتغطية العناصر جميعها.
المكعب Q_k ذو البعد [36] K: بيان بسيط مجموعة رؤوسه $\{0,1\}^k$، حيث تتجاور الرؤوس إذا وفقط إذا اختلفت أسماؤها في إحداثي واحد بالضبط.
مخمنة دينتز [410] (Dinitz): كل بيان ثنائي الفرع يكون قابلاً للتلوين ضلعيًّا بقائمة تحوي $\Delta(G)$ لونًا.
البيان الموجه [53]: مجموعة أضلاع، ومجموعة رؤوس، وتحديد رأس كل ضلع حلقة وذيله،مسار، مسرب، ممر – موجه ... الخ [57]: المعنى نفسه دون إضافة الصفة (موجه). ورأس كل ضلع هو ذيل الضلع الذي يليه.
قرص: منطقة مستوية محاطة بمنحنى مغلق.
غير مترابط (منفصل) [6]: بيان له أكثر من مركبة.
مجموعة فاصلة [152]: مجموعة أضلاع، إذا حُذفَت، فإنك ستحصل على رأس لا تستطيع الوصول إليه من رأس آخر.
الاتحاد المنفصل [39] $G_1 + G_2$: اتحاد لبيانينِ منفصلي مجموعتي الرؤوس.
بيان فصل: متممة بيان تقاطع.
المسافة [70] $d(u,v)$: أصغر طول لمسار من u إلى v.
طمر حافظ للمسافات [400]: دالة $f: V(G) \to V(H)$ بحيث $d_H(f(u),f(v)) = d_G(u,v)$ الاثنا عشري [243]: بيان سوي له 20 رأسًا، و 30 ضلعًا، و 12 وجهًا، طول كل منها يساوي 5.
مجموعة مسيطرة [116]: مجموعة $S \subseteq V$ بحيث إن لكل رأس خارج جارًا في S.
عدد السيطرة [116]: أصغر حجم مجموعة رؤوس مسيطرة.
قفزة مزدوجة (ثنائية) [437]: البناء المختلف الموسوم لبيان عشوائي في النموذج A لدوال الاحتمالية التي لها الشكل c/n حيث $c = 1$، $c < 1$ و $c > 1$.
النجم المزدوج [77]: شجرة لها رأسان على الأكثر، درجة كل منهما أكبر من 1.
الطارة المزدوجة (الثنائية) [266]: السطح (الموجه) بمقبضين.
مثلث مزدوج $K_4 - e$:[280]
المصفوفة التصادفية المزدوجة [120]: مصفوفة مربعة، مجموع مدخلاتها يساوي 1 في كل صف وفي كل عمود أيضًا.
خاصية التوسيع الثنوية (ماترويدات) [362]: مجموعات منفصلة مستقلة في الماترويد والثنوي له ويمكن توسيعها لأساس ومرافق أساس متمم.
الضلع الثنوي [236] e^*: هو ضلع البيان الثنوي G^* المرتبط بالضلع e لبيان المستوى G.
البيان الثنوي [236] G^*: لبيان المستوى G، هو البيان الذي فيه رأس لكل منطقة في G، حيث تكون فيه الرؤوس متجاورة إذا اشتركت حدود مناطقها في ضلع (يمتد لطمور الخلايا الثنائية على أي سطح) G.
نظام وراثي ثنوي (أو ماترويد) [360] M: نظام وراثي، أساساته متممات أساسات M.
المسألة الثنوية [113]: للمسألة $\max c^T x$ بحيث $Ax \le b$ و $x \ge 0$، إن المسألة الثنوية لهذا هي $\min y^T b$ حيث $yA \ge c$ و $y \ge 0$.
فجوة الثنوية: متباينة صارمة بين قيم مثلى لزوج من البرامج الصحيحة الثنوية.
مضاعفة الرأس [321] x: إضافة x' حيث $N(x') = N(x)$.
مقبض (أذن) [163]: مسار، درجة رؤوسه الداخلية 2 (أو «جديدة»).
تفكيك مقبضي [163]: بناء G من حلقة بإضافة مقابض.
الاختلاف المركزي[70] $\in_G(v)$: أكبر مسافة للرؤوس الأُخرى.
ضلع [2]: (1) في البيان، زوج من الرؤوس ($E(G)$ ترمز إلى مجموعة الأضلاع).
(2) في بيان زائدي، مجموعة جزئية من مجموعة الرؤوس.
قابلية اختيار الأضلاع [409] $\chi'_i(G)$: أصغر k بحيث تكون قابلية اختيار أضلاع G تساوي k.
قابلية اختيار الأضلاع [409] k-: للقوائم من الحجم k المحددة لأضلاع G جميعها، يوجد تلوين فعلي لأضلاع G بحيث يختار هذا التلون لونًا لكل ضلع من قائمته.
العدد اللوني للأضلاع [275] $\chi'(G)$: أصغر عدد من الألوان في تلوين فعلي للأضلاع.
قابل للتلوين الضلعي بـ k من الألوان [275]: يوجد تلوين فعلي للأضلاع يستخدم على الأكثر k لونًا.
تلوين الأضلاع [274]: تحديد علامات دالة للأضلاع.
مترابط ضلعيًّا من الدرجة [152،164] Kk: مقدار ترابطه الضلعي يساوي K على الأقل.

مقدار (درجة) الترابط الضلعي [152] $k'(G)$: أصغر عدد من الأضلاع، بحيث يؤدي حذف هذه الأضلاع إلى فصل G (يجعل G غير مترابط).

غطاء الأضلاع [114]: مجموعة أضلاع تقع عليها الرؤوس جميعها.

قطع ضلع [152،164] $[S, \bar{S}]$: مجموعة الأضلاع التي تربط رأسًا في S مع رأس غير موجود فيه.

قابل لإعادة البناء – ضلعيًا: البيان الذي يمكن تحديده (بإهمال التشاكل) من خلال معرفة مجموعة البيانات الجزئية التي تحصل عليها بحذف أضلاع منفردة.

مخمنة إعادة بناء الأضلاع: المخمنة التي تنص على أن كل بيان له أربعة أضلاع على الأقل يكون قابلاً لإعادة البناء – ضلعيًا.

متعدٍّ ضلعيًا [18]: توجد لكل زوج من الأضلاع $e,f \in E(G)$ تبديلة تنقل e إلى f.

القيمة الذاتية [453]: لبيان، هي القيمة الذاتية لمصفوفة تجاور هذا البيان.

المتجه الذاتي لـ A [453]: المتجه X' بحيث $A_X = \lambda X$ لثابت λ.

انقباض بسيط (أولي) [84]: انقباض.

حلقة بسيطة (أولية): حدود منطقة في بيان مستوى (تنويه: بعض المؤلفين الذي يستخدمون "حلقة" لتعني دارة، يستخدمون حلقة بسيطة (أولية) لتعني حلقة)

تقسم أولي [162]: استبدال ضلع بمسار من ضلعين يربط بين النقاط الطرفية للضلع الأصلي. (انظر تقسيم الأضلاع).

الطمر [234]: دالة (تطبيق أو تحويل) من بيان لسطح، بحيث لا تتقاطع (صور) أضلاعه إلا عند نقاط طرفية مشتركة.

بيان خال [22]: البيان الذي لا يحوي أضلاعًا.

نقطة طرَفية [2]: (1) كل عنصر من عناصر ضلع؛ (2) أول أو آخر رأس لمسار أو مسرب أو ممر.

رأس طرفي (نهاية): رأس، درجته تساوي 1.

متساوي التجزئة (الفرع) [207]: له مجموعات تجزئة تختلف في أحجامها بمقدار 1 على الأكثر.

تلوين عادل (منصف): له صفوف لونية تختلف أحجامها بمقدار 1 على الأكثر.

تكافؤ [399]: كبيان، اتحاد لبيانات تامة منفصلة زوجًا زوجًا.

علاقة تكافؤ [490]: علاقة منعكسة، متماثلة ومتعدية.

عدد إيردوز: المسافة عن إيردوز في بيان التعاون للرياضيين.

مميز أويلر: للسطح، من جنس γ هو $2\text{-}2\gamma$.

جولة أويلر: دارة (حلقة) أويلرية.

دارة (حلقة) أويلرية [26،60]: مسرب مغلق يحوي كل ضلع.

بيان (بيان موجه) أويلري [26،60]: بيان، أو بيان موجه يحوي دارة (حلقة) أويلرية.

مسرب أويلري [26،60]: مسرب يحوي كل ضلع.

صيغة أويلر [241]: الصيغة $n - e + f = 2 - 2\gamma$ وذلك لطمر ثنائي الخلية لبيان مترابط له n من الرؤوس، و e من الأضلاع، و f وجهًا على سطح جنسه يساوي γ.

حلقة زوجية [24]: حلقة، عدد أضلاعها (رؤوسها) زوجي.

زوج زوجي [348]: زوج من الرؤوس x، y بحيث يكون كل مسار لا وتري من x إلى y زوجي الطول.

مثلث زوجي [280]: مثلث T بحيث إن لكل رأس عددًا زوجيًا من الجيران في T.

رأس زوجي [26]: رأس درجته زوجية.

التطور (النشوء): النموذج الذي يولد بيانات عشوائية من خلال إضافة أضلاع عشوائية بالتتابع.

المُمدد (المكبر)- [463] (n,k,c): ثنائي الفرع، حجم كل من مجموعتي تجزئته يساوي n ودرجات رؤوسه تساوي k على الأكثر، بحيث يوجد جارٌ على الأقل لكل مجموعة S بها على الأكثر نصف رؤوس المجموعة الجزئية الأولى $|S|(1 + c(1 - |s|/n))$.

التمدد (التوسع): في بيان منتظم ثلاثي، يُقْسَمُ ضلعان، ويُضاف ضلع جديد يربط بين رؤوس جديدة.

تمهيدية التمدد [162]: إضافة رأس درجته k إلى بيان مترابط من الدرجة. يحافظ k على درجة الترابط k.

خاصية التمدد (التوسع) [358]: للدالة σ المعرفة على المجموعات الجزئية لمجموعة، تعني أن تكون $X \subseteq \sigma(X)$ لكل X.

التوقع [427]: لمتغير عشوائي متقطع هي $\sum k\, prob(X = k)$.

المنطقة الخارجية: المنطقة غير المحدودة في بيان مستوى.

رأس خارجي: رأس في المنطقة غير المحدودة.

وجه [235]: منطقة في طمر.

عامل [136]: بيان جزئي مولد.

عامل f- [140]: بيان جزئي مولد، فيه $d(v) = f(v)$.

عامل k- [140]: بيان جزئي مولد منتظم من الدرجة k.

قابل للتحليل لـ k من العوامل [276]: له تفكيك (تحليل) إلى k من العوامل.

تحليل للعوامل: التعبير عن G بوصفها اتحادًا لبيانات جزئية مولدة منفصلة ضلعيًا.

تحليل إلى k من العوامل [276]: تحليل البيان إلى k من العوامل.

المروحة [170] x, U: مسارات منفصلة داخليًا زوجًا زوجًا من x إلى الرؤوس المختلفة في U.

نظرية فاري [246] (Fa'ry): يوجد للبيان السوي طمرٌ في المستوى في صورة خطوط مستقيمة.

مثلث سمين [275]: بيان ثلاثي الرؤوس، لكل زوج من رؤوسه عدد مرات التكرار الضلعي نفسها.

التدفق الملائم [176]: يحقق تدفق في شبكة قيود الأضلاع، وتساوي محصلة التدفق عند كل رأس داخلي 0.

الحل الملائم [322]: خيار لقيم المتغيرات يحقق القيود جميعها في مسألة أمثلية.

بيان فيريرز (Ferrers) الموجه: بيان موجه (يسمح بالعرى) بحيث لا يوجد x,y,z,w (ليست مختلفة بالضرورة) بحيث $x\to y$ و $z\to w$، لكن $z \nrightarrow y$ و $x \nrightarrow w$؛ يكافئ ذلك، إن مجموعات كل من الخلف أو السلف ترتب بالاحتواء يكافئ ذلك. لا يوجد لمصفوفة التجاور أي مصفوفة تباديل جزئية من الرتبة 2×2.

نظرية الألوان الخمسة [257]: المبرهنة التي تقول: إن البيانات السوية قابلة للتلوين بخمسة ألوان.

مُسطح (مُبسط) [266]: مجموعة مغلقة في ماترويد.

التدفق [176]: تحديد أوزان لأضلاع في شبكة.

تدفق k- [307]: تحديد أوزان من $\{-k+1, \dots, k-1\}$ لأضلاع موجهة بحيث إن محصلة التدفق الخارج تساوي 0 عند كل رأس.

الزهرة (في خوارزمية إدموندز للبراعم) [142]: تتألف من ساق (مسار متذبذب (متناوب) من رأس غير مشبع) وبرعم (حلقة فردية بمواءمة كاملة تقريبًا).

هاملتوني بالضرورة: متتالية درجات، بحيث يكون كل بيان بسيط درجات رؤوسه هي هذه المتتالية هاملتونيًا.

غابة [67]: اتحاد منفصل لأشجار، أو بيان لا حلقي.

نظرية الألوان الأربعة [260]: المبرهنة التي تنص على أن كل بيان سوي يكون قابلاً للتلوين بأربعة ألوان.

التوجيه الأخوي [345]: توجيه يتجاور فيه رأسان إذا وُجد لهما تابع مشترك.

الشظية H- لـ G [252]: مركبة لـ $G - H$ بالإضافة إلى الأضلاع التي تصلها مع رؤوس ربطها.

خال من H [41]: توجد فيه نسخة من H بوصفها بيانًا جزئيًا مستحدثًا.

ماترويد حر [357]: ماترويد يتحقق فيه استقلال كل مجموعة من عناصره.

نظرية الصداقة [467]: إذا وجد لكل شخصين في مجموع معين صديق مشترك في المجموعة، فإنه يوجد شخص يكون صديقًا لكل شخص في المجموعة.

الحلقة الأساسية [374]: لشجرة مولدة، هي الحلقة المشكلة بإضافة ضلع إليها.

قامويد [377]: ماترويد على E يظهر من مجموعات الرؤوس F,E في بيان موجه من خلال جعل المجموعات المستقلة هي المجموعات المشبعة من قبل مجموعة من المسارات المنفصلة التي تبدأ في F.

العدد اللوني المعمم (العام): أصغر عدد من الصفوف يلزم لتجزئة الرؤوس، بحيث يمتلك كل بيان جزئي مستحدث من قبل كل صف لون الخاصية **P**.

بيان بيترسون العام (المعمم) [316]: البيان الذي رؤوسه $\{u_1, \dots, u_n\}$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ وأضلاعه $\{u_iv_i\}$, $\{u_iu_{i+1}\}$ و $\{v_iv_{i+k}\}$ حيث يتم الجمع بمقياس n.

عدد رامزي المعمم [386] $r(G_1, \dots, G_k)$: أصغر n، بحيث إن أي تلوين لأضلاع K_n بـ k من الألوان يجبر وجود نسخة من G_i ملونة باللون i لبعض i.

جنس [266] γ: (1) للسطح، عدد المقابض بالوصف التوبولوجي لهذا السطح، (2) لبيان، أصغر جنس لسطح يطمر فيه هذا البيان.

الخط الجيوديسي: أقصر مسار بين نقطتيه الطرفيتين.

الجيوديسي: له خاصية أن كل زوج من الرأسين u و v يكون نقاطًا طرفية لمسار وحيد طوله $d(u,v)$.

خصر [13] G: طول أقصر حلقة في G.

مضلع k-: في طمر، هو حلقة k- تحد منطقة.

خوارزمية جيدة [124]: خوارزمية، زمن تشغيلها يتبع كثيرة حدود (معطى بحسب كثيرة حدود).

توصيف جيد [495]: توصيف يمكن اختباره في زمن يتبع كثيرة حدود (زمن معطى بحسب كثيرة حدود).

تلوين جيد: غالبًا، نعني بذلك تلوينًا فعليًا.

مسألة القيل والقال [406]: تقليل عدد المكالمات، بحيث ينقل كل رأس إلى كل رأس من الرؤوس المتبقية بمسار متزايد.

العلامات الدالة الجميلة [87]: تحديد (تعيين) أعداد صحيحة للرؤوس بحيث إن 1) هذه الأعداد بين 0 و $e(G)$، و 2) يعطي الفرق بين العلامات الدالة على النقاط الطرفية للأضلاع الأعداد الصحيحة $1, \dots, e(G)$.

بيان جميل [87]: بيان له علاقات دالة جميلة.

شجرة جميلة [87]: شجرة لها علامات دالة جميلة.

مخمنة الشجرة الجميلة [87]: توجد علامات دالة جميلة لكل شجرة.

بيان [2]: مجموعتا رؤوس وأضلاع، وتعيين مجموعة تحوي عنصرين على الأكثر بوصفها نقاطًا طرفية للأضلاع.

ماترويد بياني [350] $M(G)$: ماترويد، مجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية اللاحلقية من $E(G)$.

متتالية بيانية [44]: قائمة بأعداد صحيحة يمكن تحقيقها بوصفها متتالية درجات لبيان بسيط.

الخوارزمية الجشعة [95,354]: خوارزمية سريعة لإيجاد حل مناسب جيد من خلال تكرار عمل خيار جيد لمساعد أو موجه، يساعد الطالب على الكشف بنفسه.

التلوين الجشع [194]: بالنسبة إلى ترتيب معين للرؤوس، لون كل رأس باللون الذي دليله أقل ما يمكن، والذي لم يظهر سابقًا بين جيران الرأس المراد تلوينه.

شرط جرنبرج [303] (Grinberg): ضروري للحلقات الهاملتونية في البيانات السوية التي حاصل جمعها (طول -2) على كل من الأوجه الداخلية أو الخارجية يعطي المجموع الكلي نفسه.

بيان جروتزك [205]: أصغر بيان خال من المثلثات، رباعي اللون.

عدد جرندي (Grundy): أكبر عدد من الألوان في تطبيق لخوارزمية التلوين الجشع.

مخمنة هادوايجر [213]: يوجد لكل بيان لوني من الدرجة k بيان جزئي يمكن تقليصه لـ K_k (صحيحة على الأغلب للبيانات جميعها).

مخمنة هاجوز [213]: كل بيان لوني من الدرجة k يحوي تقسيمًا لـ K_k (غير صحيحة لـ $k > 5$)

شرط هال [110]: يوجد رأس لكل مجموعة جزئية S لمجموعة تجزئة X في بيان ثنائي الفرع، على الأقل $|S|$ له جيران في S.

نظرية هال [110]: شرط هال ضروري وكاف لوجود مواءمة تشبع X.

جولة (رحلة) هاملتون: حلقة هاملتونية.

هاملتوني [286]: كل بيان يحوي حلقة هاملتونية.

الإغلاق الهاملتوني [289]: بيان نحصل عليه عن طريق إضافة أضلاع بالتتابع بحيث تربط هذه الأضلاع بين رؤوس مجموع درجاتها كبير بمقدار عدد هذه الرؤوس.

مترابط هاملتوني [297]: يوجد فيه مسار هاملتوني من أي رأس إلى أي رأس آخر.

حلقة هاملتونية [286]: حلقة تحوي كل رأس.

مسار هاملتوني [291]: مسار يحوي كل رأس.

بيان هراري [150]: عائلة من البيانات المترابطة من الدرجة k على n من الرؤوس لها أقل عدد من الأضلاع.

الرأس [53]: الرأس الثاني في ضلع في بيان موجه.

صيغة هيود [268]: العدد اللوني لبيان مطمور على السطح الموجه الذي له γ مقبضًا يساوي $\left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1+48\gamma}) \right\rfloor$ على الأكثر.

خاصية هيلي [80]: خاصية خط الأعداد (أو الأشجار) التي تنص على وجود نقطة تقاطع مشتركة للمجموعة المتقاطعة زوجًا زوجًا.

صف وراثي [226]: صف F بحيث توجد البيانات الجزئية المستحدثة من بيانات F جميعها في F أيضًا.

عائلة وراثية [349]: عائلة F من المجموعات بحيث توجد كل مجموعة جزئية من عنصر من عناصر F في F.

نظام وراثي [349]: نظام يتألف من عائلة وراثية والطرق البديلة التي تحددها.

الحفرة [340]: حلقة لا وترية في بيان.

متماثلة استمراريًا: بيانان، يُحصَل عليهما من البيان نفسه من خلال تقسيم الأضلاع.

متجانسة [380]: في نظرية رامزي، تعني مجموعة أن لقطعها الملونة اللون نفسه.

التشاكل: دالة $f: V(G) \to V(H)$ تحافظ على التجاور.

شفرة هفمان [103]: تشفير خال من المقدمات من أجل تقليل زمن البحث المتوقع.

الخوارزمية الهنجارية [126]: خوارزمية لحل القروض المنزلية.

المكعب الزائدي Q_k [36]: المكعب ذو البعد k.

بيان زائدي [449]: تعميم للبيان ربما تكون فيه الأضلاع أي مجموعة جزئية من الرؤوس.

مستوى زائدي (ماترويدات) [360]: مجموعة جزئية فعلا مغلقة أعظمية من مجموعة الأساس.

تحت هاملتوني: بيان غير هاملتوني، بحيث تكون بياناته الجزئية الناتجة عن حذف الرؤوس هاملتونية جميعها.

تحت قابل لتتبع الأثر: بيان غير قابل لتتبع الأثر، بحيث تكون بياناته الجزئية الناتجة عن حذف الرؤوس جميعها قابلة لتتبع الأثر.

العشريني [243]: تثليث سوي له 12 وجهًا، و 30 ضلعًا، و 20 رأسًا.

خاصية الجمود (ماترويدات) [359]: $\sigma^2(X) = \sigma(X)$ لكل X.

المطابقة: عملية يحل فيها رأس واحد محل رأسين مع الحفاظ على الوقوعات الموجودة جميعها على هذين الرأسين (هي الانقباض نفسه في حال تجاور الرأسين).

بيان غير كامل [232]: يحقق فيه أن $\chi(H) > \omega(H)$ لبيان جزئي مستحدث H.

مصفوفة الوقوع [6]: (1) لبيان، هي المصفوفة التي مدخلاتها 0 و 1 حيث تساوي المدخلة (i,j) 1 إذا وفقط إذا وقع الرأس i على الضلع j: (2) لبيان موجه، تساوي المدخلة (i,j) 1 إذا كان الرأس i رأسًا للضلع j في حين تساوي 1- إذا كان ذيلا، وتساوي 0 بخلاف ذلك i (3) بشكل عام هي مصفوفة لعلاقة عضوية.

الوقوع (يقع على) [6]: (1) الرأس v يقع على الضلع e إذا تحقق أن $v \in e$، (2) لضلعين إذا كانت لهما نقطة طرفية مشتركة.

مبدأ التضمين والاستبعاد [223]: عدد الأشياء خارج $A_1, \ldots, A_n$ يساوي $\sum_{S \in [n]} (-1)^{|S|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$.

بيان لا مقارنة: المتممة لبيان مقارنة.

خاصية الاندماج (ماترويدات) [359]: $r(\sigma(X)) = r(X)$

درجة الدخول [58]: للرأس في بيان موجه، عدد الأضلاع التي يكون هذا الرأس رأسًا لها.

عدد الاستقلال [113] $\alpha(G)$: أكبر حجم لمجموعة مستقلة من الرؤوس.
عدد السيطرة المستقلة [117]: أصغر حجم لمجموعة مسيطرة مستقلة.
مجموعة مستقلة [3]: مجموعة مؤلفة من رؤوس غير متجاورة زوجًا زوجًا.
المتغير المؤشر [427]: متغير عشوائي يأخذ القيم في $\{0,1\}$.
خاصية أحداث حلقة (ماترويدات) [355]: إضافة عنصر إلى مجموعة مستقلة تنتج حلقة واحدة على الأكثر.
بيان (موجه) جزئي مستحدث [23] $G[A]$: البيان (الموجه) الجزئي على مجموعة رؤوس $A \subseteq V(G)$ نحصل عليه بأخذ A وأضلاع G جميعها التي طرفاها في A.
برنامج أعداد صحيحة [323]: برنامج خطي، تكون المتغيرات فيه ذات قيم من مجموعة الأعداد الصحيحة.
نظرية التمام [181]: في الشبكة التي سعات أضلاعها أعداد صحيحة، يوجد تدفق أمثل معبر عنه كوحدات تدفق عبر مسارات من المنبع إلى المصب.
نظرية التحابك (التشابك) [458]: لكل رأس x، تحقق القيم الذاتية $\{\lambda_i\}$ و $\{\mu_i\}$ لـ $G - X$ أن $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \mu_n \geq \lambda_n$.
الرؤوس الداخلية 1) :[20]) للمسار، النقاط غير الطرفية (2) لبيان مستوى، الرؤوس غير الموجودة على حدود الوجه الخارجي.
المسارات المنفصلة داخليًا [161]: المسارات التي تتقاطع عند النقاط الطرفية فقط.
بيان التقاطع [324]: لعائلة من المجموعات، هو البيان الذي يحوي رأسًا من كل مجموعة، وتتجاور فيه الرؤوس إذا جاءت من مجموعات متقاطعة.
عدد التقاطع [397]: أصغر حجم لمجموعة U بحيث يكون G بيان تقاطع لمجموعات جزئية من U (يساوي أصغر عدد من البيانات الجزئية التامة التي تغطي $E(G)$).
تقاطع الماترويدات [366]: النظام الوراثي الذي تكون مجموعاته المستقلة هي المجموعات المستقلة المشتركة بين هذه الماترويدات.
تمثيل تقاطع [324]: تعيين مجموعة S_v لكل رأس v بحيث إن $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $S_u \cap S_v \neq \phi$.
بيان فترات [195]: بيان له تمثيل بفترات.
عدد فترات (الفترة) [451]: أصغر عدد t بحيث يكون لـ G تمثيل في t من الفترات.
تمثيل فترات لـ [195] G: مجموعة فترات، بحيث إن بيان تقاطعها هو G.
فترات -t [451]: اتحاد لـ t من الفترات على الأكثر في $\mathbb{R}$.
تمثيل بفترات [451] -t: تمثيل تقاطع حيث إن كل مجموعة معينة تكون فترات -t.
شجرة – داخلة [89]: شجرة موجهة بحيث إن كل ضلع فيها موجه نحو الجذر.
تبديلة العودة إلى الأصل [470] (Involution): تبديلة، مربعها التبديل المحايد.
رأس أو ضلع معزول [22]: لا يقع على أي ضلع آخر.
الطمر المتقايس [400]: تحويل من $V(G)$ إلى $V(H)$ يحافظ على المسافات.
تفكيك متشاكل: تفكيك لبيانات جزئية متشاكلة.
التشاكل [7]: تناظر بين الرؤوس يحافظ على علاقة التجاور.
البرزخ: ضلع – قطع.
الربط [138] $G\acute{U}H$: الاتحاد المنفصل $G + H$ بالإضافة إلى الأضلاع $\{uv: u\epsilon V(G), v\epsilon V(H)\}$.
موصول (مربوط) بـ: يجاور.
ملتقى (نقطة) اتصال: رأس درجته تساوي 3 على الأقل.
سلسلة كمب [258]: مسار بين رأسين يتذبذب بين لونين (على وجه الخصوص كما تم استخدم في منع بيانات سوية صغرى خماسية اللون)
النواة [57,410]: في البيان الموجه، مجموعة مستقلة في المجموعة المسيطرة.
كامل النواة [410]: له نواة في كل بيان جزئي مستحدث.
قانون كيركوف للتدفق: محصلة التدفق حول ممر مغلق تساوي صفرًا.
الطائرة الورقية [12]: بيان بسيط على أربعة رؤوس تحصل عليه بحذف ضلع من K_4.
نظرية كونج وإيجرفاري [112]: يكون للمواءمة العظمى والرأس الأصغر في بيان ثنائي الفرع الحجم نفسه.
نظرية كونج الأخرى [115]: حجم أكبر مجموعة مستقلة وأصغر غطاء أضلاع لبيان ثنائي الفرع دون رؤوس معزولة هو نفسه.
تفكيك كروسز [285] (Krausz): تغطية الأضلاع بواسطة بيانات جزئية تامة باستخدام كل رأس مرتين على الأكثر (هذا يقود إلى البيان الذي يكون له هذا هو البيان الخطاني)
ضرب كرونكر: ضرب المؤثرات، أو الضرب التنسوري.
خوارزمية كروسكال [95]: إنبات شجرة مولدة موزونة صغرى عن طريق تكرار أو معاودة إضافة الضلع الأرخص الأقل وزنًا في البيان الذي لا يتم حلقة.
البيان الجزئي الكوارتوسكي [247]: تقسيم لـ K_5 أو $K_{3,3}$.
نظرية كوارتوسكي [246]: يكون البيان سويًا إذا وفقط إذا خلا من تقسيم لـ K_5 أو $K_{3,3}$.
الوسم (التعليم الدال أو وضع العلامات الدالة): تعيين أعداد صحيحة للرؤوس.
الورقة [67]: رأس درجته تساوي 1.

قالب الورقة [156]: قالب يحوي رأس – قطع واحدًا فقط.

الطول [20]: عدد الخطوات (أو مجموع الأوزان) من البداية إلى النهاية.

الضرب (الجداء) المعجمي [393] $G[H]$: تركيب.

خط: اسم آخر للضلع.

البيان الخطاني [168,273] $L(G)$: بيان التقاطع لأضلاع G، حيث ترتبط الرؤوس بأضلاع G وتتجاور إذا اشتركت الأضلاع المتناظرة برأس.

الماترويد الخطي [351]: ماترويد مجموعاته المستقلة هي مجموعات الأعمدة المستقلة لمصفوفة معرفة على حقل معين.

برنامج (برمجة) خطي (خطية) [179]: مسألة إيجاد أفضل دالة خطية قيود خطية.

أداة الربط (الروابط): ضلع.

موصول (مربوط) من الدرجة k: شرط أقوى من مترابط من الدرجة k، بحيث يتحقق أنه لكل عديدي k من الرؤوس $(u_1, \dots, u_k)$ و $(v_1, \dots, v_k)$ توجد مجموعة مؤلفة من k من المسارات المنفصلة داخليًا تربط بين الرؤوس المتناظرة u_i و v_i.

قائمة الدليل اللوني [409]: اختيارية الأضلاع.

قائمة العدد اللوني [408]: الاختيارية.

مخمنة قائمة التلوين [409]: تكون اختيارية الأضلاع مساوية للعدد اللوني للأضلاع دائمًا.

حرفي [500]: متغير منطقي (صحيح أو خطأ) هو أو نفيه.

الفلقة -S [211]: بيان جزئي من G مستحدث من $S \cup V_i$، حيث إن V_i هي مجموعة رؤوس أحد مركبات $G - S$

البحث الموضعي: تقنية لحل مسائل الأمثلية بإجراء تغييرات صغيرة متتابعة في حل ملائم.

العروة [2]: ضلع يبدأ بالنقطة نفسها وينتهي بها (الرأس).

العروة [6]: لا يحوي أي عروة.

المكبر (n,k,c) [463]: بيان على n من الرؤوس، درجته الكبرى تساوي k، يتحقق فيه أن كل مجموعة S في هذا البيان تحوي على الأكثر نصف رؤوس هذا البيان، وتمتلك على الأقل $c|S|$ جارًا خارج S.

سلسلة ماركوف [54]: نظام متقطع له احتمالات انتقالية.

متباينة ماركوف [432]: لمتغير عشوائي غير سالب هي: $\text{Prob}\,(X \geq t) \leq E(X)/t$

توقع مشروط: متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث إن $E(X_i/X_0, \dots, X_{i-1}) = X_{i-1}$

المواءمة[443]: مجموعة من الأضلاع لا تشترك بأي نقاط طرفية.

مواءمة -b: ليكن b متجه قيود معطى، فإن المواءمة -b هي بيان جزئي H بحيث إن $d_H(v) \leq b(v)$ لكل v.

تدوير المصفوفات [186]: مسألة تحويل المعطيات ومجموع صفوف أو أعمدة مصفوفة إلى أقرب عدد صحيح من الأعلى أو من الأسفل، بحيث يبقى حاصل جمع الصفوف والأعمدة صحيحًا.

نظرية مصفوفة الشجرة [86]: إن طرح مصفوفة التجاور من مصفوفة الدرجات القطرية، وحذف صف وعمود، وأخذ المحددة، يعطينا عدد الأشجار المولدة.

الماترويد [354]: نظام وراثي يحقق أي شرط من قائمة العديد من الخواص المتكافئة.

بيان أساسات الماترويد [376]: بيان، رؤوسه حشد من الأساسات لماترويد، تكون رؤوسه متجاورة في الحالة التي يحوي الفرق التماثلي بينها عنصرين.

نظرية غطاء (تغطية) الماترويد [372]: عدد المجموعات المستقلة اللازمة لتغطية العناصر لماترويد هو $\max_{x \subseteq E} \lceil |X| / r(X) \rceil$.

نظرية تقاطع الماترويدات [367]: إن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة في ماترويدين على E يساوي الأصغر على $X \subseteq E$ من الرتبة لـ X في الماترويد الأول زائدًا الرتبة لـ $\overline{X}$ في الماترويد الثاني.

نظرية تحزيم الماترويدات [372]: إن أكبر عدد من الأساسات المنفصلة زوجًا زوجًا في ماترويد هو: $\min_{r(x) < r(E)} \lfloor (|E| - CA(X)) / (r(E) - r(X)) \rfloor$.

نظرية اتحاد الماترويدات [370]: إن اتحاد الماترويدات $M_1, \dots, M_k$ عبارة عن ماترويد دالة رتبته هي $r(X) = \min_{y \subseteq X} (|X - Y| + \sum r_i(Y))$.

نظرية أكبر تدفق وأصغر قطع [180]: قيمة أكبر تدفق تساوي قيمة أصغر قطع.

عصبة أعظمية [31]: مجموعة أعظمية من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا.

مسار أو مسرب أعظمي [27]: مسار أو مسرب لا يمكن تمديده أو تكبيره.

بيان سوي أعظمي [242]: يكافئ تثليثًا سويًا.

البحث عن أكبر عدد أصلي (كاردينالي) [325]: خوارزمية لمعرفة البيانات الوترية.

أكبر درجة [34] Δ: الدرجة الكبرى من بين درجات الرؤوس.

أكبر (أعظم) تدفق [176]: شبكة تدفق ملائمة ذات قيمة عظمى، أو القيمة نفسها.

أكبر جنس $\gamma_M(G)$: أكبر جنس لسطح بحيث يكون لـ G طمر ثنائي الخلية على هذا السطح.

أعظم (أكبر) (شيء – [31] (P: للخاصية P، لا يوجد شيء أكبر من النوع نفسه له أيضًا الخاصية P.

نظرية منجر [167-169]: تعطي توصيفًا أصغر – أكبر لمقدار (درجة) الترابط (الترابطية) بحسب عدد المسارات المنفصلة داخليًا، أو المنفصلة ضلعيًا بين أزواج الرؤوس.

بيان مينيل [330]: هو أي بيان، بحيث إن أي حلقة فردية طولها 5 على الأقل تمتلك وترين على الأقل.
بيان غير كامل أصغري [320]: بيان غير كامل يكون فيه كل بيان جزئي مستحدثًا كاملاً.
مترابط من الدرجة 2 صغير [175]: حذف أي ضلع يدمر الترابط الثنائي.
قطع أصغر [178]: قطع من المنبع إلى المصب، له قيمة صغرى أو قيمة هذا القطع.
أصغر درجة [34] $\delta(G)$: أصغر درجة لرأس من رؤوس البيان.
أصغر (شيء – [31])P: للخاصية P، لا يوجد شيء أصغر من النوع نفسه يحقق الخاصية P.
شجرة مولدة صغرى [95] (MST): شجرة مولدة، بحيث إن مجموع أوزان أضلاعها هو قيمة صغرى.
الفرع (الجزء) [251،362]: بيان (ماترويد) نحصل عليه من خلال الحذف والتقليص (الانقباض).
بيان مخلوط: نموذج لبيان نسمح فيه بوجود أضلاع موجهة وأخرى غير موجهة.
سلم موبيص (Mobius): البيان الذي نحصل عليه بإضافة أوتار إلى حلقة زوجية بين أزواج الرؤوس التي تقع على الحلقة، وتكون المسافة بينها أكبر ما يمكن (يمكن رسم ذلك كسلم مفتول أو مجدول).
شريط موبيص: السطح غير القابل للتوجيه الذي نحصل عليه من خلال مطابقة جانبين متضادين لمستطيل باستخدام توجيه متضاد.
نموذج A [430]: توزيع احتمالي يولد بيانًا بسيطًا مجموعة رؤوسه $[n]$ وذلك بجعل كل زوج يمثل ضلعًا احتماله $P(n)$ باستقلالية.
نموذج B [430]: توزيع احتمالي يجعل البيانات البسيطة التي رؤوسها المجموعة $[n]$ وعدد أضلاعها m متساوية الاحتمالية، أو متشابهة الحدوث.
العزم [433] -r: توقع X^r.
أحادي اللون [386]: في التلوين، مجموعة يكون لعناصرها اللون نفسه.
خاصية البيانات الرتيبة [432]: مُحافظ عليها تحت حذف الأضلاع والرؤوس.
البيان المتكرر: تستخدم من قبل العديد من المؤلفين لتعني البيانات التي تسمح (دون اشتراط) بوجود الأضلاع المكررة والعرى (بعض المؤلفين يمنع وجود العرى في البيانات المتكررة).
معامل متعدد الحدود [489]: تُعد الترتيبات التي لمفرداتها تكرارات مُثبّتة، وبوجود k_i مفردة من النوع i، فإنه يوجد $(\sum k_i)! / \prod (k_i !)$.
الأضلاع المكررة [2]: أضلاع لها النقاط الطرفية نفسها.
التدخيل الأقرب [497]: موجه مساعد TSP لبناء حلقة.
الجار الأقرب [496]: موجه مساعد TSP لبناء مسار.
جوار [34] $N(v)$: مجموعة جيران v (الجوار المغلق $N(v)$ يشتمل كذلك على v).
جيران [2]: (كاسم) هي الرؤوس الموجودة في الجوار، و (كفعل) تعني مجاور لـ.
محصلة التدفق الخارجي [178]: عند الرأس، هي مقدار ناتج طرح مقدار التدفق الداخل من مقدار التدفق الخارج.
الشبكة [176]: بيان موجه له رأس بداية مُميز (المصدر أو المنبع) وله رأس نهاية مُميز (المصب) حيث يتم تعيين سعة تدفق لكل ضلع فيه وربما أيضًا تعيين (حد أدنى) للتدفق المطلوب.
عقدة: رأس، وخصوصًا في مسائل تدفق الشبكات.
خوارزمية غير مُحدَّدة (مُعيَّنة) [494]: تسمح «بالتكهن» وذلك من خلال امتلاكها لمسارات حسابية متوازية.
خوارزمية كثير حدود غير مُحدَّدة [494]: تمتلك مسارًا حسابيًا على شكل كثيرة حدود زمنية لكل تخمين لعدد القطع الصغيرة (bits) المعطاة على هيئة كثيرة حدود.
سطح غير قابل للتوجيه: سطح له جانب واحد فقط.
بيان غير تافه [22]: له ضلع واحد على الأقل.
غير سوي [243]: لا يوجد له طمر في المستوى.
تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان: تدفق -k بحيث إن الأوزان المعينة جميعها له تكون مختلفة عن الصفر.
NP [495]: صف المسائل القابلة للحل من خلال خوارزميات كثيرات الحدود غير المُحدَّدة.
تام – NP [495]: صارم (محكم من نوع) -NP و NP الوقت نفسه.
صارم NP [495] -: يعطي خوارزمية كثيرة حدود لكل مسألة في NP.
بيان خال [3]: بيان ليس له رؤوس.
الترقيم: دالة تناظر من $V(G)$ إلى $[n(G)]$.
إعاقة (انسداد): تراكيب جزئية ممنوعة.
مضاد فجوة فردي [340]: متممة فجوة فردية.
مركبة فردية [136]: مركبة لها عدد فردي من الرؤوس.
حلقة فردية [24]: حلقة عدد أضلاعها (رؤوسها) فردي.
البيان الفردي: بيان الفصل للمجموعات الجزئية التي عدد عناصرها k للمجموعة $[2k+1]$.

فجوة فردية: حلقة فردية لا وترية.

رأس فردي [27]: رأس درجته فردية.

ممر فردي [24]: ممر طوله فردي.

ممر مفتوح [20]: ممر فيه أول وآخر رأس مختلفين.

جولة مثلى: حل لمسألة البائع المتجول، أو لمسألة ساعي البريد الصيني.

رتبة البيان [34]: عدد رؤوسه.

بيان مرتب [406]: بيان ذو علاقة ترتيب (عادة خطية) على أضلاعه.

خاصية المحافظة على الرتبة (الترتيب) [358]: لدالة σ معرفة على المجموعات الجزئية لمجموعة معينة، هي أن $x \subseteq y$ تعطي أن $\sigma (x) \subseteq \sigma (y)$.

سطح قابل للتوجيه: سطح له جانبان مختلفان.

توجيه لبيان [62]: بيان موجه نحصل عليه بتحديد رأس كل ضلع وذيله.

درجة الخروج (الخارجة) [58]: لرأس، هي عدد الأضلاع التي يكون هذا الرأس ذيلاً لها.

بيان سوي خارجي [239]: بيان سوي قابل للطمر في المستوى بحيث تكون رؤوسه جميعها واقعة على حدود المنطقة الخارجية.

بيان مستوى خارجي [239]: طمر معين لبيان سوي خارجي.

العناصر المتوازية [351]: ليست عرى في ماترويد بحيث تشكل مجموعةً رتبتها 1.

والد [100]: جار لرأس على مسار إلى الجذر في شجرة مجذّرة.

النوعية [473]: فردي أو زوجي.

بيان جزئي نوعي من G [312]: بيان جزئي H بحيث إن: $d_H (v) \equiv d_G (v) \bmod 2$ لكل $v \in V (G)$.

متعدد الفرع من الدرجة k [5]: مثل قابل للتلوين بـ k من الألوان.

مجموعة جزئية من الرؤوس [4]: مجموعة ضمن تجزئة للرؤوس إلى مجموعات مستقلة (صف لوني).

ماترويد تجزئة [357]: الماترويد المستحدث من قبل تجزئة للمجموعة الأصلية (الأرضية) بحيث تكون مجموعة فيه مستقلة إذا وفقط إذا حوت عنصرًا واحدًا من كل قالب في التجزئة.

بيان قابل للتجزئة [335]: بيان له $a w + 1$ رأسًا، حيث يكون كل بيان جزئي ناتجًا عن حذف رأس قابل للتلوين بـ w من المجموعات المستقرة من الحجم a وقابلة للتغطية بـ a عصبة من الحجم w.

مسار [5]: بيان بسيط بحيث يمكن وضع رؤوسه في قائمة، وبحيث يتجاور فيه أي رأسين إذا وفقط إذا كانا متتابعين في هذه القائمة.

مسار من u إلى v [20]: مسار، طرفاه u و v.

جمع المسارات [163]: خطوة في تفكيك المقابض.

التفكيك لمسارات [414]: تعبير عن البيان كاتحاد لمسارات منفصلة ضلعيًا زوجًا زوجًا.

الكف [12]: بيان بسيط له أربعة رؤوس، نحصل عليه بإضافة ضلع واحد إلى المخلب.

بيان حرج-p (من النوع – p) [334]: بيان غير كامل، بحيث إن أي بيان جزئي فعلي مستحدث منه يكون كاملاً.

ضلع متدلٍ [67]: ضلع يقع على رأس درجته 1.

رأس متدل [67]: رأس درجته تساوي 1.

كامل من نوع- α [319]: $a (H) = q (G)$ لكل بيان جزئي مستحدث H.

كامل من نوع- β [335]: $\alpha (H) \omega (H) \geq n (H)$ لكل بيان جزئي مستحدث H.

كامل من نوع- γ [319]: $\chi(H) = \omega (H)$ لكل بيان جزئي مستحدث H.

ترتيب حذف كامل [229]: ترتيب الحذف، بحيث إنه عندما يُحذَف رأس، فإن جواره فيما تبقى يكون عصبة (تمامًا مثل ترتيب الحذف المبسطي).

بيان كامل [226]: بيان، بحيث إن $\chi(H) = \omega (H)$ لكل بيانٍ جزئي مستحدث H.

نظرية البيان الكامل [226.320] (PGT): يكون البيان كاملاً إذا وفقط إذا كانت متممة هذا البيان كاملة.

ترتيب كامل [331]: ترتيب للرؤوس يعطي تلوينًا جشعًا أمثل للبيانات الجزئية جميعها.

بيان قابل للترتيب الكامل [331]: يوجد له ترتيب كامل.

مواءمة كاملة [107]: مجموعة أضلاع، بحيث إن كل رأس ينتمي إلى وحدة منها بالضبط.

الرأس البعيد عن المركز (المحيطي) [70]: رأس له اختلاف مركزي أعظم (أكبر).

التبديلة [486]: دالة تناظر من مجموعة منتهية لنفسها.

بيان تبديلة: قابل للتمثيل بتبديلة σ حيث $v_i \leftrightarrows v_j$ إذا وفقط إذا كانت σ تحافظ على الترتيب لـ i و j.

مصفوفة التبديلة [120]: مصفوفة مدخلاتها 0 و 1 وتحوي واحدًا بالضبط في كل صف وفي كل عمود.

بيان بيترسون [12]: بيان الفصل للمجموعات الثنائية في مجموعة ذات خمسة عناصر.

مبدأ طواقي (أعشاش) الحمام [491]: كل مجموعة من مجموعات الأعداد تحوي مجموعة واحدة على الأقل تكون كبيرة بقدر المتوسط (المعدل).
خاصية طواقي الحمام [427]: فضاء احتمالي منتهٍ، يمتلك عنصرًا حيث تكون قيمة المتغير العشوائي كبيرة كمقدار توقعها على الأقل.
البيان السوي [5.235]: بيان قابل للطمر في المستوى.
بيان المستوى [235]: طمر سوي معين لبيان سوي.
شجرة مستوى [101]: شجرة بترتيب طمر حلقي لأضلاعها عند كل رأس.
الشجرة المزروعة [101]: شجرة مستوى مجذرة (لها جذر).
مجسمات أفلاطونية [242]: متعدد سطوح منتظم محدود.
نقطة: رأس.
منحنى مضلع [234]: تسلسل للقطع المستقيمة، أو سلسلة القطع المستقيمة.
متعدد السطوح [242]: تقاطع لأنصاف فضاءات.
مسطح بأي بُعد: الغطاء (الغلاف أو القشرة) المحدب لمجموعة من الرؤوس.
لعبة المواقع [120]: لعبة، الهدف منها الاستيلاء على مواقع المجموعة الرابحة.
القوة $k(G^k)$: البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V(G)$، ويكون فيها $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا تحقق أن $d_G(u, v) \leq k$.
السابق (السلف) [54]: لـ v في بيان موجه، هو رأس u بحيث إن $u \to v$.
مجموعة السلف [58]: لـ v في بيان موجه، هي مجموعة السلف.
شفرة تخلو من المقدمات [101]: عدم وجود كلمة شفرة بوصفها مقدمة لكلمة أخرى.
خوارزمية برم [104]: تُنبت شجرة مولدة صغرى عن طريق إضافة ورقة إلى الشجرة الحالية بأرخص (أقل وزنًا) طريقة.
مصفوفة جزئية رئيسة: مصفوفة جزئية مربعة تستخدم الصفوف والأعمدة بالدليل نفسه.
بُعد حاصل الضرب [398]: أصغر عدد من الإحداثيات في تمثيل ضرب لـ G.
تمثيل حاصل الضرب [398]: تشفير البيان، بحيث تكون الرؤوس متجاورة إذا وفقط إذا كانت شفراتها تختلف في كل إحداثي.
تلوين فعلي [192]: للرؤوس، تلوين، كل ضلع فيه ليس أحادي اللون، (2) للأضلاع، تلوين، فيه كل ضلعين متجاورين مختلفان في اللون.
بيان جزئي فعلي من G [192]: بيان جزئي لا يساوي G.
مجموعة جزئية فعلية من S [472]: مجموعة جزئية لا تساوي S.
خوارزمية مشاريع الزواج [131]: خطوات عمل لإيجاد مواءمة مستقرة.
شفرة برفر [81]: لشجرة موسومة (عليها علامات دالة)، وهي متتالية طولها $n-2$ يتم الحصول عليها من خلال تتابع حذف الورقة التي علامتها الدالة أقل ما يمكن، وتسجيل العلامة الدالة لجارها.
شبه البيان: نموذج لبيان يسمح فيه بوجود العرى والأضلاع المكررة. يُستخدم من قبل بعض المؤلفين الذين يعرفون البيانات المكررة على أنها لا تحوي عرى.
نصف القطر [70]: أصغر قيمة اختلاف مركزي للرؤوس.
عدد رامزي [380]: أقل عدد من الرؤوس بحيث إن تعيين ألوان لأزواج الرؤوس جميعها ينتج عصبة أحادية اللون من حجم محدد (أو بيان محدد) في أحد اللونين.
بيان عشوائي [430]: بيان من فضاء احتمالي، في أغلب الأحيان هو الفضاء الذي فيه لكل زوج موسوم (عليه وسم) من الروس احتمالية تجاور تساوي p دون الاعتماد على أي شيء آخر، نموذجيًا $p = 1/2$، أو p دالة لـ n.
متغير عشوائي [427]: المتغير الذي يأخذ قيمه عند كل نقطة في فضاء احتمالي.
الرتبة (ماترويدات) [349]: لمجموعة من العناصر، أكبر حجم لمجموعة مستقلة محتواة في هذه المجموعة.
يمكن إعادة بنائه [38]: بيان محدد (بإهمال التشاكل) بقائمة البيانات الجزئية التي نحصل عليها بحذف رأس منفرد.
مخمنة إعادة البناء [38]: الادعاء بأن البيانات التي لها ثلاثة رؤوس على الأقل جميعها قابلة لإعادة البناء.
عدد التقاطع المستقيمي: أصغر عدد للتقاطعات في رسم للبيان في المستوى، حيث تظهر الأضلاع بوصفها قطعًا مستقيمة في هذا الرسم.
التشكل المصغر (المختزل) [258]: ممنوع من وجود بيان سوي خماسي اللون أصغري.
منعكس (قابل للانعكاس) [490]: (1) بيان موجه له عروة عند كل رأس (2) علاقة ثنائية R تحقق xRx لكل x.
منطقة [235]: لطمر بيان على سطح، هي مجموعة جزئية مترابطة أعظمية من السطح بحيث لا تحوي أي جزء من البيان.
منتظم [34]: درجات رؤوسه جميعها متساوية.
ماترويد منتظم [351]: قابل للتمثيل على كل حقل.
منتظم من الدرجة k [34]: درجة كل رأس من رؤوسه تساوي k.
ماترويد قابل للتمثيل [351]: ماترويد خطي.
توقع شرطي مُقيَّد [445]: توقع شرطي، تكون فيه قيمة المتغيرات المتتابعة توقعًا على مجموعة جزئية منكمشة من الفضاء الاحتمالي.
بيان حلقي صلب (قاسٍ): بيان وتري.

نظرية روبنز [166]: يوجد توجيه قوي لكل بيان مترابط ضلعيًا من الدرجة 2.

الجذر [100]: (1) رأس مميز (2) في التغصين (التفريع)، هو الرأس الذي درجة دخوله تساوي 0.

شجرة مستوى مجذرة [100]: شجرة لها رأس جذر مُميَّز بحيث يوجد لأولاد كل رأس (غير ورقة) ترتيب محدد من اليسار إلى اليمين في المستوى.

دوران (تدوير) مخطط: وصف لطمر خلية ثنائية، تبديل دائري للأضلاع التي تظهر عند كل رأس، يعطي ترتيب هذه الأضلاع حول كل رأس باتجاه معاكس لاتجاه عقارب الساعة.

التحققية [499]: مسألة إيجاد قيم الصواب للمتغيرات من أجل جعل صيغة مدخل منطقي صحيحة.

متحققة [499]: صيغة جوابها «نعم» في مسألة التحققية.

رأس مشبع [107]: لمواءمة، رأس تمت مواءمته.

متتالية العلامات (الدرجات) [62]: متتاليات درجات الخروج في دوري.

طريقة العزم الثاني [433]: طريقة للحصول على دوال البداية أو الاستهلال (العتبة).

ذاتي التتام [11]: يشاكل متممته.

عكس نفسه: يشاكل عكسه.

ثنوي نفسه: يشاكل ثنويه.

نظرية البيان الكامل شبه القوي [344]: إذا كان $V(G) = V(H)$ وأن مجموعة من الرؤوس تُحدث P_4 في G إذا وفقط إذا أحدثت P_4 في H، فإن G يكون كاملاً إذا وفقط إذا كان H كاملاً.

شبه مسار: شبه ممر، بحيث يظهر كل رأس فيه مرة واحدة على الأكثر.

شبه ممر: متتالية أضلاع (أو رؤوس متجاورة) في بيان موجه، كل ضلعين متتابعين متجاوران دون الاهتمام بتوجيه الأضلاع.

قابل للفصل: له رأس قطع.

مجموعة فصل (أو فاصلة): مجموعة رؤوس، إذا حُذِفَتْ يزداد عدد المركبات.

مجموعة - k [380]: مجموعة حجمها k.

لعبة انتقال (تحويل) شانون [365]: لعبة تُلعب على ماترويد من قبل المولد والقاطع، حيث يحاول الاستيلاء على مجموعة من العناصر، وتولد عنصرًا محددًا في حين يحاول الآخر منع ذلك.

بيان الإزاحة [202]: بيان، رؤوسه هي المجموعات الجزئية ذات العنصرين من $[n]$ بحيث $\{i, j\}$ يجاور $\{j, k\}$ عندما $i < j < k$.

البيان (الموجه) المعين: حالة خاصة من بيان (موجه) موزون، يتم تعيين + أو − لكل ضلع من أضلاعه.

البسيط [2]: (1) البيان الذي يخلو من العرى والأضلاع المكررة (2) بيان موجه يمتلك ضلعًا واحدًا على الأكثر لكل زوج مرتب من رؤوسه (3) الماترويد الذي يخلو من العرى العناصر المتوازية.

رأس مبسطي [224]: رأس يولّد جيرانه عصبة.

مصب [176]: رأس نهاية مُميز، أو أي رأس درجته الخارجة تساوي صفرًا.

الحجم [35،473]: (1) عدد الأضلاع (2) عدد العناصر.

تجزئة متخالفة [347]: تجزئة X و Y لـ $V(G)$ بحيث تكون $G[X]$ و $\overline{G}(Y)$ غير مترابطة.

قابل للذوبان في f [148]: له وزن أضلاع، بحيث إن مجموع أوزان الأضلاع الواقعة على v يساوي $f(v)$.

المنبع (المصدر) [176]: رأس بداية مُميز، أو أي رأس درجته الداخلة تساوي صفرًا.

قطع منبع/ مصب [178]: تجزئة لرؤوس شبكة إلى مجموعتين هما: S و T، بحيث تحوي S المنبع، و T تحوي المصب.

دالة مولدة (دالة التوليد) [358]: مُولد مجموعة X في نظام وراثي تتألف من X والعناصر غير الموجودة في X التي تتم حلقات مع المجموعات الجزئية لـ X.

بيان جزئي مُولد: بيان جزئي يحتوي على كل رأس.

مجموعة مُولِّدة [67]: مجموعة مولدة (في نظام وراثي (E)) لـ E.

شجرة مُولِّدة [67]: بيان جزئي لا حلقي مولد ومترابط.

الطيف [453]: قائمة من القيم الذاتية المكررة.

بيان انشقاق [345]: بيان يمكن تغطية رؤوسه بعصبة ومجموعة مستقلة.

الانشقاقية: أصغر عدد من الأضلاع يضاف أو يحذف للحصول على بيان انشقاق.

مربع البيان: الأس الثاني.

بعد المكعب − المسحوق (المهروس) [401]: أصغر طول للمتجهات في طمر للمكعب المسحوق (المهروس).

طمر المكعب المسحوق [401]: تشفير الرؤوس بـ 0، 1، متجهات* - بحيث تساوي المسافة بين رأسين عددَ الإحداثيات حيث يكون لأحدهما الإحداثي 0، وللآخر الإحداثي 1.

عدد الاستقرار [319]: عدد الاستقلال.

مواءمة مستقرة [130]: مواءمة لا يوجد فيها شواهد أو أمثلة من x و y، بحيث يفضل كلّ منهما شخصًا (أو شيئًا) آخر مختلفًا عن شريكه الحالي في المواءمة.

مجموعة مستقرة [447] r -: مجموعة مستقرة حجمها يساوي r.

مجموعة مستقرة [3,319]: مجموعة من الرؤوس غير متجاورة زوجًا زوجًا. (مجموعة مستقلة).

النجم (النجمة) [67]: الشجرة $K_{1,\,n\text{-}1}$ التي لها على الأكثر رأس واحد غير ورقة.

مجموعة قطع - نجمة [333]: مجموعة فاصلة تستحدث بيانًا جزئيًا له رأس يجاور بقية الرؤوس.

تمهيدية مجموعة قطع - النجمة [334]: لا يوجد بيان حرج p - يحوي مجموعة قطع - نجمة.

خاصية تبادل ستاينتز [358]: خاصية للدوال المولدة، وهي أنه إذا كان e موجودًا فيما يولده $x \cup f$ وغير موجود فيما تولده x فإن f ينتمي إلى ما يولده $x \cup e$.

نظرية ستاينتز: يوجد طمر واحد فقط في المستوى للبيانات السوية المترابطة من الدرجة 3 (أكثر دقةً، بيان ثنوي واحد فقط).

القوة [440]: لمبرهنة، الجزء من الوقت الذي تتحقق فيه الفرضيات إذا تحقق فيه الاستنتاج.

بيان موجه صارم [294]: بيان موجه خال من العرى، ويوجد له على الأكثر ضلع واحد مع كل زوج مرتب من نقاطه الطرفية.

متوازن بصرامة: يتم تعظيم (تكبير) درجة الرؤوس في البيانات الجزئية فقط من قبل كل البيان.

خاصية الامتصاص القوية (ماترويدات) [355]: إذا كان $r(X \cup e) = r(x)$ لكل $e \in Y$ فإن $r(x \cup y) = r(X)$.

مركبة قوية [56]: بيان جزئي موجه مترابط بقوة أعظمي.

توجيه قوي [165]: توجيه لـ G بحيث يمكن الوصول إلى أي رأس من أي رأس آخر.

مخمنة البيان الكامل القوي [320] (SPGC): المخمنة التي تنص على أن البيان يكون كاملاً إذا وفقط إذا كان يمتلك فجوة فردية أو مضاد فجوة فردية.

الضرب القوي $G_1 \cdot G_2$: ضرب البيانات الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1) \times V(G_2)$، ومجموعة أضلاعه $(u_1, v_1) \leftrightarrow (u_2, v_2)$ إذا وفقط إذا كان $u_1 = u_2$ و $v_1 \leftrightarrow v_2$ أو $u_1 \leftrightarrow u_2$ و $v_1 = v_2$.

بيان موجه مترابط بقوة (أو قوي) [56]: بيان موجه، فيه كل رأس قابل للوصول من الرؤوس الأخرى جميعها.

كامل بقوة [330]: بيان، تتقاطع فيه مجموعة مستقرة مع كل عصبة أعظمية.

منتظم بقوة [464]: بيان منتظم من الدرجة k، بحيث يوجد جار مشترك لأزواج رؤوسه المتجاورة λ، وجار مشترك لأزواج رؤوسه غير المتجاورة μ.

مكون أساسي جزئي [470]: البيان الجزئي المولد من جوار لرأس أو من اللاجوار لرأس.

بيان موجه جزئي [56]: بيان جزئي من بيان موجه.

التقسيم [212]: (1) عملية يحل فيها مسار مؤلف من ضلعين محل ضلع من خلال رأس جديد، (2) بيان نحصل عليه من خلال متتالية من عمليات التقسيم.

تقسيم [212] -H: بيان، نحصل عليه من H بواسطة التقسيم.

بيان جزئي [5]: بيان، تنتمي رؤوسه وأضلاعه جميعها إلى G.

دالة المقياس الجزئي [354]: دالة، بحيث إن $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(x) + r(y)$ للمجموعات جميعها المجموعات X و Y.

خاصية المقياسية الجزئية (ماترويدات) [354]: له دالة رتبة مقياسية جزئية.

مجموعة جزئية [471] -k: مجموعة جزئية فيها k من العناصر.

تمثيل بأشجار جزئية [324]: تعيين شجرة جزئية من شجرة مضيفة لكل رأس من رؤوس بيان وتري بحيث تكون الرؤوس متجاورة إذا وفقط إذا كانت الأشجار التي تمثلها متقاطعة.

تابع (خلف) [54]: لـ u في بيان موجه، رأس v، بحيث إن $u \to v$.

مجموعة تابعة [58]: لـ u في بيان موجه، مجموعة توابع u.

حاصل جمع (مجموع) [39]: (1) للحلقات ولمرافقات الحلقات، تمامًا مثل الفرق التماثلي، (2) لبيان، هو اتحاد هذه المجموعات (3)، بحيث إن مجموعاته المستقلة هي اتحادات المجموعات المستقلة جميعها من كل مجموعة.

بيان حاو لـ G: بيان يحوي G.

فائق الانتظام [470]: بيان منتظم لا يحوي أي رؤوس، أو أنه بيان يكوّن كل مكون أساسي جزئي من مكوّناته منتظمًا أعظم.

المرض [184]: قيد على المصدر (المنبع) في شبكة نقل.

تبديل ثنائي [46]: تبديل يحافظ على الدرجات لضلعين منفصلين بضلعين آخرين غير موجودين.

متماثل (تماثل) [490]: (1) لبيان، له تشاكل ذاتي غير تافه (غير بديهي)، (2) لبيان موجه بسيط $u \to v \Leftrightarrow v \to u$ لعلاقة ثنائية R، يعني $xRy \Leftrightarrow yRx$

الفرق التماثلي [109,473] $A \,\Delta\, B$: مجموعة العناصر الموجودة فقط في إحدى المجموعتين A و B.

نظام التمثيل المختلف [119] (SDR): لحشد من المجموعات، هو اختيار عنصر واحد من كل مجموعة بحيث يكون الممثلون جميعهم مختلفين.

نظرية سزكرز وولف [231]: $\chi(G) \leq 1 + max_{h \subseteq G}\, \delta(H)$.

ذيل [53]: الرأس الأول للضلع، أو الضلع الموجه.

تلوين الذيل [301]: لبيان ثلاثي سوي، هو تلوين ضلعي ثلاثي فعلي.

خوارزمية تاري: [95]: طريقة لاستكشاف متاهة (شبكة طرق معقدة).

مسألة التلغراف [423]: نسخة موجهة من مسألة (مشكلة) نقل الكلام، إلا أن النقل يتم في اتجاه واحد.

مسألة الهاتف [422]: مسألة نقل الكلام (أو الإشاعة)

الضرب المؤثر: الضرب الضعيف أو الضرب التنسوري.

ماترويد ثلاثي [357]: قابل للتمثيل على حقل مؤلف من ثلاثة عناصر.

السمك [261]: أقل عدد من البيانات السوية التي يساوي اتحادها G.

البعد الاستهلالي (بعد البداية أو العتبة): أصغر عدد من البيانات الاستهلالية التي يساوي اتحادها G.

دالة بيانية (عتبة أو استهلالية) لـ Q [433]: دالة t بحيث إن Q غالبًا ما أو غالبًا لا تحدث بالاعتماد على أن الوسيط ينتمي إلى $O(t)$ أو إلى $w(t)$.

بيان استهلالي (بداية): له بداية t ورأس وزنه w، بحيث إن $u \nleftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $w(u)+w(v) \le t$؛ هناك توصيفات أخرى تشتمل على غياب تبديل (استبدال) ثنائي ووجود ترتيب بنائي ناتج عن إضافة رؤوس معزولة، أو رؤوس مسيطرة.

نظرية البيانات التوبولوجية: دراسة رسم البيانات على السطوح.

طاري [266]: بيان لطمر خلية ثنائية على الطارة.

الطارة [266]: السطح (قابل للتوجيه) الذي له مقبض واحد.

التلوين الكلي [411]: وسم للرؤوس والأضلاع بحيث تأخذ العناصر المتجاورة أو الواقعة على بعضها ألوانًا مختلفة.

مخمنة التلوين الكلي [411]: يوجد لون لكل بيان تلوين كلي باستخدام $\Delta(G)+2$ على الأكثر.

عدد السيطرة الكلي [117]: أصغر عدد من الرؤوس في مجموعة S بحيث يوجد جار لكل رأس في S.

عدد الفترات الكلي: أصغر عدد كلي من الفترات المستخدمة لتمثيل G كبيان تقاطع لاتحادات الفترات على خط الأعداد.

أحادي المقياس بشكل كلي [469]: مصفوفة بحيث تساوي كل محددة لكل مصفوفة جزئية مربعة منها 0 أو ± 1.

الخشونة (القساوة أو الصلابة) [288]: أصغر t بحيث إن $|S| \ge t\, c(G-S)$ لكل مجموعة فاصلة S، حيث تساوي $c(G-S)$ عدد مركبات البيان الجزئي الذي نحصل عليه بحذف S.

الدوري [61]: توجيه لبيان تام.

أثر المصفوفة [453]: حاصل جمع العناصر الموجودة على القطر.

قابل لتتبع الأثر: يوجد فيه مسار هاملتوني.

المسرب [20,59]: ممر لا يظهر فيه أي ضلع أكثر من مرة واحدة.

بيان موجه متعدٍّ [228]: إذا تحقق أن $u \to v$ و $v \to w$ فإن $u \to w$.

الإغلاق المتعدي: (1) في بيان موجه D، هو البيان الموجه الذي فيه $u \to w$ عندما يوجد مسار من u إلى w في D (2) لعلاقة R، العلاقة S التي فيها XSY عندما توجد متتالية $X_o, \ldots, X_k$ بحيث إن $X = X_o R X_1 R \ldots R X_k = y$

تعدي الاعتماد (عدم الاستقلال) (ما ترويدات) [359]: إذا كان $e \in \sigma(X)$ وكانت $X \subset \sigma(Y)$ فإن $e \in \sigma(y)$.

قيود النقل (التنقل والانتقال) [184]: العرض والطلب.

مسألة النقل [185]: تعميم لمسألة التعيين (التحديد) حيث العرض عند كل مصدر، والطلب عند كل مكان نصل إليه.

المستعرض [125]: نظام تمثيلات مختلفة (هذه الكلمة المستخدمة عند تعميم المفهوم)، وتستخدم كذلك لأنظمة التمثيلات غير المختلفة.

الماترويد المستعرض [352]: ماترويد، عناصره عبارة عن مجموعة واحدة من مجموعتي التجزئة لبيان ثنائي الفرع، ومجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية المشبعة بالمواءمات.

مسألة البائع المتجول (المتنقل) [493] (TSP): مسألة إيجاد حلقة مولدة ذات وزن أصغر.

الشجرة [67]: بيان مترابط لا حلقي (لا يحوي أي حلقة).

الشجرة ذات المتعدد k- [101]: شجرة مجذرة (لها جذر) بحيث يكون لها k ولدًا على الأكثر عند كل رأس ليس بورقة.

الشجرة k- [345]: بيان وتري نحصل عليه من عصبة k- عن طريق تكرار (معاودة) إضافة رأس جواره عند إضافته عبارة عن عصبة k-.

المثلث [12]: حلقة طولها 3.

خال من المثلثات [41]: لا يحوي K_3 كبيان جزئي.

المتباينة المثلثية: $d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z)$.

وتر مثلثي: وتر طوله 2 موجود في مسار أو حلقة.

بيان تم تثليثه [225]: بيان لا يحوي حلقات لا وترية.

التثليث [242]: طمر لبيان على سطح، كل منطقة فيه مضلع ثلاثي.

ثلاثي الدرجة: درجته تساوي 3.

بيان تافه [22]: بيان ليس له أضلاع (يحصر بعض المؤلفين ذلك برأس واحد).

عديد k-[474]: بيان متعدد الفرع تام، مجموعاته (رؤوسه) الجزئية متساوية.

نظرية توران [208]: توصيف لبيانات تامة متساوية الفرع من البيانات متعددة الفرع من الدرجة r على أنها أكبر بيان من رتبة معطاة لا تحوي عصبة من الدرجة $r+1$.

كثيرة حدود توت: تعميم لكثيرة الحدود اللونية، ولكثيرات حدود أخرى.

نظرية توت [146،174،250]: (1) للمواءمات، هي توصيف لبيانات لها عامل واحد. (2) للترابط، توصيف للبيانات المترابطة من الدرجة الثلاثية من خلال تقليصها لعجلات. (3) للبيانات السوية، هي أن للبيانات السوية المترابطة من الدرجة 3 طمرًا بحيث تكون الأوجه المحدودة جميعها محدبة.

التوائم [208]: الرؤوس التي لها الجوار نفسه (التوائم الكاذبة هي رؤوس متجاورة لها الجوارات المغلقة نفسها).

مجموعة لا يمكن تفاديها [348]: جمع من التشاكلات، يحوي كل بيان في صف محدد (معين) تشكلاً في هذا الجمع.

البيان التحتي (الضمني أو الأساسي) [258]: البيان الذي نحصل عليه من بيان موجه من خلال التعامل مع الأضلاع على أنها أزواج غير مرتبة.

أحادي الحلقة: له حلقة واحدة فقط.

بيان زائدي منتظم (متسق) من الدرجة [449] k: له أضلاع من الحجم k فقط.

ماترويد منتظم (متسق أو موحد) [357] $U_{k,n}$: ماترويد على $[n]$ بحيث إن مجوعاته المستقلة هي المجموعات التي حجمها يساوي k على الأكثر.

خاصية الاتساق (الانتظام) (ماترويد) [354]: لكل $X \subseteq E$، يتحقق أن للمجموعات الجزئية المستقلة الكبرى من X الحجم نفسه.

الاتحاد $(G_1 \cup G_2)$ ومجموعة أضلاعه هي الاتحاد لأضلاع G_1 و G_2 (تكتب $G_1 + G_2$ إذا كانت مجموعات الرؤوس منفصلة).

اتحاد الماترويدات [369]: اتحاد الماترويدات $M_1, \ldots, M_k$ هو النظام الوراثي الذي مجموعاته المستقلة هي: $\{I_1 \cup \ldots \cup I_k : I_i \in \mathbf{I}_i\}$.

بيان مسافة الوحدة [201]: البيان الذي رؤوسه $\mathbb{R}^2$، بحيث تتجاور نقاطه إذا كانت المسافة بينهما تساوي 1.

بيان غير موسوم (معلم) [9]: مصطلح غير رسمي لصف التشاكل.

غير مشبع بالنسبة إلى [107] M: رأس لا ينتمي إلى ضلع في M.

قابل لطمر أعلى [176]: له طمر خلية ثنائية على سطح، جنسه يساوي $\lfloor (e(G) - n(G) + 1)/2 \rfloor$

التكافؤ (valence): درجة الرأس.

قيمة التدفق [433]: محصلة التدفق الخارج من المنبع أو الداخل إلى المصب.

التغير أو الاختلاف [351]: مربع الانحراف المتوقع عن الوسط.

رأس [2]: عنصر في $V(G)$ أو مجموعة الرؤوس.

العدد اللوني للرؤوس [191]: العدد اللوني.

ترابط الرؤوس [149]: درجة الترابط، أو مقدار الترابط، أو الترابطية.

غطاء الرؤوس [112]: مجموعة رؤوس تحوي نقطة طرفيه لكلّ ضلع على الأقل.

مربع بالنسبة إلى الرؤوس: حذف أي رأس يغير الوسيط أو الصفة.

قطع رؤوس (قاطع رؤوس): مجموعة رؤوس فاصلة.

بيان جزئي بحذف رأس [149,164]: بيان جزئي نحصل عليه بحذف رأس واحد.

مضاعفة الرؤوس من [320]: استبدال رؤوس G بمجموعات مستقلة، بحيث تكون النسخ من x و y متجاورة إذا وفقط إذا تحقق أن $XY \in E(G)$.

تجزئة الرؤوس: تجزئة لمجموعة الرؤوس.

مجموعة الرؤوس [2] $V(G)$: مجموعة العناصر المعرف عليها البيان.

متعدٍّ بالنسبة إلى الرؤوس [14]: لكل زوج X, Y في $V(G)$ يوجد تشاكل ذاتي ينقل (يرسل) x إلى y

نظرية فايزنج [275] تعطي حدًّا أعلى على العدد اللوني للأضلاع (الضلعي) بدلالة الدرجة الكبرى، وأكبر تكرار للأضلاع.

ممر [20,59]: قائمة متناوبة من الرؤوس والأضلاع في بيان بحيث ينتمي كل رأس إلى الضلع الذي يسبقه والضلع الذي يليه (يجب أن نتتبع الأسهم في البيان الموجه)

ممر u,v [20]: ممر من u إلى v.

خاصية الحذف الضعيف [352]: خاصية المصفوفات، وتعني أن الاتحاد لحلقات متقاطعة يحوي حلقة تتفادى نقطة معينة في التقاطع.

الضرب الضعيف $G_1 \otimes G_2$: ضرب البيانات بحيث رؤوسه هي: $V(G_1) \times V(G_2)$ وأضلاعه هي: $(u_1,v_1) \leftrightarrow (u_2,v_2)$ إذا وفقط إذا تحقق أن $u_1 \leftrightarrow u_2$ و $v_1 \leftrightarrow v_2$.

وترى ضعيف [330]: لا توجد له حلقات لاوترية طولها على الأقل 5 في G أو في $\overline{G}$.

مترابط بضعف [56]: بيان موجه بحيث يكون بيانه المتضمن (التحتي) مترابطا.

الوزن: عددد حقيقي.

موزون: تم تعيين أوزان له (لأضلاعه و (أو) رؤوسه).

خاصية الترتيب الحسن [19]: كل مجموعة غير خالية (من الأعداد الطبيعية) تحوي عددًا أصغر.

العجلة [174]: بيان ناتج عن ربط حلقة مع رأس منفرد.

نظرية التشاكل الثنائي لويتني [376]: توصيف لأزواج من البيانات التي تتشاكل ماترويدات حلقاتها.

معامل واينر [72]: مجموع المسافات بين أزواج الرؤوس.

التدفق الصفري: تدفق في شبكة بحيث يساوي التدفق على كل ضلع صفرًا.

ملحق E

قراءات إضافية (Appendix E Supplemental Reading)

لقد نُشِر العديد من الكتب في موضوع نظرية البيان. وسنضع هنا قائمة تحتوي على بعض الكتب للقارئ المهتم الذي يبحث عن عرض أو تقديم بديل، أو يرغب في المزيد من التفاصيل حول بعض المواضيع الخاصة، إضافة إلى أننا سنضع قائمة لكتب عامة في الموضوع نفسه مقسمة إلى ثلاثة مستويات تقريبًا. وسنورد بعد ذلك قائمة بالكتب المتخصصة والمقالات بحسب صلتها وارتباطها بوحدات هذا الكتاب. وأخيرًا سنضع قائمة من الكتب التي تشتمل على بعض المواضيع الإضافية في نظرية البيان.

General /elementary:

Chartrand, G. *Graphs as Mathematical Models.* Prindle-Weber-Schmidt, 1977. Reprinted as *Introductory Graph Theory,* Dover, 1985.

Clark J. and D.A. Holton, *A first look at graph theory.* World Scientific, 1991.

Trudeau R.J., *Introduction to graph theory* (originally *Dots and Lines,* 1976). Dover, 1993.

Wilson R.J. *Introduction to graph theory.* Academic Press, 1979, 1972; Longman, 1985.

Wilson R.J. and J.J. Watkins, *Graphs: An introductory approach.* John Wiley & Sons, 1990.

General / intermediate:

Bondy J.A. and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications.* Elsevier, 1976.

Chartrand G. and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs.* PWS Publishers, 1979; WadsworthBrooks/Cole, 1986; Chapman & Hall, 1996.

Gould R., *Graph Theory.* Benjamin / Cummings, 1988.

Gross J. and J. Yellen, *Graph Theory.* CRC Press, 1999.

Harary F., *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969.

Ore 0., *Theory of Graphs.* AMS Colloq. 38, Amer. Math. Soc., 1962.

General /advanced:

Berge, C. *Graphs.* North-Holland 1973, 1976, 1985. (1970, 1983 in French.)

Bollobas B., *Graph Theory: An Introductory Course.* Grad. Texts in Math. 63; SpringerVerlag, 1979.

Bollobas B., *Modern Graph Theory.* Grad. Texts Math. 184; Springer, 1998.

Diestel R., *Graph Theory* Grad. Texts Math. 173; Springer-Verlag, 1996, 2000.

Zykov A.A. *Fundamentals of graph theory* Nauka, 1987 (Russian). Trang. by L. Boron, C. Christenson, and B. Smith, BCS Associates, 1990.

Chapter 1:

Asratian A.S., T.M.J. Denley, and R. Häggkvist, *Bipartite graphs and their applications.* Cambridge Tracts in Math., 131; Cambridge Univ. Press, 1998.

Fleischner H., *Eulerian Graphs and Related Topics, Vols 1 &* 2. Ann. Discrete Math. 45 & 50, North-Holland, 1990 & 1991.

Harary F., R.Z. Norman, and D. Cartwright, *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs.* John Wiley & Sons, 1965.

Chapter 2:

Buckley F. and F. Harary *Distance in Graphs.* Addison-Wesley, 1990 Moon J., *Counting Labelled Trees.* Canadian Math. Congress, 1970.

Chapter 3:

Gusfield D. and R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* MIT Press, 1989.

Haynes T.W., S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs.* Pure and Applied Math. 208; Marcel Dekker, 1998.

Lovász L. and M.D. Plummer, *Matching Theory.* North-Holland, 1986'.

Chapter 4*:*

Ahuja R.K., T.L. Magnanti, and J. Orlin, *Network Flows*. Prentice-Hall, 1993.

Ford L.R. and D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton Univ. Press, 1962.

Tutte W.T., Connectivity in Graphs. Univ. Toronto Press, 1966.

Chapter 5:

Jensen T.R. and B. Toft, *Graph coloring problems.* Wiley-Interscience, 1995.

Chapter 6:

Aigner M., *Graph Theory: A Development from the 4-Color Problem.* Teubner, 1984 (German). Transl. by BCS Associates, 1987.

Bonnington C.P. and C.H.C. Little, *The Foundations of Topological Graph Theory.* Springer-Verlag, 1995.

Fritsch R. and G. Fritsch, *The Four-Color Theorem.* Springer, 1994, 1998.

Gross, J.L. & T.W. Tucker, *Topological Graph Theory.* Wiley-Interscience, 1987.

Nishizeki T. and N. Chiba, *Planar Graphs: Theory and Algorithms.* North-Holland Math. Studies 140, Annals Disc. Math. 32; North-Holland 1988.

Saaty T.L. and P.C. Kainen, The Four-Color Problem: Assaults and Conquests. McGraw-Hill, 1977; reprinted Dover, 1986.

White A.T., *Graphs, Groups and Surfaces*. North-Holland Math. Studies 8; North-Holland 1973, 1984.

Chapter 7:

Fiorini S. and R.J. Wilson, *Edge-colourings of Graphs.* Res. Notes in Math. 16; Pitman, 1977.

Voss H.-J., *Cycles and Bridges in Graphs.* Kluwer Academic, 1991.

Zhang C.-Q., *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs.* Pure and Applied Math. 205; Marcel Dekker, 1997.

Section 8.1:

Golumbic M.C., *Algorithmic Graph Theory & Perfect Graphs.* Acad. Press, 1980.

Brandstädt A., V.B. Le, and J.P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey.* Soc. Ind. Appl. Math., 1999.

Section 8.2:

Oxley J., *Matroid Theory.* Clarendon Press, Oxford Univ. Press 1992. Welsh D.J., *Matroid Theory.* Academic Press, 1976.

Section 8.3:

Graham R.L., B.L. Rothschild, and J.H. Spencer, *Ramsey Theory.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 1980, 1990.

Section 8.4:

Bollobás B., *Extremal graph theory.* London Math. Soc. Monographs 11; Academic Press, 1978. (Also treats material of Chapter 5.)

Section 8.5:

Alon N. and J. Spencer, *The Probabilistic Method.*

Bollobas B., *Random graphs.* Academic Press, 1985.

Janson S., T. Luczak, and A. Ruciński, *Random Graphs.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2000.

Palmer E.M., *Graphical Evolution.* John Wiley & Sons, 1985.

Section 8.6:

Biggs N., *Algebraic graph theory.* Cambridge Tracts in Math. 67, Cambridge Univ. Press, 1974, 1993.

Chung F.R.K. *Spectral graph theory.* CBMS Reg. Conf. Series in Math. 92; Amer. Math. Soc. 1997.

Cvetković D.M., M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of graphs: Theory and Applications.* Pure and Appl. Math. 87, Academic Press, 1980; 1985; Johann Ambrosius Barth, 1995.

Algorithms and Applications:

Chartrand G. and O.R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory.* McGraw-Hill, 1993.

Chen W.K. *Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks.* Series in Appl. Math. & Mechanics 13, North-Holland, 1976 (2nd ed.).

Christofides N., *Graph Theory: An Algorithmic Approach.* Acad. Press, 1975. Even S., *Graph algorithms.* Computer Science Press, 1979.

Foulds L.R., *Graph Theory Applications.* Universitext; Springer-Verlag, 1992. Gibbons A., *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge Univ. Press, 1985.

Gondran M. and M. Minoux, *Graphs and algorithms,* (translated by Steven Vajda). Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 1984.

Lawler E., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinooy-Kan, and D.B. Shmoys, *The Traveling Salesman Problem.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 1985, 1990.

McHugh J.A., *Algorithmic _Graph Theory.* Prentice-Hall, 1990.

Swamy M.N.S. and K. Thulasiraman, *Graphs, Networks, and Algorithms.* WileyInterscience, John Wiley & Sons, 1981.

Temperley H.N.V., *Graph Theory and Applications.* Halstead Press, 1981.

Wilson R.J. and L.W. Beineke (eds.), *Applications of Graph Theory.* Academic Press, 1979.

Additional Topics:

Beineke L.W. and R.J. Wilson (eds.), *Selected topics in graph theory,* Vols. 1 & 2 & 3. Academic Press, 1978 & 1983 & 1988.

Cameron P.J and J.H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes and Their Links.* Lond. Math. Soc. Student Texts 22, Cambridge Univ. Press, 1991.

Capobianco M. and J.C. Molluzzo, *Examples and counterexamples in graph theory.* North-Holland, 1978.

Berge C., *Hypergraphs.* N.-H. Math. Lib. 45, North-Holland, 1987, 1989.

Biggs, N.L., K.E. Lloyd, and R.J. Wilson, *Graph Theory: 1736-1936.* Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1976, 1986.

Bosák J., *Decompositions of graphs.* Math. & Its Appl. (East European Series) 47, Kluwer Academic Publishers, 1990.

Brouwer A.E., A.M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-regular graphs.* Springer-Verlag, York, 1989.

Chung F.R.K. and R.L. Graham, *Erdős on Graphs: His Legacy of Unsolved Problems.* A.K. Peters, 1998.

Fulkerson D.R. (ed.), *Studies in graph theory,* Parts I & II. Studies in Math. 11 & 12. Math. Assoc. Amer., 1975.

Harary F. and E.M. Palmer, *Graphical Enumeration.*

Hartsfield N. and G. Ringel, *Pearls in graph theory.* Academic Press, 1990, 1994. Holton D.A. and J. Sheehan, *The Petersen graph.* Australian Math. Soc. Lect. Series 7, Cambridge University Press, 1993.

Imrich W. and S. Klavžar, *Product Graphs: Structure and Recognition.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2000.

Lovász L., R.L. Graham, and M. Grötschel (eds.), *Handbook of Combinatorics,* Vol. I. Elsevier, 1995.

Mahadev N.V.R. and U.N. Peled, *Threshold Graphs and Related Topics.* Ann. Disc. Math. 56; North-Holland, 1995.

McKee T.A. and F.R. McMorris, *Topics in intersection graph theory.* Soc. Ind. Appl. Math., 1999.

Moon J.W., *Topics on Tournaments.* Holt, Rinehart, and Winston, 1968.

Prisner E., *Graph Dynamics.* Pitman, 1996.

Scheinerman E.R. and D.H. Ullman, *Fractional Graph Theory:* A *Rational Approach to the Theory of Graphs.* Wiley-Interscience, John Wiley, 1997.

Tutte W.T. *Graph theory.* Encyc Math. & Appl. 21, Addison-Wesley, 1984.

Yap H.P. *Some topics in graph theory.* London Math. Soc. Lect. Notes 108, Cambridge Univ. Press, 1986.

ملحق (Appendix F)

المـراجـع (References)

إن المواضيع التي لم تنشر (تظهر) عند وقت طباعة هذا الكتاب قد وُضعَ عليها علامات في الهامش بتاريخ 2001م؛ حيث كتبنا في قائمة المراجع "حتى تظهر". إن المفردة الأخيرة في كل مرجع هي رقم الصفحة في هذا الكتاب التي ظهر بها المرجع.

[1972] Abbott H.L., Lower bounds for some Ramsey numbers. *Discr. Math.* **2** (1972), 289-293. [393]

[1991] Abeledo H. and G. Isaak, A characterization of graphs that ensure the existence of a stable matching. *Math. Soc. Sci.* **22** (1991), 93-96. [136]

[1964] Aberth 0., On the sum of graphs. *Rev. Fr. Rech. Open* **33** (1964), 353-358. [194]

[1982] Acharya B.D. and M. Las Vergnas, Hypergraphs with cyclomatic number zero, triangulated graphs, and an inequality. *J. Comb. Th. B* **33** (1982), 52-56. [327]

[1993] Ahuja R.K., T.L. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network Flows.* Prentice Hall (1993). [97, 145, 176, 180, 185, 190]

[1979] Aigner M., *Combinatorial Theory.* Springer-Verlag (1979). [355,360,373]

[1984] Aigner M., *Graphentheorie. Eine Entwicklung aus dem 4-Farben Problem.* B.G. Teubner Verlagsgesellschaft (1984) (English transl. BCS Assoc., 1987). [258]

[1982] Ajtai M., V. Chvátal, M.M. Newborn and E. Szemerédi, Crossing-free subgraphs. *Theory and practice of combinatorics, Ann. Discr. Math.* **12** (1982), 9-12. [264]

[1980] Ajtai M., J. Komlós, and E. Szemerédi, A note on Ramsey numbers. *J. Comb. Th. (A)* **29** (1980), 354-360. [51,385]

[1983] Ajtai M., J. Komlós, and E. Szemerédi, Sorting in *c log n* parallel steps. *Combinatorica* **3** (1983), 1-19. [463]

[1989] Akiyama J., H. Era, S.V. Gervacio and M. Watanabe, Path chromatic numbers of graphs. *J. Graph Th.* **13** (1989), 569-575. [271]

[1981] Akiyama J, and F. Harary, A graph and its complement with specified properties, IV: Counting self-complementary blocks. *J. Graph Th.* **5** (1981), 103-107. [32]

[1999] Albertson M.O. and E.H. Moore, Extending graph colorings. *J. Comb. Th. (B) 77* (1998), 83-95. [204]

[1976] Alekseev V.B. and V.S. Gončakov, The thickness of an arbitrary complete graph (Russian). *Mat. Sb. (N.S.)* **101(143)** (1976), 212-230. [271]

[1977] Alexanderson G.L.and J.E. Wetzel, Dissections of a plane oval. *Amer. Math. Monthly* **84** (1977), 442-449. [245]

[1986a] Alon N., Eigenvalues, geometric expanders, sorting in rounds and Ramsey Theory. *Combinatorica* **6** (1986), 207-219. [463]

[1986b] Alon N., Eigenvalues and expanders. *Combinatorica* **6** (1986), 83-96. [464]

[1990] Alon N., The maximum number of Hamiltonian paths in tournaments. *Combinatorica* **10** (1990), 319-324. [117,428,429]

[1993] Alon N., Restricted colorings of graphs. In *Surveys in Combinatorics, 1993.* London Math. Soc. Lect. Notes **187** Cambridge Univ. Press (1993), 1-33. [409]

[1985] Alon N. and Y. Egawa, Even edge colorings of a graph. *J. Comb. Th. (B)* **38** (1985), 93-94. [422]

[1984] Alon N. and V.D. Milman, Eigenvalues, expanders and superconcentrators. In *Proc. 25th. IEEE Symp. Found. Comp. Sci..* IEEE (1984), 320-322. [463, 464]

[1985] Alon N. and V.D. Milman, Ai, isoperimetric inequalities for graphs and super-concentrators. *J. Comb. Th. (B)* **38** (1985), 73-88. [463]

[1992] Alon N., J.H. Spencer, *The Probabilistic Method.* Wiley (1992). [426-9, 463]

[1992] Alon N. and M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica* **12** (1992), 125-134. [409]

[1994] Alspach B., L. Goddyn and C.Q. Zhang, Graphs with the circuit cover property. *Trans. Amer. Math. Soc.* **344** (1994), 131-154. [314]

[1977] Andersen L.D., On edge-colourings of graphs. *Math. Scand.* **40** (1977), 161-175. [279, 285]

[1996] Ando K., A. Kaneko, and S. Gervacio, The bandwidth of a tree with *k* leaves is at most 11/21. *Discr. Math.* **150** (1996), 403-406. [77, 396]

[1976] Appel K. and W. Haken, Every planar map is four-colorable. *Bull. Amer. Math.Soc.* **82** (1976), 711-712. [258, 260]

[1977] Appel K. and W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429-490. [258]

[1986] Appel K. and W. Haken, The four color proof suffices. *Math. Intelligences* **8** (1986), 10-20. [258,261]

[1989] Appel K. and W. Haken, *Every Planar Map Is Four Colorable, Contemporary Mathematics* 98. Amer. Mathematical Society (1989). [258]

[1977] Appel K., W. Haken, and J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. *Illinois J. Math.* **21** (1977), 491-567. [258, 260]

[1974] Arnautov V.I., Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices (Russian). *Prikl. Mat. i Programmirovanie* **11** (1974), 3-8,126. [117]

[1982] Ayel J., Hamiltonian cycles in particular k-partite graphs. *J. Comb. Th. (B)* **32** (1982), 223-228. [296]

[1980] Babai L., P. Erd6s, and S.M. Selkow, Random graph isomorphisms. *SIAM J. Computing* **9** (1980), 628-635. [438]

[1979] Babai L. and L. Kučera, Canonical labelling of graphs in linear average time. In *Proc. 20th IEEE Symp. Found. Comp. Sci..* IEEE (1979), 39-46. [439]

[1953] Bäbler F., Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen. *Comment. Math. Helv.* **27** (1953), 81-100. [77]

[1966] Bacharach M., Matrix rounding problems. *Manag.Sci.* **9** (1966), 732-742. [186]

[1972] Baker B. and R. Shostak, Gossips and telephones. *Discr. Math.* **2** (1972), 191-193. [407]

[1969] Barnette D., Conjecture 5. In *Recent Progress in Combinatorics.* (ed. W.T. Tutte) Academic Press (1969), 343. [304]

[1984] Batagelj V., Inductive classes of cubic graphs. In *Finite and Infinite Sets.* (ed. A. Hajnal,,L. Lovász, V.T. Sós), Proc. 6th Hung. Comb. Colloq. (Eger 1981) *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **37**, Elsevier (1984), 89-101. [53]

[2000] Bauer D., H.J. Broersma and H.J. Veldman, Not every 2-tough graph is Hamiltonian. *5th Twente Workshop on Graphs & Comb. Opt., Enschede, 1997, Discr. Appl. Math.* **99** (2000), 317-321. [288]

[1976] Bean D.R., Effective coloration. *J. Symbolic Logic* **41** (1976), 469-480. [202]

[1965] Behzad M., *Graphs and their chromatic numbers.* Ph.D. Thesis, Michigan State University (1965). [411]

[1971] Behzad M., The total chromatic number of a graph: A survey. In *Combin. Math. and its Applics..* (Proc. Oxford 1969) Academic Press (1971), 1-8. [411]

[1968] Beineke L.W., Derived graphs and digraphs. In *Beitrage zur Graphentheorie.* Teubner (1968), 17-33. [282]

[1965] Beineke L.W. and F. Harary, The thickness of the complete graph. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 850-859. [271]

[1964] Beineke L.W.,F. Harary, J.W. Moon, On the thickness of the complete bipartite graph. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 1-5. [271]

[1969] Beineke L.W. and R.E. Pippert, The number of labeled k-dimensional trees. *J. Comb. Th.* **6** (1969), 200-205. [346]

[1959] Benzer S., On the topology of the genetic fine structure. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **45** (1959), 1607-1620. [328]

[1957] Berge C., Two theorems in graph theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43** (1957), 842-844. [109]

[1958] Berge C., Sur le couplage maximum d'un graphe. *C.R. Acad. Sci. Paris* **247** (1958), 258-259. [138]

[1960] Berge C., Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **9** (1960), 123-160. [227, 228, 320]

[1961] Berge C., Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe* **10** (1961), 114. [320]

[1962] Berge C., *The theory of graphs and its applications* (Translated by Alison Doig). Methuen & Co., John Wiley & Sons (1962). [116]

[1970] Berge C., Une propriété des graphes k-stables-critiques. In *Combinatorial Structures and Their Applications.* (ed. R. Guy, H. Hanani, N.W. Sauer, J. Schönheim) Gordon and Breach (1970), 7-11. [122]

[1973] Berge C., *Graphs and Hypergraphs.* North-Holland (1973) (translation and revision of *Graphes et Hypergraphes* (Dunod, 1970). [47, 147, 202]

[1984] Berge C. and V. Chvátal, *Topics on Perfect Graphs, Ann. Discr. Math.***21**. North-Holland (1984). [320]

[1984] Berge C. and P. Duchet, Strongly perfect graphs. In *Topics on Perfect Graphs.* (ed. C. Berge, V. Chvátal), Ann. *Discr. Math.***21** North-Holland (1984), 57-61. [331]

[1976] Bermond J.C., On Hamiltonian walks. In *Proc. Fifth Brit. Comb. Conf.* (ed. C.St.J.A. Nash-Williams, J. Sheehan) Utilitas Math. (1976), 41-51. [417,418]

[1981] Bernstein P.A. and N. Goodman, Power of natural semijoins. *SIAM J. Computing* **10** (1981), 751-771. [328]

[1981] Bertossi A.A., The edge Hamiltonian path problem is NP-complete. *Info. Proc. Letters* **13** (1981), 157-159. [505]

[1988] Bertschi M. and B.A. Reed, Erratum: A note on even pairs. *Disc. Math.* 71 (1988), 187 (re. B.A. Reed, A note on even pairs, *Disc. Math.* 65(1987), 317-318. [348]

[1994] Bhasker J., T. Samad, and D.B. West, Size, chromatic number, and connectivity. *Graphs and Combin.* **10** (1994), 209-213. [215]

[1993] Biggs N., *Algebraic Graph Theory (2nd ed.).* Cambridge University press (1993) (1st ed. 1974). [453, 465]

[1912] Birkhoff G.D., A determinant formula for the number of ways of coloring a map. Ann. *of Math.* **14** (1912), 42-46. [219]

[1913] Birkhoff G.D., The reducibility of maps. *Amer. J. Math.* **35** (1913), 114-128. [259, 270, 272]

[1946] Birkhoff G., Tres observaciones sobre el algebra lineal. *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Series A* **5** (1946), 147-151. [120]

[1981] Bixby R.E., Matroids and operations research. In *Advanced techniques in practice of operations research.* (ed. H.J. Greenberg, F.H. Murphy, and S.H. Shaw) North-Holland (1981), 333-458. [355]

[1979] Bland R.G., H.-C. Huang and L.E. Trotter Jr., Graphical properties related to minimal imperfection. *Discr. Math.* **27** (1979), 11-22. [335, 337, 348]

[1946] Blanuša D., Le problème des quatre couleurs (Croatian). *Hrvatsko Prirodoslovno Društvo. Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II.* **1** (1946), 31-42. [305]

[1979] Blass A. and F. Harary, Properties of almost all graphs and complexes. *J. Graph Th.* **3** (1979), 225-240. [450]

[1981a] Bollobás B., Threshold functions for small subgraphs. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc* **90** (1981), 197-206. [450]

[1981b] Bollobás B., Degree sequences of random graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 41-52. [438, 440]

[1982] Bollobás B., Vertices of given degree in a random graph. *J. Graph Th.* **6** (1982), 147-155. [438]

[1985] Bollobás B. *Random Graphs.* Academic Press (1985). [426, 431]

[1986] Bollobás B. *Extremal Graph Theory with Emphasis on Probabilistic Methods.* (CBMS #62, American Math Society (1986) Chapter 9 - List Colorings). [409]

[1988] Bollobás B., The chromatic number of random graphs. *Combinatorica* **8** (1988), 49-55. [441, 447, 448]

[1979] Bollobás B. and E.J. Cockayne, Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. *J. Graph Th.* **3** (1979), 241-9. [118, 123]

[1976] Bollobás B. and P. Eras, Cliques in random graphs. *Math. Proc. Camb. Phil: Soc.* **80** (1976), 419-427. [442]

[1985] Bollobás B. and A.J. Harris, List colorings of graphs. *Graphs and Combin.* **1** (1985), 115-127. [409]

[1998] Bollobás B. and A. Thomason, Proof of a conjecture of Mader, Erdös and Hajnal on topological complete subgraphs. *Europ. J. Comb.* **19** (1998), 883-887. [214]

[1990] Bona M., Problem E3378. *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 240. [393]

[1969] Bondy J.A., Properties of graphs with constraints on degrees. *Stud. Sci. Math. Hung.* **4** (1969), 473-475. [159]

[1971a] Bondy J.A., Pancyclic graphs I. *J. Comb. Th. (B)* **11** (1971), 80-84. [395]

[1971b] Bondy J.A., Large cycles in graphs. *Discr. Math.* **1** (1971), 121-132. [417, 418]

[1972a] Bondy J.A., Induced subsets. *J. Comb. Th. (B)* **12** (1972), 201-202. [80]

[1972b] Bondy J.A., Variation on the Hamiltonian theme. *Canad. Math. Bull.* **15** (1972), 57-62. [297]

[1978] Bondy J.A., A remark on two sufficient conditions for Hamilton cycles. *Discr. Math.* **22** (1978), 191-194. [297]

[1976] Bondy J.A. and V. Chvátal, A method in graph theory. *Discr. Math.* **15** (1976), 111-136. [289]

[1988] Bondy J.A. and M. Kouider, Hamiltonian cycles in regular 2-connected graphs. *J. Comb. Th. (B)* **44** (1988), 177-186. [292]

[1976] Bondy J.A. and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications.* North Holland, New York (1976). [51, 76, 190, 209, 217, 252, 253]

[1977] Bondy J.A. and C. Thomassen, A short proof of Meyniel's Theorem. *Discr. Math.* **19** (1977), 195-197. [420]

[1976] Booth K.S. and G.S. Lueker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using *P* Q-tree algorithms. *J. Comp. Syst. Sci.* **13** (1976), 335-379. [252]

[1926] Borüvka 0., Přispevěk k řešeniotázky otázky ekonomické stavby elektrovodnich siti. *Elektrotechnicky Obzor* **15** (1926), 153-154. [97]

[1977] Borodin O.V. and A.V. Kostochka, On an upper bound of the graph's chromatic number depending on the graph's degree and density. *J. Comb. Th. (B)* **23** (1977), 247-250. [199,204]

[1966] Bosák J., Hamiltonian lines in cubic graphs. presented at the International Seminar on Graph Theory and its Applications, Rome 5-9) (1966). [316]

[1994] Brandt S., Subtrees and subforests of graphs. *J. Comb. Th. (B)* **61** (1994), 63-70. [147,219]

[2001] Brandt S., Expanding graphs and Ramsey numbers. (to appear). [387]

[1941] Brooks R.L., On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **37** (1941), 194-197. [197]

[1980] Buckingham M.A., Circle Graphs (also Ph.D. Thesis, Courant 1981). Courant Computer Science Report 21 (1980). [337]

[1983] Buckingham M.A. and M.C. Golumbic, Partitionable graphs, circle graphs, and the Berge strong perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **44** (1983), 45-54. [336, 339, 348]

[1981] Bumby R.T., A problem with telephones. *SIAM J Alg. Disc. Meth.* **2** (1981), 13-19. [408]

[1974] Buneman P., A characterization of rigid circuit graphs. *Discr. Math.* **9** (1974), 205-212. [324]

[1982] Burlet M. and J.P. Uhry, Parity graphs. In *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization.* (ed. A. Bachem, M. Grötschel, and B. Korte), Ann. *Discr. Math.* **16** North-Holland (1982), 1-26. [330, 347]

[1977] Burns D. and S. Schuster, Every *(p, p* - 2) graph is contained in its complement. *J. Graph Th.* **1** (1977), 277-279. [80]

[1978] Burns D. and S. Schuster, Embedding *(p, p* - 1) graphs in their complements. *Israel J. Math.* **30** (1978), 313-320. [80]

[1974] Burr S.A., Generalized Ramsey theory for graphs-a survey. In *Graphs and Combinatorics.* Springer (1974), 52-75. [394]

[1981] Burr S.A., Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **24** (1981), 405-413. [387]

[1983] Burr S.A., Diagonal Ramsey numbers for small graphs. *J. Graph Th.* **7** (1983), 57-69. [386]

[1983] Burr S.A. and P. Erdös, Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvátal. *J. Graph Th.* **7** (1983), 39-51.. [387]

[1975] Burr S.A., P. Erdös, and J.H. Spencer, Ramsey theorems for multiple copies of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **209** (1975), 87-99. [387]

[1974] Buršteĭn M.I., An upper bound for the chromatic number of hypergraphs (Russian). *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe* **75** (1974), 37-40. [315]

[1991] Cameron P.J. and J.H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes, and their Links, London Math. Soc. Student Texts 22.* Cambridge Univ. Press' (1991). [466]

[1991] Campbell C. and Staton W, On extremal regular graphs with given odd girth. *Proc. 22th S.E. Intl. Coq: Graph Th. Comb. Comp.* **81** (1991), 157-159. [49]

[1979] Caro Y., New results on the independence number. Tel-Aviv University 05-79 (1979). [122,428]

[2000] Caro Y., D.B. West and R. Yuster, Connected domination and spanning trees with many leaves. *SIAM J. Discr. Math.* **13** (2000), 202-211. [117]

[1978] Catlin P.A., A bound on the chromatic number of a graph. *Discr. Math.* **22** (1978), 81-83. [204]

[1979] Catlin P.A., Hajós' graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *J. Comb. Th. (B)* **26** (1979), 268-274. [213, 218, 442]

[1889] Cayley A., A theorem on trees. *Quart. J. Math.* **23** (1889), 376-378. [82]

[1984] Celmins U.A., *On cubic graphs that do not have an edge 3-coloring.* Ph.D.Thesis, University of Waterloo (1984). [312]

[1959] Chang S., The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association scheme. *Sci. Record* **3** (1959), 604-613. [285]

[1994a] Chappell G.G., A weaker augmentation axiom. unpublished (1994). [374]

[1994b] Chappell G.G., Matroid intersection and the Gallai-Milgram Theorem. unpublished (1994). [376]

[1968] Chartrand G. and F. Harary, Graphs with prescribed connectivities. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966, (ed. P. Erdös and G. Katona) Acad. Press (1968), 61-63. [158]

[1969] Chartrand G. and H.V. Kronk, The point-arboricity of planar graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **44** (1969), 750-752. [202]

[1986] Chartrand G. and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs* (2nd ed.). Wadsworth (1986). [77, 173, 252]

[1973] Chartrand G., A.D. Polimeni and M.J. Stewart, The existence of 1-factors in line graphs, squares, and total graphs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **76**, *Indag. Math.* **35** (1973), 228-232. [283]

[1968] Chein M., Graphe régulièrement décomposable. *Rev. Francaise Info. Rech. Open* **2** (1968), 27-42. [173]

[1998] Chen G., J. Lehel, M.S. Jacobson and W.E. Shreve, Note on graphs without repeated cycle lengths. *J. Graph Th.* **29** (1998), 11-15. [77]

[1986] Chetwynd A.G. and A.J.W. Hilton, Star multigraphs with 3 vertices of maximum degree. *Math. Proc. Cambridge Math. Soc.* **100** (1986), 303-317. [278]

[1989] Chetwynd A.G. and A.J.W. Hilton, 1-factorizing regular graphs of high degree-an improved bound. *Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1988), Discr. Math.* **75** (1989), 103-112. [279]

[1975] Choudom S.A., K.R. Parthasarathy and G. Ravindra, Line-clique cover number of a graph. *Proc. Indian Nat. Sci. Acad.* **41** (1975), 289-293. [422]

Christofides N., Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling sales- man problem. Grad. Sch. Indust. Admin., Carnegie-Mellon Univ. (1976). [498]

[1978a] Chung F.R.K., On partitions of graphs into trees. *Discr. Math.* **23** (1978), 23–30. [34]

[1978b] Chung F.R.K., On concentrators, superconcentrators, generalizers and nonblocking networks. *Bell Syst. Tech. J.* (1978), 1765-1777. [463]

[1981] Chung F.R.K., On the decompositions of graphs. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **2** (1981), 1-12. [398]

[1988] Chung F.R.K., Labellings of graphs. In *Selected Topics in Graph Theory, Vol. 3.* (ed. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Acad. Press (1988), 151-168. [390]

[1997] Chung F.R.K., *Spectral graph theory. CBMS Conf. Series* **92** American Mathematical Society (1997). [453]

[1975] Chung F.R.K. and R.L. Graham, On multicolor Ramsey numbers for complete bipartite graphs. *J. Comb. Th. (B)* **18** (1975), 164-169. [395]

[1983] Chung F.R.K. and C.M. Grinstead, A survey of bounds for classical Ramsey numbers. *J. Graph Th.* **7** (1983), 25-37. [385]

[1993] Chung M.-S. and D.B. West, Large P_4-free graphs with bounded degree. *J. Graph Th.* **17** (1993), 109-116. [52]

[1970] Chvátal V., The smallest triangle-free 4-chromatic 4-regular graph. *J. Comb. Th.* **9** (1970), 93-94. [203]

[1972] Chvatal V., On Hamilton's ideals. *J. Comb. Th. B* **12** (1972), 163-168. [290, 297]

[1973] Chvátal V., Tough graphs and Hamiltonian circuits. *Discr. Math.* **2** (1973), 215-223. [297]

[1975] Chvatal V., A combinatorial theorem in plane geometry. *J. Comb. Th. (B)* **18** (1975), 39-41. [270]

[1976] Chvatal V., On the strong perfect graph conjecture. *J. Comb. Th.* **20** (1976), 139-141. [341, 343, 348]

[1977] Chvátal V., Tree-complete graph Ramsey numbers. *J. Graph Th.* **1**(1977), 93. [386]

[1984] Chvátal V., Perfectly ordered graphs. Ann. *Discrete Math.* **21** (1984), 63-65. [331, 332, 347]

[1985a] Chvátal V., Hamiltonian cycles. In *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization.* (ed. E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys) Wiley (1985), 403-429. [286]

[1985b] Chvatal V., Star-cutsets and perfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **39** (1985), 138-154. [333, 347]

[1972] Chvatal V. and P. Erdös, A note on hamiltonian circuits. *Discr. Math.* **2** (1972),111-113. [292, 297, 298, 441]

[1979] Chvátal V., R.L. Graham, A.F. Perold, and S.H. Whitesides, Combinatorial designs related to the strong perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **26** (1979), 83-92. [337, 347]

[1972] Chvátal V. and F. Harary, Generalized Ramsey theory for graphs, III. Small Off-Diagonal Numbers. *Pac. J. Math.* **41** (1972), 335-345. [387]

[1973] Chvatal V. and F. Harary, Generalized Ramsey theory for graphs, I. Diagonal numbers. *Period. Math. Hungar.* **3** (1973), 115-124. [449]

[1974] Chvátal V. and L. Lovász, Every directed graph has a semi-kernel. In *Hyper-graph Sem.*. (Columbus, 1972) *Lect. Notes Math.* **411**, Springer (1974), 175. [66]

[1983] Chvátal V., V. Midi, E. Szemerédi, W.T. Trotter, The Ramsey numbers of a graph with bounded maximum degree. *J. Comb. Th. (B)* **34** (1983), 239-243. [388]

[1988] Chvátal V. and N. Sbihi, Recognizing claw-free perfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **44** (1988), 154-176. [341]

[1975] Chvátalová J., Optimal labelling of a product of two paths. *Discr. Math.* **11** (1975), 249-253. [396]

[1974] Clapham C.R.J., Hamiltonian arcs in self-complementary graphs. *Discr. Math.* **8** (1974), 251-255. [297]

[1977] Cockayne E.J. and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs. *Networks* **7** (1977), 247-261. [116]

[1971] Cook S.A., The complexity of theorem-proving procedures. In *Proc. 3th ACM Symp. Theory of Comp.*. Assoc. Comput. Mach. (1971), 151-158. [499]

[2001] Corneil D.G, S. Ola•iu, and L. Stewart, The LBFS structure and recognition of interval graphs. (to appear). [326]

[1970] Crapo H.H. and G.C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries* preliminary edition. M.I.T. Press (1970). [355]

[1980] Cull P., Tours of graphs, digraphs, and sequential machines. *IEEE Trans. Comp.* **C29** (1980), 50-54. [65]

[1979] Cvetković D.M., M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of Graphs.* Academic Press (1979) 3rd ed., Johann Ambrosius Barth, 1995. [453, 468]

[1971] de Werra D., Balanced schedules. *Information J.* **9** (1971), 230-237. [285]

[1964] Demoucron G., Y. Malgrange and R. Pertuiset, Graphes planaires: reconnaissance et construction des représentations planaires topologiques. *Rev. Francaise Recherche Opérationnelle* **8** (1964), 33-47. [253-255]

[1947] Descartes B., A three colour problem. *Eureka* (1947), (soln. 1948). [206, 216]

[1948] Descartes B., Network-colourings. *Mat. Gaz.* **32** (1948), 67-69. [305]

[1954] Descartes B., Solution to advanced problem 4526 (Ungar). *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 352. [206, 216]

[1997] Diestel R., *Graph theory. Graduate Texts in Mathematics* **173** Springer-Verlag (Second edition, 2000) (1997). [269]

[1959] Dijkstra E.W., A note on two problems in connexion with graphs. *Numer Math.* **1** (1959), 269-271. [97, 104]

[1952a] Dirac G.A., A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **27** (1952), 85-92. [212, 218]

[1952b] Dirac G.A., Some theorems on abstract graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.* **2** (1952), 69-81. [288, 293, 298, 417, 441]

[1953] Dirac G.A., The structure of k-chromatic graphs. *Fund. Math.* **40** (1953), 42-55. [211]

[1960] Dirac G.A., In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen and ihre Unterteilungen. *Math. Nachr.* **22** (1960), 61-85. [170]

[1961] Dirac G.A., On rigid circuit graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **25** (1961), 71-76. [226, 231]

[1964] Dirac G.A., Homomorphism theorems for graphs. *Math. Ann.* **153** (1964), 69-80. [214]

[1965] Dirac G.A., Chromatic number and topological complete subgraphs. *Can. Math. Bull.* **8** (1965), 711-715. [213]

[1967] Dirac G.A., Minimally 2-connected graphs. *J. Reine Angew. Math.* **228** (1967), 204-216. [175]

[1954] Dirac G.A. and S. Schuster, A theorem of Kuratowski. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* Ser. A **57** (1954), 343-348. [252]

[1980] Dmitriev I.G., Weakly cyclic graphs with integral chromatic spectra (Russian). *Metody Diskret. Analiz.* **34** (1980), 3-7,100. [230]

[1917] Dudeney H.E., *Amusements in Mathematics.* Nelson (1917). [233]

[1917] Dziobek O., Eine Formel der Substitutionstheorie. *Sitzungsber. Berl. Math. G.* **17** (1917), 64-67. [94]

[1965a] Edmonds J., Paths, trees, and flowers. *Can. J. Math.* 17 (1965), 449-467. [142-5]

[1965b] Edmonds J., Minimum partition of a matroid into independent sets. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **69B** (1965), 67-72. [79, 355, 372]

[1965c] Edmonds J., Lehman's switching game and a theorem of Tutte and Nash-Williams. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **69B** (1965), 73-77. [80, 355, 372]

[1965d] Edmonds J., Maximum matchings and a polyhedron with 0,1-vertices. *J. Res. Nat. Bur. Standards* **69B** (1965), 125-130. [145]

[1970] Edmonds J., Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In *Combinatorial Structures and Their Applications.* (Proc. Calgary 1969) Gordon and Breach (1970), 69-87. [367]

[1973] Edmonds J., Edge-disjoint branchings. In *Combinatorial Algorithms.* Courant Symp. Monterey 1972 - (ed. B. Rustin) Academic Press (1973), 91-96. [405-6]

[1979] Edmonds J., Matroid intersection. In *Discrete Optimization I.* (ed. P.L. Hammer, E.L. Johnson, and B.H. Korte) *Ann. Discr. Math.* **4** (1979), 39-49. [369]

[1965] Edmonds J. and D.R. Fulkerson, Transversals and matroid partition. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **69B** (1965), 147-153. [353, 370]

[1973] Edmonds J. and E. Johnson, Matching, Euler tours, and the Chinese postman. *Math. Programming* **5** (1973), 88-124. [100]

[1972] Edmonds J. and R.M. Karp, Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. Assoc. Comp. Mach.* **19** (1972), 248-264. [180]

[1931] Egerváry E., On combinatorial properties of matrices (Hungarian with German summary). *Mat. Lapok* **38** (1931), 16-28. [112, 368]

[1979] Eitner P.G., The bandwidth of the complete multipartite graph. Presentation at Toledo Symposium on Applications of Graph Theory (1979). [396]

[1956] Elias P., A. Feinstein and C.E. Shannon, Note on maximum flow through a network. *IRE Trans. on Information Theory* **IT-2** (1956), 117-119. [168]

[1996] Ellingham M.N. and L. Goddyn, List edge colourings of some 1-factorable multigraphs. *Combinatorica* **16** (1996), 343-352. [411]

[1994] Enchev 0., Problem 10390. *Amer. Math. Monthly* **101** (1994), 574 (solution 104 (1997), 367-368). [120]

[1985] Enomoto B., B. Jackson, P. Katerinis, and A. Saito, Toughness and the existence of k-factors. *J. Graph Th.* **9** (1985), 87-95. [288]

[1946] Erdös P., On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly* **53** (1946), 248-250.[265]

[1947] Eras P., Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292-294. [385, 426]

[1959] Erdös P.,Graph theory and probability. *Can. J. Math.* 11(1959), 34-38. [206,429]

[1962] Erdös P., Remarks on a paper of Pósa. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962), 227-229. [297]

[1963] Eras P., On a combinatorial problem. *Nord. Mat. Tidskr.* **11** (1963), 5-10. [449]

[1964] Erdös P., Extremal problems in graph theory. In *Theory of Graphs and Its Applications.* Academic Press (1964), 29-36. [70, 217]

[1981] Erdös P., On the combinatorial problems I would most like to see solved. *Combinatorica* **1** (1981), 25-42. [202]

[1988] Erdös P., Problem E3255. *Amer. Math. Monthly* **95** (1988), 259. [51]

[1981] Erdös P. and S. Fajtlowicz, On the conjecture of Hajós. *Combinatorica* **1** (1981), 141-143. [442]

[1959] Erdös P. and T. Gallai, On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959), 337-356. [395, 416]

[1960] Erdös P. and T. Gallai, Graphs with prescribed degrees of vertices (Hungarian). *Mat. Lapok* **11** (1960), 264-274. [141,148]

[1961] Erdös P. and T. Gallai, On the minimal number of vertices representing the edges of a graph. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961), 181-203. [147,216]

[1966] Erdös P., A. Goodman, and L. Pósa, The representation of graphs by set intersections. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 106-112. [397]

[1973] Erdös P. and R.K. Guy, Crossing number problems. *Amer. Math. Monthly* **80** (1973), 52-58. [264]

[1966] Erdös P. and A. Hajnal, On chromatic numbers of graphs and set systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 61-99. [204]

[1966] Erdös P. and A. Rényi, On the existence of a factor of degree one of a connected random graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 359-368. [426, 438]

[1979] Erdös P., A. Rubin, and H. Taylor, Choosability in graphs. *Congr. Num.* **26** (1979), 125-157. [408, 409, 412, 423]

[1963] Erdös P. and Sachs H., Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math. -Natur. Reihe* **12** (1963), 251-257. [49, 79]

[1935] Erdös P. and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry. *Composito Math* **2** (1935), 464-470. [203, 379, 382, 383]

[1985] Erdös P. and D.B. West, A note on the interval number of a graph. *Discr. Math.* **55** (1985), 129-133. [451]

[1977] Erdös P. and R.J. Wilson, On the chromatic index of almost all graphs. *J. Comb. Th. (B)* **23** (1977), 255-257. [439]

[1962] Eršov A.P. and G.I. Kožuhin, Estimates of the chromatic number of connected graphs (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **142** (1962), 270-273. [215]

[1736] Euler L., Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae* **8** (1736), 128-140 (appeared 1741). [26]

[1758] Euler L., Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Hedris Planis Inclusa Sunt Praedita. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol* **4** (1758), 140-160. [241]

, [1994] Evans A.B., G.H. Fricke, C.C. Maneri, T.A. McKee, and M. Perkel, Representations of graphs modulo *n*. *J. Graph Th.* **18** (1994), 801-815. [422]

[1975] Even S. and O. Kariv, An $0\ (n^{2.5})$ algorithm for maximum matching in general graphs. In *Proc. 16th Symp. Found. Comp. Sci.* IEEE (1975), 100-112. [145]

[1975] Even S. and R.E. Tarjan, Network flow and testing graph connectivity. *SIAM J. Computing* **4** (1975), 507-518. [134]

[1987] Faigle U., Matroids in combinatorial optimization. In *Combinatorial Geometries.* (ed. N. White) Cambridge Univ. Press (1987), 161-210. [369]

[1984] Fan G.-H., New sufficient conditions for cycles in graphs. *J. Comb. Th. (B)* **37** (1984), 221-227. [419]

[1986] Farber M. and R.E. Jamison, Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **7** (1986), 433-444. [225]

[1948] Fáry I., On the straight line representations of planar graphs. *Acta Sci. Math.* **11** (1948), 229-233. [246]

[1988] Feng T., A short proof of a theorem about the circumference of a graph. *J. Comb. Th. (B)* **45** (1988), 373-375. [419]

[1968] Finck H.-J., On the chromatic numbers of a graph and its complement. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966 (ed. P. Erdős and G. Katona) Academic Press (1968), 99-113. [202]

[1969] Finck H.-J. and H. Sachs, Über eine von H.S. Wilf angegebene Schranke fiir die chromatische Zahl endlicher Graphen. *Math. Nachr.* **39** (1969), 373-386. [202]

[1985] Fishburn P.C., *Interval Orders and Interval Graphs.* Wiley (1985). [347]

[1994] Fisher D.C., K.L. Collins, and L.B. Krompart, Problem 10406. *Amer. Math. Monthly* **101** (1994), 793. [316]

[1978] Fisk S., A short proof of Chvátal's watchman theorem. *J. Comb. Th. (B)* **24** (1978), 374. [270]

[1974] Fleischner H., The square of every two-connected graph is hamiltonian. *J. Comb. Th. (B)* **16** (1974), 29-34. [296]

[1983] Fleischner H., Eulerian graphs. In *Selected Topics in Graph Theory Vol. 2.* (ed. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Academic Press (1983), 17-54. [95]

[1991] Fleischner H., A maze search algorithm which also produces Eulerian trails. In *Advances in Graph Th..* (ed. V.R. Kulli) Vishwa Intl. Publ. (1991), 195-201. [95]

[1992] Fleischner H. and M. Stiebitz, A solution to a coloring problem of P. Erdös. *Discr. Math.* **101** (1992), 39-48. [409]

[1990] Floyd R.W., Problem E3399. Am. *Math. Monthly* **97** (1990), 611-612. [121]

[1956] Ford L.R. Jr. and D.R. Fulkerson, Maximal flow through a network. *Canad. J. Math.* **8** (1956), 399-404. [168,169,180,185-9]

[1958] Ford L.R. Jr. and D.R. Fulkerson, Network flows and systems of representatives. *Canad. J. Math.* **10** (1958), 78-85. [171, 369]

[1962] Ford L.R. Jr. and D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton (1962). *[130, 176, 185]*

[1973] Fournier J.-C., Colorations des arêtes d'un graphe. In *Colloque Th. des Graphes.* (Bruxelles 1973) *Cahiers Ctr. Etud. Rech. Opér.* **15** (1973), 311-314. [285]

[1993] Frank A., Applications of submodular functions. In *Surveys in Combinatorics, 1993.* (ed. K. Walker) *Lond. Math. Soc. Lect. Notes* **187** Cambridge Univ. Press (1993), 85-136. [166]

[1981] Frankl P. and R.M. Wilson, Intersection theorems with geometric consequences. *Combinatorica* **1** (1981), 357-368. [385, 395]

[1985] Fraughnaugh (Jones) K., Minimum independence graphs with maximum degree four. In *Graphs and Applics.* (Proc. Boulder 1982) Wiley (1985), 221-230. [270]

[1998] Fritsch R. and G. Fritsch, *The Four-Color Theorem.* Springer (1998) (published in German by F.A. Brockhaus, 1994). *[258]*

[1917] Frobenius G., Über zerlegbare Determinanten. *Sitzungsber. König. Preuss. Adad. Wiss.* **XVIII** (1917), 274-277. [111]

[1971] Fulkerson D.R., Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra. *Math. Programming* **1** (1971), 168-194. [318, 320]

[1965] Fulkerson D.R. and O.A. Gross, Incidence matrices' and interval graphs. *Pac. J. Math.* **15** (1965), 835-855. [231, 328, 344]

[1981] Gabber 0. and Z. Galil, Explicit construction of linear-sized superconcentrators. *J. Comput. Systems Sci.* **22** (1981), 407-420. [463]

[1975] Gabow H.N., An efficient implementation of Edmonds' algorithm for maximum matchings on graphs. *J. Assoc. Comp. Mach.* **23** (1975), 221-234. [145]

[1990] Gabow H.N., Data structures for weighted matching and nearest common ancestors with linking. In *Proc 1st ACM-SIAM Symp. Disc. Algs.* (San Francisco 1990) SIAM (1990), 434-443. [145]

[1986] Gabow H.N., Z. Galil, T. Spencer, and R.E. Tarjan, Efficient algorithms for finding minimum spanning trees in undirected and directed graphs. *Combinatorica* **6** (1986), 109-122. [97]

[1989] Gabow H.N. and R.E. Tarjan, Faster scaling algorithms for general graph match- in problems. Tech. Re t. CU-CS-432-89 Dept. Comp. Sci., Univ. Colorado - Boul- der (1989). [145]

[1957] Gale D., A theorem on flows in networks. *Pac. J. Math.* 7 (1957), 1073-1082. *[184-5,190]*

[1962] Gale D. and L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 9-15. [131-2,135-6,411]

[1959] Gallai T., Über extreme Punkt- and Kantenmengen. Ann. *Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* **2** (1959), 133-138. [115, 122, 376]

[1962] Gallai T., Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962), 3-36. [330]

[1963a] Gallai T., Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963), 135-139. [147]

[1963b] Gallai T., Kritische Graphen I. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Keel.* **8** (1963), *165-192.* [198-9]

[1963c] Gallai T., Kritische Graphen II. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963), 373-395. [217]

[1968] Gallai T., On directed paths and circuits. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966 (ed. P. Eras and G. Katona) Academic Press (1968), 115-118. [196]

[1960] Gallai T. and A.N. Milgram, Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei. *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960), 181-186. [413]

[1998] Gallian J.A., A dynamic survey of graph labeling. *Electron. J. Combin.* **5** (1998), (Dynamic Survey 6) 43 pp. [88]

[1995] Galvin F., The list chromatic index of a bipartite multigraph. *J Comb. Th. (B)* **63** (1995), 153-158. [410]

11976] Gardner M., Mathematical games. *Sci. Amer.* **234** (1976), 126-130 (also 235, 210-211. [305]

[1978] Garey M.R., R.L. Graham, D.S. Johnson, and D.E. Knuth, Complexity results for bandwidth minimization. *SIAM J. Appl. Math.* **34** (1978), 477-495. [390]

[1976] Garey M.R. and D.S. Johnson, The complexity of near-optimal graph colouring. *J. Assoc. Comp. Mach.* **23** (1976), 43-49. [441]

[1979] Garey M.R. and D.S. Johnson, *Computers and Intractability.* W.H. Freeman and Company, San Fransisco (1979). [495]

[1976] Garey M.R., D.S. Johnson, and L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems. *Theor. Comp. Sci.* **1** (1976), 237-267. [504]

[1976] Garey M.R., D.S. Johnson, and R.E. Tarjan, unpublished [505]

[1972] Gavril F., Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques and maximum independent set of a chordal graph. *SIAM J. Computing* **1** (1972), 180-187. [344]

[1974] Gavril F., The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *J. Comb. Th. (B)* **16** (1974), 47-56. [324]

[1994] Gavril F. and J. Urrutia, Intersection graphs of concatenable subtrees of graphs. *Discr. Appl. Math.* **52** (1994), 195-209. [345]

[1991] George J., *1-Factorizations of tensor products of graphs.* Ph.D. Thesis, Univ. of Illinois (Urbana-Champaign) (1991). [284]

[1989] Georges J.P., Non-Hamiltonian bicubic graphs. *J. Comb. Th. (B)* 46 (1989), 121-124. [292]

[1960] Ghouilà-Houri A., Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien. *C. R. Adac. Sci. Paris* **156** (1960), 495-497. [294,299,420]

[1985] Gibbons A., *Algorithmic Graph Theory.* Cambr. Univ. Press. (1985). [100, 500]
[1959] Gilbert E.N., Random graphs. Ann. *Math. Stat.* **30** (1959), 1141-1144. [431]

[1984] Giles R., L.E. Trotter Jr., and A.C. Tucker, The strong perfect graph theorem for a class of partitionable graphs. In *Topics on Perfect Graphs.* (ed. C. Berge and V. Chvátal) North-Holland (1984), 161-167. [342, 343]

[1964] Gilmore P.C. and A.J. Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canad. J. Math.* **16** (1964), 539-548. [328]

[1963] Glicksman S., On the representation and enumeration of trees. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59** (1963), 509-517. [93]

[1991] GoddardW., Acyclic colorings of planargraphs.Disc. *Math.* 91(1991), 91-94. [271]

[1985] Goddyn L., A girth requirement for the double cycle cover conjecture.,Cycks *in graphs (Burnaby, 1982), Math.Stud.* **115** North-Holland (1985), 13-26. [314]

[1973] Goldberg M.K., Multigraphs with a chromatic index that is nearly maximal (Russian). *Coll. in memory V. K. Korobkov, Diskret.Analiz* **23** (1973), 3-7. [279]

[1977] Goldberg M.K., Structure of multigraphs with restrictions on the chromatic class (Russian). *Metody Diskret. Analiz.* **30** (1977), 3-12. [279, 285]

[1984] Goldberg M.K., Edge-coloring of multigraphs: recoloring technique. *J. Graph Th.* **8** (1984), 123-137. [279, 285]

[1980] Golumbic M.C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press (1980). [320, 337, 346]

[1984] Golumbic M.C., Algorithmic aspects of perfect. graphs. In *Topics on perfect graphs*. (ed. C. Berge and V. Chvátal) North-Holland (1984), 301--323. [325]

[1946] Good I.J., Normal recurring decimals. *J. Lond. Math. Soc.* **21** (1946), 167-169. *[60, 64, 65]*

[1959] Goodman A. W., On sets of acquaintances and strangers at any party. *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 778-783. [52]

[1988] Gould R.J., *Graph Theory*. Benjamin/Cummings (1988). *[252]*

[1994] Graham N., R.C. Entringer and L.A. Székely, New tricks for old trees: maps and pi-geonhole principle. *I* ***AMM*** **101** (1994), 664-667. [379, 393]

[1992] Graham N. and F. Harary, Changing and unchanging the diameter of a hyper-cube. *Discr. Appl. Math.* **37-38** (1992), 265-274. - [379]

[1973] Graham R.L. and D.J. Kleitman, Increasing paths in edge ordered graphs. *Pe- riod. Math. Hungar.* **3** (1973), 141-148. [380, 393]

[1971] Graham R.L. and H.O. Pollak, On the addressing problem for loop switching. *Bell Sys. Tech. J.* 50 (1971), 2495-2519. [401]

[1973] Graham R.L. and H.O. Pollak, On embedding graphs in squashed cubes. In *Graph Theory and Applications*. (Proc. Kalmazoo 1972), *Lect. Notes Math.* **303** Springer (1973), 99-110. [401]

[1980] Graham R.L., B.L. Rothschild, and J.H. Spencer, *Ramsey Theory*. Wiley (1980) 2nd ed. 1990. [381, 385]

[1968] Graver J.E. and J. Yackel, Some graph theoretic results associated with Ram-sey's Theorem. *J. Comb. Th.* **4** (1968), 125-175. [384, 385]

[1973] Greene C., A multiple exchange property for bases. *Proc. Amer. Math. Soc.* 39 (1973), 45-50. [374]

[1975] Greene C. and G. Iba, Cayley's formula for multidimensional trees. *Discr. Math.* 13 (1975), 1-11. [346]

[1978] Greenwell D.L., Odd cycles and perfect graphs. In *Theory and Applications of Graphs. Lect. Notes Math.* 642 Springer-Verlag (1978), 191-193. [344]

[1973] Greenwell D.L. and H.V. Kronk, Uniquely line colorable graphs. *Canad. Math. Bull.* 16 (1973), 525-529. [296]

[1974] Greenwell D.L. and L. Lovász, Applications of product colouring. *Aoki Math. Acad. Sci. Hung* **25** (1974), 335-340. [201]

[1955] Greenwood R.E. and A.M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J Math.* **7** (1955), 1-7. [384]

[1992] Griggs J.R. and M. Wu, Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5. *Discr. Math.* **104** (1992), 167-183. [123]

[1991] Grigni M. and D. Peleg, Tight bounds on minimum broadcast networks. *SIAM J. Discr. Math.* **4** (1991), 207-222. [423]

[1975] Grimmett G.R. and C.J.H. McDiarmid, On colouring random graphs. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77** (1975), 313-324. [441]

[1968] Grinberg E.J., Plane homogeneous graphs of degree three without hamiltonian circuits. *Latvian Math. Yearbook* **5** (1968), 51-58. [302-3, 315-6]

[1978] Grinstead C.M., *The strong perfect graph conjecture for a class of graphs*. Ph.D. Thesis, UCLA (1978). [341]

[1981] Grinstead C.M., The strong perfect graph conjecture for toroidal graphs. *J. Comb. Th. (B)* **30** (1981), 70-74. [341]

[1982] Grinstead C.M. and S.M. Roberts, On the Ramsey numbers R(3, 8) and R(3, 9). *J. Comb. Th. (B)* **33** (1982), 27-51. [384]

[1989] Gritzmann P., B. Mohar, J. Pach and R. Pollack, Problem E3341. *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 642 (solution **98**, 165-166). [256]

[1999] Gross J. and J. Yellen, *Graph Theory.* CRC Press (1999). [453]

[1959] Grötzsch H., Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-U, Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe* **8** (1959), 109-120. [270]

[1963] Grünbaum B. and T.S. Motzkin, The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra. *Canad. J. Math.* **15** (1963), 744-751. [245]

[1962] Guan M., Graphic programming using odd and even points. *Chinese Math.* **1** (1962), 273-277. [99]

[1966] Gupta R.P., The chromatic index and the degree of a graph (Abstract 66T-429). *Not. Amer. Math. Soc.* **13** (1966), 719. [275, 277, 279, 285]

[1989] Gusfield D. and R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* MIT Press (1989). [132]

[1996] Gutner S., The complexity of planar graph choosability. *Discr. Math.* **159** (1996), 119-130. [412]

[1969] Guy R.K., The decline and fall of Zarankiewicz's theorem. In *Proof Techniques in Graph Theory.* (ed. F. Harary) Acad. Press (1969), 63-69. [264]

[1970] Guy R.K., Sequences associated with a problem of Turán and other problems. Proc. Combin. Conf. Balatonfüred 1969, Bolyai János Matematikai Tarsultat (1970), 553-569. [264, 272]

[1972] Guy R.K., Crossing numbers of graphs. In *Graph Theory &Appl.* Kalamazoo, 1972 (ed. Y. Alavi et al), *Lect. Notes Math.* **303** Springer (1972), 111-124. [263]

[1967] Guy R.K. and F. Harary, On the Möbius ladders. *Canad. Math. Bull.* **10** (1967), 493-496. [271]

[1975] Gyárfás A., On Ramsey covering-numbers. In *Finite and Infinite Sets.* (ed. A. Hajnal, R. Rado and V.T. Sós) Proc. Colloq. Keszthely, 1973 *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **10**, North-Holland (1975), 801-816. [206, 214-5]

[1980] Gyárfás A., E. Szemerédi, and Z. Tuza, Induced subtrees in graphs of large chromatic number. *Discr. Math.* **30** (1980), 235-244. [219]

[1979] Győri E. and A.V. Kostochka, On a problem of G.O.H. Katona and T. Tarján. *Acta Math. Acad. Sci. Hung* **34** (1979), 321-327. [398]

[1943] Hadwiger H., Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zurich* **88** (1943), 133-142. [213, 363]

[1945] Hadwiger H., Üeberdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen. *Portugaliae Math.* **4** (1945), 238-242. [201]

[1961] Hadwiger H., Ungelöste Probleme No. 40. *Elem. Math.* **16** (1961), 103-4. [201]

[1997] Häggkvist R. and J.C.M. Janssen, New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs. *Combin. Probab. Comput.* **6** (1997), 295-313. [410]

[1961] Hajós G., Über eine Konstruktion nicht n-farbbarerGraphen. *Wiss. Z. MartinLuther-Univ. Halle-Wittenberg Math. -Nat. Reihe* **10** (1961), 116-117. [213, 217]

[1962] Hakimi S.L., On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *SIAM J. Appl. Math.* **10** (1962), 496-506. [45, 52]

[1967] Halin R., Unterteilungen vollständiger Graphen in Graphen mit unendlicher chromatischer Zahl. *Abh. Math. Sem. Unv.Hamburg* **31** (1967), 156-165. [202]

[1969] Halin R., A theorem on n-connected graphs. *J. Comb. Th.* **7** (1969), 150-4. [175]

[1948] Hall M., Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 922. [111, 120]

[1956] Hall M., An algorithm for distinct representatives. *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 716-717. [189]

[1935] Hall P., On representation of subsets. *J. Lond. Mat. Sc.* **10** (1935), 26-30. [110]

[1950] Halmos P.R. and H.E. Vaughan, The marriage problem. *Amer. J. Math* 72 (1950), 214-215. [120]

[1981] Hammer P.L. and B. Simeone, The splittance of a graph. *Combinatorica* **1**(1981), 275-284 (also Dept. Comb. Opt., Univ. Waterloo, CORR 77-39 (1977). [345]

[1983] Hammersley J., The friendship theorem and the love problem. In *Surveys in Combinatorics.* (ed. E.K. Lloyd), *Lond. Math. Soc. Lec. Notes* **82** Cambridge Univ. Press (1983), 31-54. [466]

[1962a] Harary F., The maximum connectivity of a graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **48** (1962), 1142-1146. [151, 159]

[1962b] Harary F., The determinant of the adjacency matrix of a graph, *SIAM Review* **4** (1962), 202-210. [454]

[1969] Harary F., *Graph Theory.* Addison-Wesley, Reading MA (1969). [252, 299]

[1977] Harary F., D.F. Hsu, and Z. Miller, The biparticity of a graph. *J. Graph Th.* **1** (1977), 131-133. [422]

[1993] Harary F. and P.C. Kainen, The cube of a path is maximal planar. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **7** (1993), 55-56. [271]

[1964] Harary F. and Y. Kodama, On the genus of an n-connected graph. *Fund. Math.* **54** (1964), 7-13. [160]

[1965] Harary F. and C.St.J.A. Nash-Williams, On eulerian and hamiltonian graphs and line graphs. *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 701-710. [295]

[1966] Harary F. and G. Prins, The block-cutpoint-tree of a graph. *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 103-107. [160]

[1973] Harary F. and A.J. Schwenk, The number of caterpillars. *Discr. Math.* **6** (1973), 359-365. [94]

[1974] Harary F. and A.J. Schwenk, The communication problem on graphs and digraphs. *J. Franklin Inst.* **297** (1974), 491-495. [422]

[1966] Harper L.J., Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. *J. Comb. Th.* **1** (1966), 385-393. [390]

[1995] Hartman C.M., A short proof of a theorem of Giles, Trotter, and Tucker. unpublished note (1995). [342]

[1997] Hartman C.M., *Extremal problems in graph theory.* Ph.D. Thesis, University of Illinois (1997). [284]

[1996] Hartsfield N., A,K. Kelmans and Y.Q. Shen, On the Laplacian polynomial of a K-cube extension. *Proc. 27th S.E. Intl. Conf. Graph Th. Comb. Comp. (Baton Rouge, 1996), Congr. Num.* **119** (1996), 73-77. [463]

[1955] Havel V., A remark on the existence of finite graphs (Czech.). *Časopis Pest. Mat* **80** (1955), 477-480. [45, 52]

[1998] Haynes T.W., S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs.* Marcel Dekker, Inc. (1998). [116]

[1985] Hayward R.B., Weakly triangulated graphs. *J. Comb. Th. (B)* **39** (1985), 200-208.[334]

[1890] Heawood P.J., Map-colour theorem. *Q. J. Math.* **24** (1890), 332-339. [257, 268]

[1898] Heawood P.J., On the four-colour map theorem. *Q. J. Math.* **29** (1898), 270-285. [271]

[1969] Hedetniemi S., On partitioning planar graphs. *Canad. Math. Bull.* **11** (1969), 203-210. [270]

[1969] Heesch H., Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. Num. 810/810a/810b B.I. Hochschulscripten. Bibliographisches Institut (1969). [259]

[1990] Hendry G.R.T., Extending cycles in graphs. *Discr. Math.* **85** (1990), 59-72. [231]

[1873] Hierholzer C., fiber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung and ohne Unterbrechnung zu umfahren. *Math.* Ann. **6** (1873), 30-32. [26, 30]

[1989] Hilton A.J.W., Two conjectures on edge colouring. *Discr. Math.* **74** (1989), 61-64.[278]

[1941] Hitchcock F.L., The distribution of a product from several sources to numerous facilities. *J. Math. Phys.* **20** (1941), 224-230. [130]

[1995] Hochberg R., C.J.H. McDiarmid, and M. Saks, On the bandwidth of triangulated triangles. *14th Brit. Comb. Conf. (Keele, 1993), Discr. Math.* **138** (1995), 261- 265. [391]

[1958] Hoffman A.J., *Théorie des Graph* (ed. by) C. Berge (1958), 80. [317]

[1960] Hoffman A.J., On the exceptional case in the characterization of the arcs of a complete graph. *IBM J. Res. Dev.* **4** (1960), 487-496. [285]

[1963] Hoffman A.J., On the polynomial of a graph. *Amer. Math. Monthly* 70 (1963), 30-36. [461]

[1964] Hoffman A.J., On the line-graph of the complete bipartite graph. Ann. *Math. Statist.* **35** (1964), 883-885. [285]

[1993] Holton D.A. and J. Sheehan, *The Petersen Graph.* Cambr. Univ. Pr. (1993). [13]

[1981] Holyer I., The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Computing* **10** (1981), 718-720. [278,439,505]

[1972] Holzmann C.A. and F. Harary, On the tree graph of a matroid. *SLAM J. Appl. Math.* **22** (1972), 187-193. [376]

[1973] Hoperoft J. and R.M. Karp, An *0* $(n^{2\cdot5})$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs. *SIAM J. Computing* **2** (1973), 225-231. [132]

[1974] Hoperoft J. and R.E. Tarjan, Efficient Planarity Testing. *J. Assoc. Comp. Mach.* **21** (1974), 549-568. [252]

[1982] Horton J.D., On two-factors of bipartite regular graphs. *Discr. Math.* **41** (1982), 35-41. [292]

[1976] Huang H.-C., *Investigations on combinatorial optimization.* Ph.D. Thesis, School of Organization and Management, Yale University (1976). [337]

[1952] Huffman D.A., A method for the construction of minimum redundancy codes. *Proc. Inst. Rail. Engin.* **40** (1952), 1098-1011. [101-103,106]

[1995] Hutchinson J.P., Problem 10478. *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 746 (solution **105** (1998), 274-275). [271]

[1973] Ingleton A.W. and M.J. Puff, Gammoids and transversal matroids. *J. Comb. Th. (B)* **15** (1973), 51-68. [377]

[1975] Isaacs R., Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable. *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 221-239. [306, 317]

[1991] Isaak G. and B. Tesman, The weighted reversing number of a digraph. Proc. 22nd Southeastern Conf., *Congr. Num.***83** (1991), 115-124. [66]

[1978] Itai A. and Rodeh M., Covering a graph by circuits. In *Automata, Languages and Programming, Lect. Notes in Comp. Sci* **62**. Springer-Verlag (1978), 289- 299. [317, 318]

[1980] Jackson B., Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. *J. Comb. Th. (B)* **29** (1980), 27-46: [292]

[1991] Jacobson M.S., F.R. McMorris, H.M. Mulder, Tolerance Intersection Graphs. In *Proc. Kalamazoo 1988.* (ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellerman and A.J. Schwenk) Wiley (1991), 705-724. [346]

[1978] Jaeger F., Sur certaines valuations des hypergraphes d'intervalles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sir. A-B* **287** (1978), A487-A489. [317]

[1979] Jaeger F., Flows and generalized coloring theorems in graphs. *J. Comb. Th. (B)* **26** (1979), 205-216. [312]

[1988] Jaeger F., Nowhere-zero flow problems. In *Selected Topics in Graph Theory 3.* (eds. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Academic Press (1988), 71-95. [312, 317]

[2000] Janson S., T. Luczak, and A. Ruciński, *Random Graphs.* Wiley-Interscience (2000). [426]

[1993] Janssen J.C.M., The Dinitz Problem is solved for rectangles. *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 243-249. [410]

[1930] Jarnik V., 0 jistérn problému minimálnim. *Acta Societatis Scientiarum Natur. Moravicae* 6 (1930), 57-63. [97, 104]

[1997] Jeurissen R., "Sinks in digraphs", posted on GRAPHNET, Oct 7,1997 (response to-question of A. Hobbs and L. Anderson) [449]

[1869] Jordan C., Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math.* **70** (1869), 185-190. [72, 78, 393]

[1965] Jung H.A., Anwendung einer Methode von K. Wagner bei Farbungsproblemen für Graphen. *Math. Ann.* **161** (1965), 325-326. [213]

[1985] Jünger M., G. Reinelt, and W.R. Pulleyblank, On partitioning the edges of graphs into connected subgraphs. *J. Graph Th.* **9** (1985), 539-549. [424]

[1996] Kahn J., Asymptotically good listcolorings. *J. Comb. Th.* (A) **73**(1996),1-59. [410]

[1967] Kalbfleisch J.G., Upper bounds for some Ramsey numbers. *J. Comb. Th.* **2** (1967), *35-42.* [384]

[2001] , Kaneko A., A. Kelmans and T. Nishimura, On packing 3-vertex paths in a graph. *J. Graph Th.* (to appear). [173]

[1983] Kano M. and A. Sakamoto, Ranking the vertices of a weighted digraph using the length of forward arcs. *Networks* **13** (1983), 143-151. [66]

[1960] Kantorovich L.V., Mathematical methods in the organization and planning of production (in Russian, 1939, Leningrad State Univ.). *Management Science* **6** (1960), 366-422. [130]

[1977] Kapoor S.F., A.D. Polimeni, and C.E. Wall, Degree sets for graphs. *Fund. Math.* **95** (1977), 189-194. [52]

[1995] Karger D.R., P.N. Klein, and R.E. Tarjan, A randomized linear-time algorithm to find minimum spanning trees. *J. Assoc. Comp. Mach.* **42** (1995), 321-328. [97]

[1972] Karp R.M., Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations.* (ed. R.E. Miller and J.W. Thatcher) Plenum Press (1972), 85-103. . [500,502,503,506]

[1965] Kelmans A.K., The number of trees in a graph, I. *Automat. Remote*' *Control* **26** (1965), 2118-2129. [94, 63]

[1966] Kelmans A.K., The number of trees in a graph, II. *Automat. Remote Control* **27** (1966), 233-241. [463]

[1967a] Kelmans A.K., Connectivity of probabilistic networks. *Automat. Remote Control* **28** (1967), 98-116. [93]

[1967b] Kelmans A.K., The properties of the characteristic polynomial of a graph (Russian). , *Cybernetics* **4** Izdat. "Energija" (1967), 27-41. [463]

[1980] Kelmans A.K., Concept of a vertex in a matroid and 3-connected graphs. *J. Graph Th.* **4** (1980), 13-19. [251, 365, 376]

[1981a] Kelmans A.K., The concept of a vertex in a matroid, the nonseparating cycles of a graph and a new criterion for graph planarity.. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II.* (ed. L. Lovász, V.T. Sós), Proc. Colloq. (Szeged, 1978) *Coll. Math. Soc: Janos Bolyai* **25**, North-Holland (1981), 345-388. [256]

[1981b] Kelmans A.K., A new planarity criterion for 3-connected graphs. *J. Graph Th.* **5** (1981), 259-267. [251]

[1983] Kelmans A.K, On existence of given subgraphs in a graph (Russian). In *Algoritmy Diskret. Optim. Primen. v Vychisl. Syst.*. Yaroslay. Gos. Univ. (1983), 3-20. [252]

[1984a] Kelmans A.K., Problem. In *Finite and Infinite Sets.* (ed. A. Hajnal, L. Lovász, V.T. &is), Proc. 6th Hung. Comb. Colloq. (Eger 1981) *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **37**, Elsevier (1984), 882. [252]

[1984b] Kelmans A.K., A strengthening of the Kuratowski planarity criterion for 3connected graphs. *Discr. Math.* **51** (1984), 215-220. [252]

[1987] Kelmans A.K., A short proof and a strengthening of the Whitney 2-isomorphism theorem on graphs. *Discr. Math.* **64** (1987), 13-25. [365]

[1988] Kelmans A.K., Matroids and the theorems of Whitney on 2-isomorphism and planarity of graphs (English transl.. *Uspekhi Mat. Nauk* 43 (1988), 199-200), *Russian Math. Surveys* **43** London Math. Soc (1988), 239-241. [365]

[1992] Kelmans A.K., Spanning trees of extended graphs. *Combinatorica* **12** (1992), 45-51. [93]

[1993] Kelmans A.K., Graph planarity and related topics. In *Graph Structure Theory (Seattle, WA, 1991).* (ed. N. Robertson and P. Seymour) *Contemp. Math.* 147, Amer. Math. Soc. (1993), 635-667. [251]

[1998] Kelmans A.K., On homotopy of connected graphs having the same degree function. RUTCOR Research Report, Rutgers University 39-98 (1998). [77]

[2000] Kelmans A.K., On convex embeddings of planar 3-connected graphs. *J. Graph Th.* **33** (2000), 120-124. [248]

[1974] Kelmans A.K. and V.M. Chelnokov, A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees. *J. Comb. Th. (B)* **16** (1974), 197-214. [463]

[1879] Kempe A.B., On the geographical problem of four colours. *Amer. J. Math.* **2** (1879), 193-200. [258]

[1992] Kierstead H.A., Long stars specify x -bounded classes. In *Sets, graphs and numbers.* (ed. G. Halász, L: LovPasz, D. Miklós and T. Szönyi), Proc. Colloq. (Budapest, 1991) *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **60**, North-Holland (19P2), 421-428. [206]

[1997] Kierstead H.A., Classes of graphs that are not vertex Ramsey. *SIAM J. Discr. Math.* **10** (1997), 373-380. [206]

[1990] Kierstead H.A. and S.G. Penrice, Recent results on a conjecture of Gyárfás. *Proc. 21th S.E. Intl. Conf. Graph Th. Comb. Comp.* **79** (1990), 182-186. [206]

[1994] Kierstead H.A. and S.G. Penrice, Radius two trees specify x -bounded classes. *J. Graph Th.* **18** (1994), 119-129. [206]

[1996] Kierstead H.A. and V. Rödl Applications of hypergraph coloring to coloring graphs not inducing certain trees. *Discr. Math.* **150** (1996), 157-193. [206]

[1975] Kilpatrick P.A., *Tutte's first colour-cycle conjecture.* Ph.D. Thesis, Cape Town (1975). [312]

[1995] Kim J.H., The Ramsey number R(3, *t)* has order of magnitude t^2/ log *t. Random Structures Algorithms* **7** (1995), 173-207. [385]

[1981] Kimble R.J. Jr. and A.J. Schwenk, On universal caterpillars. In *The theory and applications of graphs.* Wiley (1981), 437-447. [94]

[1847] Kirchhoff G., Über die Auflösung der Gleichungen, aufwelche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. Ann. *Phys. Chem.* **72** (1847), 497-508. [85]

[1856] Kirkman T.P., On the representation of polyhedra. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **146** (1856), 413-418. [286]

[1970] Kleitman D.J., The crossing number of K5, . *J. Comb. Th.* **9** (1970), 315-323. [264, 272]
[1980] Kleitman D.J. and J.B. Shearer, Further gossip problems. *Discr. Math.* **30** (1980), 151-156. [408]
[1991] Kleitman D.J. and D.B. West, Spanning trees with many leaves. *SIAM J. Discr. Math.* **4** (1991), 99-106. [123]
[1989] Klotz W., A constructive proof of Kuratowski's theorem. *Ars Combinatoria* **28** (1989), 51-54. [255]
[1976] Knuth D.E., *Mariages Stables.* Les Presses de l'Univ. de Montréal (1976). [132]
[1996] Kochol M., Snarks without small cycles. *J. Comb. Th. (B)* **67** (1996), 34-47. [306]
[1996] Komi& J. and E. Szemerédi, Topological cliques in graphs II. *Combin. Probab. Comput.* **5** (1996), 79-90. [214]
[1916] König D., *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und* Mengenlehre. *Math. Ann.* **77** (1916), 453-465. [115, 227, 276]
[1931] König D., Graphen und Matrizen. *Math. Lapok* **38** (1931), 116-119. [112,368]
[1936] König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Akademische Verlagsgesellschaft (1936) (reprinted Chelsea 1950). [25, 95]
[1947] Koopmans T.C., Optimum utilization of the transportation system. Proc. Intl. Stat. Conf. Washington, (1947), see also *Econometrica* **17** (1949). [130]
[1979] Kotzig A., 1-Factorizations of cartesian products of regular graphs. *J Graph Th.* **3** (1979), 23-34. [284]
[1943] Krausz J., Démonstration nouvelle d'une théorème de Whitney sur les réseaux (Hungarian). *Mat. Fi.Z. Lapok* **50** (1943), 75-89. [280]
[1975] Krishnamoorthy M.S., An NP-hard problem in bipartite graphs. *SIGACT News* **7** (1975), 26. [505]
[1989] Kriz I., A hypergraph-free construction of highly chromatic graphs without short cycles. *Combinatorica* **9** (1989), 22'7-229. [206, 429]
[1956] Kruskal J.B. Jr., On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proc. Am. Math. Soc.* **7** (1956), 48-50. [95-97,104,498]
[1989] Kubicka E. and A.J. Schwenk, An introduction to chromatic sums: Proc. Proc. ACM Computer Science Conference, Louisville, Kentucky, (1989), 39-45. [204]
[1955] Kuhn H.W., The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly* **2** (1955), 83-97. [127]
[1999] Kündgen A., Art galleries with interior walls. *Discrete & Comp. Geom.* **22** (1999), 249-258. [271]
[1986] Kung J.P.S., Strong maps. In *Theory of Matroids.* (ed. N. White) Cambridge Univ. Press (1986), 224-252. [376]
[1930] Kuratowski K., Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.* **15** (1930), 271-283. [246-252, 256, 365]
[1953] Landau H.G., On dominance relations and the structure of animal societies, III: The condition for score structure. *Bull. Math.Biophys.* **15** (1953), 143-8. [62, 65]
[1980] Laskar R. and D. Shier, On chordal graphs. *Proc. 11th S.E. Intl. Conf. Graph Th. Comb. Comp., Congr. Num.* **29** (1980), 579-588. [225]
[1971] Las Vergnas M., Sur une propriété des arbres maximaux dans un graphe. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* **272** (1971), 1297-1300. [298]
[1975] Las Vergnas M., A note on matchings in graphs. *Cahiers Centre Etudes Recherche Opér.* **17** (1975), 257-260. [147]
[1976] Lawler E.L., *Combinatorial Optimization: Nkworks and Matroids.* Holt, Rinehart, and Winston (1976). [145, 369]

[1978] Lawrence J., Covering the vertex set of a graph with subgraphs of smaller degree. *Discr. Math.* **21** (1978), 61-68. [204]

[1973] Lawrence S.L., Cycle-star Ramsey numbers. *Notices Amer. Math. Soc.* **20** (1973), A-420 (Notice #73T-157). [395]

[1957] Lazarson T., *Independence functions in algebra.* Thesis, U. London (1957). [375]

[1966] Lederberg J., Systematics of organic molecules, graph topology and Hamiltonian circuits (Instrumentation Res. Lab. Rept.). Stanford Univ. 1040 (1966). [316]

[1964] Lehman A., A solution of the Shannon switching game. J. *Soc. Indust. Appl. Math.* **12** (1964), 687-725. [360, 366, 374]

[1974] Lehot P.G.H., An optimal algorithm to detect a line-graph and output its root graph. *J. Assoc. Comp. Mach.* **21** (1974), 569-575. [282]

[1983] Leighton F.T.., *Complexity Issues in VLSI: optimal layouts for the shuffle-exchange graph and other networks. Foundations of Computing* MIT Press (1983). [264]

[1962] Lekkerkerker C.G. and J.Ch. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fund. Math.* **51** (1962), 45-64. [346]

[1973] Lick D.R., Characterizations of n-connected and n-line-connected graphs. *J. Comb. Th. (B)* **14** (1973), 122-124. [174]

[1970] Lick D.R. and A.T. White, k-degenerate graphs. *Canad. J. Math.* 22 (1970), 1082-1096. [202]

[1973] Lin S. and B.W. Kernighan, An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. *Oper. Res.* **21** (1973), 498-516. [497]

[1976] Linial N., A lower bound for the circumference of a graph. *Discr. Math.* **15** (1976), 297-300. [417,418]

[1988] Little C.H.C., W.T. Tutte and D.H. Younger, A theorem on integer flows. *Second International Conference on Combinatorial Mathematics and Computing (Canberra, 1987), Ars Combinatoria* **26** (1988), 109-112. [318]

[1997] Liu J. and H. Zhou, Maximum induced matchings in graphs. *Discr. Math.* 170 (1997), 277-281. [121]

[1995] Locke S.C., Problem 10447. *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 360. [66]

[1966] Lovász L., On decomposition of graphs. *Stud. Sci. Math. Hung.* **1** (1966), 237-238. [203]

[1968a] Lovász L., On chromatic number of finite set-systems.. *Acta Math. Acad. Sci. Hung* **19** (1968), 59-67. [206,429]

[1968b] Lovász L., On covering of graphs. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966 (ed. P. Erdös and G. Katona) Academic Press (1968), 231-236. [414]

[1972a] Lovász L., Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **2** (1972), 253-267. [226, 320, 322]

[1972b] Lovász L., A characterization of perfect graphs. J. *Comb. Th. (B)* **13** (1972), 95-98. [226, 322, 334, 335]

[1975] Lovász L., Three short proofs in graph theory. J. *Comb. Th. (B)* **19** (1975), 269-271. [137, 197]

[1976] Lovász L., On two minimax theorems in graph theory. J. *Comb. Th. (B)* **21** (1976), 96-103. [405]

[1979] Lovász L., *Combinatorial Problems and Exercises.* Akademiai Kiado and North-Holland (1979). [94, 173, 175, 395]

[1983] Lovász L., Perfect graphs. In *Selected Topics in Graph Theory, 2.* (ed. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Academic Press (1983), 55-87. [330]

[1980] Lovász L., J. Nešetřil, and A. Pultr, On a product dimension of graphs. *J. Comb. Th. (B)* **28** (1980), 47-67. [399,400,422]

[1986] Lovász L. and M.D. Plummer, *Matching Theory (Ann. Discr. Math.***29***)*. Akademiai Kiado and North Holland (1986). [120, 368]

[1994] Lu X., A Chvátal-Erdös type condition for Hamiltonian graphs. *J. Graph Th.* **18** (1994), 791-800. [298]

[1996] Lu X., On avoidable and unavoidable trees. *J. Graph T.* **22** (1996), 335-46. [190]

[1986] Lubotzky A., R. Phillips, and P. Sarnak, Explicit expanders and the Ramanujan conjectures. In *Proc. 18th ACM Symp. Theory of Comp.*. ACM Press (1986), 240-246. [464]

[1988] Lubotzky A., R. Phillips, and P. Sarnak, Ramanujan graphs. *Combinatorica* **8** (1988), 261-277. [206]

[1995] Mabry R., Bipartite graphs and the Four-color Theorem. *Bull. ICA* **14** (1995), 119-112. [270]

[1936] MacLane S., Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry. *Amer. J. Math.* **58** (1936), 236-240. [349, 360]

[2001] Maddox R.B., The superregular graphs (Solution to Problem 6617). *Amer. Math. Monthly* (1996). [470]

[1967] Mader W., Homomorphieeigenschaften and mittlere Kantendichte von Graph-en. *Math. Ann.* **174** (1967), 265-268. [213, 214]

[1971] Mader W., Minimale n-fach kantenzusammenhängende Graphen. *Math. Ann.* **191** (1971), 21-28. [175]

[1973] Mader W., 1-Faktoren von Graphen. *Math. Ann.* **201** (1973), 269-282. [146]

[1978] Mader W., A reduction method for edge-connectivity in graphs. Ann. *Discr. Math.* **3** (1978), 145-164. [175]

[1998] Mader W., 3n - 5 edges do force a subdivision of K5. *Combinatorica* **18** (1998), 569-595. [214, 256]

[1991] Mahadev N.V.R., F.S. Roberts, and P. Santhanakrishnan, 3-choosable complete bipartite graphs. DIMACS Tech. Report 91-62 (1991). [409]

[1907] Mantel W., Problem 28, soln. by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh and W.A. Wythoff. *Wiskundige Opgaven* **10** (1907), 60-61. [41]

[1959] Marcus M. and R. Ree, Diagonals of doubly stochastic matrices. *Quart. J. Math.* **2** (1959), 295-302. [121]

[1973] Margulis G.A., Explicit constructions of concentrators. *Problems of Information Transmission* **9** (1973), 325-332. [463]

[1988] Margulis G.A., Explicit constructions of concentrators. *Problems of Information Transmission* **24** (1988), 39-46. [464]

[1984] Markossian S.E. and I.A. Karapetian, On critically imperfect graphs. In *Prikladnaia Matematika.* (ed. R.N. Tonoian) Erevan Univ. (1984), [122]

[1999] Markus L.R., Disjoint cycles in planar and triangle-free graphs. *J. Comb. Math. & Comb. Comput.* **31** (1999), 177-182. [256]

[1972] Mason J.H., On a class of matroids arising from paths in graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.(3)* **25** (1972), 55-74. [377]

[1978] Matthews K.R., On the Eulericity of a graph. *J. Graph Th.* **2** (1978),143-8. [317]

[1984] Matthews M.M. and D.P. Sumner, Hamiltonian results in K1,3-free graphs. *J. Graph Th.* **8** (1984), 139-146. [297]

[1968] Matula D.W., A min-max theorem for graphs with application to graph coloring. *SIAM Review* **10** (1968), 481-482. [202]

[1972] Matula D.W., The employee party problem. *Not. A.M.S.* **19** (1972), A-382. [440]

[1973] Matula D.W., An extension of Brooks' Theorem. Center for Numerical Analysis, University of Texas-Austin 69 (1973). [204]

[1980] Maurer S., The king chicken theorems. *Math. Mag.* **53** (1980), 67-80. [63, 65]

[1980] Maurer S., I. Rabinovitch, and W.T. Trotter Jr., Large minimal realizers of a partial order II. *Discr. Math.* **31** (1980), 297-314. [66]

[1989] McCuaig W. and B. Shepherd, Domination in graphs with minimum degree two. *J. Graph Th.* **13** (1989), 749-762. [117]

[1972] McDiarmid C.J.H., The solution of a timetabling problem. *J. Inst. Math. Applies.* **9** (1972), 23-34. [285]

[1994] McGuinness S., The greedy clique decomposition of a graph. *J. Graph Th.* **18** (1994), 427-430. [397]

[1991] McKay B.D. and S.P. Radziszowski, The first classical Ramsey number for hyper-graphsis computed. Proc. 2nd Symp. Disc. Alg. (San Francisco), ACM-SIAM (1991), 304-308. [384]

[1995] McKay B.D. and S.P. Radziszowski, R(4, 5) = 25. *J. Graph Th.* **19** (1995), 309-322. [384]

[1992] McKay B.D. and K.M. Zhang, The value of the Ramsey number *R(3,* 8). *J. Graph Th.* **16** (1992), 99-105. [384]

[1984] McKee T.A., Recharacterizing Eulerian: intimations of new duality. *Discr. Math.* **51** (1984), 327-242. [34]

[1993] McKee T.A., How chordal graphs work. *Bull. ICA* **9** (1993), 27-39. [327, 328]

[1971] Melnikov L.S. and V.G. Vizing, Solution to Toft's problem (Russian). *Diskret. Analiz.* **19** (1971), 11-14. [344]

[1927] Menger K., Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.* **10** (1927), 95-115. [167-175]

[1973] Meyniel H., Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien dans un graph oriente. *J. Comb. Th. (B)* **14** (1973), 137-147. [294, 420]

[1976] Meyniel H., On the perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **16** (1976), 339-342. [330, 341, 348]

[1987] Meyniel H., A new property of critical imperfect graphs and some consequences. *Europ. J. Comb.* **8** (1987), 313-316. [348]

[1980] Micali S. and V.V. Vazirani, an OW1 V I • 1E1) algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *Proc. 21th IEEE Symp. Found. Comp. Sci.*. ACM (1980), 17-27. [145]

[1981] Miller Z., The bandwidth of caterpillar graphs. Proc. 12th Southeastern Conf., *Congr. Num.33* (1981), 235-252. [396]

[1962] Minty G.J., A theorem on n-coloring the points of a linear graph. *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 623-624. [203]

[1966] Minty G.J., On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming. *J. Math. Mech.* **15** (1966), 485-520. [375]

[1971] Mirsky L., *Transversal theory* (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 75). Academic Press (1971). [111,368]

[1967] Mirsky L. and H. Perfect, Applications of the notion of independence to combinatorial analysis. *J. Comb. Th.* **2** (1967), 327-357. [353]

[1996] Mirzakhani M., A small non-4-choosable planar graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **17** (1996), 15-18. [412, 24]

[2001] Molloy M. and B. Reed, Near-optimal list colourings. *Random Structures & Algs.* (to appear). [410]

[1963] Moon J.W., On the line-graph of the complete bigraph. Ann. *Math. Statis.* **34** (1963), 664-667. [285]

[1965a] Moon J.W., On a problem of Ore. *Math. Gaz.* **49** (1965), 40-41. [297]

[1965b] MoonJ.W.,Onthe diameter of a *graph.Michigan Math.J.* **12**(1965), 349-351. [79]

[1965c] Moon J.W., On the number of complete subgraphs of a graph. *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 831-834. [217]

[1966] Moon J.W., On subtournaments of a tournament. *Canad. Math. Bull.* **9** (1966), 297-301. [299]

[1969] Moon J.W., The number of labeled k-trees. *J. Comb. Th.* **6** (1969), 196-199. [346]

[1970] Moon J.W., *Counting Labeled Trees.* Canad. Math. Congress (1970). [81]

[1961] Moser L. and W. Moser, Problem and solution P10. *Canad. Math. Bull.* **4** (1961), 187-189. [201]

[1969] Mowshowitz A., The group of a graph whose adjacency matrix has all distinct eigenvalues. In *Proof Techniques in Graph Theory.* (ed. F. Harary) Acad. Press (1969), 109-110. [470]

[1957] Munkres J., Algorithms for the assignment and transportation problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **5** (1957), 32-38. [127]

[1955] Mycielski J., Sur le coloriage des graphes. *Coll. Math.* **3** (1955), 161-162. [205]

[1972] Myers B.R. and R. Liu, A lower bound on the chromatic number of a graph. *Networks* **1** (1972), 273-277. [216]

[1960] Nash-Williams C.St.J.A., On orientations, connectivity and odd-vertex-pairings in finite graphs. *Canad. J. Math.* **12** (1960), 555-567. [166, 174-175]

[1961] Nash-Williams C.St.J.A., Edge-disjoint sp4nning trees in finite graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **36** (1961), 445-450. [73, 80, 166, 312, 372]

[1964] Nash-Williams C.St.J.A., Decomposition of finite graphs into forests. *J. Lond. Math. Soc.* **39** (1964), 12. [79, 372]

[1966] Nash-Williams C.St.J.A., An application of matroids to graph theory. In *Theory of Graphs.* (Intl. Sympos., Rome) Dunod (1966), 263-265. [370]

[1988] Nemhauser G.L. and L.A. Wolsey, *Integer and combinatorial optimization.* Wiley (1988). [355]

[1979] Nešetřil J. and V. Midi, A short proof of the existence of highly chromatic hyper-graphs without short cycles. *J. Comb. Th. (B)* **27** (1979), 225-227. [206, 429]

[1953] von Neumann J., A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. *Contributions to the Theory of Games II* (ed. H.W. Kuhn), Ann. *Math. Studies* **28** Princeton Univ. Press (1953), 5-12. [120]

[2000] Niessen T. and J. Kind, The Round-Up Property of the Fractional Chromatic Number for Proper Circular Arc Graphs. *J. Graph Th.* **33** (2000), 256-267. [217]

[1990] Niessen T. and L. Volkmann, Class 1 conditions depending on' the minimum degree and the number of vertices of maximum degree. *J. Graph Th.* **14** (1990), 225-246. [279]

[1991] Nilli A., On the second eigenvalue of a graph. *Discr. Math.* **91** (1991), 207-210. [464]

[1956] Nordhaus E.A. and J.W. Gaddum, On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 175-177. [202]

[1959] Norman R.Z. and M. Rabin, Algorithm for a minimal cover of a graph. *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 315-319. [122]

[1995] O'Donnell P., The choice number of $K6_{,q}$. (1995). [409]

[1988] Olariu S., No antitwins in minimal imperfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **45** (1988), 255-257. [348]

[1989] Olariu S., The strong perfect graph conjecture for pan-free graphs. *J. Comb. Th. (B)* **47** (1989), 187-191. [341]

[1969] Olaru E., Cher die Überdeckung von Graphen mit Cliquen. *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau* **15** (1969), 115-121. [330]

[1951] Ore O., A problem regarding the tracing of graphs. *Elemente der Math.* **6** (1951), 49-53. [77]

[1955] Ore O., Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.* **22** (1955), 625-639. [121,368]

[1960] Ore O., Note on Hamilton circuits. Am. *Mat. Monthly* **67** (1960), 55. [289, 417-8]

[1961] Ore O., Arc coverings of graphs. Ann. *Mat. Pura Appl.* **55** (1961), 315-321. [297]

[1962] Ore, O., *Theory of graphs* (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXVIII). American Mathematical Society (1962). [116, 122]

[19631 Ore O., Hamiltonian connected graphs. *J. Math. Pures Appl.* **42** (1963), 21-27. [297]

[1967a] Ore O., *The four-colour problem.* Academic Press (1967). [258, 285]

[1967b] Ore O., On a graph theorem of Dirac. *J. Comb. Th.* **2** (1967), 35-42. [298]

[19971 Pach J. and G. Tóth, Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica* **17** (1997), 427-439. [264]

[1974] Padberg M.W., Perfect zero-one matrices. *Math. Prog.* **6** (1974), 180-196. [335-7]

[1985] Palmer E.M., *Graphical Evolution: An Introduction to the Theory of Random Graphs.* Wiley (1985). [426, 436, 440, 450]

[1973] Palumbiny D., On decompositions of complete graphs into factors with equal diameters. *Boll. Un. Mat. Ital.(4)* **7** (1973), 420-428. [424]

[1982] Papadimitriou C.H. and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.* Prentice Hall (1982) reprint Dover, 1998. [180, 355]

[1976] Parthasarathy K.R. and G. Ravindra, The strong perfect graph conjecture is true for K1,3-free graphs. *J. Comb. Th. (B)* **21** (1976), 212-223. [341-343]

[1979] Parthasarathy K.R. and G. Ravindra, The validity of the strong perfect graph conjecture for K4 - e-free graphs. *J. Comb. Th. (B)* **26** (1979), 98-100. [341]

[1975] Payan C., Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple. Proc. Colloque sur la Théorie des Graphes (Paris, 1974), Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. **17** (1975), 307-317. [117]

[1984] Peck G.W., A new proof of a theorem of Graham and Pollak. *Discr. Math.* **49** (1984), 327-328. [459]

[1992] Peled U., Problem 10197. *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 162. [1992]

[1975] Penaud J.G., Une propriété de bicoloration des hypergraphes planaires. Proc. Colloque sur la Théorie des Graphes (Paris, 1974), Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. **17** (1975), 345-349. [315]

[1997] Perkovic L. and B. Reed, Edge coloring regular graphs of high degree. *Graphs & combinatorics (Marseille, 1995), Discr. Math.* **165/166** (1997), 567-578. [279]

[1969] Petersdorf M. and H. Sachs, Spektrum and Automorphismengruppe eines Graphen. In *Combinatorial Theory and its Applications, III.* North-Holland (1969), 891-907. [470]

[1891] Petersen J., Die Theorie der regulären Graphen. *Acta Math.* **15** (1891), 193-220. [139, 140, 147]

[1898] Petersen J., Sur le Théoréme de Tait. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* **5** (1898), 225-227. [139, 276]

[1973] Pinsker M., On the complexity of a concentrator. *7th International Teletraffic Conference* Stockholm (1973), 318/1-318/4. [463]

[1977] Pippenger N., Superconcentrators. *SIAM J. Computing* **6** (1977), 298-304. [463]

[2001] Plantholt M., The overfull conjecture for graphs with high minimum degree. (to appear). [279]

[1975] Plesnik J., Critical graphs of given diameter. *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math.* **30** (1975), 71-93. [160]

[1968] Plummer M.D., On minimal blocks. *Trans. Amer. Math. Soc.* **134** (1968), 85-94. [175]

[1963] Pósa L., On circuits of finite graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.* **8** (1963), 355-361. [217]

[1957] Prim R.C., Shortest connection networks and some generalizations. *Bell Syst. Tech. J.* **36** (1957), 1389-1401. [97, 104]

[1995] Pritikin D., A Prüfer-style bijection proving that *r (K n,n) = n*(2 ") Proc. 25th Southeastern Conf. (1994), *Congr.* Num.**104** (1995), 215-216. [93]

[1918] Prüfer H., Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch. Math. Phys.* **27** (1918), 742-744. [81-83, 92-93]

[1957] Rado R., Note on independence functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* **7** (1957), 300-320. [354]

[1995] Radziszowski S.P., Small Ramsey numbers. *Electronic J. Comb.* Dynamic Survey 1 [384]

[1930] Ramsey F.P., On a Problem of Formal Logic. *Proc. Lond. Math. Soc.* **30** (1930), 264-286. [380,381]

[1982] Ravindra G., Meyniel graphs are strongly perfect. *J. Comb. Th. (B)* **33** (1982). 187-190. [330]

[1967] Ray-Chaudhuri D.K., Characterization of line graphs. *J. Comb. Th.* **3** (1967), 201-214. [283]

[1975] Read R.C., Review. *Math. Rev.* **50** (1975), review #6906. [230]

[1934] Rédei L., Einkombinatorischer Satz. *Acta Litt. Szeged* **7**(1934), 39-43. [200, 299]

[1987] Reed B., A semistrong perfect graph theorem. *J. Comb. Th. (B)* **43** (1987), 223- 240. [344]

[1996] Reed B., Paths, stars and the number three. *Combin. Probab. Comput.* **5** (1996), 277-295. [117]

[1998] Reed B., w, A, and *x.. J. Graph Th.* **27** (1998), 177-212. [199]

[1999] Reed B., A strengthening of Brooks' theorem. *J. Comb. Th. (B)* **76** (1999), 136-149. [199]

[1946] Rees D., Note on a paper by I.J. Good. *J. Lond. Mat. Sc.* **21** (1946), 169-172. [65]

[1959] Rényi A, Some remarks on the theory of trees. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959), 73-85. [92]

[1966] Rényi A., New methods and results in combinatorial analysis, I (Hungarian). *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kozl* **16** (1966), 77-105. [93]

[1985] Reznick B., P. Tiwari, and D.B. West, Decompostition of product graphs into complete bipartite subgraphs. *Discr. Math.* **57** (1985), 179-183. [459]

[1985] Richards D. and A.L. Liestman, Finding cycles of a given length. *Ann. Discr. Math.* **27** (1985), 249-256. [505]

[1993] Richter R.B., Problem 10330. *Amer. Math. Monthly* **100** (1993), 796 (solution **103** (1996)), 700-701. [216]

[1964] Ringel G., Problem 25. In *Theory of Graphs and Its Applications (Proc. Symp. Smolenice 1963).* Czech. Acad. Sci. (1964), 162. [87]

[1974] Ringel G., *Map color theorem. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band* **209** Springer-Verlag (1974). [269]

[1968] Ringel G. and J.W.T. Youngs, Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **60** (1968), 438-445. [269]

[2000] Rizzo R., A short proof of Konig's Theorem. *J. Graph Th.* **33** (2000), 138-9. [113]

[1939] Robbins H.E, A theorem on graphs, with an application to a problem in traffic control. *Amer. Math. Monthly* **46** (1939), 281-283. [165]

[1968] Roberts F.S., *Representations of Indifference relations.* Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Stanford Univ. (1968). [346]

[1978] Roberts F.S., *Graph Theory and Its Applications to the Problems of Society (CBMS-NSF Monograph 29).* SIAM Publications (1978). [130, 328]

[1996] Robertson N., D.P. Sanders, P.D. Seymour and R. Thomas, Efficiently four-coloring planar graphs. In *Proc. 28th ACM Symp. Theory of Comp.*. ACM Press (1996), 571-575. [260]

[2001] Robertson N., D.P. Sanders, P.D. Seymour and R. Thomas, Every 2-connected cubic graph with no Petersen minor is 3-edge-colorable. (to appear). [304, 305]

[1985] Robertson N. and P.D. Seymour, Graph minors-a survey. *Surveys in combina-torics 1985 (Glasgow, 1985), London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **103** Cambridge Univ. Press (1985), 153-171. [269]

[1993] Robertson N., P.D. Seymour, and R. Thomas., Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs. *Combinatorica* **13** (1993), 279-361. [213]

[1967] Rosa A., On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs (Intl. Symp. Rome 1966).* Gordon and Breach, Dunod (1967), 349-355. [88]

[1976] Rose D., R.E. Tarjan, and G.S. Lueker, Algorithmic aspects of vertex elimination on directed graphs. *SIAM J. Computing* **5** (1976), 266-283. [325]

[1971] Rosenfeld M., On the total coloring of certain graphs. *Israel J. Math.* **9** (1971), 396-402. [411]

[1964] Rota G.C., On the foundations of combinatorial theory I. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **2** (1964), 340-368. [355, 360]

[1991] Rotman J.J., Problem E3462. *Amer. Math. Monthly* **98** (1991), 645. [64]

[1967] Roy B., Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe. *Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationelle sét: Rouge* **1** (1967), 127-132. [196]

[1985] Ruciński A. and A. Vince, Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs. *Congr. Num.* **49** (1985), 181-190. [450]

[1957] Ryser H.J., Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canad. J. Math.* **9** (1957), 371-377. [65, 185, 190]

[1964] Ryser H.J., Matrices of zeros and ones in .combinatorial mathematics. In *Recent Advances Matrix Theory.* (Madison, 1963) U. Wisc. Press (1964), 103-124. [65]

[1977] Saaty T.L. and P.C. Kainen, *The Four-Color Problem.* McGraw-Hill (1977) (reprinted by Dover, 1986). [258]

[1967] Sachs H., Ober Teiler, Faktoren and charakteristische Polynome von Graphen II. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau* **13** (1967), 405-412. [445]

[1970] Sachs H., On the Berge conjecture concerning perfect graphs. In *Combinatorial Structures and Their Applications.* (ed. R. Guy, H. Hanani, N.W. Sauer, J. Schönheim) Gordon and Breach (1970), 377-384. [330]

[1997] Saclé J.-F. and Woźniak M., The Erdős-Sós conjecture for graphs without C4. *J. Comb. Th. (B)* **70** (1997), 367-372. [70]

[1976] Sahni S. and T. Gonzalez, P-complete approximation problems. *J. Assoc. Comp. Mach.* **23** (1976), 555-565. [497]

[1969] Schäuble M., Bemerkungen zur Kounstruktion dreikreisfreier *k*-chromatischer Graphen. *Wiss. Zeitschrift TH Ilmenau* **15** (1969), 59-63. [215]

[1990] Scheinerman E.R., On the interval number of random graphs. *Discr. Math.* **82** (1990), 105-109. [451]

[1990] Schnyder W., Embedding planar graphs on the grid. In *Proc. 1st ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithm.* (1990), 138-148. [251]

[1934] Schönberger T., Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes. *Acta Scientia Mathematica Szeged* **7** (1934), 51-57. [147]

[2001] Schrijver A., *Theory of Combinatorial Optimization.* (unpub.). [355, 370, 406]

[1916] Schur I., Über die Kongruenz $.x^m + y^m \equiv z^m$ (mod *p*). *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **25** (1916), 114-116. [393]

[1966] Schwartz B.L., Possible winners in partially completed tournaments. *SIAM Review* **8** (1966), 302-308. [183]

[1973] Schwenk A.J., Almost all trees are cospectral. In *New Directions in the Theory of Graphs.* Academic Press (1973), . [468]

[1983] Schwenk A.J., Problem 6434. *Amer. Math. Monthly* **6** (1983), . [470]

[1962] Scoins H.J., The number of trees with nodes of alternate parity. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **58** (1962), 12-16. [93]

[1997] Scott A.D., Induced trees in graphs of large chromatic number. *J. Graph Th.* **24** (1997), 297-311. [214]

[1974] Seinsche D., On a property of the class of n-colorable graphs. J. *Comb. Th. (B)* **16** (1974), 191-193. [52, 344]

[1986] Seress A., Quick gossiping without duplicate transmissions. *Graphs and Combin.* **2** (1986), 363-381 (also in *Combinatorial Mathematics,* Proc. 3rd Intl. Conf. Combin., New York 1985, New York Acad. Sci. 1989), 375-382). [423]

[1987] Seress A., Gossips by conference calls. *Stud. Sci. Math. Hungar.* **22** (1987), 229-238. [423]

[1976] Seymour P.D., A short proof of the matroid intersection theorem. unpubl. note (1976). [367]

[1979a] Seymour P.D., On multicolourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte. *Proc. Lond. Math. Soc.* **38** (1979), 423-460. [279]

[1979b] Seymour P.D., Sums of circuits. *In Graph theory and related topics (Proc. Waterloo, 1977).* Academic Press (1979), 341-355. [313, 318]

[1981] Seymour P.D., Nowhere-zero 6-flows. J. *Comb. Th. (B)* **30** (1981), 130-135. [312]

[1948] Shannon C.E, A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948), 379-423,623-656. [103,106]

[1949] Shannon C.E., A theorem on coloring the lines of a network. J. *Math. Phys.* **28** (1949), 148-151. [275, 285]

[1994] Shende A.M. and B. Tesman, 3-Choosability of K5, . Computer Science Technical Report #94-9, Bucknell University (1994). [409]

[1988] Shibata T., On the tree representation of chordal graphs. J. *Graph Th.* **12** (1988), 421-428. [328]

[1981] Shmoys D.B., *Perfect graphs and the strong perfect graph conjecture.* B.S.E. Thesis, Princeton University (1981). [334]

[1959] Shrikhande S.S., The uniqueness of the L2 association scheme. *Ann. Math. Statist.* **30** (1959), 781-798. [285]

[1991] Sierksma G. and Hoogeveen H., Seven criteria for integer sequences being graphic. J. *Graph Th.* **15** (1991), 223-231. [44]

[1996] Slivnik T., A short proof of Galvin's theorem on the list-chromatic index of a bipartite mulitgraph. *Combin. Probab. Comput.* **5** (1996), 91-94. [410]

[1962] Smolenskii E.A., . *Zh. vychisl. mat. i matem fiziki* 3 (1962), 371-372. (also in A.A. Zykov, *Fundamentals of graph theory* (1987), 110 (Russian), (ed. and transl. L. Boron et al., BCS Associates (1990)). [79]

[2000] Soifer S.N., The Komlós-Sós conjecture for graphs of girth 7. *Discr. Math.* **214** (2000), 279-283. [70]

[1977] Spencer J.H., Asymptotic lower bounds for Ramsey functions. *Discr. Math.* **20** (1977), 69-76. [394, 450]

[1984] Spencer J.H, E. Szemerédi, and W.T. Trotter, Unit distances in the Euclidean plane. In *Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1983).* (ed. B. Bollobás) Academic Press (1984), 293-303. [265]

[1928] Sperner E., Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl and des Gebietes. *Hamburger Abhand.* 6 (1928), 265-272. [388-391, 395]

[1973] Stanley R.P., Acyclic orientations of graphs. *Discr. Math.* 5 (1973), 171-178. [228, 232]

[1974] Stanley R.P., Combinatorial reciprocity theorems. *Advances in Math.* **14** (1974), 194-253. [229]

[1951] Stein S.K., Convex maps. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2 (1951), 464-466. [246]

[1976] Steinberg R., *Grötzsch's Theorem dualized.* Masters Thesis, Univ. Waterloo (1976). [311]

[1993] Steinberg R., The state of the three color problem. In *Quo Vadis, Graph Theory?* (ed. J. Gimbel, J.W. Kennedy, L.V. Quintas) *Ann. Discr. Math.* **55** (1993), 211248 [270]

[1989] Steinberg R. and D.H. Younger, Grötzsch's theorem for the projective plane. *Ars Combinatoria* **28** (1989), 15-31. [317]

[1985] Stiebitz M., *Beitrage zur Theorie der farbungskritischen Graphen.* Dissertation zu Erlangung des akademischen Grades Dr.sc.nat., Technische Hochschule Ilmenau (1985). [218]

[1973] Stockmeyer L., Planar 3-colorability is polynomial complete. *ACM SIGACT News* **5** (1973), 19-25. [500, 504]

[1994] Stoer M. and F. Wagner, A simple min cut algorithm. In *Algorithms, ESA '94.* (ed. J. van Leeuwen) Springer-Verlag, *Lect. Notes Comp. Sci.* (1994), 141-7. [182]

[1974a] Sumner D.P., Graphs with 1-factors. *Proc. Am. Mat. Sc.* 42 (1974), 8-12. [147]

[1974b] Sumner D.P., On Tutte's factorization theorem. In *Graphs and Combinatorics.* (ed. R. Bari and F. Harary), *Lecture Notes in Math.* 406 Springer-Verlag (1974), 350-355. [159]

[1981] Sumner D.P., Subtrees of a graph and the chromatic number. In *The Theory and Applic. of Graphs (Kalamazoo, 1980).* Wiley (1981), 557-576. [206,214,219]

[1991] Sun L., Two classes of perfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **53** (1991), 273-292 (also Tech. Report DCS-TR-228, Computer Science Dept., Rutgers Univ. 1988). [341]

[1982] Syslo M.M. and J. Zak, The bandwidth problem: critical subgraphs and the solution for caterpillars. In *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization.* (Bonn, 1980) North-Holland (1982), 281-286. [396]

[1997] Székely L.A., Crossing numbers and hard Erdös problems in discrete geometry. *Combin. Probab. Comput.* **6** (1997), 353-358. [265]

[1973] Szekeres G., Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Bull. Austral. Math. Soc.* **8** (1973), 367-387. [305, 313]

[1968] Szekeres G. and H.S. Wilf, An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Comb. Th.* **4** (1968), 1-3. [196, 201, 231]

[1943] Szele T., Combinatorial investigations concerning complete directed graphs (Hungarian). *Mat. es Fiz. Lapok* **50** (1943), 223-236. [428]

[1978] Szemerédi E., Regular partitions of graphs. In *Problémes combinatoires et théorie des graphes.* Orsay C.N.R.S. (1978), 399-401. [264]

[1878] Tait P.G., On the colouring of maps, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* **10** (1878-1880), 501-503,729 [300-304]

[1984] Tanner R.M., Explicit construction of concentrators from generalized N-gons. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **5** (1984), 287-293. [463]

[1975] Tarjan R.E., A good algorithm for edge-disjoint branching. *Info. Proc. Letters* **3** (1974)1(1975), 51-53. [406]

[1976] Tarjan R.E., Maximum cardinality search and chordal graphs. Lecture Notes from CS 259 (1976). [325-326]

[1984] Tarjan R.E., A simple version of Karzanov's blocking flow algorithm. *Oper. Res. Letters* 2 (1984), 265-268. [97]

[1984] Tarjan R.E. and M. Yannakakis, Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hyper-graphs. *SIAM J Computing* **13** (1984), 566-579. [325, 344]

[1895] Tarry G., Le problème des labyrinthes. *Nouv. Ann. Math.* **14**(1895),187-190. [95]

[1980] Thomassen C., Planarity and duality of finite and infinite graphs. *J. Comb. Th. (B)* **29** (1980), 244-271. [249,250]

[1981] Thomassen C., Kuratowski's Theorem. *J. Graph Th.* **5** (1981), 225-241. [250]

[1983] Thomassen C., A theorem on paths in planar graphs. *J. Graph Th.* **7** (1983), 169-176. [304]

[1984] Thomassen C., A refinement of Kuratowski's theorem. *J. Comb. Th. (B)* **37** (1984), 245-253. [252, 256]

[1988] Thomassen C., Paths, circuits and subdivisions. In *Selected Topics in Graph Theory, 3.* (ed. L.W. Beineke & R.J. Wilson) Academic Press (1988), 97-132. [213-4]

[1994a] Thomassen C., Grötzsch's 3-Color Theorem. *J. Comb. Th. (B)* **62** (1994), 268-279. [270]

[1994b] Thomassen C., Every planar graph is 5-choosable. *J. Comb. Th. (B)* **62** (1994), 180-181. [412]

[1995] Thomassen C., 3-List-coloring planar graphs of girth 5. J *Comb. Th. (B)* **64** (1995), 101-107. [412]

[1974] Toft B., On critical subgraphs of colour-critical graphs. *Discr. Math.* **7** (1974), 377-392. [218]

[1973] Toida S., Properties of an Euler graph. *J. Franklin Inst.* **295** (1973), 343-5. [34]

[1971] Tomescu I., Le nombre maximal de colorations d'un graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris* **A272** (1971), 1301-1303. [230]

[1993] Tovey C.A. and R. Steinberg, Planar Ramsey numbers. *J. Comb. Th. (B)* **59** (1993), 288-296. [270]

[1973] Tucker A.C., The strong perfect graph conjecture for planar graphs. *Canad. J Math.* **25** (1973), 103-114. [341]

[1975] Tucker A.C., Coloring a family of circular arcs. *SIAM J. Appl. Math.* **3** (1975), 493-502. [341]

[1976] Tucker A.C., A new applicable proof of the Euler circuit theorem. *Amer. Math. Monthly* **83** (1976), 638-640. [34]

[1977] Tucker A.C., Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic graphs. *J Comb. Th. (B)* **23** (1977), 143-149. [337, 339, 341]

[1976] Tucker A.C. and L. Bodin, A model for municipal street-sweeping operations. In *Case Studies in Applied Mathematics.* (CUPM) Math. Assn. Amer. (1976), . [130]

[1941] Turán P., Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Mat. Fiz Lapook* **48** (1941), 436-452. [207-210,216-217]

[1946] Tutte WT., On Hamiltonian circuits. *J. Lond. Mat. Sc.* **21** (1946), 98-101. [303]

[1947] Tutte W.T., The factorization of linear graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **22** (1947), 107-111. [137]

[1948] Tutte WT., The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **44** (1948), 463-482. [89]

[1949] Tutte W.T., On the imbedding of linear graphs in surfaces. *Proc. Lond. Math. Soc.(2)* **51** (1949), 474-483. [308, 312, 318]

[1952] Tutte W.T., The factors of graphs. *Canad. J. Math.* **4** (1952), 314-328. [140, 148]

[1954a] Tutte W.T., A short proof of the factor theorem for finite graphs. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 347-352. [141, 148]

[1954b] Tutte W.T., A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 80-91. [309, 311]

[1956] Tutte W.T., A theorem on planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 99-116. [304]

[1958] Tutte W.T., A homotopy theorem for matroids, I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **88** (1958), 144-174. [252, 256, 375]

[1960] Tutte W.T., Convex representations of graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10** (1960), 304-320. [248, 250]

[1961a] Tutte W.T., On the problem of decomposing a graph into *n* connected factors. *J. Lond. Math. Soc.* **36** (1961), 221-230. [73, 80]

[1961b]Tutte W.T., A theory of 3-connected graphs. *Indag. Math.* **23** (1961), 441-55. [174]

[1963] Tutte W.T., How to draw a graph. *Proc. Lond. Math. Soc.* **13** (1963), 743-767. [248, 250, 256]

[1966a] Tutte W.T., *Connectivity in Graphs.* Toronto Univ. Press (1966). [175, 311]

[1966b] Tutte W.T., On the algebraic theory of graph colourings. *J. Comb. Th.* **1** (1966), 15-50. [311]

[1967] Tutte W.T., A geometrical version of the four color problem. In *Combinatorial Math. and its Applications.* (eds. R.C. Bose and T.A. Dowling) Univ. N. Carolina Press (1967),. [304]

[1970] Tutte W.T., *Introduction to the Theory of Matroids.* Amer. Elsevier (1970). [355]

[1971] Tutte W.T., On the 2-factors of bicubicgraphs. *Discr. Math.* **1***(1971),* 203-8. [292]

[1980] Tverberg H., A proof of the Jordan Curve Theorem. *Bull. Lond. Math. Soc.* **12** (1980), 34-38. [235]

[1982] Tverberg H., On the decomposition of K_n into complete bipartite subraphs. *J. Graph Th.* **6** (1982), 493-494. [457, 459]

[1951] van Aardenne-Ehrenfest T. and N.G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs. *Simon Stevin* **28** (1951), 203-217. [91]

[1937] van der Waerden B.L., *Moderne Algebra Vol. 1* (2nd ed.). Spinger-Verlag (1937). [349, 355]

[1965] van Rooij A. and H.S. Wilf, The interchange graphs of a finite graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **16** (1965), 263-269. [281]

[1994] Vazirani V.V., A theory of alternating paths and blossoms for proving correctness of the $0(|V^{1/2}|1E|)$ general graph matching algorithm. *Combinatorica* **14** (1994), 71-91. [145]

[1989] Vince A., Problem 6617. *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 942. [470]

[1962] 'Vitaver L.M., Determination of minimal coloring of vertices of a graph by means of Boolean powers of the incidence matrix (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **147** (1962), 758-759. [196]

[1963] Vizing V.G., The Cartesian product of graphs. *Vyč. Sis.* **9** (1963), 30-43. [194]

[1964] Vizing V.G., On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.* **3** (1964), 25-30. [275, 277, 279, 285, 439]

[1965] Vizing V.G., Critical graphs with a given chromatic class (Russian). *Metody Diskret. Analiz.* **5** (1965), 9-17. [277, 279, 285]

[1976] Vizing V.G., Coloring the vertices of a graph in prescribed colors (Russian). *Diskret. Analiz.* **29** (1976), 3-10. [408,411]

[1993] Voigt M., List colourings of planar graphs. *Discr. Math.* **120**(1993), 215-9. [412]

[1997] Voigt M. and B. Wirth, On 3-colorable non-4-choosable planar graphs. *J. Graph Th.* **24** (1997), 233-235. [412]

[1982] Voloshin V.I., Properties of triangulated graphs (Russian). In *Operations research and programming.* (ed. B. A. Shcherbakov) Shtiintsa (1982), 24-32. [225, 231, 345]

[1982] Voloshin V.I. and I.M. Gorgos, Some properties of 1-simply connected hyper-graphs and their applications (Russian), in Graphs, hypergraphs and discrete optimization problems. *Mat. Issled.* **66** (1982), 30-33. [231]

[1936] Wagner K., Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **46** (1936), 21-22. [246]

[1937] Wagner K., fiber eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.* **114** (1937), 570-590. [251, 256]

[1980] Wagon S., A bound on the chromatic number of graphs without certain induced sub-graphs. *J. Comb. Th. (B)* **29** (1980), 245-246. [215]

[1972] Walter J.R., *Representations of rigid cycle graphs.* Ph.D. Thesis, Wayne State Univ. (1972). [324]

[1978] Walter J.R., Representations of chordal graphs as subtrees of a tree. *J. Graph Th.* **2** (1978), 265-267. [324]

[1996] Walters I.C.Jr., The ever expanding expander coefficients. *Bull. Inst. Combin. Appl.* (1996), 97.. [463]

[1973] Wang, D.L. and D.J. Kleitman, On the existence of n-connected graphs with prescribed degrees *(n* ≥ 2). *Networks* 3 (1973), 225-239. [52]

[1995] Wang J., D.B. West, and B. Yao, Maximum bandwidth under edge addition. *J. Comb. Th.* **20** (1995), 87-90. [396]

[1994] Weaver M.L. and D.B. West, Relaxed chromatic numbers of graphs. *Graphs and Com-bin.* **10** (1994), 75-93. [204]

[1981] Wei V.K., A Lower Bound on the Stability Number of a Simple Graph. Bell Laborato-ries TM 81-11217-9 (1981). [122, 428]

[1963] Weinstein J.M., On the number of disjoint edges in a graph. *Canad. J. Math.* **15** (1963), 106-111. [146]

[1976] Welsh D.J.A., *Matroid Theory.* Academic Press (1976). [355, 369, 374, 376]

[1967] Welsh D.J.A. and M.B. Powell, An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. *Computer J.* **10** (1967), 85- 87. [195]

[1982a] West D.B., A class of solutions to the gossip problem, I. *Discr. Math.* **39** (1982), 307-326. [423]

[1982b] West D.B., Gossiping without duplicate transmissions. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **3** (1982), 418-419 [423]

[1996] West D.B., The superregular graphs. *J. Graph Th.* **23** (1996), 289-295. [470]

[1973] White A.T., *Graphs, Groups and Surfaces.* North-Holland (1973). [453]

[1960] Whiting P.D. and J.A. Hillier, A method for finding the shortest route through a road network. *Operations Research Quart.* **11** (1960), 37-40. [97]

[1931] Whitney H., A theorem on graphs. Ann. *of Math.* **32** (1931), 378-390. [315]

[1932a] Whitney H., Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.* **54** (1932), 150-168. [152, 161, 163, 169, 286]

[1932b] Whitney H., A logical expansion in Mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (1932), 572-579. [222]

[1932c] Whitney H., The coloring of graphs. Ann. *Math. (2)* **33** (1932), 688-718. [222]

[1933a] Whitney H., Planar graphs. *Fund. Math.* **21** (1933), 73-84. [364]

[1933b] Whitney H., 2-isomorphic graphs. *Amer. J. Math.* **55** (1933), 245-254. [256, 365, 376]

[1935] Whitney H., On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math.* **57** (1935), 509-533. [349, 355, 361, 374]

[1967] Wilf H.S., The eigenvalues of a graph and its chromatic number. *J. Lond. Math. Soc.* **42** (1967), 330-332. [459]

[1971] Wilf H.S, The friendship theorem. In *Combinatorial Mathematics and Its Applications*. Proc. Conf. Oxford 1969 Academic Press (1971), 307-309. [467]

[1986] Wilson R.J., An Eulerian trail through Königsberg. *J. Graph Th.* **10** (1986), 265-275. [26]

[1990] Wilson R.J. and J.J. Watkins, *Graphs, an Introductory Approach.* Wiley (1990). [16]

[1983] Winkler P.M., Proof of the squashed cube conjecture. *Combinatorica* 3 (1983), 135-139. [402, 403]

[1965] Wolk E. S., A note on "The comparability graph of a tree". *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 17-20. [34]

[1972] Woodall D.R., Sufficient conditions for circuits in graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.* **24** (1972), 739-755. [416, 420, 424]

[1993] Woodall D.R., Cyclic-order graphs and Zarankiewicz's crossing-number conjecture. *J. Graph Th.* **17** (1993), 657-671. [264]

[1982] Xia X.-G., Hamilton cycle in two sorts of Euler tour graph. *Acta Xin Xiang Normal Inst.* **2** (1982), 8-10. [299]

[1981] Yao A.C.C., Should tables be sorted?. *J. Assoc. Comp. Mach.* **28** (1981), 615-628. [383]

[1954] Zarankiewicz K., On a problem of P. Turán concerning graphs. *Fund. Math.* **41** (1954), 137-145. [264]

[1997] Zhang C.Q., *Integer flows and cycle covers of graphs. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics* 205 Marcel Dekker, Inc. (1997). [307, 312]

[1986] Zhang F.-J. and X.-F. Guo, Hamilton cycles in Euler tour graph. *J. Comb. Th. (B)* **40** (1986), 1-8. [299]

[1985] Zhu Y.J., Z.H. Liu, and Z.G. Yu, An improvement of Jackson's result on Hamilton cycles in 2-connected regular graphs. In *Cycles in Graphs*. Proc. Burnaby 1982 (ed. B. Alspach & C. Godsil) North-Holland (1985), 237-247. [292]

[1949] Zykov A.A., On some properties of linear complexes (Russian). *Mat. Sbornik* **24** (1949), 163-188. [215]

Subject Index فهرس المواضيع

يشير رقم الصفحة المكتوب بالخط المائل إلى أن التعريف موجود في هذه الصفحة (العديد من أرقام الصفحات الخاصة بالتعريفات يظهر في ملحق D). والكتابة مرة واحدة بالخط المائل ربما تشير إلى تعريف أو مفهوم واضح جدًّا (مثل البيان). حيث لا يكون من المناسب إعداد قائمة في الصفحات جميعها التي يظهر فيها مثل هذا التعريف أو المفهوم. بالمقابل، فإن المفردة التي تظهر في عدد قليل من الصفحات قد لا تكتب الصفحات الدالة على تعريفها بالخط المائل. عندما تظهر قائمة كبيرة من الصفحات، فإن أرقام الصفحات المكتوبة بالخط المائل الغامق تشير إلى مادة مثل برهان نتيجة رئيسة، أو إلى معالجة رئيسة للمفهوم، وربما يشتمل ذلك على تعريف. وفي بعض الأحيان نكتب مدى للصفحات من كذا إلى كذا، وقد يشمل هذا المدى بعض الصفحات المعزولة التي لا يظهر فيها ذكر للتعريف أو المفهوم.

Author Index فهرس المؤلفين

continued from inside front cover

$l(D)$	maximum length of path
$l(F)$	length of a face
$\lg x$	logarithm base 2
$\ln x$	natural logarithm
M	matching
$M(G)$	incidence matrix
$M(G)$	cycle matroid of G
M^*	dual hereditary system
$M.F$	contraction of M to F
$M\|F$	restriction of M to F
$\mathbb{N}$	set of natural numbers
N	network
$N(v) N_G(v)$	(open) neighborhood
$N[v]$	closed neighborhood
$N^+(v)$, $N^-(v)$	out-, in-neighborhood
$n(G)$	order (number of vertices)
$O(f), o(f)$	growth rate
$o(H)$	number of odd components
$P(A)$	probability of an event
P_n	path with n vertices
pdim G	product dimension
qdim G	squashed-cube dimension
Q_k	k-dimensional hypercube
rad G	radius
$R(k,l)$	Ramsey number
$R(G,H)$	graph Ramsey number
$\mathbb{R}$	set of real numbers
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
r_M	rank function of matroid
S_γ	surface with γ handles
Spec(G)	spectrum (eigenvalues)
A^T	transpose of matrix
T	tree, tournament
$T_{n,r}$	Turán graph
$t_r(n)$	size of Turán graph
$U_{k,n}$	uniform matroid
$u(e)$	upper bound on flow
val(f)	value of a flow f
$V(G)$	vertex set
W_n	wheel with n vertices
$w(e)$	weight of edge
$\mathbb{Z}$	set of integers
$\mathbb{Z}_p$	integers modulo p

Greek alphabet

$\alpha(G)$	independence number
$\alpha'(G)$	maximum size of matching
$\beta(G)$	vertex cover number
$\beta'(G)$	edge cover number
$\gamma(G)$	genus, domination number
$\Delta(G)$	maximum degree
$\Delta^+(G)$, $\Delta^-(G)$	maximum out-, in-degree
$\delta(G)$	minimum degree
$\delta^+(G)$, $\delta^-(G)$	minimum out-, in-degree
$\partial(v)$	demand at a vertex
$\epsilon_G(u)$	eccentricity of u in G
$\Theta(f)$	growth rate
$\theta(G)$	clique cover number
$\theta'(G)$	intersection number
$\kappa(G)$	(vertex) connectivity
$\kappa'(G)$	edge-connectivity
$\kappa(x,y)$	local connectivity
$\kappa'(x,y)$	local edge-connectivity
$\kappa(r;G)$	local-global connectivity
$\lambda(x,y)$	max # disjoint paths
$\lambda'(x,y)$	max # edge-disjoint paths
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$	eigenvalues
$\mu_1, \ldots, \mu_n$	eigenvalues
$\mu(e), \mu(G)$	edge multiplicity
$\nu(G)$	crossing number
$\prod$	product
$\rho(G)$	maximum density
$\sum$	summation
σ, π, τ	permutation
$\sigma(v)$	supply at a vertex
σ_M	span function
$\tau(G)$	number of spanning trees
$\Upsilon(G)$	arboricity
$\phi(G;\lambda)$	characteristic polynomial
$\chi(G)$	chromatic number
$\chi'(G)$	edge-chromatic number
$\chi(G;k)$	chromatic polynomial
$\chi_l(G)$	list chromatic number
$\psi(G;\lambda)$	minimum polynomial
$\Omega(f), \omega(f)$	growth rate
$\omega(G)$	clique number

تولي وزارة التعليم العالي في المملكة العربية السعودية اهتماماً بالغاً بتنمية المجتمع؛ حيث تسعى جاهدة إلى توفير بيئة محفزة على الابتكار، قادرة على الإسهام في التحول إلى مجتمع المعرفة، وتعزيز التنمية المستدامة.

ويأتي مشروع وزارة التعليم العالي لترجمة الكتب المتخصصة في مرحلته الثانية ضمن سلسلة من مختلف التخصصات العلمية، يتم فيها ترجمة نخبة من المقررات الجامعية العالمية، من قِبل فرق أكاديمية متخصصة؛ إسهاماً في تلبية احتياجات الطلاب والباحثين في جميع فروع المعرفة، والعلوم الحديثة على وجه الخصوص، وفق قائمة أولويات واضحة للاحتياجات الراهنة والمستقبلية. وتعد المرحلة الثانية استكمالاً للمرحلة الأولى التي ركزت على (ترجمة كتب التطوير الأكاديمي)، فتناولت تطوير العملية التعليمية، وتطوير النظام الإداري، وصدر منها أكثر من (٦٢) كتاباً.

وتعتمد الوزارة كثيراً من المعايير المحكَّمة في اختيار الكتب للترجمة؛ من بينها أن تكون الكتب قد حازت قبولاً وانتشاراً في المؤسسات الجامعية ذات الشهرة العالمية، إضافة إلى إثرائها المحتوى العربي؛ كونها مراجع أساسية تخدم مختلف التخصصات، ويُراعى فيها أن تتلاءم مع ما يُدرَّس في جامعاتنا؛ لتكون متاحة للطلبة والباحثين في جامعات المملكة العربية السعودية خاصة، وفي العالم العربي عامة، وترفد الطلاب بمراجع لا غنى عنها في المعرفة، وتسهم في تعزيز التواصل الحضاري والثقافي ونقل المعرفة.

وزير التعليم العالي

د. خالد بن محمد العنقري





موضوع الكتاب: الرسوم البيانية